Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

L'Integrale di Henstock-Kurzweil

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Dafne Moruzzi

Sessione VI
Anno Accademico 2022/2023

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di presentare e studiare l'integrale di Henstock-Kurzweil, noto anche come integrale di gauge o integrale di calibro.

Dal punto di vista storico, il calcolo integrale prende pienamente forma in epoca relativamente recente, ad opera di Leibniz e Newton alla fine del XVII secolo, e viene sviluppato definitivamente da Riemann e Lebesgue due secoli dopo. Il tempo notevole (circa 200 anni) richiesto per questa maturazione a partire dalle idee iniziali legate all'integrale testimonia la profondità dei problemi (sia tecnici che essenziali) toccati dalla teoria dell'integrazione. Uno tra i teoremi più importanti è sicuramente il Teorema che noi abbiamo deciso di denominare convenzionalmente "di Torricelli-Barrow" (anche se si potrebbe chiamare "di Leibniz-Newton" ed è spesso anche chiamato il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale), secondo il quale

se F è derivabile su $[a, b]$ e F' è Riemann-integrabile su $[a, b]$, allora
$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Ad un prima lettura, potrebbe sembrare che ci sia un'ipotesi di troppo. Non sono infatti tutte le derivate Riemann-integrabili? Tuttavia, la risposta corretta è "No"! Esistono derivate non limitate (e quindi non Riemann-integrabili) e perfino derivate limitate non Riemann-integrabili (ne è un esempio la cosiddetta Funzione di Volterra, vedasi figura seguente, sulla cui definizione non ci soffermiamo).

Si potrebbe pensare che l'integrale di Lebesgue risolva questo problema, poiché tutte le derivate limitate sono Lebesgue-integrabili poiché sono misurabili automaticamente come limite di successioni di funzioni continue, ottenute scrivendo il rapporto incrementale in modo sequenziale). Tuttavia le derivate non limitate non sono necessariamente Lebesgue-integrabili come la derivata della funzione

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{se } x \in (0, 1]; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

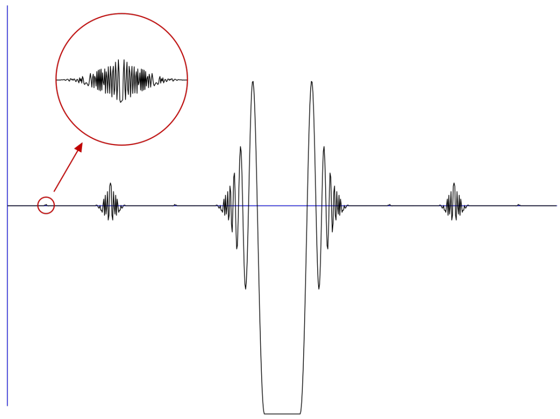

Figura 1: *Funzione di Volterra.*

Dunque, ancora una volta, non tutte le derivate sono Lebesgue-integrabili, rendendo quell'ipotesi, a prima vista inutile, fondamentale per il teorema nella sua formulazione "alla Lebesgue".

Questa discussione porta ad una domanda: ci chiediamo se è possibile definire un processo di integrazione per il quale valga il seguente enunciato:

se F è derivabile su $[a, b]$, allora F' è integrabile su $[a, b]$ e
$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

La risposta è sì! Nello scorso secolo sono stati sviluppati vari processi d'integrazione per i quali è valida questa versione più potente del Teorema di Torricelli-Barrow ad esempio:

• **Integrale di Denjoy**: Nel 1912, Arnaud Denjoy sviluppò un nuovo integrale capace di integrare tutte le funzioni derivata; tuttavia, la sua definizione di integrale era complessa e coinvolgeva la difficile e poco intuitiva nozione di induzione transfinita.

• **Integrale di Perron**: Nel 1914, Oskar Perron propose un'altra definizione che risolveva il problema dell'integrabilità delle funzioni derivate. La sua definizione utilizzava i concetti di funzioni maggioranti e minoranti, era una definizione più semplice ma meno costruttiva di quella di Denjoy, seppur rivelatasi poi equivalente.

• **Integrale di Henstock-Kurzweil**: Infine, negli anni '50 del Novecento, durante i suoi studi sulle equazioni differenziali, il matematico cecoslovacco Jaroslaw Kurzweil ideò un nuovo integrale capace anch'esso di integrare tutte le funzioni derivata, e nel 1957 pubblicò un articolo a riguardo sul Czechoslovak Mathematical Journal. Tuttavia, solo negli anni '60, il matematico inglese Ralph Henstock fece il primo studio sistematico di questo nuovo integrale portando la teoria ad uno stadio altamente sviluppato. Si ritiene che i due matematici svilupparono questi concetti in maniera indipendente, in quanto Henstock sostenne di non aver mai letto l'articolo del 1957 di Kurzweil. Per tale ragione, di seguito verrà usato il nome di integrale di Henstock-Kurzweil, anche se è da sottolineare che non vi è attualmente un nome convenzionalmente utilizzato.

L'integrale di Henstock-Kurzweil è una generalizzazione dell'integrale di Riemann, una definizione alternativa e più generale di integrale per funzioni di variabile reale in una dimensione che, tuttavia, si basa su concetti familiari e simili a quelli utilizzati per definire l'integrale di Riemann (come le somme di Cauchy-Riemann).

Ma come è possibile generalizzare l'integrale di Riemann? Facendo appello all'interpretazione di integrale come area sottesa dal grafico di una funzione, Kurzweil ebbe l'idea, e ne riconobbe le grandi conseguenze, di rendere i rettangoli approssimativi "sottili" dove la curva è ripida e "spessi" dove la curva è piatta. La sua intuizione permette di rendere integrabili su un certo insieme tutte le funzioni che ammettono quasi ovunque una primitiva su quell'insieme, risolvendo il problema posto inizialmente. Kurzweil stesso provò che questa definizione di integrale è equivalente a quella proposta da Perron e da Denjoy.

Può essere interessante il fatto che alcune monografie introduttive all'Analisi presentano la teoria dell'integrale mediante l'integrale di Henstock-Kurzweil poiché, sebbene la teoria sia più impegnativa di quella dell'integrale di Riemann, questo tipo di integrale racchiude in un'unica definizione l'integrale di Riemann standard, quello di Riemann improprio e quello di Lebesgue in una dimensione, e lo fa usando concetti simili a quelli usati nella definizione dell'integrale di Riemann.

In sintesi, l'integrale di Henstock-Kurzweil, offrendo una prospettiva più ampia sull'integrazione delle funzioni reali, è una risposta alla domanda posta inizialmente con una formulazione più accessibile e comprensibile rispetto alle proposte precedenti di Denjoy e Perron.

Di seguito sono descritti a grandi linee gli argomenti presenti in questa tesi.

I concetti essenziali per definire l'integrale di Henstock sono quelli di calibro δ e partizione $\delta-$adattata Π. Un calibro sull'intervallo $[a, b]$ è una funzione $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $\delta(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$; mentre una partizione contrassegnata di $[a, b]$ è una collezione di coppie $\Pi = \{(c_i, [x_{i-1}, x_i])\}_{i=1,\dots,n}$, dove $\{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1,\dots,n}$ è una partizione di $[a, b]$ e $\{c_i\}_{i=1,\dots,n}$ è un insieme di punti, detti contrassegni, tali che $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ per ogni $i = 1, \dots n$. Si dice che Π è δ-adattata su $[a, b]$ se per ogni $i = 1, \dots, n$ vale

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq (c_i - \delta(c_i), c_i + \delta(c_i)).$$

Con queste semplici definizioni è possibile infatti definire il concetto di funzione Henstock-integrabile e di integrale di Henstock-Kurzweil.

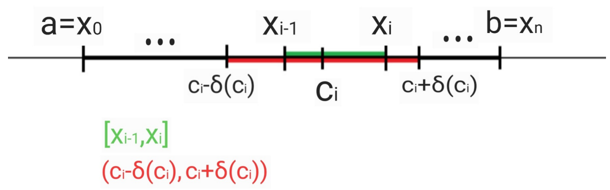

Figura 2: *Partizione δ-adattata.*

Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice Henstock-integrabile su $[a, b]$ se esiste un numero reale L con le seguenti proprietà: per ogni $\epsilon > 0$, esiste un calibro δ su $[a, b]$ tale che

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - L \right| < \epsilon$$

per ogni Π partizione δ-adattata su $[a, b]$. Se tale L esiste, esso è l'integrale di Henstock-Kurzweil di f su $[a, b]$ e si pone:

$$L = (H) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Si noti il fatto che la quantità $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ non è altro che la somma di Cauchy-Riemann, utilizzata anche nella definizione (secondo Cauchy-Riemann) dell'integrale di Riemann. La grande differenza tra questi due integrali è data dal calibro δ: se la funzione δ viene scelta costante, allora i due integrali di Riemann e di Henstock-Kurzweil coincidono; se invece non è costante si ottengono grandi vantaggi per il nuovo integrale, come il fatto che esso

1. rende integrabili tutte le funzioni che sono nulle quasi ovunque con integrale nullo, come la funzione di Dirichlet (dunque una funzione non necessita di essere continua in nessun punto per essere Henstock-integrabile);

2. rende integrabili tutte le funzioni derivata, risolvendo il problema posto inizialmente.

Naturalmente queste due proprietà non si vedono "a colpo d'occhio" dalla definizione: le dimostreremo in dettaglio nel corso della tesi.

Le analogie non si esauriscono nella sola definizione; l'integrale di Henstock ha varie proprietà strutturali in comune con l'integrale di Riemann: è unico, ha un criterio di integrabilità di tipo Riemann (f è Henstock-integrabile su $[a, b]$ se e solo se per ogni

$\epsilon > 0$ esiste un calibro δ su $[a, b]$ tale che $|f(\Pi_1) - f(\Pi_2)| < \epsilon$ per ogni Π_1, Π_2 partizioni δ-adattate su $[a, b]$); ed infine è lineare, monotono e additivo.

Dato che il Teorema di Torricelli-Barrow sull'integrale della derivata è perfettamente risolto dall'integrale di Henstock-Kurzweil, ci dobbiamo chiedere se lo stesso vale anche per la versione del teorema sulla derivata della funzione integrale: la risposta è positiva. Vale infatti il seguente notevole risultato:

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a, b]$, e sia

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := (H) \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

la sua funzione (H)-integrale nulla in a. Allora F è continua su $[a, b]$ e derivabile quasi dappertutto su $[a, b]$ e $F' = f$ quasi dappertutto su $[a, b]$.

In questo enunciato si nota la presenza della misura di Lebesgue (si parla infatti di proprietà valide "quasi dappertutto" ossia valide tranne che su insiemi di misura nulla secondo l'usuale definizione di Lebesgue), quindi sorge spontaneo chiedersi quale sia il legame tra l'integrale di Henstock-Kurzweil e quello di Lebesgue.

Da un lato è facile provare che ogni funzione Henstock-integrabile f è misurabile nel senso di Lebesgue; infatti per il precedente risultato si ha che f può essere scritta (quasi dappertutto) come limite di una successione di funzioni continue come segue

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{F\big(x + \frac{1}{n}\big) - F(x)}{\frac{1}{n}},$$

per quasi ogni $x \in [a, b]$. Quindi f è misurabile.

Ma il risultato davvero notevole è il seguente, il quale stabilisce che l'integrale di Henstock generalizza l'integrale di Lebesgue:

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Se f è Lebesgue-integrabile su $[a, b]$, allora f è Henstock-integrabile su $[a, b]$ e $(L) \int_a^b f(x)dx = (H) \int_a^b f(x)dx$.

La prova di questo notevole teorema necessita di diverse nozioni di Analisi come la definizione di funzione assolutamente continue e di funzione AC_δ. Inoltre sono necessari la condizione della teoria di Lebesgue secondo cui F è un integrale indefinito di Lebesgue su $[a, b]$ se e solo se F è AC su $[a, b]$ e l'analoga condizione della teoria di Henstock per cui F è un integrale indefinito di Henstock su $[a, b]$ se e solo se F è AC_δ su $[a, b]$.

Altri risultati che completano il confronto tra l'integrale di Henstock e quello di Lebesgue sono i seguenti: sia f Henstock-integrabile su $[a, b]$;

1. se f è limitata su $[a, b]$, allora f è Lebesgue-integrabile su $[a, b]$;

2. se f è non negativa su $[a,b]$, allora f è Lebesgue-integrabile su $[a,b]$.

Da questi risultati seguono alcune considerazioni interessanti sull'integrale di Henstock tra cui: supponiamo che f sia H-integrabile su $[a,b]$, ma non L-integrabile su $[a,b]$. Allora, $|f|$ non è H-integrabile su $[a,b]$ (altrimenti applicheremmo (2) di cui sopra ed otterremmo che $|f|$ è L-integrabile e quindi anche f sarebbe L-integrabile poiché essa è di certo misurabile poiché H-integrabile).

