

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

SULL'ESISTENZA
DI ORBITE PERIODICHE
PER SISTEMI HAMILTONIANI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Vittorio Martino

Presentata da:
Iacopo Marchetti

II Sessione
Anno Accademico 2023-2024

Introduzione

In questa tesi sarà studiato il problema di trovare delle soluzioni periodiche per un sistema hamiltoniano autonomo; tale sistema ammette l'energia, rappresentata dall'hamiltoniana stessa, come integrale primo del moto, per cui si può porre il problema per dato livello/superficie d'energia o per dato periodo.

La domanda sorge storicamente dalla meccanica celeste, come nello studio del problema dei tre corpi da parte di Poincaré; matematicamente uno è motivato dalle forti proprietà di ricorrenza del flusso associato al sistema, da cui sono scaturiti altri risultati affini quali il *closing lemma* di C.Pugh e C.Robinson ([1]), o il teorema sulle perturbazioni di Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM).

L'approccio che useremo nel trovare le orbite periodiche è quello del calcolo variazionale, adoperando in particolare la nozione d'azione duale ([2]), sviluppata da F.Clarke e I.Ekeland, e lo schema di *minimax* applicato da P.Rabinowitz e V.Benci ([3] e [4]).

Nel primo capitolo richiamiamo le nozioni fondamentali sul formalismo hamiltoniano, parlando anche della geometria delle varietà simplettiche. Poi sarà visto il teorema di ricorrenza di Poincaré e un primo risultato d'esistenza sulle orbite periodiche, per data superficie d'energia.

Dopo aver ripreso varie definizioni e teoremi, dimostreremo un teorema sull'esistenza delle orbite periodiche, per dato periodo, da cui segue una generalizzazione del risultato dato prima per data superficie d'energia.

Nel corso del trattato abbiamo attinto al libro di J.Mawhin e M.Willem [5], dove sono ripercorsi i progressi del calcolo variazionale applicato ai sistemi hamiltoniani, con varie note storiche.

Svariate nozioni d'analisi funzionale (in particolare sugli spazi di Hilbert e di Sobolev) sono date per note, e comunque possono essere trovate in [6].

Similmente per una panoramica sulle varietà e sulle forme differenziali rimandiamo a [7] e [8].

Indice

Introduzione	i
Indice	iii
1 Formalismo hamiltoniano	1
1.1 Formalismo hamiltoniano	1
1.1.1 Formalismo lagrangiano	1
1.1.2 Trasformata di Legendre	3
1.1.3 Equazioni di Hamilton	5
1.2 Campi hamiltoniani	6
1.2.1 Flusso d'un campo vettoriale	7
1.2.2 Pullback d'un campo vettoriale	7
1.2.3 Diffeomorfismi simplettici	8
1.3 Varietà simplettiche	9
1.3.1 Teorema di Darboux	12
1.3.2 Campi hamiltoniani su varietà	15
1.3.3 Forme volume	17
2 Orbite periodiche	21
2.1 Teorema di ricorrenza di Poincaré	22
2.2 Un primo teorema d'esistenza	25
3 Qualche risultato tecnico	37
3.1 Condizione di Palais-Smale	37

3.1.1	Lemma di deformazione	39
3.2	Teoria del grado	43
3.2.1	Grado di Brouwer	43
3.2.2	Grado di Leray-Schauder	45
3.3	Teoremi d'esistenza di punti critici	46
3.3.1	Proprietà di linking	46
3.3.2	Teoremi	49
4	Esistenza d'orbite periodiche	59
4.1	Lo spazio $H^{1/2}$	59
4.1.1	Decomposizione di $H^{1/2}$	61
4.2	Esistenza per dato periodo	63
4.2.1	Scrittura di $A(z)$	64
4.2.2	Compattezza del gradiente b'	65
4.2.3	Verifica della condizione di Palais-Smale	67
4.2.4	Ultime verifiche su I	70
4.2.5	Regolarità di z_K	72
4.2.6	Esistenza d'una soluzione per il problema di partenza	74
4.3	Esistenza per data superficie	76
A	Costruzione e proprietà del grado	79
A.1	Grado di Brouwer	79
A.1.1	Caso regolare	79
A.1.2	Estensione sui valori critici	81
A.1.3	Estensione a $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$	82
A.1.4	Proprietà	85
A.2	Grado di Leray-Schauder	87
	Bibliografia	89

Capitolo 1

Formalismo hamiltoniano e varietà simplettiche

In questa sezione ricordiamo delle nozioni del formalismo hamiltoniano, ricavando dall'equazioni di Eulero-Lagrange il sistema di Hamilton, per poi parlare delle varietà simplettiche e di qualche risultato affine; quest'ultima parte (assieme al secondo capitolo) è tratta in gran parte dal primo capitolo di [9] di H.Hofer e E.Zehnder.

Rimandiamo per una trattazione più approfondita della meccanica classica al classico libro di V.I.Arnold [10].

1.1 Formalismo hamiltoniano

1.1.1 Formalismo lagrangiano

Un sistema meccanico segue il principio di minima azione, storicamente dovuto a Maupertuis, ovvero il moto $q = q(t) \in \mathbb{R}^n$ (definito in $[t_0, t_1]$) rende stazionario il seguente funzionale, detto azione:

$$I(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (1.1)$$

dove la funzione reale L è detta *lagrangiana* del sistema, e n rappresenta il numero di gradi di libertà.

È inteso che I è definita su uno spazio normato di funzioni $(X, \|\cdot\|)$, e ricordiamo quindi la nozione di differenziale di Fréchet per funzionali reali (su spazi di Banach):

Definizione 1.1. Sia I un funzionale reale definito su uno spazio di Banach X , diremo che I è differenziabile in $x \in X$ se esiste un operatore lineare $F \in L(X, \mathbb{R})$ tale che per ogni variazione $h \in X$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x+h) - I(x) - Fh}{\|h\|} = 0$$

L'operatore F sarà perciò chiamato il differenziale di I in x , e scriveremo $F = d_x I = I'(x)$; se I è continua e anche I' risulta esserlo, diremo che $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$.

Inoltre i punti x che annullano il differenziale I' sono chiamati *punti critici* o stazionari di I , e diremo equivalentemente che tali punti rendono stazionaria I .

Sia ora $X = \mathcal{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ dotato della norma del sup, supponendo che L sia almeno di classe $\mathcal{C}^2$, segue dal teorema del valor medio e da un'integrazione per parti che:

$$\begin{aligned} I'(q)h = \int_{t_0}^{t_1} \left(\nabla_q L(q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{q}} L(q, \dot{q}, t) \right) \cdot h(t) dt \\ + \nabla_{\dot{q}} L(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1) \cdot h(t_1) - \nabla_{\dot{q}} L(q(t_0), \dot{q}(t_0), t_0) \cdot h(t_0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Consideriamo l'insieme dei moti $\mathcal{C}^1$ con estremi fissati:

$$A = \{q \in X : q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1\}$$

affinché una variazione $h \in X$ sia ammissibile, ovvero $q + h \in A$, dovrà necessariamente valere $h(t_0) = h(t_1) = 0$, per cui l'equazione di prima si riduce a:

$$I'(q)h = \int_{t_0}^{t_1} \left(\nabla_q L(q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{q}} L(q, \dot{q}, t) \right) \cdot h(t) dt$$

Se q rende stazionaria l'azione, prendendo $h \geq 0$ tale che $h(t^*) = 1$ (dove t^* è diverso da t_0 e t_1) e $h = 0$ al di fuori d'un intorno arbitrariamente piccolo di t^* , segue che $I'(q) = 0$ se e solo se vale per ogni t :

$$\frac{d}{dt} [\nabla_{\dot{q}} L](q(t), \dot{q}(t), t) = \nabla_q L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (1.3)$$

Il sistema di equazioni sopra scritto prende il nome di equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale I .

Osservazione 1. I punti stazionari di I non dipendono dalla scelta di coordinate fatta, così che uno può sempre riportarsi alle equazioni di Eulero-Lagrange (per una lagrangiana opportuna).

Esempio 1.1. Sia $L(q, \dot{q}, t) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q)$ (caso $n = 1$), allora le equazioni di Eulero-Lagrange diventano

$$\frac{d}{dt} \{m\dot{q}\} = m\ddot{q} = -U'(q)$$

e così ritroviamo l'equazione classica di Newton da questa formulazione. Notiamo che in questo caso $\nabla_{\dot{q}} L = m\dot{q}$, per cui in generale $\nabla_{\dot{q}} L$ è chiamato *momento generalizzato* del sistema.

1.1.2 Trasformata di Legendre

Cerchiamo ora una formulazione duale dei concetti definiti prima. Sia $f = f(x)$ una funzione $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ convessa, definiamo la sua trasformata di Legendre come:

$$g(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot x - f(x)\} =: F(x) \quad (1.4)$$

per quelle $p \in \mathbb{R}^n$ tali che il sup appartenga effettivamente a $\mathbb{R}$ (ad esempio per $f(x) = e^x$, risulta $g(p) = +\infty$ per $p < 0$). La convessità di f ci assicura che se il sup di F è finito ed è assunto in $\bar{x}$, allora tale $\bar{x}$ è unica ed è determinata da $p = f'(\bar{x})$, da cui uno può scrivere in questo caso:

$$f(\bar{x}) + g(p) = \bar{x} \cdot p \quad (1.5)$$

mentre più in generale per ogni x e p nel dominio di g vale la disuguaglianza di Young:

$$f(x) + g(p) \leq p \cdot x \quad (1.6)$$

Notiamo che l'ipotesi di convessità di f si trasmette a g :

$$\begin{aligned} g(\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \lambda(p_1 \cdot x - f(x)) + (1 - \lambda)(p_2 \cdot x - f(x)) \} \\ &\leq \lambda \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ p_1 \cdot x - f(x) \} + (1 - \lambda) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ p_2 \cdot x - f(x) \} \\ &= \lambda g(p_1) + (1 - \lambda)g(p_2) \end{aligned}$$

e al di fuori di punti critici di f , g eredita la continuità $\mathcal{C}^2$ all'interno del suo dominio; più precisamente derivando $g(p) = p \cdot \bar{x}(p) - F(\bar{x}(p))$ s'ottiene:

$$g'(p) = \bar{x}(p) = (F')^{-1}(p)$$

da cui segue appunto la continuità $\mathcal{C}^2$ di g . Possiamo dunque rieffettuare la trasformata di Legendre su g , e, come si può intuire dall'equazione (1.5), uno riottiene la funzione f . In altre parole la trasformata di Legendre è involutiva.

Esempio 1.2. Sia $f(x) = x^\alpha$, dove $x \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 1$; indicato con β l'esponente coniugato di α , ovvero $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, risulta che la trasformata di Legendre di f vale:

$$g(p) = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha^\beta} p^\beta = (\alpha - 1)x^\alpha$$

dove $x = x(p)$ è tale che $g(p) = p \cdot x - f(x)$. Similmente, se f è una funzione omogenea di grado $\alpha > 1$, la trasformata g è una funzione omogenea di grado β ; dalla formula di Eulero:

$$\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$$

segue:

$$g(p) = (\alpha - 1)f(x)$$

e, usando il fatto che $p = \nabla f(x)$ e ∇f sia omogenea di grado $\alpha - 1$, s'ottiene:

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha g(p) &= (\alpha - 1)f(\lambda x) = g(\nabla f(\lambda x)) \\ &= g(\lambda^{\alpha-1} \nabla f(x)) = g(\lambda^{\alpha-1} p) \end{aligned}$$

da cui, riscalandolo p e moltiplicando per $\lambda^{-\alpha}$, si ha $g(\lambda^{1-\alpha}p) = \lambda^{-\alpha}g(p)$, infine indicato $\mu = \lambda^{1-\alpha}$ risulta $g(\mu p) = \mu^\beta g(p)$.

Nel caso particolare per $\alpha = 2$ vale ancora $\beta = 2$, e quindi se $f(\dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ è l'energia cinetica d'un punto materiale, allora $g(p) = \frac{p^2}{2m}$ dove $p = m\dot{x}$ è il momento del punto.

1.1.3 Equazioni di Hamilton

Consideriamo una lagrangiana L , richiedendo che sia $\mathcal{C}^2$ e convessa (almeno rispetto al secondo argomento), allora chiamiamo *hamiltoniana* la trasformata di Legendre di L rispetto alla variabile $\dot{q}$:

$$H(q, p, t) = \sup_{\dot{q} \in \mathbb{R}^n} \{p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}, t)\} \quad (1.7)$$

Osservazione 2. Supponendo che il sup sia assunto in $\dot{q}$, vale la scrittura:

$$p = \nabla_{\dot{q}} L(q, \dot{q}, t)$$

In altre parole abbiamo sostituito la variabile $\dot{q}$ con il momento (generalizzato) p ; in generale uno si riferisce sempre alla variabile p come momento.

Le equazioni di Eulero-Lagrange per L diventano il seguente sistema d'equazioni del primo ordine per H , dette equazioni canoniche o di Hamilton:

$$\dot{q}(t) = \nabla_p H(q(t), p(t), t) \quad (1.8)$$

$$\dot{p}(t) = -\nabla_q H(q(t), p(t), t) \quad (1.9)$$

Se poniamo $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, dove I_n e 0 sono rispettivamente la matrice identità e la matrice nulla su $\mathbb{R}^n$, possiamo riscrivere il sistema sopra scritto come

$$\dot{z}(t) = J \nabla H(z(t), t) \quad (1.10)$$

dove $z = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$. Osserviamo che la matrice J è antisimmetrica (ie ${}^t J = -J$), ha determinante non nullo e $J^2 = -I_{2n}$.

Esempio 1.3. Riprendiamo la lagrangiana $L = T - U$ associata a un singolo punto materiale sottoposto a un potenziale, allora l'hamiltoniana diventa $H(q, p) = T(p) + U(q)$ dove $T(p) = \frac{p^2}{2m}$; in altre parole l'hamiltoniana è l'energia totale del sistema. Il sistema di Hamilton è semplicemente:

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \nabla_p H(q, p) = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\nabla_q H(q, p) = -U'(q)\end{aligned}$$

Osservazione 3. Se $z = z(t) = (q(t), p(t))$ è soluzione delle equazioni canoniche allora:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [H(z, t)] &= \nabla H(z, t) \cdot \dot{z} + \frac{\partial H}{\partial t}(z, t) = \nabla H \cdot J \nabla H + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \nabla_q H \cdot \nabla_p H - \nabla_p H \cdot \nabla_q H + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}(z, t)\end{aligned}$$

In particolare nel caso autonomo (ie $H = H(q, p)$) s'ottiene:

$$\frac{d}{dt} [H(z(t))] = 0 \quad (1.11)$$

Ergo, in questo caso, l'energia del sistema $E = H(z(t))$ è un integrale primo del moto.

Osservazione 4. Sempre nel caso autonomo, se lo spazio delle configurazioni al posto di $\mathbb{R}^n$ è una varietà differenziabile M , possiamo pensare la lagrangiana $L(q, \dot{q})$ definita sul fibrato tangente TM , quindi $q \in M$ e $\dot{q} \in T_q M$, mentre dalla definizione (1.7) l'hamiltoniana vive sul fibrato cotangente $T^*M = (TM)^*$, dove $T_q^*M = (T_q M)^*$ è il duale dei vettori tangenti in q .