Dunque, in conclusione, l'integrale di Henstock estende quello di Lebesgue e a maggior ragione anche quello di Riemann. Inoltre, sarà provato che l'integrale di Henstock estende anche l'integrale generalizzato di Riemann. Quindi, con l'integrale di Henstock è possibile integrare la derivata di funzioni come

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{se } x \in (0,1]; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Questa funzione è derivabile su $[0,1]$, ma la sua derivata F' non è Riemann-integrabile essendo illimitata; infatti, per ogni $x \in (0,1]$ vale

$$F'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Inoltre F' non è neanche Lebesgue-integrabile su $[0,1]$ in quanto se lo fosse, allora anche $\frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ sarebbe L-integrabile su $[0,1]$ (poiché $2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ è continua fino a 0). Ma $\frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ non è L-integrabile su $[0,1]$ poiché

$$\int_0^1 \left|\frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \left|\frac{2}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \mathrm{d}x,$$

e applicando la sostituzione $\frac{1}{x^2} = t$, il limite diventa

$$\lim_{a\to 0^+} \int_1^{\frac{1}{a^2}} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Tuttavia, F' è Henstock-integrabile su $[0,1]$ e vale

$$(H)\int_0^1 F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} (H)\int_a^1 F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} [F(1) - F(a)] = -1.$$

In conclusione, risulta chiaro che la teoria dell'integrale di Henstock comprende le tre definizioni di integrale date nei corsi introduttivi di Analisi ed incredibilmente ci riesce senza utilizzare la Teoria della Misura (ad esclusione del concetto di insieme di misura nulla), teoria lunga e impegnativa ma necessaria per presentare l'integrale di Lebesgue. Va detto però che l'integrale di Henstock-Kurzweil ha vari difetti che l'integrale di Lebesgue non ha: ad esempio se f è H-integrabile, non è detto che lo sia anche $|f|$, mentre ciò succede sempre nella teoria di Lebesgue. Un esempio di funzione H-integrabile ma col valore assoluto che non è proprio F' di cui sopra. Infatti, sappiamo che F' è H-integrabile in quanto derivata, ma $|F'|$ non può essere H-integrabile poiché altrimenti applicheremmo (2) di cui sopra ed otterremmo che $|F'|$ è L-integrabile e quindi anche F' sarebbe L-integrabile poiché essa è di certo misurabile poiché H-integrabile.

Indice

Capitolo 1

L'Integrale di Henstock-Kurzweil

In questo primo capitolo vengono presentati in maniera formale l'integrale di Henstock-Kurzweil, l'integrale indefinito di Henstock-Kurzweil ed alcuni elementi utili alla comprensione di tali definizioni. In particolare, la definizione dell'integrale di Henstock è strettamente connessa alla definizione dell'integrale di Riemann mediante le somme di Riemann; per tale ragione, nel capitolo è presente un accenno a questo integrale. Infine, sono presentate alcune delle proprietà fondamentali di questi integrali.

1.1 Definizioni e proprietà preliminari

1.1.1 Trapezoidi, partizioni contrassegnate, somme di Cauchy-Riemann

Definizione 1.1 (**Trapezoidi**). *Sia $f : [a, b] \to [0, +\infty[$; si dice trapezoide associato ad f sull'intervallo $[a, b]$ l'insieme piano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.*

Il problema di definire con precisione, e di calcolare, l'area dei trapezoidi è la motivazione più intuitiva della teoria dell'integrale.

Definizione 1.2 (**Intervallo contrassegnato**). *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, sia $[x, y] \subseteq [a, b]$ e sia $c \in [x, y]$ un punto. La coppia $(c, [x, y])$ si dice un intervallo contrassegnato o marcato di $[a, b]$, e il punto c è detto il contrassegno dell'intervallo.*

Definizione 1.3 (**Collezione contrassegnata**). *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, sia $C = \{(c_i, [x_i, y_i])\}_{i=1,\ldots,n}$ una collezione finita di insiemi contrassegnati di $[a, b]$ non sovrapposti tra loro (ad eccezioni degli estremi degli intervalli che potrebbero essere presenti come estremi in due intervalli della collezione). C è detta collezione contrassegnata o marcata.*

Definizione 1.4 (**Partizione contrassegnata**). *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, sia $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ una sequenza finita ($n \in \mathbb{N}$) di numeri in ordine (strettamente) crescente, in cui il primo è a e l'ultimo è b:*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

e sia $\{c_i\}_{i=1,\ldots,n}$ un insieme di punti, detti contrassegni o punti marcati, tali che $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ per ogni $i = 1, \ldots n$. Si dice partizione contrassegnata o marcata di $[a, b]$ la collezione delle coppie $\{(c_i, [x_{i-1}, x_i])\}_{i=1,\ldots,n}$. Una partizione marcata sarà di solito indicata con la lettera Π.

Osservazione 1.5. La condizione per cui

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

garantisce il fatto che $\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] = [a, b]$, e, per come sono costruiti gli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$, risulta ovvio il fatto che se una collezione contrassegnata ricopre tutto l'insieme $[a, b]$, allora è per definizione una partizione marcata.

Definizione 1.6 (**Somma di Cauchy-Riemann**). *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $\Pi = \{(c_i, [x_{i-1}, x_i])\}_{i=1,\ldots,n}$ una partizione contrassegnata di $[a, b]$; si definisce la somma di Cauchy-Riemann associata ad f ed a Π come*

$$S(f, \Pi) := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

L'integrale di Riemann di f su $[a, b]$ è il limite (se esiste) di tale somma per il $\max\{|x_i - x_{i-1}| : 1 \leq i \leq n\}$ che tende a 0. Ma questo è un limite estremamente complicato da calcolare per via delle innumerevoli variabili in gioco; infatti i punti c_i possono essere scelti arbitrariamente nell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e a loro volta i punti x_i possono essere scelti nell'intervallo $[a, b]$ con le sole condizioni richieste nell'Osservazione 1.5. Solitamente, in letteratura si riducono la quantità di variabili facendo in modo che tutti i sottointervalli $[x_{i-1}, x_i]$ abbiano la stessa grandezza scelta a priori e scegliendo i c_i in maniera schematica, per esempio come l'estremo sinistro x_{i-1} di ciascun sottointervallo. Tali semplificazioni non sempre si possono applicare come nel caso di funzioni non continue. Dunque, è chiaro che è necessaria una definizione applicabile più facilmente ad un numero di casi maggiori. Tali problematiche vengono risolte nella definizione dell'integrale di Henstock che utilizza i concetti di calibro δ e partizione δ-adattata.

1.1.2 Calibri, partizioni δ-adattate

Definizione 1.7 (**Calibro**). *Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Una funzione $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $\delta(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$ è detta calibro sull'intervallo $[a,b]$.*

Definizione 1.8 (**Intervallo δ-adattato**). *Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, sia $I = (c,[x,y])$ un intervallo contrassegnato di $[a,b]$ e sia $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ un calibro. Si dice che I è δ-adattato su $[a,b]$ se vale*

$$[x,y] \subseteq (c-\delta(c), c+\delta(c)).$$

Definizione 1.9 (**Collezione δ-adattata**). *Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, sia $C = \{(c_i,[x_i,y_i])\}_{i=1,\dots,n}$ una collezione contrassegnata di $[a,b]$ e sia $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ un calibro. Si dice che C è δ-adattata su $[a,b]$ se $(c_i,[x_i,y_i])$ è un intervallo δ-adattato su $[a,b]$ per ogni $i = 1,\dots,n$.*

Definizione 1.10 (**Partizione δ-adattata**). *Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, sia $\Pi = \{(c_i,[x_{i-1},x_i])\}_{i=1,\dots,n}$ una partizione contrassegnata di $[a,b]$ e sia $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ un calibro. Si dice che Π è δ-adattata su $[a,b]$ se $(c_i,[x_{i-1},x_i])$ è un intervallo δ-adattato su $[a,b]$ per ogni $i = 1,\dots,n$.*

Osservazione 1.11. Se C è una collezione δ-adattata su $[a,b]$ che ricopre $[a,b]$ (ossia $\bigcup_{i=1}^{n}[x_{i-1},x_i] = [a,b]$), allora essa è una partizione δ-adattata su $[a,b]$.

Osservazione 1.12. Se $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una costante, allora l'insieme delle partizioni contrassegnate δ-adattate su $[a,b]$ non è diverso dalla famiglia di partizioni contrassegnate utilizzata nella definizione dell'integrale di Riemann. Le conseguenze del poter scegliere δ come una funzione non costante verranno mostrate più avanti (Teorema 1.21 e Teorema 1.22).

Definizione 1.13 (**Concatenazione di partizioni**). *Siano $[a,c]$ e $[c,b]$ due intervalli contigui (con $a < c < b$), siano $\Pi' = \{(c'_i,[x'_{i-1},x'_i])\}_{i=1,\dots,n}$ e $\Pi'' = \{(c''_i,[x''_{i-1},x''_i])\}_{i=1,\dots,m}$ due partizioni contrassegnate rispettivamente di $[a,c]$ e $[c,b]$. La seguente partizione contrassegnata Π di tutto $[a,b]$, è detta la concatenazione di Π' e Π'':*

$$\Pi : \quad a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_n < x''_1 < \cdots < x''_m = b, \quad c_i = \begin{cases} c'_i & \forall\, i = 1,\dots,n; \\ c''_{i-n} & \forall\, i = n+1,\dots,n+m. \end{cases}$$

Osservazione 1.14. Siano $[a,c]$ e $[c,b] \subset \mathbb{R}$ intervalli chiusi e limitati, siano Π' e Π'' due partizioni contrassegnate rispettivamente di $[a,c]$ e di $[c,b]$ e sia Π la loro concatenazione. Sia poi $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}$ un calibro. Dalla definizione segue direttamente che se Π' e Π'' sono δ-adattate, allora Π è δ-adattata.

Proposizione 1.15 (**Esistenza di partizioni δ-adattate**). *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato, sia $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ un calibro. Allora esiste sempre una partizione contrassegnata δ-adattata su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Per assurdo, si suppone che non esistano partizioni δ-adattate di $[a, b]$. Posto $I_0 := [a_0, b_0] := [a, b]$, sia $c_0 := (a_0 + b_0)/2$ il punto medio di I_0; su almeno una delle metà tra $[a_0, c_0]$ e $[c_0, b_0]$ non ci sono partizioni δ-adattate, perché se ce ne fossero su entrambe allora si potrebbe concatenarle ottenendo una partizione adattata su I_0. Posta $I_1 := [a_1, b_1]$ la metà (o una delle metà) su cui non ci sono partizioni adattate, sia $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ il punto medio di I_1; su almeno una delle metà tra $[a_1, c_1]$ e $[c_1, b_1]$ non ci sono partizioni δ-adattate, perché se ce ne fossero su entrambe allora si potrebbe concatenarle ottenendone una adattata su I_1.

Iterando il processo, si ottiene una successione di intervalli chiusi $I_n = \{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$, con le seguenti proprietà:

1. ognuno degli intervalli contiene il precedente: $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$;
2. ognuno degli intervalli è lungo metà del precedente;
3. su nessuno degli intervalli I_n esistono suddivisioni δ-adattate.

Per la proprietà 1 e il teorema di Cantor sugli intervalli inclusi, esiste un punto $\overline{x}$ che appartiene contemporaneamente a tutti gli intervalli I_n. In particolare, $\overline{x} \in I_0 = [a, b]$. Si consideri il valore del calibro $\delta(\overline{x})$, che è > 0. Per la proprietà 2, esiste un n_0 abbastanza grande tale che la lunghezza di I_{n_0} è minore di $\delta(\overline{x})$. Poiché $\overline{x} \in I_0$, si ha che

$$\overline{x} - \delta(\overline{x}) \le a_{n_0} \le \overline{x} \le b_{n_0} \le \overline{x} + \delta(\overline{x}).$$

Dunque, è possibile considerare la partizione contrassegnata di $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ formata dai soli due punti $a_{n_0} = \alpha_0 < \alpha_1 = b_{n_0}$ e dal punto marcato $c_1 = \overline{x} \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Questa suddivisione marcata risulta δ-adattata, in contraddizione con la proprietà 3. Per l'assurdo trovato, si conclude che non possono non esistere suddivisioni di $[a, b]$ δ-adattate. □

Osservazione 1.16. Siano δ_1 e δ_2 due calibri su $[a, b]$ tali che $\delta_1(x) \le \delta_2(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, e sia Π una partizione contrassegnata di $[a, b]$. Segue direttamente dalla definizione che se Π è δ_1-adattata allora Π è anche δ_2-adattata.

Proposizione 1.17. *Siano δ_1 e δ_2 due calibri su $[a, b]$. Allora esiste Π, una partizione contrassegnata di $[a, b]$, contemporaneamente δ_1-adattata e δ_2-adattata.*

Dimostrazione. Definiamo $\delta(x) := \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$. Questo δ è un calibro su $[a, b]$. Si ha che $\delta \le \delta_1$ e $\delta \le \delta_2$ contemporaneamente. Sia Π una partizione contrassegnata δ-adattata di $[a, b]$; per l'Osservazione precedente 1.16, Π è δ_1-adattata e Π è δ_2-adattata allo stesso tempo. □

1.2 L'Integrale di Henstock-Kurzweil

Definizione 1.18 (**Funzione Henstock-integrabile**). *Sia* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *un intervallo chiuso e limitato. Una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *si dice Henstock-integrabile su* $[a, b]$ *se esiste un numero reale* L *con le seguenti proprietà: per ogni* $\epsilon > 0$, *esiste un calibro* δ *su* $[a, b]$ *tale che* $|S(f, \Pi) - L| < \epsilon$ *per ogni* Π *partizione contrassegnata* δ*-adattata su* $[a, b]$.

Inoltre la funzione f *si dice Henstock-integrabile su un insieme misurabile* $E \subseteq [a, b]$ *se* $f\chi_E$ *è Henstock-integrabile su* $[a, b]$.

In alcuni testi, si può trovare la seguente notazione:

$$f(\Pi) := S(f, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Generalmente, si preferisce questa seconda notazione, in modo tale da distinguere in maniera inequivocabile la tipologia di integrale di cui si sta trattando. Dunque, con la nuova notazione, la definizione di funzione Henstock-integrabile diventa:

Definizione 1.19 (**Funzione Henstock-integrabile**). *Sia* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *un intervallo chiuso e limitato. Una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *si dice Henstock-integrabile su* $[a, b]$ *se esiste un numero reale* L *con le seguenti proprietà: per ogni* $\epsilon > 0$, *esiste un calibro* δ *su* $[a, b]$ *tale che* $|f(\Pi) - L| < \epsilon$ *per ogni* Π *partizione contrassegnata* δ*-adattata su* $[a, b]$.

Inoltre la funzione f *si dice Henstock-integrabile su un insieme misurabile* $E \subseteq [a, b]$ *se* $f\chi_E$ *è Henstock-integrabile su* $[a, b]$.

Definizione 1.20 (**Integrale di Henstock-Kurzweil**). *Sia* L *definito come nella Definizione 1.18, se esiste,* L *è l'integrale di Henstock-Kurzweil di* f *su* $[a, b]$*; si pone:*

$$L = (H) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tale integrale è anche detto integrale di Riemann generalizzato,[1] *oppure integrale di calibro (in inglese, gauge integral).*

Il fatto che δ sia una funzione piuttosto che una costante (come nel caso dell'integrale di Riemann) comporta un grande vantaggio, anche se, a prima vista, è difficile da notare. Per questo motivo, sono in seguito enunciati due teoremi che lo rendono evidente.

Teorema 1.21. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Se* $f = 0$ *quasi ovunque su* $[a, b]$, *allora* f *è Henstock-integrabile su* $[a, b]$ *e* $(H) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

[1] Da non confondere con l'integrale di Riemann in senso generalizzato che si studia nei corsi di Analisi Matematica 1.

Dimostrazione. Sia $E = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$ e per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sia

$$E_n = \{x \in E : n-1 \leq |f(x)| < n\}.$$

Questi insiemi sono disgiunti e ognuno di loro ha misura nulla. Dato che $\epsilon > 0$, per ogni n, si sceglie un insieme aperto O_n tale che $E_n \subseteq O_n$ e $\mu(O_n) < \frac{\epsilon}{n2^n}$. Si definisce[2] una funzione positiva δ su $[a,b]$:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [a,b] \setminus E; \\ \rho(x,(O_n)^c), & \text{se } x \in E_n. \end{cases}$$

Supponiamo che Π sia una partizione contrassegnata δ-adattata su $[a,b]$. Per ogni n, sia Π_n il sottoinsieme di Π i cui contrassegni sono contenuti in E_n. Se I è un intervallo in Π_n, allora $I \subset O_n$. Dunque si ha:

$$|f(\Pi)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f(\Pi_n)| < \sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(O_n) < \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon.$$

Dunque, la funzione è Henstock-integrabile su $[a,b]$ e $(H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. $\square$

Grazie a questo teorema è possibile calcolare l'integrale di Henstock di funzioni che non sono Riemann-integrabili. Un esempio è la funzione caratteristica dei numeri razionali (detta funzione di Dirichlet),

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tale funzione è un classico esempio di funzione limitata che non è Riemann-integrabile su $[0,1]$. Il Teorema 1.21 mostra come questa funzione sia perfettamente Henstock-integrabile su $[0,1]$ e che il suo integrale faccia 0. Quindi, una funzione non necessita di essere continua in nessun punto per essere Henstock-integrabile.

Il prossimo teorema è l'analogo del Teorema di Torricelli-Barrow. Tuttavia, in questo caso, le ipotesi sulla derivata prima di F sono estremamente meno restrittive rispetto a quelle richieste per l'integrale di Riemann, per il quale si richiede che f sia Riemann-integrabile. Per tale ragione, di seguito sarà chiamato Teorema di Torricelli-Barrow generalizzato visto che non vi è un nome comunemente utilizzato in letteratura.

Teorema 1.22 (Teorema di Torricelli-Barrow generalizzato). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che esista $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:*

[2] Con ρ si intende la funzione distanza tra un punto e un insieme, ossia $\rho(x,A) = \inf\{\mathrm{dist}(x,a) : a \in A\}$ e con A^c si intende l'insieme complementare di A.

1. F è derivabile in ogni punto di $[a,b]$;

2. $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Allora f è Henstock-integrabile su $[a,b]$ e vale:

$$(H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Per dimostrare il Teorema 1.22 è necessario il seguente lemma sulle funzioni derivabili.

Lemma 1.23. *Sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $\overline{x} \in [a,b]$, e sia $\epsilon > 0$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $\alpha, \beta \in [a,b]$ tali che $\overline{x} - \delta \le \alpha \le \overline{x} \le \beta \le \overline{x} + \delta$ si ha che:*

$$|(F(\beta) - F(\alpha)) - F'(\overline{x})(\beta - \alpha)| < \epsilon(\beta - \alpha).$$

Dimostrazione. Per definizione di derivata,

$$F'(\overline{x}) = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{F(x) - F(\overline{x})}{x - \overline{x}}.$$

Per definizione di limite, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in [a,b]$

$$0 < |x - \overline{x}| \le \delta \Rightarrow \left|\frac{F(x) - F(\overline{x})}{x - \overline{x}} - F'(\overline{x})\right| \le \epsilon.$$

Facendo il denominatore comune per l'ultima disuguaglianza e moltiplicando per $(x - \overline{x})$ (che è diverso da 0 essendo $x \neq \overline{x}$), si ottiene

$$0 < |x - \overline{x}| \le \delta \Rightarrow |F(x) - F(\overline{x}) - F'(\overline{x})(x - \overline{x})| \le \epsilon|x - \overline{x}|.$$

Qualora $|x - \overline{x}| = 0$, cioè quando $x = \overline{x}$, la disuguaglianza diventa banalmente vera. Quindi possiamo togliere la restrizione $0 < |x - \overline{x}|$ e scrivere semplicemente per ogni $x \in [a,b]$

$$|x - \overline{x}| \le \delta \Rightarrow |F(x) - F(\overline{x}) - F'(\overline{x})(x - \overline{x})| \le \epsilon|x - \overline{x}|.$$

Siano $\alpha, \beta \in [a,b]$ tali che $\overline{x} - \delta \le \alpha \le \overline{x} \le \beta \le \overline{x} + \delta$. Allora valgono entrambe le disuguaglianze:

$$\begin{aligned} |F(\alpha) - F(\overline{x}) - F'(\overline{x})(\alpha - \overline{x})| &\le \epsilon|\alpha - \overline{x}|, \\ |F(\beta) - F(\overline{x}) - F'(\overline{x})(\beta - \overline{x})| &\le \epsilon|\beta - \overline{x}|. \end{aligned}$$

Quindi, ricordandosi che $|\alpha - \overline{x}| = \overline{x} - \alpha$ e che $|\beta - \overline{x}| = \beta - \overline{x}$, aggiungendo e togliendo $F(\overline{x}) + F'(\overline{x})\overline{x}$ si ricava:

$$\begin{aligned} |F(\beta) - F(\alpha) - F'(\overline{x})(\beta - \alpha)| &\le |F(\beta) - F(\overline{x}) - F'(\overline{x})(\beta - \overline{x})| + \\ &\quad + |F(\alpha) - F(\overline{x}) - F'(\overline{x})(\alpha - \overline{x})| \le \\ &\le \epsilon|\beta - \overline{x}| + \epsilon|\alpha - \overline{x}| = \\ &= \epsilon(\beta - \overline{x}) + \epsilon(\overline{x} - \alpha) = \epsilon(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Ora vediamo la dimostrazione del Teorema 1.22:

Dimostrazione. Fissiamo $\epsilon > 0$. Poniamo $\epsilon' := \frac{\epsilon}{b-a}$. Il Lemma 1.23 applicato a F e a ϵ', dice che per ogni $\overline{x} \in [a,b]$ esiste un $\delta(\overline{x}) > 0$ con la seguente proprietà: per ogni $\alpha, \beta \in [a,b]$ tali che $\overline{x} - \delta \leq \alpha \leq \overline{x} \leq \beta \leq \overline{x} + \delta$ si ha che:

$$|(F(\beta) - F(\alpha)) - F'(\overline{x})(\beta - \alpha)| < \epsilon'(\beta - \alpha). \tag{1.1}$$

L'applicazione $\overline{x} \mapsto \delta(\overline{x})$ è un calibro su $[a,b]$. Sia $\Pi = \{(c_i, [x_{i-1}, x_i])\}_{i=1,\ldots,n}$ una partizione contrassegnata δ-adattata su $[a,b]$. Per definizione di adattamento abbiamo: $c_i - \delta(c_i) \leq x_{i-1} \leq c_i \leq x_i \leq c_i + \delta(c_i)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Sostituendo alla disuguaglianza (1.1) $\alpha = x_{i-1}$, $\overline{x} = c_i$ e $\beta = x_i$ si ottiene, per ogni $i = 1, \ldots, n$:

$$|(F(x_i) - F(x_{i-1})) - F'(c_i)(x_i - x_{i-1})| < \epsilon'(x_i - x_{i-1}). \tag{1.2}$$

Usando la formula delle somme telescopiche possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} f(\Pi) - (F(b) - F(a)) &= \sum_{n=1}^{n}(f(c_i)(x_i - x_{i-1})) - \sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = \\ &= \sum_{n=1}^{n}(f(c_i)(x_i - x_{i-1}) - (F(x_i) - F(x_{i-1}))) = \\ &= \sum_{n=1}^{n}(F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) - (F(x_i) - F(x_{i-1}))). \end{aligned}$$

Stimando con il valore assoluto e utilizzando la disuguaglianza (1.2), si ottiene

$$|f(\Pi) - (F(b) - F(a))| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{n} |F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) - (F(x_i) - F(x_{i-1}))| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{n} \epsilon'(x_i - x_{i-1}) = \epsilon'(x_n - x_0) = \epsilon'(b - a) = \frac{\epsilon}{(b-a)}(b - a) = \epsilon.$$

Riassumendo: fissato $\epsilon > 0$, esiste un calibro δ tale che per ogni Π partizione marcata δ-assegnata di $[a,b]$ si ha:

$$|f(\Pi) - (F(b) - F(a))| \leq \epsilon.$$

Dunque f è Henstock-integrabile su $[a,b]$ e l'integrale vale $F(b) - F(a)$. □

Viene data ora una condizione necessaria e sufficiente per la Henstock-integrabilità; si noti l'analogia con la ben nota condizione di integrabilità di Riemann, a volte denominata condizione di Cauchy.

Lemma 1.24. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è Henstock-integrabile su $[a, b]$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un calibro δ su $[a, b]$ tale che $|f(\Pi_1) - f(\Pi_2)| < \epsilon$ per ogni Π_1, Π_2 partizioni contrassegnate δ-adattate su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Il fatto che tale condizione sia necessaria alla Henstock-integrabilità è facilmente dimostrabile: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Henstock-integrabile su $[a, b]$ con integrale L; allora, per definizione, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un calibro δ su $[a, b]$ tale che $|f(\Pi) - L| < \epsilon$ per ogni Π partizione contrassegnata δ-adattata su $[a, b]$. Dunque per ogni Π_1, Π_2 partizioni contrassegnate δ-adattate su $[a, b]$ si ha

$$|f(\Pi_1) - f(\Pi_2)| \leq |f(\Pi_1) - L| + |L - f(\Pi_2)| < 2\epsilon.$$

Meno immediato è dimostrare che tale condizione sia sufficiente: sia f una funzione che soddisfi il criterio di Cauchy. Per ogni n intero positivo, si sceglie un calibro δ_n su $[a, b]$ tale che $|f(\Pi_1) - f(\Pi_2)| < \frac{1}{n}$ per ogni Π_1 e Π_2 partizioni contrassegnate δ-adattate su $[a, b]$. Si può assumere senza perdere di generalità che la successione $\{\delta_n\}_{n\geq 0}$ sia crescente. Per ogni n, sia Π_n una partizione contrassegnata δ_n-adattata su $[a, b]$. La successione $\{f(\Pi_n)\}_{n\geq 0}$ è una successione di Cauchy poiché per ogni m, n tali che $m > n \geq N$ si ha $|f(\Pi_m) - f(\Pi_n)| < \frac{1}{N}$. Sia L il limite di questa successione e sia $\epsilon > 0$. Si scelga un numero positivo N tale che $\frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$ e $|f(\Pi_n) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ per ogni $n \geq N$. Sia Π una partizione contrassegnata di $[a, b]$ tale che sia δ_n-adattata su $[a, b]$, si ha

$$|f(\Pi) - L| \leq |f(\Pi) - f(\Pi_n)| + |f(\Pi_n) - L| < \frac{1}{N} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Dunque la funzione f è Henstock-integrabile su $[a, b]$ con integrale L. □

1.3 Proprietà elementari dell'integrale di Henstock-Kurzweil

Seguono alcune proprietà generali dell'integrale di Henstock-Kurzweil.