1.2 Campi hamiltoniani

Sia $H = H(q, p) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ un'hamiltoniana, le associamo un campo $X_H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definito da

$$(i_{X_H} \omega_0)_x = \omega_0(X_H(x), \cdot) = -dH(x)$$

o, in questo caso, riscrivendo:

$$X_H(x) = J \nabla H(x)$$

dove la 2-forma:

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$$

con $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ delle coordinate di $\mathbb{R}^{2n}$, è detta forma symplettica canonica.

Questa forma è chiaramente chiusa, anzi $\omega_0 = d\lambda$, dove $\lambda = \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ è chiamata forma di Liouville, inoltre ω_0 è costante e non degenera, ovvero per $a \neq 0$ esiste b tale che $\omega_0(a, b) \neq 0$, infatti $\omega_0(a, b) = (Ja, b)_{\mathbb{R}^{2n}}$, per cui:

$$\omega_0(a, Ja) = \|Ja\|^2 = \|a\|^2 \neq 0$$

Essendo ω_0 non degenera, il campo X_H è univocamente determinato da H . Sottolineiamo che ω_0 è antisimmetrica, perciò per ogni a vale:

$$\omega_0(a, a) = -\omega_0(a, a) = 0$$

1.2.1 Flusso d'un campo vettoriale

A un campo qualsiasi X (sufficientemente regolare) è associato un flusso ϕ^t ($t \in \mathbb{R}$) definito dal seguente problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi^t(x) &= X(\phi^t(x)) \\ \phi^0(x) &= x \end{aligned}$$

Ricordiamo solamente che il flusso ha la proprietà di gruppo (se definito per ogni $t \in \mathbb{R}$), ovvero grazie all'unicità della soluzione del problema di Cauchy vale:

$$\phi^{t+s}(x) = \phi^t(\phi^s(x))$$

in particolare l'inversa di ϕ^t è data da ϕ^{-t} .

1.2.2 Pullback d'un campo vettoriale

Per un campo X su $\mathbb{R}^n$, e una soluzione generica $x = x(t)$ di $\dot{x} = X(x)$, se per un diffeomorfismo $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y = y(t)$ vale:

$$x(t) = u(y(t))$$

da $X(u(y)) = X(x) = \dot{x} = du(y(t))\dot{y}$ s'ottiene:

$$\dot{y} = (du(y))^{-1} X(u(y))$$

dunque definiamo il *pullback* di X come:

$$u^*X = (du)^{-1}X \circ u$$

Se ϕ^t è il flusso associato ad X , e $\phi^t(x) = u(y^t(x))$, per quanto appena detto y^t è soluzione di:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y^t(x) &= u^*X(y^t(x)) \\ y^0(x) &= u^{-1}(x) \end{aligned}$$

perciò $\psi^t(x) = y^t \circ u(x)$ è il flusso associato a u^*X , e risulta che ϕ^t e ψ^t sono coniugati rispetto a u , cioè:

$$u \circ \psi^t = u \circ (y^t \circ u) = (u \circ y^t) \circ u = \phi^t \circ u$$

1.2.3 Diffeomorfismi simplettici

Ritorniamo al caso particolare d'un campo hamiltoniano X_H , diremo che u è un diffeomorfismo simplettico se u^*X_H è ancora un campo hamiltoniano X_K , dove $K = H \circ u$. Dato che:

$$\begin{aligned} J(du)^{-1}X_H \circ u &= JX_K = -dK \\ &= -{}^t(du)dH \circ u = {}^t(du)JX_H \circ u \end{aligned}$$

dovrà essere:

$${}^t(du)Jdu = J$$

e quindi, ricordando che il pullback d'una 2-forma ω è:

$$(u^*\omega)_x(a, b) = \omega_{u(x)}(du(x)a, du(x)b)$$

otteniamo che u preserva la forma simplettica:

$$u^*\omega_0(a, b) = (Jdu(x)a, du(x)b) = (Ja, b) = \omega_0(a, b)$$

Viceversa, se u è un diffeomorfismo che preserva la forma simplettica, se $K = H \circ u$ e X_K è il campo hamiltoniano associato, segue che:

$$\begin{aligned} X_K &= JdK = J^t(du)dH \circ u \\ &= (du)^{-1}JdH \circ u = (du)^{-1}X_H \circ u = u^*X_H \end{aligned}$$

in quanto anche $duJ^t(du) = J$: da ${}^t(du)Jdu = J$ prendendo l'inversa s'ottiene:

$$(du)^{-1}J^t(du)^{-1} = J$$

da cui, moltiplicando per du e ${}^t(du)$, s'ottiene:

$$J = duJ^t(du)$$

Esempio 1.4. Un esempio immediato di diffeomorfismi simplettici è il gruppo delle trasformazioni lineari che preservano la forma ω_0 , ovvero quelle matrici A in $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ tali che ${}^tAJA = J$ (chiameremo queste *matrici simplettiche*); inoltre, come vedremo nella prossima sezione, il flusso associato a un campo hamiltoniano è esso stesso un diffeomorfismo simplettico.

1.3 Varietà simplettiche

Cerchiamo d'estendere i concetti definiti sopra a una varietà differenziabile (finito-dimensionale) M .

Definizione 1.2. Una struttura simplettica su M è una 2-forma ω su M che soddisfa le seguenti:

1. La forma ω è chiusa: $d\omega = 0$.
2. Inoltre è non degenere, quindi per $a \in T_x M$ non nullo esiste $b \in T_x M$ tale che $\omega_x(a, b) \neq 0$.

In questo caso chiameremo (M, ω) una varietà simplettica. È chiaro che $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ per quanto detto prima rispetta i criteri appena dati.

Esempio 1.5. Data una varietà differenziabile (senza bordo e comunque finito-dimensionale) M , il suo fibrato cotangente T^*M ammette una struttura simplettica canonica, ergo esistono una base $\{q_i, p_i\}_{i=1}^n$ di T^*M e una forma simplettica su T^*M della forma:

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$$

Esempio 1.6. La sfera S^2 ammette una struttura simplettica, più precisamente abbiamo la forma simplettica/elemento d'area:

$$\omega_x(\xi, \eta) = (x, \xi \times \eta)_{\mathbb{R}^3}$$

$$\omega_x = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$$

dove $x \in S^2$ e $\xi, \eta \in T_x S^2$, il prodotto $\times$ indica il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ e le parentesi indicano il prodotto scalare euclideo.

La forma è chiaramente antisimmetrica, chiusa (in quanto una 3-forma sul piano è nulla), e non degenera, dato che se $\xi \neq \eta \in T_x S^2$ allora il loro prodotto è parallelo a x .

Proposizione 1.3.1. *Una varietà simplettica (M, ω) ha dimensione pari.*

Dimostrazione. Vediamo che lo spazio tangente $T_x M$ ha dimensione pari.

Sia $a \in T_x M$ un vettore non nullo, da cui esiste b tale che $\omega_x(a, b) = 1$; necessariamente a e b sono linearmente indipendenti, altrimenti essendo ω antisimmetrica sarebbe $\omega_x(a, b) = 0$.

Se $V \subseteq T_x M$ è lo spazio dei vettori v ω -ortogonali ad a e b (ie $\omega_x(a, v) = \omega_x(b, v) = 0$, di conseguenza a e b non sono in V), ripetiamo lo stesso procedimento: sicuramente per $v \neq 0$ in V esiste $w \in V$ tale che $\omega_x(v, w) = 1$, in quanto ω è non degenera e lo spazio generato da a e b è ortogonale a V e comunque non appartiene a V .

Reiteriamo dunque fino ad esaurire tutto $T_x M$: infatti essendo ω non degenera, per ogni sottospazio $W \subset V$ si ha

$$\dim(W) + \dim(W_{\omega^\perp}) = \dim(V)$$

dove $W_{\omega^\perp}$ indica lo spazio dei vettori ω -ortogonali a W .

Così facendo abbiamo ottenuto una base di $T_x M$ composta da coppie di vettori, per cui $T_x M$, e di conseguenza M , ha dimensione pari; di più, abbiamo ottenuto una base composta da delle coppie (f_j, e_j) tali che

$$\omega_x(f_j, e_j) = 1$$

e ogni altro prodotto (per $i \neq j$) vale:

$$\omega_x(f_i, e_j) = \omega_x(f_i, f_j) = \omega_x(e_i, e_j) = 0$$

In questa base si può scrivere, per $a = \sum a_i f_i + a_{i+n} e_i$ e $b = \sum b_i f_i + b_{i+n} e_i$:

$$\omega_x(a, b) = (Ja, b)$$

ergo per ogni x , per una base opportuna, possiamo esprimere ω_x come la forma canonica. $\square$

Osservazione 5. Non tutte le varietà di dimensione pari ammettono una struttura simplettica.

Prendiamo ad esempio la sfera S^{2n} , per $n \geq 2$.

Sia $H_{DR}^k(S^{2n})$ il k -esimo gruppo di coomologia di De Rham, dato dal quoziente delle k -forme chiuse sulle k -forme esatte; dato che $H_{DR}^2(S^{2n}) = 0$, se esistesse una forma simplettica ω su S^{2n} , questa sarebbe anche una forma esatta, quindi esisterebbe una 1-forma α tale che $\omega = d\alpha$.

Dato che $\Omega = \omega^n$ è una forma volume (vedasi l'Osservazione 7 e la sezione 1.3.3), e vale:

$$\Omega = d[\omega \wedge \dots \wedge \omega \wedge \alpha] = d\beta$$

dove nel prodotto compare $n - 1$ volte ω , allora dalla formula di Stokes:

$$\int_{S^{2n}} \Omega = \int_{\partial S^{2n} = \emptyset} \beta = 0$$

Questo è assurdo, per cui S^{2n} non può essere una varietà simplettica.

1.3.1 Teorema di Darboux

Il fatto che la forma ω sia chiusa ci consente di dare un'altra caratterizzazione delle varietà simplettiche:

Teorema 1.3.2 (Darboux). *Sia ω una 2-forma non degenera su una varietà M di dimensione $2n$, si ha allora che ω è chiusa se e solo se per ogni $p \in M$ esistono un suo intorno U e delle coordinate ϕ (definite in un intorno dell'origine in $\mathbb{R}^{2n}$) tali che $\phi(0) = p$ e:*

$$\phi^*\omega = \omega_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$$

Le coordinate sopra scritte non sono uniche, infatti per ogni diffeomorfismo simplettico $u : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ le nuove coordinate $\phi \circ u$, anche se definite in un altro intorno, rispettano comunque:

$$(\phi \circ u)^*\omega = u^*\phi^*\omega = u^*\omega_0 = \omega_0$$

dove abbiamo usufruito del fatto che il pullback è controvariante, ovvero $(\phi \circ u)^* = u^*\phi^*$.

Osservazione 6. Alla luce del teorema possiamo definire una varietà simplettica M (di dimensione $2n$) come una varietà con delle coordinate:

$$\phi_j : U_j \subset M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

tali che i cambi di coordinate:

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_j \cap U_i) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

siano dei diffeomorfismi simplettici in $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$; la forma simplettica ω definita su M sarà data localmente da $\omega_i = \phi_i^*\omega_0$, infatti essendo $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ un diffeomorfismo simplettico si ha:

$$(\phi_j^{-1})^*\omega_i = (\phi_i^{-1})^*\omega_j = \omega_0$$

e dunque:

$$\omega_j = \phi_i^*\omega_0 = \omega_i$$

per cui ha senso definire localmente ω come ω_i .

Ricordiamo che vale in generale per una forma differenziale ω e un diffeomorfismo u :

$$d(u^*\omega) = u^*(d\omega)$$

perciò ω risulta chiusa, e una parte del teorema è automaticamente dimostrata.

Dimostrazione. Lavorando intorno a $p \in M$, possiamo supporre, effettuata una scelta delle coordinate, che $\omega = \omega(z)$ sia definita in un intorno dell'origine in $\mathbb{R}^{2n}$, anzi scelta una base opportuna possiamo scrivere:

$$\omega(0) = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i = \omega_0$$

Prendiamo quindi una forma ω_t ($0 \leq t \leq 1$) interpolante ω e ω_0 :

$$\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0)$$

Cerchiamo una famiglia di diffeomorfismi ϕ_t , determinata come flusso d'un campo opportuno, tale che $\phi_t^*\omega_t = \omega_0$ per ogni $t \in [0, 1]$, da cui per $t = 1$ si ha $\phi_1^*\omega_1 = \phi_1^*\omega = \omega_0$ e, al di là della richiesta che $\phi_1(0) = 0$ di modo che le coordinate ottenute alla fine valgano 0 in p , il teorema è dimostrato. Supponendo che esista una tale famiglia di diffeomorfismi ϕ_t , allora:

$$\frac{d}{dt} [\phi_t^*\omega_t] = 0$$

Ricordiamo la definizione di derivata di Lie d'una forma ω lungo un campo X ; sia ϕ^t il flusso associato a X , allora:

$$L_X\omega := \frac{d}{dt} [(\phi^t)^*\omega] \Big|_{t=0}$$

Valgono in particolare

$$\frac{d}{dt} [(\phi^t)^*\omega] = (\phi^t)^* L_X\omega$$

e la formula di Cartan (che può essere presa a sua volta come definizione della derivata di Lie):

$$L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$$

Sviluppando la derivata di prima otteniamo (indicato con X_t il campo avente ϕ_t come flusso):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\phi_t^*] &= \phi_t^*(L_{X_t}\omega_t + \omega - \omega_0) \\ &= \phi_t^*(i_{X_t}(d\omega_t) + d(i_{X_t}\omega_t) + \omega - \omega_0) \\ &= \phi_t^*(d(i_{X_t}\omega_t) + \omega - \omega_0) = 0\end{aligned}$$

Ora, essendo $\omega - \omega_0$ chiusa, localmente è esatta (per il lemma di Poincaré), ergo in un intorno dell'origine:

$$\omega - \omega_0 = d\lambda$$

dove scegliamo λ tale che $\lambda(0) = 0$.

Notiamo che

$$\omega_t(0) = \omega_0 + t(\omega_0 - \omega_0) = \omega_0$$

dunque restringendo (se necessario) ulteriormente l'intorno dell'origine la forma $\omega_t(z)$ rimane non degenera per $0 \leq t \leq 1$, perciò possiamo determinare un campo X_t da:

$$i_{X_t}\omega_t = \omega_t(X_t, \cdot) = -\lambda$$

Essendo ω_t non degenera e $\lambda(0) = 0$, necessariamente $X_t(0) = 0$, di conseguenza il flusso associato ϕ_t soddisfa $\phi_t(0) = 0$, in quanto $\dot{\phi}_t(0) = X_t(0) = 0$ e $\phi_0(x) = x$. Per costruzione vale (per $0 \leq t \leq 1$):

$$\frac{d}{dt}[\phi_t^*\omega_t] = \phi_t^*(d(i_{X_t}\omega_t + \lambda)) = 0$$

ed essendo $\phi_0^*\omega_{t=0} = \omega_0$ otteniamo appunto $\phi_1^*\omega = \omega_0$.