Proposizione 1.25 (Unicità dell'integrale di Henstock-Kurzweil). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile e sia L un numero reale tale che $(H) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = L$. Allora L è unico.*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$. Supponiamo che L non sia unico e che quindi esista un altro numero reale L' per cui $(H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = L'$. Per definizione di integrale esistono due calibri δ_1 e δ_2 su $[a,b]$ tali che per ogni Π partizione contrassegnata su $[a,b]$, si ha che se Π è δ_1-adattata allora $|f(\Pi) - L| < \epsilon$ e se Π è δ_2-adattata allora $|f(\Pi) - L'| < \epsilon$. Esiste, per la Proposizione 1.17, Π partizione contrassegnata contemporaneamente δ_1-adattata e δ_2-adattata. Dunque,

$$|L - L'| = |L - f(\Pi) + f(\Pi) - L'| \leq |L - f(\Pi)| + |f(\Pi) - L'| < 2\epsilon.$$

Ossia, per l'arbitrarietà di ϵ, $L = L'$. □

Proposizione 1.26 (Linearità dell'integrale di Henstock-Kurzweil). *Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni Henstock-integrabili su $[a,b]$. Valgono i seguenti fatti:*
1. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, λf è Henstock-integrabile e

$$(H)\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda (H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

2. $f + g$ è Henstock-integrabile e

$$(H)\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = (H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (H)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è una semplice applicazione del Lemma 1.24. Infatti, per quanto riguarda il punto 1, per ipotesi f è Henstock-integrabile per la caratterizzazione del Lemma 1.24, questo è vero se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un calibro δ su $[a,b]$ tale che $|f(\Pi_1) - f(\Pi_2)| < \epsilon$ per ogni Π_1, Π_2 partizioni contrassegnate δ-adattate su $[a,b]$. Ma sostituendo ad f, λf, si ottiene $|\lambda f(\Pi_1) - \lambda f(\Pi_2)| \leq |\lambda||f(\Pi_1) - f(\Pi_2)| < |\lambda|\epsilon$. Per l'arbitrarietà di ϵ si ha la condizione cercata.

Per quanto riguarda il punto 2, sia f che g sono Henstock-integrabili dunque, per il lemma, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un calibro δ su $[a,b]$ tale che $|f(\Pi_1) - f(\Pi_2)| < \epsilon$ e $|g(\Pi_1) - g(\Pi_2)| < \epsilon$ per ogni Π_1, Π_2 partizioni contrassegnate δ-adattate su $[a,b]$. Quindi,

$$\begin{aligned}|(f+g)(\Pi_1) - (f+g)(\Pi_2)| &\leq |f(\Pi_1) + g(\Pi_1) - f(\Pi_2) - g(\Pi_2)| \leq \\ &\leq |f(\Pi_1) - f(\Pi_2)| + |g(\Pi_1) - g(\Pi_2)| < 2\epsilon.\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ si ha la condizione cercata. □

Il lemma e le due proposizioni seguenti riguardano l'additività della funzione integrale di Henstock-Kurzweil.

Lemma 1.27. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a,b]$. Allora f è Henstock-integrabile su ogni sottointervallo $[c,d] \subseteq [a,b]$.*

Dimostrazione. Sia $[c, d]$ un sottointervallo di $[a, b]$ e sia $\epsilon > 0$. Si scelga un calibro δ su $[a, b]$ tale che $|f(\Pi_1) - f(\Pi_2)| < \epsilon$ per ogni Π_1, Π_2 partizioni contrassegnate δ-adattate su $[a, b]$ e si fissi una partizione contrassegnata Π_a di $[a, c]$ e una Π_b di $[d, b]$ che siano δ-adattate. Siano Π_1' e Π_2' partizioni contrassegnate δ-adattate su $[c, d]$ e infine si definisca $\Pi_1 = \Pi_a \cup \Pi_1' \cup \Pi_b$ e $\Pi_2 = \Pi_a \cup \Pi_2' \cup \Pi_b$. Quindi, per costruzione, Π_1 e Π_2 sono partizioni contrassegnate δ-adattate su $[a, b]$ e vale:

$$|f(\Pi_1') - f(\Pi_2')| = |f(\Pi_1) - f(\Pi_2)| < \epsilon.$$

Dunque, f è Henstock-integrabile su $[c, d]$ per il Lemma 1.24. □

Proposizione 1.28 (**Additività dell'integrale di Henstock-Kurzweil - I**). *Sia $c \in [a, b]$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a, c]$ e su $[c, b]$. Allora f è Henstock-integrabile su $[a, b]$ e vale:*

$$(H) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (H) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (H) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$. Per ipotesi, esiste un calibro δ_1 su $[a, c]$ tale che

$$|f(\Pi) - (H) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x| < \frac{\epsilon}{2}$$

, per ogni Π partizione contrassegnata δ_1-adattata su $[a, b]$ ed esiste un calibro δ_2 su $[c, b]$ tale che

$$|f(\Pi) - (H) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x| < \frac{\epsilon}{2}$$

per ogni Π partizione contrassegnata δ_2-adattata su $[a, b]$. Si definisce un calibro δ come

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), c - x\}, & \text{se } a \leq x < c; \\ \min\{\delta_1(c), \delta_2(c)\}, & \text{se } x = c; \\ \min\{\delta_2(x), x - c\}, & \text{se } c < x \leq b. \end{cases}$$

Si prenda Π una partizione contrassegnata δ-adattata su $[a, b]$ e si supponga che ogni contrassegno compaia una sola volta. Si noti che Π deve essere della forma $\Pi_a \cup (c, [u, v]) \cup \Pi_b$ dove i contrassegni di Π_a devono essere minori di c e i contrassegni di Π_b devono essere maggiori di c. Sia $\Pi_1 = \Pi_a \cup (c, [u, v])$ e sia $\Pi_2 = \Pi_b \cup (c, [u, v])$. Per costruzione, Π_1 è una partizione contrassegnata δ_1-adattata su $[a, c]$ e Π_2 è una partizione contrassegnata δ_2-adattata su $[c, b]$. Dato che $f(\Pi) = f(\Pi_1) + f(\Pi_2)$,

$$|f(\Pi) - (H) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - (H) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leq$$

$$\leq |f(\Pi_1) - (H)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x| + |f(\Pi_2) - (H)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dunque, la funzione f è Henstock-integrabile su $[a, b]$ e vale:

$$(H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (H)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (H)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Proposizione 1.29 (Additività dell'integrale di Henstock-Kurzweil - II). *Sia $c \in [a, b]$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a, b]$. Allora f è Henstock-integrabile su $[a, c]$ e su $[c, b]$ e vale:*

$$(H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (H)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (H)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Dato che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione Henstock-integrabile su $[a, b]$, per il Lemma 1.27, allora f è Henstock-integrabile su ogni suo sottointervallo, in particolare su $[a, c]$ e su $[c, b]$. Per dimostrare la seconda parte basta utilizzare la Proposizione 1.28. □

Proposizione 1.30 (Monotonia dell'integrale di Henstock-Kurzweil). *Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni Henstock-integrabile su $[a, b]$. Se $f \leq g$ quasi ovunque su $[a, b]$, allora:*

$$(H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (H)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Si suppone $f \geq 0$ quasi ovunque su $[a, b]$. Quindi,[3] $f^- = 0$ quasi ovunque su $[a, b]$ e, per il Teorema 1.21, è Henstock-integrabile su $[a, b]$ e $(H)\int_a^b (f^-)(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Per la Proposizione 1.26, la funzione $f^+ = f + f^-$ è Henstock-integrabile su $[a, b]$ e vale:

$$\begin{aligned}(H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= (H)\int_a^b (f^+ - f^-)(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= (H)\int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= (H)\int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - 0 = (H)\int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Si noti che $(H)\int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$ poichè $f^+ \geq 0$ su $[a, b]$, dunque:

$$(H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

[3] $f = f^+ - f^-$ dove $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

Il risultato generale segue dal fatto che $g-f \geq 0$ quasi ovunque su $[a,b]$ e questo implica:

$$(H)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - (H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (H)\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

ossia,

$$(H)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq (H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Teorema 1.31. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a,b]$ e sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Se $f = g$ quasi ovunque su $[a,b]$, allora la funzione g è Henstock-integrabile su $[a,b]$ e vale:*

$$(H)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = (H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. La funzione $g-f$ è 0 quasi ovunque su $[a,b]$ e dunque per il Teorema 1.21 è Henstock-integrabile su $[a,b]$ e $(H)\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Per la Proposizione 1.26 $g = f + (g-f)$ è Henstock-integrabile su $[a,b]$ e vale:

$$\begin{aligned}(H)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x &= (H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (H)\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= (H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 0 = (H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

1.4 L'Integrale Indefinito di Henstock-Kurzweil

In questo capitolo viene presentato l'integrale indefinito di Henstock-Kurzweil e alcune delle sue proprietà più importanti.

Definizione 1.32 (Integrale Indefinito di Henstock-Kurzweil). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a,b]$. Allora la funzione*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := (H)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

è chiamata integrale indefinito di Henstock-Kurzweil di f. Per convenzione si pone $F(a) := 0$. La buona positura di F segue dalla Proposizione 1.28.

Osservazione 1.33. Si potrebbero considerare anche funzioni integrali in cui la variabile indipendente, x, è al primo estremo, come

$$G : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad G(x) := (H)\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ma queste si riconducono al primo tipo, poiché, per l'additività dell'integrale di Henstock, si ha

$$F(x) + G(x) = (H) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + (H) \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = (H) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

e quindi $G(x) = (H) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - F(x)$.

Osservazione 1.34. Sia $C = \{(c_i, [x_i, y_i])\}_{i=1,\dots,n}$ una collezione contrassegnata di $[a, b]$ e sia $\Pi = \{(c_i, [x_{i-1}, x_i])\}_{i=1,\dots,n}$ una partizione contrassegnata di $[a, b]$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a, b]$ e sia F l'integrale indefinito di f. Da qui in poi verrà utilizzata la seguente notazione:

$$C(F) = \sum_{i=1}^{n} (F(y_i) - F(x_i));$$

$$\Pi(F) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a) = (H) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Di seguito viene presentato un lemma semplice ma notevolmente potente, in quanto utilizzato in quasi la totalità dei risultati relativi all'integrale indefinito di Henstock. Tale lemma fu utilizzato per la prima volta da Henstock nel suo resoconto iniziale sull'integrale, ma l'idea di base è dovuta al matematico polacco Saks. Per questo motivo, il seguente lemma viene chiamato Lemma di Saks-Henstock ed afferma che le somme di Riemann non solo approssimano l'integrale sull'intero intervallo, ma anche sulle unioni di sottointervalli.

Lemma 1.35 (Lemma di Saks-Henstock). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a, b]$, e poniamo $F(x) = (H) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, che è definita per ogni $x \in [a, b]$. Sia $\epsilon > 0$. Si supponga che δ sia un calibro su $[a, b]$ tale che $|f(\Pi) - \Pi(F)| < \epsilon$ per ogni Π partizione contrassegnata δ-adattata su $[a, b]$. Se $\Pi_0 = \{(c_i, [x_i, y_i])\}_{i=1,\dots,n}$ è una collezione contrassegnata[4] δ-adattata su $[a, b]$, allora*

$$|f(\Pi_0) - \Pi_0(F)| \le \epsilon \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} |f(c_i)(y_i - x_i) - (F(y_i) - F(x_i))| \le 2\epsilon.$$

Dimostrazione. Sia $\{K_j\}_{j=1,\dots,m}$ la collezione degli intervalli chiusi in $[a, b]$ contigui agli intervalli di Π_0. Sia $\eta > 0$ e per ogni j, sia Π_j una partizione contrassegnata δ-adattata su K_j tale che $|f(\Pi_j) - K_j(F)| < \frac{\eta}{m}$.

Sia $\Pi = \bigcup_{j=0}^{m} \Pi_j$. Dunque Π è, per costruzione, una partizione contrassegnata δ-adattata su $[a, b]$ e vale

$$|f(\Pi_0) - \Pi_0(F)| =$$

[4]Si ricorda che ciò non presuppone che Π_0 ricopra $[a, b]$, ma che gli intervalli in Π_0 sono tutti disgiunti tra loro, qualunque sia la loro unione.

$$= |f(\Pi_0) + \sum_{j=1}^{m} f(\Pi_j) - \Pi_0(F) - \sum_{j=1}^{m} K_j(F) + \sum_{j=1}^{m} K_j(F) - \sum_{j=1}^{m} f(\Pi_j)| \leq$$

$$\leq |f(\Pi) - \Pi(F)| + \sum_{j=1}^{m} |f(\Pi_j) - K_j(F)| < \epsilon + \eta.$$

Dal fatto che $\eta > 0$ è scelto in maniera arbitraria, la prima disuguaglianza è verificata. Per verificare la seconda disuguaglianza, si consideri Π_0^+ la collezione degli insiemi contrassegnati di Π_0, $(c_i, [x_i, y_i])$, tali per cui

$$f(c_i)(y_i - x_i) - (F(y_i) - F(x_i)) \geq 0$$

e sia $\Pi_0^- = \Pi_0 \setminus \Pi_0^+$. La prima disuguaglianza implica che

$$\sum_{i=1}^{n} |f(c_i)(y_i - x_i) - (F(y_i) - F(x_i))| = |f(\Pi_0^+) - \Pi_0^+(F)| + |f(\Pi_0^-) - \Pi_0^-(F)| \leq 2\epsilon,$$

e questo completa la dimostrazione. □

Il prossimo teorema mostra che l'integrale indefinito di Henstock-Kurzweil è una funzione continua.