Se le coordinate scelte all'inizio sono:

$$\psi : 0 \in V \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow p \in U \subset M$$

$$\psi(0) = p$$

allora $\psi \circ \phi_1$ sono le coordinate cercate, infatti $\psi(\phi_1(0)) = p$ e:

$$(\psi \circ \phi_1)^*\omega = \phi_1^*\psi^*\omega = \omega_0$$

dove $\psi^*\omega$ è la forma con cui abbiamo lavorato effettivamente nella dimostrazione del teorema. $\square$

Osservazione 7. L'approccio usato nella dimostrazione è stato impiegato da J.Moser in [11], presentato come alternativa, per classificare delle forme volume su una varietà (connessa, compatta, senza bordo, liscia e comunque di dimensione finita). Più precisamente, una forma volume su una varietà M di dimensione m è una forma ω scrivibile (in coordinate locali) come

$$\omega(x) = c(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$$

dove $c(x) > 0$; il teorema dimostrato da Moser quindi dice che se α e β sono due forme volume su M , tali che i loro volumi coincidono (ie $\int_M \alpha = \int_M \beta$), allora esiste un diffeomorfismo $u : M \rightarrow M$ tale che $u^*\alpha = \beta$; altrimenti, se $\int_M \alpha = \lambda \int_M \beta$ per qualche $\lambda > 0$, segue che $u^*\alpha = \lambda\beta$.

La definizione di pullback rimane invariata in questo caso più generale, anzi se $u : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo tra due varietà, e ω è una k -forma definita su N , allora la forma $u^*\omega$ definita su M è:

$$(u^*\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega_{u(x)}(du(x)\xi_1, \dots, du(x)\xi_k)$$

Osservazione 8. Dal teorema di Darboux otteniamo che localmente ogni varietà simplettica di dimensione $2n$ può essere vista come lo spazio $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, ergo localmente le varietà simplettiche con la stessa dimensione sono indistinguibili tra loro, per cui la dimensione è l'unico invariante simplettico locale, mentre le varietà riemanniane hanno come invariante locale la curvatura (oltre la dimensione).

1.3.2 Campi hamiltoniani su varietà

Sia (M, ω) una varietà simplettica di dimensione $2n$, e supponiamo sia data un'hamiltoniana $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, allora seguendo la definizione precedente definiamo il campo hamiltoniano X_H con:

$$i_{X_H}\omega = \omega(X_H, \cdot) = -dH$$

dove, come prima, usiamo il fatto che ω sia non degenere. Usando la formula di Cartan $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ assieme al fatto che ω sia chiusa, otteniamo:

$$L_{X_H}\omega = d(i_{X_H}\omega) + i_{X_H}(d\omega) = -ddH = 0$$

Dunque se ϕ^t è il flusso associato a X_H , scriviamo:

$$\frac{d}{dt} [(\phi^t)^* \omega] = (\phi^t)^* L_{X_H} \omega = 0$$

In conclusione abbiamo ottenuto:

$$(\phi^t)^* \omega = (\phi^0)^* \omega = \omega$$

In altre parole il flusso hamiltoniano è un diffeomorfismo simplettico; è chiaro che in questo quadro più generale un diffeomorfismo $u : M \rightarrow M$ è detto simplettico se preserva la forma simplettica ω di M , similmente se (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) sono due varietà simplettiche la trasformazione $u : M_1 \rightarrow M_2$ è detta simplettica se

$$u^* \omega_2 = \omega_1$$

Dato che la forma

$$\omega_{1,x}(a, b) = (u^* \omega_2)_x(a, b) = \omega_{2,u(x)}(du(x)a, du(x)b)$$

è non degenera, per ogni $a \neq 0$ dovrà essere $du(x)a \neq 0$, ergo $du(x)$ è iniettiva per ogni x , di conseguenza $\dim(M_1) \leq \dim(M_2)$.

Come nel caso di $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, i diffeomorfismi simplettici $u : M \rightarrow M$ possono essere caratterizzati da:

Proposizione 1.3.3. *Data una varietà simplettica (M, ω) , un diffeomorfismo simplettico $u : M \rightarrow M$ è tale se e solo se per ogni hamiltoniana $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ il pullback di X_H è ancora un campo hamiltoniano X_K , ie $u^* X_H = X_K$, dove $K = H \circ u$.*

Dimostrazione. Prima di procedere notiamo che se ω è una k -forma su una varietà N_1 , $u : N_2 \rightarrow N_1$ un diffeomorfismo, e $X : N_1 \rightarrow TN_1$ è un campo su N_1 , allora:

$$\begin{aligned} (i_{u^* X} (u^* \omega))_x (\xi = (\xi_2, \dots, \xi_k)) &= (u^* \omega)_x (u^* X(x), \xi_2, \dots, \xi_k) \\ &= \omega_{u(x)} (du(x) u^* X(x), du(x) \xi_2, \dots, du(x) \xi_k) \\ &= \omega_{u(x)} (du(x) (du(x))^{-1} X \circ u(x), du(x) \xi_2, \dots, du(x) \xi_k) \\ &= \omega_{u(x)} (X \circ u(x), du(x) \xi_2, \dots, du(x) \xi_k) = (u^* (i_X \omega))_x (\xi) \end{aligned}$$

o più compattamente

$$i_{u^*X}(u^*\omega) = u^*(i_X\omega)$$

Sia ora u un diffeomorfismo simplettico, H e $K = H \circ u = u^*H$ come detto prima, allora:

$$\begin{aligned} i_{X_K}\omega &= -dK = -d(u^*H) \\ &= -u^*(dH) = u^*(i_{X_H}\omega) \\ &= i_{u^*X_H}(u^*\omega) = i_{u^*X_H}\omega \end{aligned}$$

per cui $X_K = u^*X_H$, in quanto ω è non degenere. Il viceversa s'ottiene facilmente dall'ultima uguaglianza (sostituiamo X_K al posto di u^*X_H):

$$i_{X_K}\omega = i_{X_K}(u^*\omega)$$

□

1.3.3 Forme volume

Una varietà simplettica (M, ω) (di dimensione $2n$) possiede una nozione di volume naturale, data da:

$$\mu = \omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega \quad (n \text{ volte})$$

Nel caso di $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, uno computa facilmente

$$\begin{aligned} \omega_0^n &= \sum dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \wedge dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_n} \\ &= n! dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ &= n! dx \wedge dy \end{aligned}$$

e dato che ω^n è localmente scrivibile come ω_0^n , effettivamente è una forma volume.

Se $u : M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo simplettico, preserva anche il volume $\mu = \omega^n$, ergo i diffeomorfismi simplettici sono una particolare classe dei diffeomorfismi che preservano il volume. In particolare un flusso hamiltoniano

ϕ^t , essendo un diffeomorfismo симпlico, preserva il volume; questo risultato è noto come teorema di Liouville.

Abbiamo già visto che, localmente, l'unico invariante симпlico è la dimensione, un esempio invece di invariante globale è il volume; siano infatti (M, ω_1) e (N, ω_2) due varietà симпliche di dimensione $2n$, indichiamo con $\Omega_1 = \omega_1^n$ e $\Omega_2 = \omega_2^n$ le rispettive forme volume, allora se esiste un diffeomorfismo симпlico $u : M \rightarrow N$, vale $u^*\Omega_2 = \Omega_1$, quindi u preserva l'orientazione, per cui i volumi di M e N coincidono:

$$\int_M \Omega_1 = \int_M u^*\Omega_2 = \int_{u(M)=N} \Omega_2$$

Nel caso particolare $n = 1$, ovvero M e N sono due varietà симпliche di dimensione 2, le forme симпliche coincidono con le forme volume indotte ($\Omega_1 = \omega_1$ e $\Omega_2 = \omega_2$), in questo caso i diffeomorfismi симпlici sono identificabili con quelli che preservano il volume; dato che due superficie (intese come varietà di dimensione 2) sono diffeomorfe se hanno la stessa caratteristica di Eulero, grazie al teorema di Moser possiamo classificare le varietà симпliche di dimensione 2 in base alla caratteristica di Eulero e il loro volume.

Richiamiamo il teorema:

Teorema 1.3.4 (Moser [11]). *Sia M una varietà (di dimensione finita n) orientata, connessa, compatta, liscia e senza bordo, allora date due forme volume μ e ν su M , esiste un diffeomorfismo $u : M \rightarrow M$ tale che $u^*\mu = \nu$ se e solo se i loro volumi coincidono:*

$$\int_M \mu = \int_M \nu$$

altrimenti se $(\int_M \mu / \int_M \nu) = \lambda$ segue $u^\mu = \lambda\nu$. Similmente, se M ed N sono due varietà diffeomorfe tra loro che soddisfano le ipotesi sopra scritte, date due forme volume μ e ν rispettivamente su M e N , allora esiste un diffeomorfismo $u : N \rightarrow M$ tale che $u^*\mu = \nu$ se e solo se*

$$\int_M \mu = \int_N \nu$$

In altre parole l'unico invariante dei diffeomorfismi che preservano il volume è il volume stesso.

Dimostrazione. Definiamo la forma interpolante come:

$$\mu_t = (1 - t)\mu + t\nu$$

per $0 \leq t \leq 1$. Localmente (indicato $x = (x_1, \dots, x_n)$) possiamo scrivere $\mu(x) = a(x)dx$ e $\nu = b(x)dx$, dove a e b sono positive e non nulle, per cui

$$\mu_t = ((1 - t)a(x) + tb(x)) dx$$

dunque μ_t è una forma volume a sua volta, e il volume:

$$\int_M \mu_t = \int_M \mu = \int_M \nu$$

è costante.

Come nella dimostrazione del teorema di Darboux cerchiamo una famiglia di diffeomorfismi ϕ^t determinata come flusso d'un opportuno campo X_t , tale che $\phi^0 = Id$ e $(\phi^t)^* \mu_t = \mu$ per $0 \leq t \leq 1$.

Deriviamo l'espressione $(\phi^t)^* \mu_t = \mu$; le forme volume sono ovviamente chiuse, perciò otteniamo come prima:

$$\frac{d}{dt} [(\phi^t)^* \mu_t] = (\phi^t)^* (L_{X_t} \mu_t + \dot{\mu}_t) = (\phi^t)^* (d(i_{X_t} \mu_t) + \nu - \mu) = 0$$

Dato che $\nu - \mu$ è chiusa e $\int_M \nu - \mu = 0$, per le ipotesi su M abbiamo per qualche $(n - 1)$ -forma γ :

$$\nu - \mu = d\gamma$$

in quanto $H_{DR}^n(M) \cong \mathbb{R}$, dove l'isomorfismo è appunto $F(\omega) = \int_M \omega$.

È chiaro che le forme volume sono non degeneri, per cui è univocamente determinato un campo X_t da:

$$i_{X_t} \mu_t = -\gamma$$

Dunque, se ϕ^t è il flusso associato a X_t , allora soddisfa:

$$\frac{d}{dt} [(\phi^t)^* \mu_t] = (\phi^t)^* (d(i_{X_t} \mu_t) + \nu - \mu) = (\phi^t)^* (d(-\gamma + \gamma)) = 0$$

Di conseguenza $(\phi^1)^* \mu = (\phi^0)^* \nu = \nu$ e il teorema è dimostrato.

□

Capitolo 2

Orbite periodiche su una superficie d'energia fissata

Abbiamo già visto, nel caso autonomo, che l'energia è un integrale delle equazioni canoniche. Rivediamo questo risultato in un'altra maniera: sia $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ un'hamiltoniana, X_H il campo hamiltoniano corrispondente con flusso ϕ^t , allora:

$$(\phi^t)^* H = H \circ \phi^t = H \quad (2.1)$$

Infatti derivando s'ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [H \circ \phi^t] &= (dH \circ \phi^t) \cdot \dot{\phi}^t = (dH \circ \phi^t) \cdot X_H \circ \phi^t \\ &= -(i_{X_H \circ \phi^t} \omega_0) \cdot X_H \circ \phi^t = -\omega_0(X_H \circ \phi^t, X_H \circ \phi^t) = 0 \end{aligned}$$

Indichiamo l'insieme d'energia al livello c con:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : H(x) = c\}$$

Abbiamo da (2.1) che S è invariante sotto il flusso ϕ^t (ie $\forall t \phi^t(S) \subset S$).

Supponiamo che S sia regolare (ie $dH(x) \neq 0$ per $x \in S$), in questo caso S è un'ipersuperficie (una varietà di codimensione 1) di $\mathbb{R}^{2n}$ e X_H è un campo su S che non s'annulla mai. Dato che:

$$T_x S = \{v \in \mathbb{R}^{2n} : dH(x)v = 0\}$$

e:

$$dH(x)X_H(x) = -(i_{X_H}\omega_0)_x X_H(x) = -\omega_0(X_H(x), X_H(x)) = 0$$

sicuramente $X_H(x) \in T_x S$ per $x \in S$, e dalla definizione $i_{X_H}\omega_0 = -dH$ si ricava appunto che $X_H(x) \neq 0$ per $x \in S$.

Il flusso hamiltoniano su S è in generale molto complicato, in quanto un campo hamiltoniano, quindi un sistema hamiltoniano autonomo, rappresenta un sistema dinamico *senza frizione*, e, come ci si può aspettare dal teorema di Liouville, le ampiezze delle oscillazioni non decrescono mai; ciò nonostante il flusso è caratterizzato da forti proprietà di ricorrenza, come dimostrato in un celebre risultato di Poincaré.

2.1 Teorema di ricorrenza di Poincaré

Sia $\Omega = \omega_0^n$ la forma volume descritta prima, supponiamo di lavorare su una superficie d'energia S regolare e compatta, perciò da $dH(x) \neq 0$ (su S) esiste una $(2n-1)$ -forma α tale che:

$$\Omega = dH \wedge \alpha$$

in un intorno U di S . Se $j : S \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ è la mappa d'inclusione, definiamo una forma volume su S con:

$$\mu = j^* \alpha$$

È chiaro che se localmente $\mu = a(x)dx$ dovrà essere $a \neq 0$ in quanto Ω è una forma volume, e se $a < 0$ consideriamo invece una forma $\beta = -\alpha$ tale che $\beta \wedge dH = -\alpha \wedge dH = dH \wedge \alpha = \Omega$.

La forma μ non dipende dalla scelta di α , infatti se α e β soddisfano $\Omega = dH \wedge \alpha = dH \wedge \beta$ allora:

$$dH \wedge (\alpha - \beta) = 0$$

Dunque possiamo scrivere, per una qualche $(2n-2)$ -forma γ su U :

$$\alpha - \beta = dH \wedge \gamma$$

Per definizione stessa di $T_x S$ vale $j^* dH = 0$, quindi:

$$\mu = j^* \alpha = j^* \beta + j^* (dH \wedge \gamma) = j^* \beta$$

Il flusso ϕ^t preserva anche questa forma volume su S : per definizione $(\phi^t)^* dH = dH$, e dal teorema di Liouville $(\phi^t)^* \Omega = \Omega$, per cui:

$$\Omega = dH \wedge (\phi^t)^* \alpha$$

Per quanto appena detto:

$$\mu = j^* \alpha = j^* (\phi^t)^* \alpha = (\phi^t \circ j)^* \alpha$$

ma $\phi^t \circ j = j \circ \phi^t$, perciò:

$$\mu = (\phi^t \circ j)^* \alpha = (j \circ \phi^t)^* \alpha = (\phi^t)^* (j^* \alpha) = (\phi^t)^* \mu$$

Indichiamo la misura associata a μ con $m(A) = \int_A \mu$, è chiaro che:

$$m(\phi^t(A)) = \int_{\phi^t(A)} \mu = \int_A (\phi^t)^* \mu = \int_A \mu = m(A)$$

ed essendo S compatta $m(S) < +\infty$.

Possiamo enunciare ora:

Teorema 2.1.1 (di ricorrenza di Poincaré). *Sia S una superficie d'energia, regolare e compatta, del campo hamiltoniano X_H , allora quasi ogni punto $x \in S$ (rispetto alla misura m) è un punto ricorrente del flusso associato ϕ^t , cioè esiste una successione monotona crescente $t_j \rightarrow +\infty$ tale che:*

$$\phi^{t_j}(x) \rightarrow x$$

per $j \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Sia ϕ la deformazione data dal flusso all'istante $t = 1$ (ie $\phi(x) = \phi^1(x)$), vogliamo dimostrare che per ogni $A \subset S$:

$$m\left(A \cap \left[\bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{j \geq 0} \phi^{-j}(A)\right]\right) = m(A) \quad (2.2)$$

Per chiarezza ϕ^j è la mappa ϕ iterata j volte, e $\phi^{-j}(A)$ è la preimmagine di A rispetto a ϕ^j .

L'insieme a sinistra dell'equazione è costituito da quei punti $x \in A$ tali che per ogni $k \geq 0$ esiste $j \geq k$ per cui $\phi^j(x) \in A$, in altre parole sono quei punti in A che ritornano infinite volte in A .

Indichiamo per comodità:

$$A_k = \bigcup_{j \geq k} \phi^{-j}(A)$$

Ovviamente si ha:

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

e:

$$\phi^k(A_k) = \bigcup_{j \geq k} \phi^{k-j}(A) = \bigcup_{i=j-k \geq 0} \phi^{-i}(A) = A_0$$

Ricordando che la misura m è invariante sotto ϕ , necessariamente vale per ogni k :

$$m(A_0) = m(\phi^k(A_k)) = m(A_k)$$

Dato che $m(A_0) \leq m(S) < +\infty$, per ogni k vale $A_0 = A_k$ quasi dappertutto, di conseguenza $A_0 = \bigcap_{k \geq 0} A_k$ quasi dappertutto, e da $A \subset A_0$ otteniamo:

$$A \cap \bigcap_{k \geq 0} A_k = A \cap A_0 = A \quad \text{quasi dappertutto}$$

perciò l'uguaglianza (2.2) è dimostrata.

Ora, essendo S sottospazio topologico di $\mathbb{R}^{2n}$, è secondo-numerabile (*second-countable*), ergo esiste una base al più numerabile di S , in particolare prendiamo come base:

$$\left\{ B_{\frac{1}{n}}(x_j) \right\} \quad j \in J, n \in \mathbb{N}^*$$

dove $B_{1/n}(x_j)$ indica la palla in S di raggio $\frac{1}{n}$ centrata in x_j , e questa base è indicizzata in un insieme al più numerabile J (dalla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ è chiaro che esiste una tale base di $\mathbb{R}^{2n}$, quindi a fortiori di S).

Sia $x \in S$, $U \subset S$ un suo intorno, per certe n e j si ha $x \in B_{1/n}(x_j) \subset U$; per quanto detto prima se $B = B_{1/n}(x_j)$ per ogni $k \geq 0$ esiste $i \geq k$ tale che (in quanto $m(B \cap \bigcap \bigcup \phi^{-l}(B)) = m(B) \neq 0$):

$$\emptyset \neq B \cap \phi^i(B) \subset U \cap \phi^i(U)$$

che è la definizione d'un punto *non-wandering*. Di più, sempre da (2.2) applicato a ogni palla della base, quasi ogni x ritorna infinite volte in ogni palla alla quale appartiene, quindi per ogni n possiamo prendere $i(n) \geq 1$ tale che $\phi^{i(n)}(x) \in B_{1/n}(x_j)$ (dove $x \in B_{1/n}(x_j)$) e la successione $i(n)$ sia monotona crescente (basta considerare che per $k \geq i(n) + 1$ esiste $i \geq k$ tale che $\phi^i(x) \in B_{1/(n+1)}(x_l)$, dove è inteso che x appartiene alla palla suddetta); la successione $\phi^{i(n)}(x)$ converge a x , infatti se $d(x, y)$ indica la distanza tra x e y :

$$d(\phi^{i(n)}(x), x) \leq d(\phi^{i(n)}(x), B_{1/n}(x_j)) + d(B_{1/n}(x_j), x) \leq \frac{2}{n}$$

e il teorema è così dimostrato. $\square$

2.2 Un primo teorema d'esistenza

Dato che quasi ogni punto x sulla superficie d'energia S è ricorrente, è naturale chiedersi quando l'orbita $\phi^t(x)$ al posto di chiudersi all'infinito si chiude in tempo finito, ergo quando x è un punto periodico. Ancora uno può domandarsi se è possibile effettuare una perturbazione di modo che un punto ricorrente (o più generalmente *non-wandering*) diventi un punto periodico per la perturbazione considerata; questo genere di risultati prendono il nome di *closing lemma*, in particolare è stato dimostrato da C.Pugh e C.Robinson in [1] che, su una superficie d'energia compatta e regolare, è possibile perturbare in maniera $\mathcal{C}^1$ un campo hamiltoniano chiudendo così l'orbita associata a un punto ricorrente.

Quanto vedremo è un risultato del primo tipo, dovuto originariamente ad A.Weinstein ([12]), ma seguiremo una dimostrazione alternativa data da F.Clarke in [2].

Ricordiamo intanto che il problema di trovare soluzioni su una certa superficie d'energia non dipende dalla scelta dell'hamiltoniana, ma solo dalla superficie stessa.

Proposizione 2.2.1. *Sia S una superficie d'energia regolare, descritta da due hamiltoniane H e H' (entrambe almeno $\mathcal{C}^2$) come:*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : H(x) = c\} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : H'(x) = c'\}$$

allora per ogni soluzione delle equazioni canoniche associate a H esiste una sua riparametrizzazione che è una soluzione del sistema associato a H' (e viceversa); in particolare a ogni soluzione periodica è associata un'altra soluzione periodica.

Dimostrazione. Dato che S è regolare, da $dH(x) \neq 0$ e $dH' \neq 0$ su S otteniamo:

$$dH(x) = \rho(x)dH'(x)$$

dove ρ è una funzione $\mathcal{C}^1$ che non s'annulla su S . Ne segue che i campi hamiltoniani associati sono paralleli tra loro (su S):

$$X_H(x) = \rho(x)X_{H'}(x)$$

e quindi hanno le stesse orbite su S . Più precisamente, siano $\phi^t(x)$ il flusso associato a X_H , e $t(s) = t(s, x)$ la soluzione di:

$$\begin{aligned}\dot{t}(s) &= \rho(\phi^{t(s)}(x)) \\ t(0) &= 0\end{aligned}$$

Derivando $\phi^{t(s)}(x)$ si ha che:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} [\phi^{t(s)}(x)] &= X_H(\phi^{t(s)}(x)) \dot{t}(s) \\ &= X_H(\phi^{t(s)}(x)) \rho(\phi^{t(s)}(x)) = X_{H'}(\phi^{t(s)}(x))\end{aligned}$$

In conclusione $\phi^{t(s)}(x)$ è appunto il flusso associato a $X_{H'}$. □

Vogliamo fare un'importante distinzione sul concetto di soluzione.

Definizione 2.1. Data un'hamiltoniana $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, indichiamo l'azione associata con:

$$I(x = (q, p)) = \int_0^T p\dot{q} - H(q, p) dt = \int_0^T \frac{1}{2} (Jx, \dot{x})_{\mathbb{R}^{2n}} - H(x) dt$$

sui moti $x = x(t)$ definiti in $[0, T]$.

Un moto $x = x(t)$ è detto *soluzione classica*, se risolve il sistema hamiltoniano:

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t))$$

puntualmente, e se è di classe $\mathcal{C}^1$.

Diremo invece che $x = x(t)$ è una *soluzione debole*, se per ogni funzione *test*, ad esempio per ogni mappa $\phi \in \mathcal{C}^\infty([0, T], \mathbb{R}^{2n})$ a supporto compatto:

$$\int_0^T - (x(t), \dot{\phi}(t))_{\mathbb{R}^{2n}} dt = \int_0^T (J\nabla H(x(t)), \phi(t))_{\mathbb{R}^{2n}} dt$$

Equivalentemente x è una soluzione debole se è un punto critico dell'azione.

Ovviamente una soluzione classica è sempre una soluzione debole del problema.

Osservazione 9. Se si considerano invece dei moti periodici (di periodo T), nella definizione di soluzione debole consideriamo come funzioni test le mappe $\mathcal{C}^\infty$ periodiche (di periodo T).

Vediamo ora il teorema:

Teorema 2.2.2. *Sia $S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : H(x) = c\}$ una superficie d'energia (compatta e regolare), dove $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, tale che sia il bordo d'una regione compatta e strettamente convessa C contenente l'origine, allora esiste una soluzione periodica del sistema di Hamilton associato a H .*

Per dimostrare il teorema useremo il principio dell'azione duale: l'azione, definita ad esempio sui moti periodici $\mathcal{C}^1$ di periodo T , è scrivibile come:

$$I(x = (q, p)) = \int_0^T p\dot{q} - H(q, p) dt = \int_0^T \frac{1}{2} (Jx, \dot{x})_{\mathbb{R}^{2n}} - H(x) dt$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange per I non sono nient'altro che le equazioni canoniche, quindi siamo interessati a trovare delle soluzioni di $I'(x) = 0$, che saranno soluzioni deboli del problema, usando i metodi classici del calcolo variazionale.

Sfortunatamente questo funzionale non è limitato (né dal basso né dall'alto), ad esempio per:

$$x_k = (\sin kt, \cos kt)$$

(stiamo considerando i moti di periodo 2π in $\mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{Z}$) l'azione vale:

$$I(x_k) = k\pi + \mathcal{O}(1)$$

dove $\int_0^{2\pi} H(x_k) dt = \mathcal{O}(1)$ in quanto per ogni k e t si ha $H(x_k) \in S^1$; facendo tendere $k \rightarrow \pm\infty$ otteniamo appunto che $\sup I = +\infty$ e $\inf I = -\infty$.

Sia $v = -Jx$, possiamo riscrivere l'azione così:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1}{2} (Jx, \dot{x}) - H(x) dt &= \int_0^T \frac{1}{2} (\dot{v}, x) - H(x) dt \\ &= \int_0^T -\frac{1}{2} (\dot{v}, x) + (\dot{v}, x) - H(x) dt = \int_0^T \frac{1}{2} (J\dot{v}, v) + (\dot{v}, x) - H(x) dt \end{aligned}$$

Indichiamo ora con:

$$G(z) = \sup_{x \in \mathbb{R}^{2n}} \{z \cdot x - H(x)\}$$

la trasformata di Legendre di H rispetto a *entrambe* le variabili $x = (q, p)$, questo a differenza della costruzione dell'hamiltoniana dove si effettua la trasformata rispetto a una sola variabile, dunque vedendo l'espressione $(\dot{v}, x) - H(x)$ uno è portato a sostituirla con $G(\dot{v})$, ottenendo in questo modo un nuovo funzionale, nominalmente l'azione duale:

$$J(v) = \int_0^T G(\dot{v}) - \frac{1}{2} (Jv, \dot{v}) dt$$

Sotto opportune ipotesi su H , questa nuova azione è inferiormente limitata e perciò possiamo recuperare i metodi classici del calcolo variazionale per trovare degli estremali $J(v)$, per poi ricavare da questi delle soluzioni del problema di partenza.

Dimostrazione. Definiamo $\lambda = \lambda(x)$ per $x \in \mathbb{R}^{2n}$ come quell'unico numero reale non negativo tale che $\lambda^{-1}x = \xi \in S$ (tale λ esiste ed è unico in quanto S è stellata rispetto all'origine), equivalentemente possiamo vedere λ come la funzione di *gauge* di C :

$$\lambda(x) = j_C(x) = \min \{ \lambda : \lambda^{-1}x \in C \} \quad (2.3)$$

In ogni caso poniamo nell'origine $\lambda(0) = 0$.

Questa funzione è chiaramente omogenea di grado 1, inoltre è subadditiva, infatti preso $\varepsilon > 0$ ancora:

$$(\lambda(x) + \varepsilon)^{-1} x \in C \quad (\lambda(y) + \varepsilon)^{-1} y \in C$$

dunque per $t \in [0, 1]$:

$$t \frac{x}{\lambda(x) + \varepsilon} + (1 - t) \frac{y}{\lambda(y) + \varepsilon} \in C$$

Scegliendo in particolare

$$t = \frac{\lambda(x) + \varepsilon}{\lambda(x) + \lambda(y) + 2\varepsilon}$$

otteniamo:

$$\frac{x}{\lambda(x) + \lambda(y) + 2\varepsilon} + \frac{\lambda(y) + \varepsilon}{\lambda(x) + \lambda(y) + 2\varepsilon} \frac{y}{\lambda(y) + \varepsilon} = \frac{x + y}{\lambda(x) + \lambda(y) + 2\varepsilon} \in C$$

Dalla definizione di j_C e dall'arbitrarietà di ε segue appunto $\lambda(x + y) \leq \lambda(x) + \lambda(y)$; da questa assieme all'omogeneità di λ deduciamo subito che λ è anche convessa.

Dato che $H \in \mathcal{C}^2$ e $dH \neq 0$ su S , dal teorema della funzione implicita si ha che $\lambda \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$, e possiamo rappresentare:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \lambda(x) = 1\}$$

Sfortunatamente questa funzione non è strettamente convessa, infatti dalla formula di Eulero $\lambda'(x) \cdot x = \lambda(x)$ segue derivando che $\lambda''(x) \cdot x = 0$, quindi consideriamo invece $F(x) = (\lambda(x))^2$.

Questa nuova funzione è chiaramente ancora $\mathcal{C}^2$ al di fuori dell'origine, vale 0 in essa, ed è omogenea di grado 2. Deriviamo due volte F :

$$F'(x) = 2\lambda(x)\lambda'(x)$$

$$F''(x) = 2\lambda(x)\lambda''(x) + 2\lambda'(x)^t\lambda'(x)$$

Dunque se $v \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$:

$${}^t_v F''(x)v = 2\lambda(x) \left({}^t_v \lambda''(x)v \right) + 2|\lambda'(x) \cdot v|^2$$

Sempre da $\lambda'(x) \cdot x = \lambda(x)$, è chiaro che $\lambda'(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, dimostrando così che $F''(x) > 0$ (è definita positiva) per $x \neq 0$, garantendo infine che F è strettamente convessa.

Ricapitolando, possiamo rappresentare $S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : F(x) = 1\}$, dove F è $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$, strettamente convessa e omogenea di grado 2; per quanto detto precedentemente, ci basta trovare delle soluzioni periodiche associate a F per dimostrare il teorema.

Ora, se $x(t)$ è una soluzione periodica di periodo T di $\dot{x} = J\nabla F(x)$ e poniamo $\lambda = \frac{T}{2\pi}$, allora detta $\xi(t) = x(\lambda t)$ questa risolve l'equazione:

$$\dot{\xi} = \lambda J\nabla F(\xi) \quad (2.4)$$

e ha periodo 2π , quindi concentriamo l'attenzione sui moti periodici di periodo 2π che per qualche $\lambda > 0$ risolvono (2.4).

Possiamo vedere (2.4) come equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale

$$I(x = (q, p), \lambda \in \mathbb{R}) = \int_0^{2\pi} F(x) dt - \lambda \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (Jx, \dot{x}) dt - 1 \right)$$

a cui è associato il problema variazionale (consideriamo come esempio il problema di trovare i punti di minimo):

$$\min \int_0^{2\pi} F(x) dt$$

$$\text{sotto } \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (Jx, \dot{x}) dt = \int_0^{2\pi} p\dot{q} dt = 1$$

Grazie a quest'ultima condizione stiamo scartando fin da subito i moti periodici banali, e comunque trovata una soluzione x di questo problema ci basta moltiplicare questa per un'opportuna costante affinché appartenga effettivamente ad S .