Teorema 1.36. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a,b]$ e sia $F(x) = (H)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, che è definita per ogni $x \in [a,b]$. Allora F è una funzione continua su $[a,b]$.*

Dimostrazione. Sia $c \in [a,b]$ e sia $\epsilon > 0$. Dato che f è una funzione Henstock-integrabile, esiste un calibro δ su $[a,b]$ tale che $|f(\Pi)-\Pi(F)| < \frac{\epsilon}{2}$ per ogni Π partizione contrassegnata δ-adattata su $[a,b]$. Sia $\eta = \min\{\delta(c), \frac{\epsilon}{2}(1+|f(c)|\}$. Per ogni $x \in [a,b]$ tale che $|x-c| < \eta$, l'intervallo con estremo x e contrassegno c è δ-adattato. Per il Lemma di Saks-Henstock 1.35,

$$|F(x) - F(c)| \leq |F(x) - F(c) - f(c)(x-c)| + |f(c)(x-c)| < \frac{\epsilon}{2} + |f(c)|\eta \leq \epsilon.$$

Dunque, la funzione F è continua nel punto c. Per l'arbitrarietà di c in $[a,b]$, F è continua su tutto l'intervallo $[a,b]$. □

Il seguente teorema è il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale nel senso di Henstock. Possiamo interpretare il seguente risultato come segue: l'integrale di Henstock su $[a,b]$ è definito in modo tale da rendere Henstock-integrabili tutte le funzioni f che sono (dappertutto) la derivata di qualche funzione derivabile su $[a,b]$; nasce spontanea la domanda inversa, ossia, se data una funzione f Henstock-integrabile su $[a,b]$ essa sia necessariamente la derivata di qualche funzione. Il seguente teorema dice che questo è vero quasi dappertutto su $[a, b]$, poiché f coincide quasi dappertutto con la derivata della funzione integrale-indefinito di Henstock:

$$\frac{d}{dx}\left((H)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x), \quad \text{per quasi ogni } x \in [a, b].$$

Chiaramente non è auspicabile, in generale, che questo sia vero dappertutto su tutto $[a, b]$. Infatti, se f è, ad esempio, la funzione segno su $[-1, 1]$, sappiamo[5] che f non può essere la derivata di una funzione derivabile su $[-1, 1]$; tuttavia f è certamente Henstock-integrabile su $[-1, 1]$ poiché essa è Lebesgue-integrabile e l'integrale di Henstock è più generale rispetto all'integrale di Lebesgue (ciò sarà dimostrato nel prossimo capitolo, Teorema 2.26).

Il seguente teorema e il suo corollario stabiliscono un primo legame tra la teoria sull'integrale di Henstock e la teoria di Lebesgue; per tale ragione avranno importanti conseguenze nel prossimo capitolo come i Teoremi 2.22 e 2.27.

Teorema 1.37. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a, b]$, e sia*

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) := (H)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Allora F è derivabile quasi dappertutto su $[a, b]$ e $F' = f$ quasi dappertutto su $[a, b]$.

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema, si prova[6] che $D^+F(x) = f(x)$ quasi dappertutto su $[a, b]$; la dimostrazione per le altre tre derivate[7] è simile. Quindi, segue che tutte le quattro derivate di F sono uguali ad f quasi ovunque su $[a, b]$ e quindi $F' = f$ quasi ovunque su $[a, b]$. Sia $A = \{x \in [a, b) : D^+F(x) \neq f(x)\}$. Per ogni $x \in A$, esiste $\eta_x > 0$ con la seguente proprietà: per ogni $h > 0$, esiste un punto $v_h^x \in [a, b] \cap (x, x + h)$ tale che

$$|F(v_h^x) - F(x) - f(x)(v_h^x - x)| \geq \eta_x(v_h^x - x).$$

Per ogni intero positivo n, sia $A_n = \{x \in A : \eta_x \geq \frac{1}{n}\}$. Per completare la dimostrazione, è sufficiente[8] dimostrare che $\mu^*(A_n) = 0$ per ogni n. Fissato n e preso $\epsilon > 0$, poiché F è l'integrale indefinito di Henstock di f, esiste un calibro δ su $[a, b]$ tale che $|f(\Pi) - \Pi(F)| < \frac{\epsilon}{4n}$ per ogni Π partizione contrassegnata δ-adattata su $[a, b]$. La collezione degli intervalli

$$I = \{[x, v_h^x] : x \in A, 0 < h < \delta(x)\}$$

[5]Segue dal Teorema di Darboux, secondo cui (su un intervallo) la funzione derivata deve mandare intervalli in intervalli; ovviamente la funzione segno non ha tale proprietà.

[6]$D^+F(x)$ è la derivata destra superiore di F.

[7]Le altre tre derivate sono: $D_+F(x)$, $D^-F(x)$ e $D_-F(x)$.

[8]Con μ^* viene indicata la misura di Lebesgue da qui in avanti.

forma un ricoprimento di Vitali di A_n. Per il Lemma di Ricoprimento di Vitali, esiste una collezione finita $\{[c_i, d_i]\}_{i=1,\dots,q}$ di intervalli disgiunti in I tale che

$$\mu^*(A_n) < \sum_{i=1}^{q}(d_i - c_i) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Si noti che ciascuno degli intervalli marcati $(c_i, [c_i, d_i])$ è δ-adattato su $[a, b]$ e che

$$\eta_{c_i}(d_i - c_i) \leq |F(d_i) - F(c_i) - f(c_i)(d_i - c_i)|.$$

Usando il Lemma di Saks-Henstock,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q}(d_i - c_i) &\leq \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\eta_{c_i}}|F(d_i) - F(c_i) - f(c_i)(d_i - c_i)| \leq \\ &\leq n\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\eta_{c_i}}|f(c_i)(d_i - c_i) - (F(d_i) - F(c_i))| \leq \\ &\leq n\frac{2\epsilon}{4n} = \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Segue che $\mu^*(A_n) < \epsilon$. Dato che $\epsilon > 0$ è arbitrario, si conclude che $\mu^*(A_n) = 0$. Questo completa la dimostrazione. □

Corollario 1.38. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a, b]$. Allora f è misurabile su $[a, b]$ (rispetto alla misura di Lebesgue).*

Dimostrazione. Sia F l'integrale indefinito di Henstock; poniamo $F(x) = F(b)$ per ogni $x > b$. Grazie al Teorema 1.37, la funzione f può essere scritta come limite di una successione di funzioni continue come segue

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} n\left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right),$$

per quasi ogni $x \in [a, b]$. Quindi f è misurabile su $[a, b]$. □

Capitolo 2

Confronto tra gli integrali di Lebesgue e di Henstock

In questo capitolo, verrà svolto un confronto tra l'integrale di Henstock e quello di Lebesgue. Sarà dimostrato che l'integrale di Henstock generalizza l'integrale di Lebesgue, ossia che ogni funzione Lebesgue-integrabile (L-integrabile) è anche Henstock-integrabile (H-integrabile) e che non vale il viceversa (esistono funzioni H-integrabili che non sono L-integrabili). Inoltre, saranno fornite diverse condizioni affinché una funzione H-integrabile sia anche L-integrabile ed infine verranno mostrate proprietà dell'integrale di Henstock che l'integrale di Lebesgue non possiede.

2.1 Definizioni e proprietà preliminari

Per tutte le prossime definizioni, saranno utilizzate le seguenti notazioni: $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione ed $E \subseteq [a, b]$.

Definizione 2.1 (Variazione debole). *La variazione debole di F su E è definita come*

$$V(F, E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)|\right\};$$

dove l'estremo superiore è tra tutte le possibili $\{[x_i, y_i]\}_{i=1,\dots,n}$ collezioni finite di intervalli, a due a due non sovrapposti, tali che x_i, $y_i \in E$.

Definizione 2.2 (Variazione forte). *Sia*

$$\omega(F, [a, b]) = \sup\{|F(y) - F(x)| : a \leq x \leq y \leq b\}$$

l'oscillazione della funzione F nell'intervallo $[a,b]$. La variazione forte di F su E è definita come

$$V_*(F,E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \omega(F,[x_i,y_i])\right\};$$

dove l'estremo superiore è preso tra tutte le possibili $\{[x_i,y_i]\}_{i=1,\dots,n}$ collezioni finite di intervalli, a due a due non sovrapposti, tali che x_i, $y_i \in E$.

Definizione 2.3 (Funzione AC). *La funzione F è assolutamente continua su E (F è AC su E) se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero $\eta > 0$ tale che*

$$\sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| < \epsilon \tag{2.1}$$

per ogni $\{[x_i,y_i]\}_{i=1,\dots,n}$ collezione finita di intervalli, a due a due non sovrapposti, tali che x_i, $y_i \in E$ e $\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \eta$.

Osservazione 2.4. La definizione delle funzioni AC poteva essere anche espressa nel seguente modo: la funzione F è AC su E se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero positivo $\eta > 0$ tale che

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(F(y_i) - F(x_i))\right| < \epsilon \tag{2.2}$$

per ogni $\{[x_i,y_i]\}_{i=1,\dots,n}$ collezione finita di intervalli, a due a due non sovrapposti, tali che x_i, $y_i \in E$ e $\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \eta$. Infatti, le condizioni richieste, (2.1) e (2.2), sono equivalenti: la (2.1) implica la (2.2) poiché

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(F(y_i) - F(x_i))\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| < \epsilon,$$

e la (2.2) implica la (2.1) poiché, posto

$$I^+ = \{i : F(y_i) - F(x_i) \geq 0\} \quad \text{e} \quad I^- = \{i : F(y_i) - F(x_i) < 0\},$$

allora vale

$$\sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| = \left|\sum_{i \in I^+}(F(y_i) - F(x_i))\right| + \left|\sum_{i \in I^-}(F(y_i) - F(x_i))\right| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Definizione 2.5 (Funzione ACG). *La funzione F è detta assolutamente continua in senso generalizzato su E (F è ACG su E) se $F|_E$ è continua su E e l'insieme E è un'unione numerabile di insiemi su ognuno dei quali la funzione F è AC.*

Definizione 2.6 (**Funzione AC$_\delta$**). *Si ricordi la notazione dell'Osservazione 1.34. La funzione F è AC_δ su E se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero positivo η e un calibro δ su E tali che*

$$|C(F)| = \left|\sum_{i=1}^{n}(F(y_i) - F(x_i))\right| < \epsilon$$

per ogni $C = \{(c_i, [x_i, y_i])\}_{i=1,\dots,n}$ collezione contrassegnata δ-adattata su E tale che $\mu(C) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \eta$.

Definizione 2.7 (**Funzione ACG$_\delta$**). *La funzione F è ACG_δ su E se E è un'unione numerabile di insiemi su ognuno dei quali la funzione F è AC_δ.*

Definizione 2.8 (**Funzione BV**). *La funzione F è detta a variazione limitata su E (F è BV su E), se $V(F, E)$ è finito.*

Definizione 2.9 (**Funzione BVG**). *La funzione F è detta a variazione limitata in senso generalizzato su E (F è BVG su E) se l'insieme E è un'unione numerabile di insiemi su ognuno dei quali la funzione F è BV.*

Definizione 2.10 (**Funzione BV$_*$**). *La funzione F è detta a variazione limitata in senso ristretto su E (F è BV_* su E), se $V_*(F, E)$ è finito.*

Definizione 2.11 (**Funzione BVG$_*$**). *La funzione F è detta a variazione limitata in senso ristretto generalizzato su E (F è BVG_* su E) se l'insieme E è un'unione numerabile di insiemi su ognuno dei quali la funzione F è BV_*.*

Definizione 2.12 (**Funzione BV$_\delta$**). *La funzione F è BV_δ su E se esiste un numero positivo M e un calibro δ su E tali che*

$$|C(F)| = \left|\sum_{i=1}^{n}(F(y_i) - F(x_i))\right| \leq M, \tag{2.3}$$

per ogni $C = \{(c_i, [x_i, y_i])\}_{i=1,\dots,n}$ collezione contrassegnata δ-adattata su E.

Osservazione 2.13. La definizione delle funzioni BV_δ poteva essere anche espressa nel seguente modo: la funzione F è BV_δ su E se esiste un numero positivo M e un calibro δ su E tali che

$$\sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| \leq M, \tag{2.4}$$

per ogni $C = \{(c_i, [x_i, y_i])\}_{i=1,\dots,n}$ collezione contrassegnata δ-adattata su E. Infatti, le condizioni richieste, (2.3) e (2.4), sono equivalenti: la (2.4) implica la (2.3) poiché

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(F(y_i) - F(x_i))\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| \leq M;$$

e la (2.3) implica la (2.4) poiché, posto

$$C^+ = \{(c_i, [x_i, y_i]) : F(y_i) - F(x_i) \geq 0\} \ \text{ e } \ C^- = C - C^+,$$

visto che sono entrambe collezioni contrassegnate δ-adattate su E, si ha

$$\sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| \leq |C^+(F)| + |C^-(F)| \leq M + M = 2M.$$

Definizione 2.14 (**Funzione BVG$_\delta$**)**.** *La funzione F è BVG_δ su E se E è un'unione numerabile di insiemi su ognuno dei quali la funzione F è BV_δ.*

Il motivo per cui tali classi di funzioni sono state introdotte sarà chiarito nei prossimi paragrafi. Ora seguono alcune proposizioni sulle proprietà delle funzioni appena presentate utili alla trattazione.[1] Per tutti i prossimi lemmi e proposizioni, saranno utilizzate le seguenti notazioni: $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione e $E \subseteq [a, b]$.