Come detto prima per $\min \int H(x) dt$, questo funzionale non ammette punti di minimo o massimo, ad esempio (in $\mathbb{R}^2$) prese:

$$x_k = \left(\sqrt{k} \sin \frac{t}{k}, \sqrt{k} \cos \frac{t}{k} \right)$$

dove $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, queste soddisfano il vincolo $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (Jx, \dot{x}) dt = 1$, ma:

$$2\pi k \min_{|y|=1} F(y) \leq \int_0^{2\pi} F(x) dt \leq 2\pi k \max_{|y|=1} F$$

perciò $\inf \int F(x) = -\infty$ e $\sup \int F(x) = +\infty$.

Guardiamo quindi alla formulazione duale di questo problema. Sia:

$$G(y) = \max_{x \in \mathbb{R}^{2n}} \{y \cdot x - F(x)\}$$

La trasformata è definita per ogni $y \neq 0$ in quanto:

$$y \cdot x - F(x) \leq \left(y - \left(\max_{S^1} F \right) x \right) \cdot x$$

ed essendo F strettamente convessa esiste ed è unico il punto x tale che $G(y) = y \cdot x - F(x)$; è chiaro che $G(0) = 0$, e per quanto detto precedentemente $G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$, è omogenea di grado 2 e chiaramente è positiva al di fuori dell'origine.

Ricordando che $G'(y) = x$, dove $G(y) = y \cdot x - F(x)$, e vale $F'(x) = y$, uno ricava derivando:

$$F''(x(y))x'(y) = F''(x)G''(y) = Id_{\mathbb{R}^{2n}}$$

Segue che $G''(y) > 0$ per $y \neq 0$, ergo anche G è strettamente convessa.

Il principio variazionale che vogliamo studiare è dunque il seguente:

$$\min \int_0^{2\pi} G(\dot{z}) dt$$

$$\text{sotto } \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (Jz, \dot{z}) dt = 1$$

Questo minimo sarà cercato su dei moti periodici di media nulla:

$$\mathcal{F} = \left\{ z \in H^1(S^1) : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z = 0 \right\}$$

dove $H^1(S^1)$ è lo spazio di Sobolev (la derivata $\dot{z}$ è intesa in senso debole):

$$H^1(S^1) = W^{1,2}(S^1) = \{z \in L^2(S^1) : \dot{z} \in L^2(S^1)\}$$

Dato che per ogni $z \in H^1(S^1)$ esiste $\bar{z} \in \mathcal{C}(S^1)$ uguale quasi dappertutto a z , supporremo di lavorare con funzioni continue, inoltre vale per queste il teorema fondamentale del calcolo integrale $\int_{t_1}^{t_2} \dot{z} dt = \bar{z}(t_2) - \bar{z}(t_1)$.

Indichiamo:

$$\mathcal{A} = \left\{ z \in \mathcal{F} : \int_0^{2\pi} (Jz, \dot{z}) dt = 2 \right\}$$

Vogliamo verificare che $I(z) = \int_0^{2\pi} G(\dot{z}) dt$ sia inferiormente limitata su $\mathcal{A}$.

Scriviamo l'espansione in serie di Fourier su $\mathcal{A}$:

$$z = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} z_k e^{ikt}$$

Il coefficiente $z_0 = 0$ in quanto $\int_0^{2\pi} z dt = 0$, dunque:

$$\|z\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |z_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |k z_k|^2 = \|\dot{z}\|_{L^2}^2$$

perciò dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz s'ottiene:

$$\begin{aligned} 2 &= \int_0^{2\pi} (Jz, \dot{z}) dt \leq \|Jz\|_{L^2} \|\dot{z}\|_{L^2} \\ &= \|z\| \|\dot{z}\| \leq \|\dot{z}\|^2 \end{aligned}$$

Dalla stima $\varepsilon |\dot{z}|^2 \leq G(\dot{z})$, dove $0 < \varepsilon = \inf_{|z|=1} G(z)$, segue:

$$\int_0^{2\pi} G(\dot{z}) dt \geq \varepsilon \|\dot{z}\|^2 \geq 2\varepsilon > 0$$

quindi non solo $I(z)$ è inferiormente limitata su $\mathcal{A}$, ma:

$$\inf_{\mathcal{A}} I = \mu > 0$$

Prendiamo ora una successione minimizzante $z_k \in \mathcal{A}$ (ie $I(z_k) \rightarrow \mu$); dato che $I(z_k) \geq \varepsilon \|\dot{z}_k\|$ otteniamo per qualche $M > 0$:

$$2 \leq \|\dot{z}_k\|^2 \leq M^2$$

e da $\|z_k\| \|\dot{z}_k\| \geq 2$:

$$\|z_k\| \geq \frac{2}{\|\dot{z}_k\|} \geq \frac{2}{M}$$

Dalla diseguaglianza $\|z_k\| \leq \|\dot{z}_k\|$ segue:

$$\frac{2}{M} \leq \|z_k\| \leq M$$

Come conseguenza del teorema di Banach-Alaoglu le palle in uno spazio di Hilbert sono compatte rispetto alla topologia debole, dunque, essendo z_k limitata in $H^1(S^1)$, esiste una sotto-successione (che indicheremo sempre con z_k) tale che:

$$z_k \rightharpoonup z^* \in H^1(S^1)$$

La (sotto)successione z_k è anche equicontinua, infatti:

$$\begin{aligned} |z_k(t_2) - z_k(t_1)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{z}_k(s) ds \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} |\dot{z}_k(s)| ds \leq \|\dot{z}_k\| |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

perciò possiamo applicare il teorema di Ascoli-Arzelà per ricavare una (sotto)sotto-successione z_k e una mappa $\bar{z} \in \mathcal{C}(S^1)$ tale che:

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} |z_k(t) - \bar{z}(t)| \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

Le due funzioni z^* e $\bar{z}$ sono uguali quasi dappertutto, infatti prendendo la norma L^2 :

$$\|z^* - \bar{z}\|^2 = (z^* - \bar{z}, z^* - \bar{z})_{L^2} = (z_k - \bar{z}, z^* - \bar{z}) + (z^* - z_k, z^* - \bar{z}) \rightarrow 0$$

Il secondo termine a destra converge a 0 in quanto $z_k \rightharpoonup z^*$, mentre il primo tende a 0 per la convergenza uniforme di z_k . Sempre dalla convergenza uniforme è chiaro che il valor medio di $z^* =_{qd} \bar{z}$ è nullo:

$$\left| \int_0^{2\pi} z^* dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |z^* - z_k| dt \leq 2\pi \sup_t |z^* - z_k|$$

e scrivendo:

$$2 = \int_0^{2\pi} (Jz_k, \dot{z}_k)_{\mathbb{R}^{2n}} dt = \int_0^{2\pi} (J(z_k - z^*), \dot{z}_k) dt + \int_0^{2\pi} (Jz^*, \dot{z}_k) dt$$

s'ottiene che il primo termine a destra tende a 0 da (2.5) e da $\|\dot{z}_k\| \leq M$, mentre, in virtù della convergenza debole:

$$\int_0^{2\pi} (Jz^*, \dot{z}_k) dt \rightarrow \int_0^{2\pi} (Jz^*, \dot{z}^*) dt$$

perciò:

$$\int_0^{2\pi} (Jz^*, \dot{z}^*) dt = 2$$

e $z^* \in \mathcal{A}$.

Verifichiamo che z^* è effettivamente un minimo. Dalla convessità di G si ha che, per y_1 e y_2 in $\mathbb{R}^{2n}$, la mappa

$$g(s) = \nabla G(sy_2 + (1-s)y_1) \cdot (y_2 - y_1)$$

è monotona crescente (per $s \in [0, 1]$), dunque vale la stima:

$$\begin{aligned} \nabla G(y_1) \cdot (y_2 - y_1) &\leq \nabla G(s^*y_2 + (1-s^*)y_1) \cdot (y_2 - y_1) \\ &= G(y_2) - G(y_1) \leq \nabla G(y_2) \cdot (y_2 - y_1) \end{aligned}$$

Sostituendo $y_2 = \dot{z}^*(t)$ e $y_1 = \dot{z}_k(t)$, integrando otteniamo:

$$\int_0^{2\pi} G(\dot{z}^*) dt - \int_0^{2\pi} G(\dot{z}_k) dt \leq \int_0^{2\pi} \nabla G(\dot{z}^*) \cdot (\dot{z}^* - \dot{z}_k) dt \quad (2.6)$$

Ricordiamo che ∇G è omogenea di grado 1, dunque per qualche $C > 0$ vale:

$$|\nabla G(y)| \leq C|y|$$

e segue che $\nabla G(\dot{z}^*) \in L^2$; dalla convergenza debole di z_k abbiamo che l'integrale a destra di (2.6) tende a 0, in definitiva si ha:

$$\mu \leq \int_0^{2\pi} G(\dot{z}^*) dt \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} G(\dot{z}_k) dt = \mu$$

e z^* è appunto un minimo di I su $\mathcal{A}$.

Ora, essendo z^* un minimo di I su $\mathcal{A}$, è un punto stazionario di

$$\bar{I}(z, \lambda) = I(z) + \lambda \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (Jz, \dot{z}) dt - 1 \right)$$

su $\mathcal{F}$, quindi per qualche λ :

$$\int_0^{2\pi} (\nabla G(\dot{z}^*), \dot{h}) dt + \lambda \int_0^{2\pi} (Jz^*, \dot{h}) dt = 0$$

per ogni variazione $h \in \mathcal{F}$; in particolare se $(Jz^*, \dot{h})_{L^2} = 0$ anche $(\nabla G(\dot{z}^*), \dot{h})_{L^2} = 0$. Scegliamo h della forma:

$$\dot{h} = \nabla G(\dot{z}^*) - \alpha Jz^* - \beta$$

dove le costanti $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}^{2n}$ sono da determinare. Affinché h sia periodica, fissiamo β di modo che $\dot{h}$ abbia media nulla:

$$0 = h(2\pi) - h(0) = \int_0^{2\pi} \dot{h} dt = \int_0^{2\pi} \nabla G(\dot{z}^*) dt - 2\pi\beta$$

ergo:

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla G(\dot{z}^*) dt$$

Prendiamo ora α tale che $(Jz^*, \dot{h})_{L^2} = 0$ (di conseguenza $(\nabla G(\dot{z}^*), \dot{h})_{L^2} = 0$), sviluppando $\dot{h}$ uno scrive:

$$\begin{aligned} 0 &= (Jz^*, \nabla G(\dot{z}^*) - \alpha Jz^* - \beta) \\ &= (Jz^*, \nabla G(\dot{z}^*)) - \alpha \|Jz^*\|^2 - \beta \int_0^{2\pi} Jz^* dt \end{aligned}$$

È chiaro che $\int_0^{2\pi} Jz^* dt = 0$ dato che z^* ha media nulla, dunque α è unicamente determinata da:

$$\alpha \|z^*\|^2 = (Jz^*, \nabla G(\dot{z}^*))_{L^2}$$

in quanto $\|Jz^*\| = \|z^*\| \neq 0$. Scriviamo infine:

$$\begin{aligned} \|\dot{h}\|^2 &= (\nabla G(\dot{z}^*) - \alpha Jz^* - \beta, \dot{h}) \\ &= (\nabla G(\dot{z}^*) - \alpha Jz^*, \dot{h}) = (\nabla G(\dot{z}^*), \dot{h}) = 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato dapprima $\int_0^{2\pi} \dot{h} dt = 0$, e poi $(Jz^*, \dot{h}) = 0$ e $(\nabla G(\dot{z}^*), \dot{h}) = 0$.

Abbiamo dunque ottenuto le seguenti equazioni per z^* :

$$\nabla G(\dot{z}^*) =_{qd} \alpha Jz^* + \beta \quad (2.7)$$

Da queste si deduce subito, grazie alla formula d'Eulero, che $\alpha = \mu > 0$:

$$2\mu = \int_0^{2\pi} 2G(\dot{z}^*) dt = \int_0^{2\pi} (\nabla G(\dot{z}^*), \dot{z}^*) dt = \alpha \int_0^{2\pi} (Jz^*, \dot{z}^*) dt = 2\alpha$$

Dato che $\nabla G(y) = x$ è equivalente a $y = \nabla F(x)$, possiamo riscrivere (2.7) come:

$$\dot{z}^* =_{qd} \nabla F(\alpha Jz^* + \beta)$$

Dalla continuità di z^* segue la continuità del membro a destra, dunque z^* è $\mathcal{C}^1$ e quindi è una soluzione classica di classe $\mathcal{C}^2$ dell'equazione sopra scritta.

Sia ora:

$$x(t) = c(\alpha Jz^*(t) + \beta)$$

per una certa $c > 0$ da determinare, ricordiamo che ∇F è omogenea di grado 1, vale allora:

$$\dot{x} = c\alpha J\dot{z}^* = c\alpha J\nabla F(\alpha Jz^* + \beta) = \alpha J\nabla F(x)$$

Abbiamo trovato una soluzione classica e periodica di (2.4), rimane da verificare che $x \in S$ (ie $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) dt = 1$):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(x) dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\nabla F(x), x) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (c\dot{z}^*, c(\alpha Jz^* + \beta)) dt \\ &= c^2 \alpha \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\dot{z}^*, Jz^*) dt = c^2 \alpha = 2\pi \end{aligned}$$

L'equazione è soddisfatta ponendo $c = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$.

Otteniamo infine una soluzione (sempre classica e periodica) di $\dot{y} = J\nabla F(y)$ come $y(t) = x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, e il teorema è dimostrato.

□

Capitolo 3

Qualche risultato tecnico

Abbiamo già visto che l'azione non ammette minimo o massimo, per cui abbiamo studiato un funzionale alternativo, nominalmente l'azione duale, che ammette invece un punto di minimo.

In questa sezione daremo dei teoremi che, sotto opportune ipotesi, garantiscono l'esistenza di punti di sella; questi sono dei teoremi di tipo *minimax*, e sono una generalizzazione del celebre teorema del passo montano di A.Ambrosetti e P.Rabinowitz ([13]).

Prima richiamiamo qualche concetto.

3.1 Condizione di Palais-Smale

Allo scopo di cercare punti critici di funzionali definiti su spazi infinitodimensionali, richiediamo una opportuna proprietà di compattezza su questi funzionali.

Per comodità diamo la seguente definizione.

Definizione 3.1. Siano X uno spazio di Banach e $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$, una successione $x_k \in X$ è detta successione di Palais-Smale al livello $c \in \mathbb{R}$ se:

$$\begin{aligned} I(x_k) &\rightarrow c \\ I'(x_k) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

La condizione che cerchiamo è data da:

Definizione 3.2. Sotto le ipotesi di prima, diremo che I soddisfa la condizione di Palais-Smale al livello c (scriveremo che I è di classe $(PS)_c$) se ogni successione di Palais-Smale al livello c ammette una sotto-successione convergente; in altre parole se $(c, 0)$ appartiene alla chiusura dell'immagine di $I \times I'$, allora appartiene all'immagine stessa di $I \times I'$.

Inoltre diremo che I soddisfa la condizione di Palais-Smale (o che I è di classe (PS)) se per ogni successione x_k tale che $I'(x_k) \rightarrow 0$ e $I(x_k)$ è limitata, questa ammette una sotto-successione convergente.

Chiaramente questa seconda condizione implica che I è $(PS)_c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Osservazione 10. Se non esiste una successione di Palais-Smale al livello c , il funzionale I è banalmente $(PS)_c$.

Osservazione 11. È chiaro che se I è $(PS)_c$, allora l'insieme dei punti critici:

$$K_c = \{x \in X : I(x) = c, I'(x) = 0\}$$

è compatto.

Guardiamo un paio d'esempi nel caso $X = \mathbb{R}$.

Esempio 3.1. Sia $f(x) = e^x$, dato che $f'(x) = e^x$, se $f'(x_k) \rightarrow 0$, necessariamente $x_k \rightarrow -\infty$, dunque per una tale successione:

$$f(x_k) \rightarrow 0$$

$$f'(x_k) \rightarrow 0$$

Quindi se x_k è una successione di Palais-Smale questa è necessariamente al livello 0; dato che una tale successione è divergente la funzione f non può essere $(PS)_0$.

Banalmente f è però $(PS)_c$ per ogni $c \neq 0$.

Esempio 3.2. Se $f(x) = \cos x$, le successioni $x_k = 2\pi k$ e $y_k = \pi k$ sono chiaramente successioni di Palais-Smale, rispettivamente al livello 1 e -1 , ma essendo divergenti concludiamo che f non è $(PS)_1$ o $(PS)_{-1}$.

Esempio 3.3. Consideriamo $f(x) = x$, da $f' = 1$ è automatico che f è di classe $(PS)_c$ per ogni c .

Ancora se $f(x) = \frac{x^2}{2}$, presa una successione di Palais-Smale x_k , necessariamente:

$$\begin{aligned} f'(x_k) &= x_k \rightarrow 0 \\ f(x_k) &= \frac{x_k^2}{2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ed è chiaro che f è $(PS)_0$, anzi $(PS)_c$ per ogni c .

3.1.1 Lemma di deformazione

Prima di procedere diamo qualche definizione.

Definizione 3.3. Una mappa continua $\phi : X \rightarrow X$, dove X è uno spazio topologico, è detta *deformazione* se è omotopa all'identità, quindi se esiste $\eta : X \times [0, 1] \rightarrow X$ continua tale che:

$$\begin{aligned} \eta(x, 0) &= x \\ \eta(x, 1) &= \phi(x) \end{aligned}$$

Definizione 3.4. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, data $c \in \mathbb{R}$ indichiamo l'*insieme di sotto-livello* c con:

$$f^c = \{x \in X : f(x) \leq c\}$$

Definizione 3.5. Sia $I \in \mathcal{C}^1(H, \mathbb{R})$, dove H è uno spazio di Hilbert, definiamo allora il gradiente di I come:

$$(\nabla I(x), y)_H = (I'(x), y)_{H^*, H}$$

In altre parole $\nabla I(x)$ è l'identificazione di $I'(x)$ con un vettore di H ; questa è data dal teorema di rappresentazione di Riesz. A scanso d'equivoci indicheremo il gradiente anche con la notazione $I'(x)$.

Enunciamo un lemma ausiliare:

Lemma 3.1.1. *Sia I come nella definizione appena data, se I soddisfa la condizione di Palais-Smale al livello c , dove c è un valore non critico di I , esiste allora $\varepsilon > 0$ tale che:*

$$\|\nabla I(x)\| \geq 2\varepsilon \quad \text{per } x \in I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$$

Dimostrazione. Se per assurdo non esistesse tale ε , uno potrebbe costruire una successione x_k che soddisfa:

$$\begin{aligned} I(x_k) &\rightarrow c \\ \nabla I(x_k) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ma I è $(PS)_c$, quindi otterremmo da questa successione un punto critico $\bar{x}$ tale che $I(\bar{x}) = c$, il che è assurdo. $\square$

Ricordiamo dunque il teorema/lemma di deformazione:

Teorema 3.1.2 (Lemma di deformazione). *Siano H uno spazio di Hilbert, I un funzionale $\mathcal{C}^2(H, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ un valore non critico di I ; se I soddisfa la condizione di Palais-Smale al livello c , esistono $\varepsilon > 0$ e una deformazione $\phi : H \rightarrow H$, individuata da un flusso ϕ_t , tali che:*

1. *Al di fuori di $[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]$, la deformazione lascia lo spazio invariato:*

$$\phi(x) = x \quad \text{per } x \notin [c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]$$

anzi, per ogni t :

$$\phi_t(x) = x \quad \text{per } x \notin [c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]$$

2. *Per $t \in [0, 1]$:*

$$\|\phi_t(x) - x\| \leq 1$$

3. *Vale:*

$$\phi(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$$

4. *Si ha che $I \circ \phi^t(x)$ è monotona decrescente per ogni x .*

Osservazione 12. Il teorema è vero più generalmente per funzionali $\mathcal{C}^1$ definiti su spazi di Banach, dove uno adopera la nozione di pseudo-gradiente; notiamo solo che nel nostro caso il gradiente è localmente lipschitziano, quindi è anche uno pseudo-gradiente. Rimandiamo comunque per una dimostrazione più generale a [14].

Dimostrazione. Prendiamo $\varepsilon > 0$ come nel lemma 3.1.1. Siano allora:

$$A = I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \quad B = I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$$

Chiaramente $B \subset A$, definiamo dunque la seguente funzione *cut-off* (d è la distanza):

$$\psi(x) = \frac{d(x, H \setminus A)}{d(x, H \setminus A) + d(x, B)}$$

Dalla definizione sono immediate le seguenti:

$$\begin{cases} 0 \leq \psi(x) \leq 1 & \forall x \in H \\ \psi(x) \equiv 0 & \text{per } x \in H \setminus A \\ \psi(x) \equiv 1 & \text{per } x \in B \end{cases}$$

Vediamo che ψ è localmente lipschitziana: dalla disuguaglianza triangolare si ha che:

$$d(x, H \setminus A) + d(x, B) \geq d(H \setminus A, B)$$

Intorno un punto $z \in A \setminus B$ vale:

$$d(x, H \setminus A) + d(x, B) \leq C = C(z)$$

Perciò, attorno a $z \in A \setminus B$, per $\bar{C} \geq \sup \{C^{-1}, (d(H \setminus A, B))^{-1}\}$:

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq \bar{C} |d(x_1, H \setminus A) - d(x_2, H \setminus A)| \leq \bar{C} |x_1 - x_2|$$

La mappa ψ è quindi localmente lipschitziana; attorno $x \in H \setminus A$ o $x \in B$ il fatto è banale.

Costruiamo il seguente campo:

$$X(x) := \begin{cases} -\psi(x) \frac{\nabla I(x)}{|\nabla I(x)|} & \text{per } x \in A \\ 0 & \text{per } x \notin A \end{cases}$$

Notiamo che X è localmente lipschitziano, perciò possiamo considerare il flusso associato ϕ_t , che ricordiamo risolve:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [\phi_t(x)] &= X(\phi_t(x)) \\ \phi_0(x) &= x\end{aligned}$$

La deformazione cercata è dunque $\phi(x) := \phi_{t=1}(x)$.

Al di fuori di A il campo X è nullo, da cui $\phi_t(x) = x$ per ogni t , e perciò anche $\phi(x) = x$, per $x \notin A$.

Chiaramente $\|X(x)\| \leq 1$ per ogni x , dunque per $t \in [0, 1]$:

$$\|\phi_t(x) - x\| = \left\| \int_0^t X(\phi_s(x)) ds \right\| \leq t \leq 1$$

Verifichiamo che $I(\phi_t(x))$ è monotona decrescente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [I(\phi_t(x))] &= (\nabla I(\phi_t(x)), \dot{\phi}_t(x)) \\ &= \begin{cases} -\psi(\phi_t(x)) |\nabla I(x)| & \text{per } x \in A \\ 0 & \text{per } x \notin A \end{cases}\end{aligned}$$

Essendo questa non positiva, otteniamo quanto detto.

Perciò se $x \in I^{c+\varepsilon}$, basta che $I(\phi_t(x)) \leq c - \varepsilon$ per qualche $t \in (0, 1)$ per avere che $I(\phi(x)) \leq c - \varepsilon$.

Sia invece per assurdo $I(\phi_t(x)) \geq c - \varepsilon$ per ogni $t \in [0, 1]$, in ogni caso vale sempre $I(\phi_t(x)) \leq c + \varepsilon$, per cui essendo $\phi_t(x) \in B$:

$$\begin{aligned}I(\phi(x)) &= I(\phi_{t=0}(x)) + \int_0^1 \frac{d}{dt} [I(\phi_t(x))] dt \\ &= I(x) + \int_0^1 (\nabla I(\phi_t(x)), \dot{\phi}_t(x)) dt \\ &= I(x) - \int_0^1 |\nabla I(x)| dt \\ &\leq c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon\end{aligned}$$

Abbiamo trovato contro le ipotesi che $\phi(x) \in I^{c-\varepsilon}$, il che è assurdo.

In conclusione $\phi(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$, e il teorema è dimostrato. $\square$

3.2 Teoria del grado

Richiamiamo brevemente qualche nozione sul grado topologico; daremo dei risultati fondamentali senza dimostrazioni, rimandando all'Appendice A per delle dimostrazioni, e comunque per una trattazione più approfondita e dettagliata si può vedere [15].

3.2.1 Grado di Brouwer

Il grado è stato introdotto, nel caso finito-dimensionale, da L.Brouwer in [16]; questo è un numero intero, determinato unicamente da certe sue proprietà, che risponde a domande come l'esistenza e molteplicità di soluzioni di:

$$f(x) = p$$

per $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e dato $p \in \mathbb{R}^n$. Sempre da questo uno può trarre risultati d'esistenza di punti fissi per trasformazioni d'uno spazio, o d'una varietà, in sé stesso.

Definizione 3.6. Per $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e limitato, preso $p \in \mathbb{R}^n$ al di fuori di $f(\partial\Omega)$, richiedendo inoltre che p sia un valore *non critico*¹ di f , definiamo il grado:

$$d(f, p, \Omega) = \begin{cases} \sum_{x: f(x)=p} \text{sgn}(\det J_f(x)) & \text{se esiste } x \text{ tale che } f(x) = p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Indichiamo con $J_f(x)$ la matrice jacobiana di f in x .

Osservazione 13. La definizione ha senso in quanto, essendo p punto non critico, tutte le soluzioni di $f(x) = p$ sono punti isolati, per cui sono necessariamente finiti.

Diamo le proprietà fondamentali:

¹Ergo $J_f(x)$ è non singolare per $f(x) = p$

Proposizione 3.2.1. *Valgono le seguenti:*

1. Se $p \in \Omega$:

$$d(Id, p, \Omega) = 1$$

altrimenti: $d(Id, p, \Omega) = 0$.

2. Se $d(f, p, \Omega) \neq 0$, esiste $x \in \Omega$ tale che $f(x) = p$.

3. Se Ω_1 e Ω_2 sono due sottoinsiemi aperti di Ω , dove $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $p \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, allora:

$$d(f, p, \Omega) = d(f, p, \Omega_1) + d(f, p, \Omega_2)$$

4. Per g che approssima f su Ω (in maniera $\mathcal{C}^1$), il grado rimane invariato:

$$d(f, p, \Omega) = d(g, p, \Omega)$$

Grazie alla proprietà 4 uno può estendere la definizione di grado dapprima anche per punti critici, facendo uso d'un mollificatore, per poi definirlo per funzioni anche solamente continue. Così facendo uno riottiene tutte le proprietà appena date (dove la proprietà 4 si traduce in norma $\mathcal{C}$); rimandiamo per i dettagli all'Appendice A.

Abbiamo altre due proprietà:

Proposizione 3.2.2. *Il grado è invariante per omotopia; quindi per $h_t \in \mathcal{C}([0, 1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tale che $h_0 = f$ e $p \notin h_t(\partial\Omega)$ per ogni $t \in [0, 1]$, vale:*

$$d(f, p, \Omega) = d(h_t, p, \Omega) \quad \text{per ogni } t$$

Proposizione 3.2.3. *Date f e g uguali su $\partial\Omega$, per $p \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$, il grado è uguale:*

$$d(f, p, \Omega) = d(g, p, \Omega)$$

Questo segue da 3.2.2 considerando l'omotopia:

$$h_t(x) = tf(x) + (1 - t)g(x)$$

3.2.2 Grado di Leray-Schauder

Allo scopo di trattare problemi non lineari come:

$$K(x) = x \quad (3.1)$$

dove x appartiene a uno spazio di Banach X e il funzionale K è compatto, J.Leray e J.Schauder hanno esteso il grado di Brouwer al caso infinito-dimensionale in [17].

Seguendo (3.1), uno considera funzionali della forma:

$$\Phi(x) = Id - K(x)$$

dove $K : X \rightarrow X$ è compatta; tali funzionali Φ sono comunemente chiamati *perturbazioni (compatte) dell'identità*.

Ricordiamo che una mappa continua $K : X \rightarrow Y$ tra due spazi di Banach è detta *compatta* se, dato un insieme limitato $B \subset X$, la chiusura $\overline{K(B)}$ è un compatto in Y ; equivalentemente se x_k è una successione limitata in X , allora $K(x_k)$ ammette una sotto-successione convergente.

Proposizione 3.2.4. *Siano X spazio di Banach, $\Omega \subset X$ un aperto limitato, $\Phi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, X)$ una perturbazione dell'identità, $p \notin \Phi(\partial\Omega)$, allora è definito il grado di Leray-Schauder:*

$$d(\Phi, p, \Omega) \in \mathbb{Z}$$

che mantiene le proprietà date prima per il grado di Brouwer nella Proposizione 3.2.1.

Inoltre anche il grado di Leray-Schauder è invariante per omotopia, a patto che tale omotopia sia anch'essa una perturbazione dell'identità.

Ci limitiamo a dire che questo grado nasce in maniera naturale come il grado di Brouwer d'una approssimazione Φ_ε di Φ , dove l'immagine di Φ_ε ha dimensione finita.

3.3 Teoremi d'esistenza di punti critici

I teoremi che vogliamo usare poggiano su una particolare proprietà d'intersezione data da V.Benci e P.Rabinowitz ([4]).

3.3.1 Proprietà di linking

Definizione 3.7. Sia X uno spazio di Banach, $V \subset X$ un suo sottospazio chiuso; dati due insiemi chiusi $S \subset X$ e $Q \subset V$, diremo che S e ∂Q^2 *linkano* se:

1. $S \cap \partial Q = \emptyset$
2. Per ogni mappa $\gamma \in \Gamma$, dove:

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}(Q, X) : \gamma(x) = x \text{ per } x \in \partial Q\}$$

si ha: $S \cap \gamma(Q) \neq \emptyset$

Proposizione 3.3.1. Sia $X = E \oplus V$ uno spazio di Banach, dove V ha dimensione finita, per $R > \rho > 0$ e $e \in E$ di norma unitaria consideriamo:

$$S = \partial B_\rho \cap E = \{u \in E : \|u\| = \rho\}$$

$$Q = (\overline{B}_R \cap V) \oplus \{re : 0 \leq r \leq R\}$$

$$Q \subset V \oplus \mathbb{R}e$$

Per chiarezza abbiamo indicato:

$$B_r = \{u \in X : \|u\| < r\}$$

Sotto queste ipotesi, S e ∂Q *linkano*.