Proposizione 2.15 (**Continuità delle funzioni ACG$_\delta$**)**.** *Se F è ACG_δ su $[a, b]$, allora F è continua su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Sia $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ dove F è una funzione AC_δ su ogni E_n. Sia $c \in [a, b]$. Si scelga un indice $n \in \mathbb{N}$ tale che $c \in E_n$. Sia $\epsilon > 0$. Dato che F è AC_δ su E_n, esiste un numero positivo η e un calibro δ su E_n tali che $|C(F)| < \epsilon$ per ogni C collezione contrassegnata δ-adattata su E_n tale che $\mu(C) < \eta$. Sia $r = \min\{\delta(c), \eta\}$; se $x \in (c - r, c + r) \cap [a, b]$, l'intervallo contrassegnato di estremi c e x e di contrassegno c è δ-adattato su E_n e ha lunghezza minore di η. Quindi,

$$|F(x) - F(c)| < \epsilon,$$

ossia F è continua nel punto c. Per l'arbitrarietà del punto c nell'intervallo $[a, b]$, segue che F è continua su tutto $[a, b]$. □

Proposizione 2.16 (**Derivabilità quasi ovunque delle funzioni ACG$_\delta$**)**.** *Se F è ACG_δ su $[a, b]$, allora F è derivabile quasi ovunque su $[a, b]$.*

Per dimostrare tale proposizione, sono necessari i seguenti lemmi.

Lemma 2.17. *Sia F una funzione AC_δ su E; allora F è BV_δ su E. Analogamente, sia F una funzione ACG_δ su E; allora F è BVG_δ su E.*

[1] Vengono presentate solo le proprietà che saranno usate nei paragrafi successivi, dato che studiare queste tipologie di funzioni non è lo scopo di questa tesi.

Dimostrazione. Per ipotesi, F è AC_δ su E. Corrispondente ad $\epsilon = 1$, scegliamo un calibro δ_1 su E e un numero positivo η tali che $|C(F)| < 1$ per ogni C collezione contrassegnata δ_1-adattata su E tale che $\mu(C) < \eta$. Sia M un intero positivo per il quale $\beta = \frac{(b-a)}{M} < \eta$; prendiamo $z_k = a + k\beta$ per $k = 0, \ldots, M$, $I_k = (z_{k-1}, z_k)$ per $k = 1, \ldots, M$ e un calibro δ su E tale che

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), \rho(x, (I_k)^c)\}, & \text{se } x \in E \cap I_k; \\ \min\{\delta_1(x), \beta\}, & \text{se } x \in E \cap \{z_k\}_{k=0,\ldots,M}. \end{cases}$$

Supponiamo che $C = \{(c_i, [x_i, y_i])\}_{i=1,\ldots,n}$ sia una collezione contrassegnata δ-adattata su E per la quale ogni contrassegno sia un estremo di un intervallo; per la definizione di δ, ogni intervallo in C è contenuto in $\overline{I_k}$ per un qualche k.[2] Sia C_k il sottoinsieme di C con intervalli in $\overline{I_k}$. Dato che $\mu(C_k) < \eta$ per ogni k, vale

$$|C(F)| \leq \sum_{k=1}^{M} |C_k(F)| < M.$$

Dunque, la funzione F è BV_δ su E. □

Lemma 2.18. *Se F è BV_δ su E (oppure BVG_δ su E), allora F è BVG_* su E.*

Dimostrazione. Per ipotesi F è BV_δ su E, quindi per l'Osservazione 2.13, esiste un $M > 0$ e un calibro δ su E tale che

$$\sum_{i=1}^{q} |F(y_i) - F(x_i)| \leq M,$$

per ogni $C = \{(c_i, [x_i, y_i])\}_{i=1,\ldots,q}$ collezione contrassegnata δ-adattata su E. Per ogni intero positivo n, sia $E_n = \{x \in E : \delta(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Dato che $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, è sufficiente provare che F è BVG_* su ogni E_n. Fissato n, si scelga un intero q tale che $\beta = \frac{(b-a)}{q} < \frac{1}{n}$ e sia

$$E_n^i = E_n \cap [a + (i-1)\beta, a + i\beta],$$

per ogni $i = 1, \ldots, q$. Sia $\{[x_k, y_k]\}_{k=1,\ldots,p}$ una collezione finita di intervalli a due a due non sovrapposti tali che abbiano estremi in E_n^i. Per ogni k, si scelgano i punti c_k, $d_k \in [x_k, y_k]$ tali che

$$|F(d_k) - F(c_k)| > \omega(F, [x_k, y_k]) - 2^{-k}.$$

[2] Con $\overline{I_k}$ si intende la chiusura di I_k.

Dato che le collezioni $\{(x_k,[x_k,c_k])\}_{k=1,\dots,p}$ e $\{(x_k,[x_k,d_k])\}_{k=1,\dots,p}$ sono δ-adattate su E, vale

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p}\omega(F,[x_i,y_i]) &< \sum_{k=1}^{p}(|F(d_k)-F(c_k)|+2^{-k}) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{p}|F(d_k)-F(x_k)|+\sum_{k=1}^{p}|F(x_k)-F(c_k)|+\sum_{k=1}^{p}2^{-k} \leq \\ &\leq M+M+1=2M+1.\end{aligned}$$

Questo dimostra che la funzione F è BV_* su E_n^i e quindi BVG_* su E. □

Lemma 2.19. *Sia A un qualunque insieme di numeri reali. Allora l'insieme dei punti isolati di A è numerabile.*

Dimostrazione. Sia E^+ l'insieme dei punti di A che sono isolati da destra e sia E^- l'insieme dei punti di A che sono isolati da sinistra. Di seguito viene provato che E^+ è numerabile, la dimostrazione per E^- è analoga. Per ogni intero positivo n, sia

$$E_n^+ = \{x \in E^+ : (x, x+\tfrac{1}{n}] \cap E = \emptyset\}.$$

Si noti che $E^+ = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n^+$. Ora, fissato n, per ogni intero k, l'insieme E_n^+ contiene al massimo un punto dell'intervallo $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$. Quindi l'insieme E_n^+ è numerabile, e questo dimostra che l'insieme E^+ è numerabile. □

Lemma 2.20. *Se F è BV_* su E, allora F è derivabile quasi ovunque su E. Analogamente, se F è BVG_* su E, allora F è derivabile quasi ovunque su E.*

Dimostrazione. Siano c e d gli estremi di E e sia $(c,d)\setminus E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$ con I_k intervalli aperti. Definiamo le funzioni m e M su $[c,d]$ come

$$m(x) = \begin{cases} F(x), & \text{se } x \in E; \\ \inf\{F(t) : t \in \overline{I_k}\}, & \text{se } x \in I_k; \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} F(x), & \textit{se } x \in E; \\ \sup\{F(t) : t \in \overline{I_k}\}, & \text{se } x \in I_k. \end{cases}$$

Tali funzioni sono BV su $[c,d]$ (poichè sono estensioni lineari di F che è BV_* per ipotesi) e quindi sono derivabili quasi dappertutto su $[c,d]$ (questo segue dal fatto che una funzione monotona è derivabile quasi ovunque e una funzione BV è la differenza tra due funzioni monotone). Esistono quindi $m'(x)$ e $M'(x)$ per quasi ogni x. Sia H l'insieme di tutti i punti di E per i quali il limite destro e quello sinistro di f coincidono e sono finiti; si vuole dimostrare che F è derivabile in ogni punto di H e, dato che $\mu(E-H)=0$ per il Lemma 2.19, questo è sufficiente per dimostrare che è derivabile quasi ovunque su E. Sia $x \in H$ e sia $y \in E$. Dato che le funzioni m e M coincidono su E, vale

$$M'(x) = \lim_{y\to x} \frac{M(y)-M(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{m(y)-m(x)}{y-x} = m'(x).$$

Per $y \in (x,b)$,

$$\frac{m(y)-m(x)}{y-x} \leq \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leq \frac{M(y)-M(x)}{y-x};$$

e per $y \in (a,x)$,

$$\frac{M(y)-M(x)}{y-x} \leq \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leq \frac{m(y)-m(x)}{y-x}.$$

Segue che F è derivabile in x e che $m'(x)=F'(x)=M'(x)$. $\square$

Segue la dimostrazione della Proposizione 2.16.

Dimostrazione. Se F è ACG_δ su $[a,b]$, allora F è BVG_δ su E per il Lemma 2.17. Dato che F è BVG_δ su E, si ha che F è BVG_* su E per il Lemma 2.18. Infine, siccome F è BVG_* su E, per il Lemma 2.20, F è derivabile quasi ovunque su E. $\square$

Proposizione 2.21. *F è AC su $[a,b]$ se e solo se F è AC_δ su $[a,b]$. Analogamente, F è ACG su $[a,b]$ se e solo se F è ACG_δ su $[a,b]$.*

Dimostrazione. Si consideri una funzione F AC_δ su $[a,b]$; sia $\epsilon > 0$. Per definizione di funzione AC_δ esiste un numero positivo η e un calibro δ su $[a,b]$ tali che $|C(F)| < \epsilon$ per ogni C, collezione contrassegnata δ-adattata su $[a,b]$ tale che $\mu(C) < \eta$. Sia $\{[x_i,y_i]\}_{i=1,\ldots,q}$ una collezione finita di intervalli, a due a due non sovrapposti, tali che x_i, $y_i \in [a,b]$ per ogni $i=1,\ldots,q$ e $\sum_{i=1}^q |y_i - x_i| < \eta$, e sia Π_i una partizione contrassegnata di $[x_i,y_i]$ δ-adattata per ogni $i=1,\ldots,q$. Allora, posto $\overline{C} = \bigcup_{i=1}^q \Pi_i$, $\overline{C}$ è una collezione contrassegnata δ-adattata su $[a,b]$ tale che $\mu(\overline{C}) < \eta$, e vale

$$\left|\sum_{i=1}^q (F(y_i)-F(x_i))\right| = \left|\sum_{i=1}^q \Pi_i(F)\right| = |\overline{C}(F)| < \epsilon.$$

Dunque, F è AC su $[a,b]$ per l'Osservazione 2.4. Per quanto riguarda l'implicazione inversa, sia $\epsilon > 0$. Per ipotesi F è AC, quindi, per l'Osservazione 2.4, esiste $\eta > 0$ tale che $|\sum_{i=1}^n (F(y_i)-F(x_i))| < \epsilon$ per ogni $\{[x_i,y_i]\}_{i=1,\ldots,n}$ collezione finita di intervalli, a due a due non sovrapposti, tali che x_i, $y_i \in [a,b]$ e $\sum_{i=1}^n |y_i - x_i| < \eta$. Preso il calibro $\delta(x) = b-a+1$ su $[a,b]$, scelto un punto $c_i \in [x_i,y_i]$ per ogni $i=1,\ldots,n$ e posto

$C = \{(c_i, [x_i, y_i])\}_{i=1,\dots,n}$; C è una collezione contrassegnata δ-adattata su $[a,b]$ tale che $\mu(C) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| < \eta$, e vale,

$$|C(F)| = \left| \sum_{i=1}^n (F(y_i) - F(x_i)) \right| < \epsilon.$$

Dunque, F è AC_δ. Questo completa la dimostrazione. □

2.2 L'integrale di Henstock generalizza quello di Lebesgue

In questa sezione verrà mostrato come l'integrale indefinito di Henstock sia una funzione ACG_δ e che sia vero anche il viceversa, ossia, ogni funzione ACG_δ è un integrale indefinito di Henstock. Dunque, per una funzione, essere ACG_δ su $[a,b]$ è una condizione necessaria e sufficiente per essere un integrale indefinito di Henstock su $[a,b]$. Si noti l'analogia con la condizione della teoria di Lebesgue secondo cui F è un integrale indefinito di Lebesgue su $[a,b]$ se e solo se F è AC su $[a,b]$. Inoltre, verrà dimostrato che l'integrale di Henstock generalizza quello di Lebesgue.

Teorema 2.22. *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è Henstock-integrabile su $[a,b]$ se e solo se esiste $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzione ACG_δ su $[a,b]$ tale che $F' = f$ quasi ovunque su $[a,b]$.*

Per provare questo teorema sono necessari i seguenti due lemmi.

Lemma 2.23. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $E \subseteq [a,b]$. Se $\mu(E) = 0$, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un calibro δ su E tale che $|f|(C) < \epsilon$ per ogni C collezione contrassegnata δ-adattata su E.*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$. Per ogni intero positivo n, sia

$$E_n = \{x \in E : n - 1 \le |f(x)| < n\}.$$

Si scelga un insieme aperto O_n tale che $E_n \subseteq O_n$ e $\mu(O_n) < \frac{\epsilon}{n2^n}$. Sia[3] $\delta(x) = \rho(x, (O_n)^c)$ definita per $x \in E_n$. Supponiamo che C sia una collezione contrassegnata δ-adattata su E. Sia C_n il sottoinsieme di C i cui contrassegni sono in E_n. Preso $\pi = \{n \in \mathbb{Z}^+ : C_n \neq \emptyset\}$, si ottiene

$$|f|(C) < \sum_{n\in\pi} |f|(C_n) < \sum_{n\in\pi} n\mu(O_n) < \sum_{n\in\pi} \frac{\epsilon}{2^n} < \epsilon.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

[3]Con ρ si intende la funzione distanza tra un punto e un insieme, ossia $\rho(x, A) = \inf\{\mathrm{dist}(x,a) : a \in A\}$.