Dimostrazione. Notiamo subito che Q ha dimensione finita, inoltre $S \cap \partial Q = \emptyset$: se $u = v + re \in \partial Q$, dove $v \in \overline{B}_R \cap V$ ed $r \in [0, R]$, o $v \in \partial B_R \cap V$, e chiaramente una tale u non può appartenere a un sottoinsieme di E quale

²Il bordo è inteso rispetto a V

S , o $r = 0$ oppure $r = R$; per $r = 0$ solamente $u = 0 \in E$, ma lo 0 non appartiene a S , mentre per $r = R$ se $u \in E$ questa giace fuori $\partial B_\rho \cap E$.

Dunque siano $h \in \Gamma$, $P_2 : X \rightarrow V$ e $P_1 : X \rightarrow E$ le proiezioni nei rispettivi sottospazi, allora dimostrare:

$$h(Q) \cap S \neq \emptyset$$

equivale a verificare:

$$\begin{cases} P_2 h(u) = 0 \\ \|P_1 h(u)\| = \rho \end{cases}$$

per una qualche $u \in Q$.

Scrivendo $u = v + re$, definiamo:

$$\Phi(r, v) = (\|P_1 h(v + re)\|, P_2 h(v + re))$$

La mappa $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times V, \mathbb{R} \times V)$, e la penseremo come $\Phi : V \oplus \mathbb{R}e \rightarrow V \oplus \mathbb{R}e$; per $u \in \partial Q$ si ha $h(u) = u$, quindi:

$$\Phi(r, v) = (\|P_1(v + re)\|, P_2(v + re)) = (r, v)$$

in altre parole $\Phi|_{\partial Q} = Id$.

Notiamo che per $u = v + re \in \partial Q$ non può essere:

$$\Phi|_{\partial Q}(r, v) = (\rho, 0)$$

dato che $(\rho, 0) \notin \partial Q = \Phi(\partial Q)$.

Identificando Q con un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ (per una certa n), possiamo allora parlare del grado di Brouwer di Φ in $(\rho, 0)$:

$$d(\Phi, (\rho, 0), Q) = d(Id, (\rho, 0), Q) = 1$$

L'uguaglianza vale in quanto $\Phi|_{\partial Q} = Id|_{\partial Q}$ e, come detto prima, $(\rho, 0) \notin \partial Q$.

Essendo il grado non nullo esiste $u \in Q$ tale che $\Phi(u) = (\rho, 0)$, ergo $h(u) \in S$, come volevasi dimostrare. $\square$

Vogliamo dare un risultato analogo nel caso infinito-dimensionale, ovvero per $X = E_1 \oplus E_2$, dove entrambi i sottospazi possono essere infinito-dimensionali.

Consideriamo in questo caso una particolare famiglia d'omotopie $\Phi \subset \mathcal{C}([0, 1] \times X, X)$, i cui membri $\phi_t \in \Phi$ soddisfano:

1. $\phi_0 = Id$
2. La proiezione in E_2 di ϕ_t è una perturbazione dell'identità in E_2 , quindi esiste una mappa compatta $K_t : X \times [0, 1] \rightarrow E_2$ tale che:

$$P_2\phi_t(u) = P_2u - K_t(u)$$

Diamo quindi una nuova definizione di *linking*:

Definizione 3.8. Siano $X = E_1 \oplus E_2$ uno spazio di Banach, $\tilde{E}$ un sottospazio di E , $S \subset E$ e $Q \subset \tilde{E}$; allora S e ∂Q *linkano rispetto a Φ* se, per ogni mappa $\phi_t \in \Phi$ tale che:

$$S \cap \phi_t(\partial Q) = \emptyset \quad \text{per ogni } t$$

vale:

$$S \cap \phi_t(Q) \neq \emptyset \quad \text{per ogni } t$$

È chiaro che necessariamente deve valere a priori:

$$S \cap \partial Q = \emptyset$$

Con questa definizione uno ottiene immediatamente:

Proposizione 3.3.2. Siano $X = E_1 \oplus E_2$ uno spazio di Banach, $r_1 > \rho > 0$, $e \in E_1$ di norma unitaria e $r_2 > 0$; consideriamo:

$$S = \partial B_\rho \cap E_1$$

$$Q = (\overline{B}_{r_2} \cap E_2) \oplus \{re : 0 \leq r \leq r_1\}$$

$$Q \subset \tilde{E} = E_2 \oplus \mathbb{R}e$$

Sotto queste ipotesi, S e ∂Q *linkano rispetto a Φ* .

Dimostrazione. La dimostrazione è identica a quella data prima nel caso finito-dimensionale, dove però uno considera il grado di Leray-Schauder di:

$$\Psi_t(r, u) = (\|P_1\phi_t(re + u)\|, P_2\phi_t(re + u))$$

sempre nel punto $(\rho, 0)$ in Q .

Essendo $\phi_t \in \Phi$, la proiezione $P_2\phi_t$ è una perturbazione dell'identità e possiamo parlare appunto del grado di Ψ_t .

□

3.3.2 Teoremi

Teorema 3.3.3. *Siano $X = E \oplus V$ uno spazio di Banach, E e V due sottospazi chiusi, in particolare V avente dimensione finita; dati $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ di classe (PS), due insiemi $S \subset E$ e $Q \subset V$ tali che S e ∂Q linkano, se valgono:*

1. *Per una qualche $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$I|_S \geq \alpha$$

2. *Esiste $\beta < \alpha$ tale che:*

$$I|_{\partial Q} \leq \beta$$

3. *Il funzionale I è superiormente limitato su Q :*

$$\sup_{u \in Q} I(u) < +\infty$$

allora I ammette un valore critico $c \geq \alpha$ ottenuto come:

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in \Gamma} I(h(u))$$

L'insieme Γ è come nella Definizione 3.7:

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}(Q, X) : \gamma(x) = x \text{ per } x \in \partial Q\}$$

Osservazione 14. Se S e Q sono come nella Proposizione 3.3.1, uno ottiene una generalizzazione del teorema del passo montano: infatti per $V = \{0\}$, e quindi $E = X$, uno ha:

$$S = \partial B_\rho$$

$$Q = \{re : 0 \leq r \leq R\} \implies \partial Q = \{0, Re\}$$

e le ipotesi diventano:

1. $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$
2. $\max\{I(0), I(Re =: v)\} \leq \beta$

Le trasformazioni in Γ sono semplicemente i cammini dalla “valle” 0 alla “valle” $v = Re$, che passano necessariamente per la “catena montuosa” S .

Dimostrazione. Verifichiamo subito che $c \geq \alpha$, infatti dalla proprietà di linking si ha che per ogni $h \in \Gamma$:

$$\sup_{u \in Q} I(h(u)) \geq \alpha$$

in quanto esiste $u \in Q$ per cui $h(u) \in S$.

Inoltre abbiamo:

$$c \leq \sup_{u \in Q} I(u) < +\infty$$

per cui $c \in \mathbb{R}$.

Ora, se per assurdo c non fosse un valore critico, dato che a fortiori I è $(PS)_c$, dal lemma di deformazione esisterebbe una deformazione ϕ tale che:

$$\phi(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$$

per una certa $\varepsilon > 0$ che possiamo supporre arbitrariamente piccola.

Dalla definizione di c esiste h tale che:

$$\sup_{u \in Q} I(h(u)) \leq c + \varepsilon$$

ergo:

$$h(Q) \subset I^{c+\varepsilon} \implies \phi \circ h(Q) \subset I^{c-\varepsilon}$$

Dalle ipotesi:

$$I_{|\partial Q} \leq \beta < \alpha \leq c$$

quindi a patto di prendere ε sufficientemente piccola:

$$I_{|\partial Q} \leq \beta \leq c - 2\varepsilon$$

Dalle proprietà di ϕ abbiamo che $\phi = Id$ al di fuori di $[c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]$, dunque:

$$(\phi \circ h)_{|\partial Q} = Id$$

e $\phi \circ h \in \Gamma$.

In conclusione:

$$c \leq \sup_{u \in Q} I(\phi(h(u))) \leq c - \varepsilon$$

il che è assurdo. □

Diamo l'analogo nel caso infinito-dimensionale, che però necessita di ipotesi più stringenti.

Teorema 3.3.4. *Sia $H = E_1 \oplus E_2$ uno spazio di Hilbert, dove i sottospazi chiusi E_1 e E_2 possono essere entrambi infinito-dimensionali, inoltre $E_2 = E_1^\perp$; consideriamo $I \in \mathcal{C}^2(H, \mathbb{R})$ ³ di classe (PS), della forma:*

$$I(u) = \frac{1}{2} (Lu, u)_H + b(u)$$

dove $L : H \rightarrow H$ è un operatore lineare limitato e autoaggiunto, scrivibile come:

$$L = L_1 P_1 + L_2 P_2 \quad L_i : E_i \rightarrow E_i$$

e il gradiente b' di b è una funzione compatta.

Se $S \subset E_1$ e $Q \subset \tilde{E}$, dove $\tilde{E}$ è un altro sottospazio di H , soddisfano la proprietà di linking rispetto a Φ , e simile al teorema precedente valgono:

1. Per una qualche $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$I_{|S} \geq \alpha$$

³Il teorema originale in [4] e [3] richiede solamente la continuità $\mathcal{C}^1$

2. Esiste $\beta < \alpha$ tale che:

$$I_{|\partial Q} \leq \beta$$

3. L'insieme Q è limitato.

allora esiste un valore critico $c \geq \alpha$ di I .

Dimostriamo dei fatti ausiliari:

Lemma 3.3.5. *La compattezza del gradiente b' implica che b è debolmente continua, quindi per ogni successione debolmente convergente s'ottiene la convergenza forte nell'immagine:*

$$u_k \rightharpoonup u \implies b(u_k) \rightarrow b(u)$$

Dimostrazione. Sia $u_k \rightharpoonup u$, dal principio d'uniforme limitatezza otteniamo che la successione u_k e u stanno dentro a una palla di raggio $r > 0$; se per assurdo $b(u_k)$ non convergesse verso $b(u)$, per una certa $\varepsilon > 0$ potremmo estrarre una sotto-successione u_k tale che:

$$\|b(u_k) - b(u)\| \geq \varepsilon \quad (3.2)$$

Scriviamo la seguente rappresentazione:

$$b(u_k) - b(u) = (b'(u + t_k(u_k - u)), u_k - u)_H \quad (3.3)$$

dove $t_k \in [0, 1]$.

(Evitiamo di dimostrare anche questa uguaglianza, rimandiamo invece per una dimostrazione più completa a [18])

La combinazione convessa a destra rimane ancora nella palla di raggio r :

$$\|u + t_k(u_k - u)\| \leq (1 - t_k)\|u\| + t_k\|u_k\| \leq r$$

quindi esiste un'altra sotto-successione (della sotto-successione presa prima) tale che:

$$b'(u + t_k(u_k - u)) \rightarrow y$$

per una certa $y \in H$, dato che b' è compatto.

Riscriviamo il lato a destra di (3.3):

$$\begin{aligned} & (b'(u + t_k(u_k - u)), u_k - u)_H \\ &= (y, u_k - u) + (b'(u + t_k(u_k - u)) - y, u_k - u) \end{aligned}$$

Il primo termine tende a 0 in quanto $u_k \rightarrow u$, mentre il secondo in quanto $b'(u + t_k(u_k - u)) \rightarrow y$ e comunque $\|u_k - u\| \leq 2r$.

Ma così facendo abbiamo ottenuto che $b(u_k) \rightarrow b(u)$, il che è assurdo in quanto abbiamo assunto (3.2). $\square$

Lemma 3.3.6. *Sempre sotto le ipotesi del teorema, consideriamo la famiglia di omotopie $\Gamma^* \subset \mathcal{C}([0, 1] \times H, H)$ i cui membri h_t soddisfano:*

1. $h_0 = Id$
2. $h_t|_{\partial Q} = Id$
3. *L'omotopia è scrivibile come:*

$$h_t(u) = e^{\theta_t(u)L}u + K_t(u) \quad (3.4)$$

dove $\theta_t \in \mathcal{C}([0, 1] \times H, \mathbb{R})$ e K_t è una funzione compatta.

Allora ogni $h_t \in \Gamma^*$ soddisfa, per ogni t :

$$h_t(Q) \cap S \neq \emptyset \quad (3.5)$$

Osservazione 15. Se g_t e h_t sono in Γ^* , anche la loro composizione:

$$g_t \circ h_t = e^{\theta_{g \circ h}(t, u)L}u + K_{g \circ h}(t, u) \in \Gamma^*$$

Infatti se θ_g e θ_h sono le funzioni che compaiono nella scrittura (3.4) nell'esponenziale, associate rispettivamente a g_t e h_t , allora:

$$\theta_{g \circ h}(t, u) = \theta_g(t, h_t(u)) + \theta_h(t, u)$$

Similmente:

$$K_{g \circ h}(t, u) = e^{\theta_g(t, h_t(u))}K_h(t, u) + K_g(t, h_t(u))$$

Dimostrazione. Abbiamo che (3.5) equivale a trovare $u \in Q$ tale che:

$$\begin{cases} P_1 h_t(u) \in S \\ P_2 h_t(u) = 0 \end{cases}$$

Dato che $L = L_1 P_1 + L_2 P_2$, e comunque E_1 ed E_2 sono ortogonali tra loro, possiamo scomporre h_t come:

$$h_t(u) = e^{\theta_t(u)L_1} P_1 u + e^{\theta_t(u)L_2} P_2 u + K_t(u)$$

Quindi $P_2 h_t(u) = 0$ diventa:

$$e^{\theta_t(u)L_2} P_2 u + P_2 K_t(u) = 0$$

o equivalentemente, indicando $P_2 u = u_2$ e $P_2 K_t = K_2$:

$$u_2 + e^{-\theta_t(u)L_2} K_2(t, u) = 0$$

Dunque se definiamo:

$$\phi_t(u) = P_1 h_t(u) + u_2 + e^{-\theta_t(u)L_2} K_2(t, u)$$

chiaramente $\phi_t \in \Phi$, e per quanto appena detto (3.5) equivale a:

$$\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$$

Ma essendo $\phi_t \in \Phi$, ci basta vedere che $\phi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset$ per concludere.

Ricordiamo che per ipotesi $h_t|_{\partial Q} = Id$, per cui anche $\phi_t|_{\partial Q} = Id$; dato che S e ∂Q linkano rispetto a Φ , necessariamente:

$$S \cap \phi_t(\partial Q) = S \cap \partial Q = \emptyset$$

dimostrando così l'enunciato. $\square$

Lemma 3.3.7. *Sia c un valore non critico di I , e siano $\varepsilon > 0$ e η_t il flusso fornito dal lemma di deformazione con parametro ε ; allora il flusso η_t per $t \in [0, 1]$ è della forma:*

$$\eta_t(u) = e^{\theta_t(u)L} u + K_t(u)$$

dove K_t e θ_t sono come nella definizione di Γ^* .

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del lemma di deformazione, il flusso η_t è determinato come soluzione dell'equazione:

$$\frac{d}{dt}\eta_t(u) = -\psi(u) \frac{\nabla I(u)}{\|\nabla I(u)\|} = X(u)$$

dove ψ è una funzione *cut-off* con valori in $[0, 1]$ e uguale a 0 al di fuori di $I^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$; perciò essendo $\|X(u)\| \leq 1$ possiamo scrivere alternativamente:

$$X(u) = -\omega(u)\nabla I(u)$$

per ω con valori in $[0, 1]$.