Lemma 2.24. *Sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione ACG_δ su $[a,b]$ e sia $E \subseteq [a,b]$. Se $\mu(E) = 0$, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un calibro δ su E tale che $|C(F)| < \epsilon$ per ogni C collezione contrassegnata δ-adattata su E.*

Dimostrazione. Sia $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, dove gli E_n sono disgiunti e sia F AC_δ su ogni E_n. Sia $\epsilon > 0$. Per ogni intero positivo n, esiste un calibro δ_n su E_n e un numero positivo η_n tali che $|C(F)| < \frac{\epsilon}{2^n}$ per ogni C collezione contrassegnata δ-adattata su E_n tale che $\mu(C) < \eta_n$. Per ogni n, si scelga un insieme aperto O_n tale che $E_n \subseteq O_n$ e $\mu(O_n) < \eta_n$. Sia $\delta(x) = \min\{\delta_n(x), \rho(x, (O_n)^c)\}$ definita per $x \in E_n$. Supponiamo che C sia una collezione contrassegnata δ-adattata su E. Sia C_n il sottoinsieme di C i cui contrassegni sono in E_n. Si noti che $\mu(C_n) < \mu(O_n) < \eta_n$. Quindi,

$$|C(F)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n(F)| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^n} < \epsilon.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Segue la dimostrazione del Teorema 2.22.

Dimostrazione. Sia f Henstock-integrabile su $[a,b]$ e sia $F(x) = (H)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, che è definita per ogni $x \in [a,b]$. Per il Teorema 1.37, $F' = f$ quasi ovunque su $[a,b]$. Per ogni intero n, si pone $E_n = \{x \in [a,b] : n-1 \leq |f(x)| < n\}$. Fissato n, e preso $\epsilon > 0$; dato che f è Henstock-integrabile su $[a,b]$, allora esiste un calibro δ su $[a,b]$ tale che $|f(\Pi) - (H)\int_a^b f(x)dx| < \epsilon$ per ogni Π partizione contrassegnata δ-adattata su $[a,b]$. Sia $\eta = \frac{\epsilon}{n}$. Supponiamo che Π sia δ-adattata su E_n e che $\mu(\Pi) < \eta$. Usando il Lemma di Saks-Henstock 1.35, si ha

$$|\Pi(F)| \leq |\Pi(F) - f(\Pi)| + |f(\Pi)| < \epsilon + n\mu(\Pi) < 2\epsilon.$$

Dunque, la funzione F è AC_δ su E_n. Dato che $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, segue che F è ACG_δ su $[a,b]$. Ora, per completare la dimostrazione viene provata l'implicazione inversa: per ipotesi esiste una funzione F ACG_δ su $[a,b]$ tale che $F' = f$ quasi dappertutto su $[a,b]$. Sia $E = \{x \in [a,b] : F'(x) \neq f(x)\}$ e sia $\epsilon > 0$. Per ogni $x \in [a,b] \setminus E$, si sceglie $\delta(x) > 0$ così che

$$|F(y) - F(x) - f(x)(y-x)| < \epsilon|y-x|,$$

per ogni $|x-y| < \delta(x)$ e $y \in [a,b]$. Per il Lemma 2.23 e per il Lemma 2.24, si può definire $\delta(x) > 0$ su E così che $|f(C)| < \epsilon$ e che $|C(F)| < \epsilon$ per ogni C collezione contrassegnata δ-adattata su $[a,b]$. Questo definisce un calibro δ su $[a,b]$. Supponiamo che C sia una collezione contrassegnata δ-adattata su $[a, b]$. Sia C_E il sottoinsieme di C i cui contrassegni sono in E e sia $C_d = C \setminus C_E$; si ha

$$|f(C) - C(F)| \leq |f(C_d) - C_d(F)| + |f(C_E)| + |C_E(F)| < \epsilon(b - a) + \epsilon + \epsilon.$$

Dunque, f è Henstock-integrabile su $[a, b]$ e $(H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Dal Teorema 2.22 seguono direttamente due importanti teoremi.

Teorema 2.25. *Sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. F è un integrale indefinito di Henstock su $[a, b]$ se e solo se F è ACG_δ su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Per dimostrare l'enunciato è sufficiente unire i risultati della Proposizione 2.16 e del Teorema 2.22. $\square$

Teorema 2.26. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Se f è Lebesgue-integrabile su $[a, b]$, allora f è Henstock-integrabile su $[a, b]$ e $(L)\int_a^b f(x)dx = (H)\int_a^b f(x)dx$.*

Dimostrazione. Ogni funzione AC è una funzione ACG_δ per la Proposizione 2.21, quindi il Teorema 2.22 implica che ogni funzione Lebesgue-integrabile su $[a, b]$ è Henstock-integrabile su $[a, b]$ e gli integrali coincidono. Ricordiamo infatti che, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è Lebesgue-integrabile, allora la sua funzione integrale F è AC su $[a, b]$ e $F' = f$ quasi dappertutto. Dalla Proposizione 2.21 segue che F è anche AC_δ e dunque f è quasi dappertutto la derivata di una funzione AC_δ. Dal Teorema 2.22 questo implica che f è Henstock-integrabile. D'altra parte, dal Teorema 1.37, segue che f è quasi dappertutto uguale alla derivata della sua funzione Henstock-integrabile (che chiamiamo G). Ma allora $F' = f = G'$ quasi dappertutto, e quindi (ricordando che sia F sia G sono nulle in a) segue che $F = G$ (si ricordi che F e G sono funzioni assolutamente continue). Da $F(b) = G(b)$ segue che gli integrali nel senso di Lebesgue e di Henstock coincidono. $\square$

Il Teorema 2.26 non è invertibile, infatti esistono funzioni Henstock-integrabili che non sono Lebesgue-integrabili. Si veda l'esempio presentato nell'Osservazione 2.39.

2.3 Particolari proprietà delle funzioni H-integrabili

In questa sezione saranno fornite diverse condizioni affinché una funzione H-integrabile sia anche L-integrabile e verranno mostrare ulteriori differenze tra le funzioni L-integrabili e le funzioni H-integrabili, esponendo proprietà dell'integrale di Henstock che l'integrale di Lebesgue non ha.

Teorema 2.27. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a, b]$. Valgono le seguenti affermazioni:*
(a) Se f è limitata su $[a, b]$, allora f è Lebesgue-integrabile su $[a, b]$;
(b) Se f è non negativa su $[a, b]$, allora f è Lebesgue-integrabile su $[a, b]$;
(c) Se f è Henstock-integrabile su ogni sottoinsieme misurabile di $[a, b]$, allora f è Lebesgue-integrabile su $[a, b]$.

Per dimostrare tale teorema sono necessari i seguenti tre risultati.

Definizione 2.28 (Condizione (N)). *Sia $E \subseteq [a, b]$. Una funzione $F : E \to \mathbb{R}$ soddisfa la condizione (N) su E se $\mu^*(F(A)) = 0$ per ogni insieme $A \subseteq E$ di misura nulla.*

Teorema 2.29. *Sia $E \subseteq [a, b]$ e sia $F : E \to \mathbb{R}$ una funzione ACG su E. Allora F soddisfa la condizione (N) su E.*

Dimostrazione. Dato che F preserva le unioni e μ^* è subadditiva, è sufficiente dimostrare che F soddisfa la condizione (N) su E se F è AC su E. Sia $A \subseteq E$ un insieme di misura nulla e sia $\epsilon > 0$. Si sceglie $\eta > 0$ in modo tale che

$$\sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| < \epsilon$$

per ogni $\{[x_i, y_i]\}_{i=1,\dots,n}$ collezione finita di intervalli, a due a due non sovrapposti, con estremi in E tali che $\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| < \eta$. Sia $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di intervalli aperti disgiunti tali che $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(I_k) < \eta$, e $A \cap I_k \neq \emptyset$ per ogni k. Per ogni intero positivo q, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{q} \mu^*(F(A \cup I_k)) &\leq \sum_{k=1}^{q} (\sup\{F(A \cap I_k)\} - \inf\{F(A \cap I_k)\}) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{q} (\sup\{F(E \cap I_k)\} - \inf\{F(E \cap I_k)\}) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{q} V(F, E \cap I_k) \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Da ciò segue che

$$\mu^*(F(A)) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(F(A \cap I_k)) \leq \epsilon.$$

Dunque, $\mu^*(F(A)) = 0$ dato che ϵ è arbitrario. □

Lemma 2.30. *Sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$, e sia $E = \{x \in [a, b] : D^+F(x) \leq 0\}$. Se l'insieme $F(E)$ non contiene intervalli, allora F è crescente su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Supponendo che esistano punti c, d in $[a, b]$ tali che $c < d$ e $F(d) < F(c)$, dato che l'insieme $F(E)$ non contiene intervalli, esiste un punto $y_0 \in (F(d), F(c)) \setminus F(E)$. Sia $x_0 = \sup\{x \in [c, d] : F(x) \geq y_0\}$; per la continuità di F, il punto x_0 è nell'intervallo aperto (c, d) e $F(x_0) = y_0$. Dato che $x_0 \notin E$, segue che $D^+F(x_0) > 0$. Tuttavia, $F(x) < y_0 = F(x_0)$ per ogni $x \in (x_0, d]$, e quindi $D^+F(x_0) \leq 0$. Si è giunti ad una contraddizione, e questo dimostra che non possano esistere tali punti c e d. Quindi F è crescente su $[a, b]$. $\square$

Teorema 2.31. *Sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione ACG su $[a, b]$. Se $D^+F \geq 0$ quasi ovunque su $[a, b]$, allora F è crescente su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ e sia $G(x) = F(x) + \epsilon x$ per ogni $x \in [a, b]$. La funzione G è ACG su $[a, b]$ e l'insieme $E = \{x \in [a, b] : D^+G(x) \leq 0\}$ ha misura nulla. Dato che G soddisfa la condizione (N) su $[a, b]$ per il Teorema 2.29, l'insieme $G(E)$ ha misura nulla e quindi non contiene intervalli. Ora G è crescente su $[a, b]$ per il Lemma 2.30 e dato che $\epsilon > 0$ è arbitrario, la funzione F è crescente su $[a, b]$. $\square$

Segue la dimostrazione del Teorema 2.27.

Dimostrazione. Per ipotesi f è Henstock-integrabile su $[a, b]$, quindi f è misurabile su $[a, b]$ per il Corollario 1.38. Dunque, essendo f sia misurabile che limitata, è Lebesgue-integrabile su $[a, b]$. Questo dimostra il punto (a).

Se f è non negativa su $[a, b]$, allora la funzione $F(x) = (H) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è crescente su $[a, b]$ per il Teorema 2.31 unito alla Proposizione 2.21. Dato che F è crescente su $[a, b]$, la sua derivata è Lebesgue-integrabile su $[a, b]$ (segue dal fatto che le funzioni monotone sono differenziabili quasi ovunque e le loro derivate sono misurabili e integrabili secondo Lebesgue). Dato che $F' = f$ quasi ovunque su $[a, b]$, la funzione f è Lebesgue-integrabile su $[a, b]$. Questo dimostra il punto (b).

Se f è Henstock-integrabile sull'insieme $\{x \in [a, b] : f(x) \geq 0\}$, allora f^+ è Henstock-integrabile su $[a, b]$ e dunque, per il punto (b), Lebesgue-integrabile su $[a, b]$. Similmente, se f è Henstock-integrabile sull' insieme $\{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$, allora f^- è Henstock-integrabile su $[a, b]$ e dunque, per il punto (b), Lebesgue-integrabile su $[a, b]$. Pertanto, $f = f^+ - f^-$ è Lebesgue-integrabile su $[a, b]$ se f è Henstock-integrabile su ogni insieme misurabile di $[a, b]$. Questo dimostra il punto (c) e completa la prova. $\square$

Dal Teorema 2.27 seguono alcune interessanti osservazioni che mostrano ulteriori differenze tra le funzioni L-integrabili e le funzioni H-integrabili.

Osservazione 2.32. È nota la proprietà secondo cui una funzione misurabile f è L-integrabile su $[a, b]$ se e solo se $|f|$ è L-integrabile su $[a, b]$. Supponiamo che f sia H-integrabile su $[a, b]$, ma non L-integrabile su $[a, b]$. Allora $|f|$ non è H-integrabile su $[a, b]$. Infatti se $|f|$ è H-integrabile su $[a, b]$, allora, per il Teorema 2.27, è L-integrabile su $[a, b]$ e ne consegue (essendo f misurabile) che f è anche L-integrabile su $[a, b]$. Dunque, per quanto appena dimostrato, non è detto che $|f|$ sia H-integrabile su $[a, b]$ se f è H-integrabile su $[a, b]$.

Osservazione 2.33. È nota la proprietà secondo cui se una funzione f è L-integrabile su $[a, b]$, allora è L-integrabile su ogni sottoinsieme misurabile di $[a, b]$. Supponiamo che f sia H-integrabile su $[a, b]$, ma non L-integrabile su $[a, b]$. Allora, per il Teorema 2.27, esiste un sottoinsieme misurabile di $[a, b]$ su cui f non è H-integrabile.

Teorema 2.34. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a, b]$. Allora esiste una successione $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di insiemi chiusi tali che $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ e f sia Lebesgue-integrabile su ogni E_i.*

Dimostrazione. Sia $F(x) = (H)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, che è definita per ogni $x \in [a, b]$. Non è difficile verificare che $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \cup Z$ dove f è limitata su ogni insieme chiuso E_i e $\mu(Z) = 0$. Per il Lemma 2.23 e per il fatto che f è Henstock-integrabile su $[a, b]$, esiste un calibro su $[a, b]$ tale che $|f|(\Pi) < 1$ per ogni Π, partizione contrassegnata δ-adattata su $[a, b]$. Per ogni intero positivo n, sia $Z_n = \{x \in Z \cap (a, b) : \delta(x) \geq \frac{1}{n}\}$; dato che f è chiaramente Lebesgue-integrabile su ogni E_i (e su a e b), è sufficiente provare che f è Lebesgue-integrabile su ogni $\overline{Z_n}$.

Fissato n, per il Lemma 2.19 è possibile scrivere $\overline{Z_n} = B \cup C$ dove C è un insieme numerabile e ogni punto di B è un punto di Z_n per cui il limite destro e sinistro di f coincidono e sono finiti, è quindi sufficiente provare che f è Lebesgue-integrabile su B.

Definendo δ_1 su $[a, b]$ come $\delta_1(x) = \min\{\delta(x), \frac{1}{2n}\}$, e supponendo che $\Pi = \{(x_j, I_j)\}$ per $j = 1, \ldots, q$ è δ_1-adattata su B; per ogni j, si prende[4] $y_j \in (Z_n \cap (I_j)^\circ)$. Questo è possibile dato che x_j è un punto per cui limite destro e sinistro di f coincidono su Z_n. Per definizione di δ_1 e Z_n, la partizione contrassegnata $\Pi' = \{(y_j, I_j)\}_{j=1,\ldots,q}$ è δ-adattata su Z. Ora, usando il Lemma di Saks-Henstock 1.35 e la definizione di δ, si ha

$$\sum_{j=1}^{q} |I_j(F)| \leq \sum_{j=1}^{q} |I_j(F) - f(y_j)\mu(I_j)| + \sum_{j=1}^{q} |f(y_j)|\mu(I_j) < 2 + 1 = 3.$$

Per ogni intero positivo k, si pone $g_k(x) = \min\{|f(x)|, k\}$. Fissato k, dato che $g_k\chi_B$ è limitata e misurabile su $[a, b]$, si può provare che è sia Lebesgue-integrabile che Henstock-integrabile su $[a, b]$ e gli integrali coincidono. Di conseguenza, esiste un calibro $\delta_2 < \delta_1$

[4]Sia A un insieme; con A° si intende la parte interna di A.

su $[a, b]$ tale che

$$\left| g_k \chi_B - \int_B g_k(x)\,\mathrm{d}x \right| < 1,$$

per ogni Π partizione contrassegnata δ_2-adattata su $[a, b]$. Sia Π' una partizione contrassegnata δ_2-adattata su $[a, b]$ e sia $\Pi'_B = \{(x_j, I_j)\}_{j=1,\dots,q}$ il sottoinsieme di Π' che ha contrassegni contenuti in B. Dato che Π'_B è sia δ_1-adattata che δ_2-adattata su B,

$$\begin{aligned}\int_B g_k(x)\,\mathrm{d}x <& 1 + g_k\chi_B(\Pi') = 1 + g_k(\Pi'_B) \leq \\ &\leq 1 + |f|(\Pi'_B) = 1 + \sum_{j=1}^{q} |f(x_j)\mu(I_j)| \leq \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^{q} |I_j(F)| + \sum_{j=1}^{q} |f(x_j)\mu(I_j) - I_j(F)| \leq \\ &\leq 1 + 3 + 2 = 6.\end{aligned}$$

Dato che $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $|f|$ e $\int_B g_k(x)\,\mathrm{d}x \leq 6$ per ogni k, il Lemma di Fatou implica che

$$\int_B |f|(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_B g_k(x)\,\mathrm{d}x \leq 6.$$

Segue che f è Lebesgue-integrabile su B. □

Corollario 2.35. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su $[a, b]$. Allora ogni insieme perfetto $P \subseteq [a, b]$ contiene una porzione sulla quale f è Lebesgue-integrabile.*[5] *In particolare, ogni intervallo $[c, d] \subseteq [a, b]$ contiene un sottointervallo sul quale f è Lebesgue-integrabile.*

Dimostrazione. Il risultato è una immediata conseguenza del teorema precedente e del Teorema delle Categorie di Baire. □

In seguito, viene dimostrata un'ultima proprietà tecnica dell'integrale di Henstock che mostra perché non si possa definire un integrale di Henstock generalizzato (o improprio); ma prima un lemma utile per la dimostrazione di tale proprietà.

Lemma 2.36. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile sull'intervallo $[a, c]$ per ogni $c \in (a, b)$, e sia $\epsilon > 0$. Allora esiste un calibro δ su $[a, b)$ con la seguente proprietà: se $c \in (a, b)$ e Π è una partizione contrassegnata δ-adattata su $[a, c]$, allora $|f(\Pi) - (H)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x| < \epsilon$.*

[5] Un insieme perfetto è un insieme chiuso e senza punti isolati.

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente in $[a,b)$ che converge a b e sia $a_0 = a$. Per ogni intero positivo n, scegliamo un calibro δ_n su $[a_{n-1}, a_n]$ tale che

$$\left| f(\Pi) - (H)\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \epsilon 2^{-n},$$

per ogni Π partizione contrassegnata δ-adattata su $[a_{n-1}, a_n]$. Sia $I_n = (a_{n-1}, a_n)$. Definiamo un calibro δ su $[a,b)$ come

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), a_n\}, & \text{se } x = a; \\ \min\{\delta_n(x), \rho(x, (I_n)^c)\}, & \text{se } x \in I_n; \\ \min\{\delta_n(a_n), \delta_{n+1}(a_n), \mu^*(I_n), \mu^*(I_{n+1})\}, & \text{se } x = a_n. \end{cases}$$

Sia $c \in (a,b)$. Supponiamo che Π sia una partizione contrassegnata δ-adattata su $[a,c]$ e che tutti i suoi contrassegni siano estremi. Scegliamo un indice q tale che $a_q \leq c \leq a_{q+1}$. Notiamo che a_n è un contrassegno per ogni $n = 1,\ldots,q$ e che ogni intervallo di Π è un sottointervallo di $[a_{n-1}, a_n]$ per qualche $n \in \{1,\ldots,q+1\}$.

Per ogni $n = 1,\ldots,q$, sia Π_n il sottoinsieme di Π che ha intervalli contenuti in $[a_{n-1}, a_n]$ e sia Π_{q+1} il sottoinsieme di Π che ha intervalli contenuti in $[a_q, c]$. Ora, P_{i_n} è una partizione contrassegnata δ_n-adattata su $[a_{n-1}, a_n]$ per ogni $n = 1,\ldots,q$ e Π_{q+1} è una partizione contrassegnata δ_{q+1}-adattata su $[a_q, c]$. Per il Lemma di Saks-Henstock 1.35, vale

$$\begin{aligned} &\left| f(\Pi) - (H)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{q} \left| f(\Pi_n) - (H)\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| f(\Pi_{q+1}) - (H)\int_{a_q}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \\ &< \sum_{n=1}^{q} \epsilon 2^{-n} + \epsilon 2^{-(q+1)} < \epsilon. \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione. □

Teorema 2.37. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione Henstock-integrabile su ogni intervallo $[c,d] \subseteq (a,b)$. Se $(H)\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ad un limite finito per $c \to a^+$ e per $d \to b^-$, allora f è Henstock-integrabile su $[a,b]$ e vale*

$$(H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{c\to a^+ \\ d\to b^-}} (H)\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Proviamo un caso speciale di questo teorema: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è Henstock-integrabile su $[a,d]$ per ogni $d \in (a,b)$ e $(H)\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ad un limite finito per $d \to b^-$, allora f è Henstock-integrabile su $[a,b]$ e vale

$$(H)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{d\to b^-} (H)\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La dimostrazione per l'estremo sinistro è analoga, e il teorema generale segue da questi due risultati.

Sia $L = \lim_{d\to b^-} (H) \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x$ e sia $\epsilon > 0$. Per il Lemma 2.36, esiste un calibro δ_1 su $[a, b)$ tale che

$$\left| f(\Pi) - (H) \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \epsilon,$$

per ogni Π partizione contrassegnata δ_1-adattata su $[a, d]$. Sia $\eta > 0$ tale che

$$\left| L - (H) \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \epsilon,$$

per ogni $d \in (b-\eta, b)$. Definiamo un calibro δ su $[a, b]$ come

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), b - x\}, & \text{se } x \in [a, b); \\ \min\{\eta, \frac{\epsilon}{1+|f(b)|}\}, & \text{se } x = b. \end{cases}$$

Supponiamo che Π sia una partizione contrassegnata δ-adattata su $[a, b]$. Dato che b deve essere un contrassegno, l'intervallo contrassegnato $(b, [d, b])$ appartiene a Π dove $b - \eta < d < b$. Sia $\Pi_a = \Pi \setminus \{(b, [d, b])\}$, vale

$$|f(\Pi) - L| \le \left| f(\Pi_a) - (H) \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| (H) \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x - L \right| + |f(b)|(b - d) < 3\epsilon.$$

Dunque, la funzione f è Henstock-integrabile su $[a, b]$ e vale

$$(H) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{d\to b^-} \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 2.38. Un'applicazione di tale teorema è il seguente esempio: la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ non è Riemann-integrabile su $[0, 1]$ poiché illimitata; tuttavia, grazie al Teorema 2.37, è Henstock-integrabile su $[0, 1]$ e vale

$$(H) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} (H) \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} [2\sqrt{x}]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2.$$

Tale integrale, nella teoria di Riemann, è detto integrale improprio di Riemann; è quindi evidente che non esiste un integrale improprio di Henstock, in quanto coincide con l'integrale di Henstock stesso.

Osservazione 2.39. Un altro esempio è la funzione

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & \text{se } x \in (0, 1]; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Questa funzione è derivabile,[6] ma la sua derivata non è Riemann-integrabile essendo illimitata; infatti, per ogni $x \in (0,1]$ vale

$$F'(x) = 2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right).$$

Tuttavia, grazie al Teorema 2.37, F' è Henstock-integrabile su $[0,1]$ e vale

$$(H)\int_0^1 F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}(H)\int_a^1 F'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}[F(1) - F(a)] = -1.$$

Infine, notiamo che F' non è Lebesgue-integrabile su $[0,1]$. Infatti se F' fosse L-integrabile su $[0,1]$, allora anche $\frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$ sarebbe L-integrabile su $[0,1]$ (poiché $2x\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$ è continua fino a 0). Ma $\frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$ non è L-integrabile su $[0,1]$ in quanto

$$\int_0^1 \left|\frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right|\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \left|\frac{2\pi}{x}\sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right)\right|\mathrm{d}x,$$

e applicando la sostituzione $\frac{\pi}{x^2} = t$, il limite diventa

$$\lim_{a\to 0^+}\int_1^{\frac{1}{a^2}} \pi\frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \pi\frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Questo esempio mostra che non vale l'implicazione inversa del Teorema 2.26.

[6] Ovviamente F è derivabile in $(0,1]$; è derivabile anche in 0 poiché $F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}{x} = 0$.

Bibliografia

[1] R. A. Gordon: *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, American Mathematical Society, 1994.

[2] R. Henstock: *Definitions of Riemann Type of the Variational Integrals*, London Mathematical Society **11**, 1961, 402–418.

[3] R. Henstock: *Theory of integration*, Butterworths, 1963.

[4] R. Henstock: *A Riemann-type integral of Lebesgue power*, Canadian Journal of Mathematics **20**, 1968, 79-87.

[5] R. O. Davis e Z. Schuss: *A proof that Henstock's integral includes Lebesgue's*, London Mathematical Society **2**, 1970, 561–562.

[6] J. Kurzweil: *Generalized ordinary differential equations*, Czechoslovak Mathematical Journal **7**, 1957, 418-446.

[7] S. Saks: *Theory of the integral*, Hafner, 1952.

[8] B. Bongiorno: *Un nuovo integrale per il problema delle primitive*. Articolo su ResearchGate, 1996. Disponibile all'url

`https://www.researchgate.net/publication/45258651_Un_nuovo_integrale_per_il_problema_delle_primitive`

[9] J. Mawhin: *Il perenne ritorno delle somme di Riemann-Stieltjes nell'evoluzione del calcolo integrale*. Articolo su ResearchGate, 2004. Disponibile all'url

`https://www.researchgate.net/publication/255617433_Il_Perenne_Ritorno_delle_Somme_di_Riemann-Stieltjes_nell'Evoluzione_del_Calcolo_Integrale`

[10] G. Gorni: *Sunto della Teoria dell'Integrale secondo Henstock-Kurzweil*. Dispensa, 2003. Disponibile all'url

`https://users.dimi.uniud.it/~gianluca.gorni/Dispense/integraliTesto.pdf`

Ringraziamenti

Ringrazio la mia famiglia che mi ha aiutata e sostenuta ogni giorno durante tutto questo lungo percorso, in particolare mamma, papà, Ginevra e Filippo. Ringrazio il Professor Andrea Bonfiglioli, non solo per avermi fatto da relatore, ma per essere stato un grande insegnante anche nei momenti difficili della didattica a distanza, rendendo i corsi di Analisi i più belli e piacevoli. Ringrazio Leonardo con il quale ho condiviso questo percorso dalla prima settimana alla laurea, esame dopo esame. Infine, ringrazio il Professor Marco Paselli, che per primo mi ha mostrato la bellezza della Matematica e senza il quale non avrei mai scelto questo percorso. Come diceva sempre: “Con queste basi avete Analisi 1 già in tasca!” e così è stato.