Sotto le ipotesi del teorema, il gradiente è:

$$\nabla I(u) = Lu + b'(u)$$

e l'equazione del flusso diventa:

$$\frac{d}{dt}\eta_t(u) + \omega(\eta_t(u))L\eta_t(u) = -\omega(\eta_t(u))b'(\eta_t(u))$$

Questa è un'equazione lineare non omogenea, che ammette soluzione:

$$\eta_t(u) = e^{-A(t)L}u + K_t(u)$$

dove:

$$A(t) = A(t, u) = \int_0^t \omega(\eta_s(u)) ds$$

$$K_t(u) = -e^{-A(t)L} \int_0^t e^{A(\tau)L} \omega(\eta_\tau(u)) b'(\eta_\tau(u)) d\tau$$

Chiaramente $A(t)$, per $t \in [0, 1]$, ha valori in $[0, 1]$.

Rimane da vedere che K_t è compatta.

Data una palla B_R , in quanto $\|\eta_t(u) - u\| \leq 1$ per $t \in [0, 1]$, abbiamo:

$$\eta([0, 1] \times B_R) \subset B_{R+1}$$

$$\implies b'(\eta([0, 1] \times B_R)) \subset b'(B_{R+1}) \subset \overline{b'(B_{R+1})}$$

Essendo b' compatto, l'insieme $\overline{b'(B_{R+1})}$ è compatto.

Prendiamo l'immagine:

$$Y = \{e^{aL}bz : a, b \in [0, 1], z \in \overline{b'(B_{R+1})}\}$$

Dato che $e^{aL}bz$ è una funzione continua rispetto a ogni sua variabile (a, b e z), e il dominio scritto sopra è compatto, anche la sua immagine Y e la chiusura del suo involucro convesso $\overline{\text{conv}(Y)}$ sono compatti.

Dalla scrittura di K_t abbiamo che:

$$K_t(u) = -e^{-A(t)L}K_t^*(u)$$

$$K_t^*(u) = \int_0^t Z(\tau, u) d\tau$$

dove, per $u \in B_R$ e $0 \leq \tau \leq 1$, la funzione $Z \in Y$.

Dato che Z è compatto:

$$\int_0^t Z d\tau \in \overline{\text{conv}(Y)}$$

In conclusione abbiamo:

$$\overline{K^*([0, 1] \times B_R)} \subset \overline{\text{conv}(Y)}$$

e dunque anche K_t è compatto.

□

Ritorniamo al teorema:

Dimostrazione. Data Γ^* come prima, costruiamo:

$$c = \inf_{h_t \in \Gamma^*} \sup_{u \in Q} I(h_{t=1}(u))$$

Dalla proprietà d'intersezione di Γ^* abbiamo immediatamente che:

$$c \geq \alpha$$

Chiaramente, essendo L limitato, il termine $\frac{1}{2}(Lu, u)$ di $I(u)$ è limitato su Q , in quanto Q stesso è limitato; se per assurdo b non fosse limitato su Q , uno potrebbe trovare una successione u_k in Q tale che:

$$|b(u_k)| \rightarrow +\infty$$

ma $Q \subset \overline{B_r}$, per qualche $r > 0$, dunque esistono $u \in \overline{B_r}$ e una sotto-successione u_k tali che:

$$u_k \rightharpoonup u$$

Ma b è debolmente continua, quindi si ha anche:

$$b(u_k) \rightarrow b(u)$$

che è assurdo.

Abbiamo trovato che I è limitata su Q , perciò $c \in \mathbb{R}$.

Se per assurdo c non fosse un valore critico, applichiamo di nuovo il lemma di deformazione così da avere $\phi = \eta_{t=1}$ tale che:

$$\phi(I^{c+\varepsilon}) \subset I^{c-\varepsilon}$$

per una qualche $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccola.

Dalla definizione di c esiste $h_t \in \Gamma^*$ tale che:

$$\sup_{u \in Q} I(h_1(u)) \leq c + \varepsilon$$

Se ε è sufficientemente piccola, per $u \in \partial Q$:

$$I(u) \leq \beta \leq \alpha - 2\varepsilon$$

quindi ϕ , e similmente η_t per ogni $t \in [0, 1]$, preservano il bordo ∂Q , dunque $\eta_t \in \Gamma^*$.

Ma allora anche la composizione $\eta_t \circ h_t \in \Gamma^*$, e segue:

$$c \leq \sup_{u \in Q} I(\phi \circ h_1(u)) \leq c - \varepsilon$$

il che è assurdo.

□

Capitolo 4

Esistenza d'orbite periodiche

In questo capitolo vedremo un risultato d'esistenza d'orbite periodiche per sistemi hamiltoniani, per un dato periodo, seguendo [4] e [3]. Da questo seguirà un teorema d'esistenza per una data superficie d'energia stellata rispetto all'origine ([3] e [19]), che generalizza il Teorema 2.2.2 dato prima.

Questi due teoremi sono stati dimostrati da P. Rabinowitz anche in [20] e [21], facendo uso d'un particolare indice topologico.

4.1 Lo spazio $H^{\frac{1}{2}}$

Concentriamo l'attenzione sui moti periodici $z(t) = z = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ di periodo 2π ; ricordiamo che l'azione, definita in precedenza, presenta il seguente termine:

$$A(z) = \int_0^{2\pi} p \cdot \dot{q} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (Jz, \dot{z})_{\mathbb{R}^{2n}} dt \quad (4.1)$$

dove $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Se $z \in L^2(S^1)$, questa ammette un'espansione in serie di Fourier:

$$z = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z_j e^{ijt}$$

dove $z_{-j} = \bar{z}_j \in \mathbb{C}^{2n}$ per ogni j .

Quindi sostituendo in (4.1):

$$A(z) = \pi i \sum_{j \in \mathbb{Z}} j (Jz_j, z_j)_{\mathbb{C}^{2n}}$$

Vogliamo dunque studiare quei moti $z \in L^2$ tali che:

$$|A(z)| \leq \pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} |j| |Jz_j| |z_j| = \pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} |j| |z_j|^2 < +\infty$$

Più precisamente definiamo il seguente spazio funzionale:

$$H^{\frac{1}{2}}(S^1, \mathbb{R}^{2n}) = \left\{ z \in L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n}) : \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|) |z_j|^2 < +\infty \right\}$$

Questo è uno spazio di Hilbert con prodotto:

$$(z, \zeta)_{H^{1/2}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|) (z_j, \zeta_j)_{\mathbb{C}^{2n}}$$

e di conseguenza ha norma:

$$\|z\|_{H^{1/2}}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|) |z_j|^2$$

In maniera più descrittiva, si può vedere $H^{1/2}(S^1)$ come lo spazio di quelle serie di Fourier con derivata frazionaria¹ d'ordine $\frac{1}{2}$ in $L^2(S^1)$.

Evitiamo di richiamare le definizioni (e teoremi annessi) d'integrali e derivate d'ordine frazionario per serie di Fourier, rimandando invece al capitolo XII (più precisamente alle sezioni 8 e 9) dell'opera [22] di A.Zygmund.

Proposizione 4.1.1. *Lo spazio $H^{1/2}(S^1)$ s'immerge in maniera compatta in $L^s(S^1)$, per ogni $2 \leq s < +\infty$.*

In particolare valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\|z\|_{L^s} \leq C_s \|z\|_{H^{1/2}} \quad (4.2)$$

dove $C_s > 0$ dipende solamente da s .

¹È inteso che uno ignora il termine costante della serie.

Dimostrazione. La disuguaglianza (4.2) segue da un caso particolare d'un teorema di [22] (capitolo XII 9.23), che dice: data una funzione $f \in L^r(S^1)$, dove $r > 1$, per $r < s < +\infty$ e $\alpha = \frac{1}{r} - \frac{1}{s} > 0$ si ha che l'integrale d'ordine frazionario α di f , indicato con f_α , è in $L^s(S^1)$, e vale:

$$\|f_\alpha\|_{L^s} \leq C_{r,s} \|f\|_{L^r} \quad (4.3)$$

dove $C_{r,s} > 0$ dipende solamente da r e s .

Uno quindi applica (4.3) sostituendo f con la derivata d'ordine $\frac{1}{2}$ di $z \in H^{\frac{1}{2}}$ e fissando $r = 2$; dato che stiamo considerando il termine costante come nullo, si ha (ricordiamo che $\alpha < \frac{1}{2}$):

$$\|z\|_{L^s} = \|f_{\frac{1}{2}}\|_{L^s} \leq \|f_\alpha\|_{L^s}$$

per ogni α e s come detti prima, dimostrando così (4.2).

Se z presenta un termine costante z_0 , detta $z^* = z - z_0$, abbiamo:

$$\|z\|_{L^s} \leq |z_0| + \|z^*\|_{L^s} \leq |z_0| + C_s \|z^*\|_{H^{1/2}}$$

$$\implies \|z\|_{L^s}^2 \leq |z_0|^2 + C_s^2 \|z^*\|_{H^{1/2}}^2 + 2C_s |z_0| \|z^*\|_{H^{1/2}} \leq (C_s^2 + 2C_s) \|z\|_{H^{1/2}}^2$$

assumendo che $C_s \geq 1$.

Per la dimostrazione della compattezza della mappa d'inclusione rimaniamo al Lemma 4.29 di [19]. $\square$

4.1.1 Decomposizione di $H^{\frac{1}{2}}$

Sia $\{e_k\}_{k=1}^{2n}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{2n}$, scriviamo in particolare $\eta_k := e_{k+n}$ per $1 \leq k \leq n$; diamo dunque una base di $H^{1/2}(S^1)$ composta dalle seguenti funzioni ($j \in \mathbb{N}^*$ e $1 \leq k \leq n$):

$$\phi_{j,k}(t) = \sin jte_k - \cos jt\eta_k$$

$$\psi_{j,k}(t) = \cos jte_k + \sin jt\eta_k$$

$$\theta_{j,k}(t) = \sin jte_k + \cos jt\eta_k$$

$$\zeta_{j,k}(t) = \cos jte_k - \sin jt\eta_k$$

e consideriamo nella base anche la base canonica di $\mathbb{R}^{2n}$.

Questa base non solo è L^2 -ortogonale, ma è anche ortogonale rispetto al prodotto bilineare associato ad A , ergo se:

$$B[\gamma, \xi] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (J\gamma, \dot{\xi}) + (J\xi, \dot{\gamma}) dt$$

si ha che per elementi diversi della base, chiamiamoli γ_1 e γ_2 , vale $B[\gamma_1, \gamma_2] = 0$.

Abbiamo inoltre:

$$\begin{aligned} A(e_k) &= A(\eta_k) = 0 \\ A(\phi_{j,k}) &= A(\psi_{j,k}) = -j \int_0^{2\pi} \sin^2 jt dt = -j \int_0^{2\pi} \cos^2 jt dt = -j\pi < 0 \\ A(\theta_{j,k}) &= A(\zeta_{j,k}) = j\pi > 0 \end{aligned}$$

Definiamo allora i seguenti sottospazi di $H^{1/2}$:

$$\begin{aligned} H^0 &:= \mathbb{R}^{2n} \\ H^- &:= \text{span}\{\phi_{j,k}, \psi_{j,k} : j \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq n\} \\ H^+ &:= \text{span}\{\theta_{j,k}, \zeta_{j,k} : j \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq n\} \end{aligned}$$

Chiaramente per $z \in H^0$ vale $A(z) = 0$, per $z \in H^+$ invece $A(z) > 0$ e similmente $A(z) < 0$ per $z \in H^-$; dato che $A(z) = \frac{1}{2}B[z, z]$, segue per $z^0 \in H^0$ e $z^\pm \in H^\pm$:

$$A(z^0 + z^+ + z^-) = A(z^-) + A(z^+)$$

Diamo quindi un altro prodotto scalare su $H^{1/2}$; siano $v = v^0 + v^+ + v^-$ e $w = w^0 + w^+ + w^-$ in $H^{1/2}$, dove $v^0, w^0 \in H^0$ e similmente gli altri termini appartengono ai sottospazi appena dati, allora:

$$(v, w) = (v, w)_A := (v^0, w^0)_{\mathbb{R}^{2n}} + B[v^+, w^+] - B[v^-, w^-] \quad (4.4)$$

e la norma associata è:

$$\|v\|^2 = \|v\|_A^2 = |v^0|^2 + 2A(v^+) - 2A(v^-)$$

Si può vedere che la norma $\|\cdot\|_A$ è equivalente a quella $\|\cdot\|_{H^{1/2}}$, in particolare vale ancora la disuguaglianza (4.2) per questa nuova norma.

In conclusione, abbiamo la seguente decomposizione in sottospazi ortogonali:

$$H^{\frac{1}{2}} = H^0 \oplus H^+ \oplus H^-$$

4.2 Esistenza per dato periodo

Teorema 4.2.1. *Sia H un'hamiltoniana² $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, che soddisfa le seguenti:*

1. $H \geq 0$
2. $H(z) = o(|z|^2)$ per $z \rightarrow 0$
3. Esistono $R > 0$ e $\mu > 2$ tali che per $|z| \geq R$:

$$0 < \mu H(z) \leq z \cdot \nabla H(z) \quad (4.5)$$

Allora per ogni $T > 0$ esiste una soluzione periodica, non banale, del sistema hamiltoniano associato ad H avente periodo T .

Osservazione 16. Scrivendo $z = r\zeta$, dove $r = |z| \geq R$ e $|\zeta| = 1$, segue dalla condizione 4.5 derivando $H(r\zeta)$ rispetto a r :

$$\frac{d}{dr} [H(r\zeta)] = \zeta \cdot \nabla H(r\zeta) = \frac{1}{r} z \cdot \nabla H(z) \geq \frac{\mu}{r} H(z = r\zeta)$$

Scriviamo $F(r) = H(r\zeta)$ e riarrangiamo la disequazione sopra:

$$(\log F(r))' = \frac{F'(r)}{F(r)} \geq \frac{\mu}{r}$$

Integrando s'ottiene:

$$\begin{aligned} \log \frac{F(r)}{F(R)} &\geq \log \frac{r^\mu}{R^\mu} \implies F(r) \geq c(R, F(R), \mu) r^\mu \\ &\implies H(z) \geq c|z|^\mu \end{aligned}$$

La diseguaglianza vale per $r = |z| \geq R$, quindi per ogni z esistono due costanti C_1 e C_2 non negative:

$$H(z) \geq C_1|z|^\mu - C_2 \quad (4.6)$$

Dato che $\mu > 2$, abbiamo che la condizione 4.5 implica una crescita *superquadratica* dell'hamiltoniana.

²Il teorema in [3] e [4] è stato dimostrato per il caso $\mathcal{C}^1$

Dimostrazione. Come prima ci riconduciamo al caso con periodo 2π studiando il sistema:

$$\dot{z} = \frac{T}{2\pi} J \nabla H(z) = \lambda J H(z)$$

Il piano per dimostrare il teorema è usare il Teorema 3.3.4 nel caso particolare di S e Q come descritte nella Proposizione 3.3.2, considerando come spazio ambiente $H = H^{1/2}(S^1)$ e sottospazi:

$$E_1 = H^+, \quad E_2 = H^0 \oplus H^-$$

Il funzionale considerato è ovviamente l'azione $I(z) = A(z) - \lambda b(z)$, dove $b(z) = \int H(z)$.

Più precisamente prenderemo un'approssimazione di H , detta H_K , con annessa azione $I = I_K$, e verificheremo che I rispetta tutte le ipotesi del Teorema 3.3.4, ottenendo così una soluzione debole in $H^{1/2}$ del sistema hamiltoniano; poi seguirà che tale soluzione è sufficientemente regolare, ergo è una soluzione classica. Infine si vedrà che questa è anche una soluzione classica del problema originale, completando così la dimostrazione.

4.2.1 Scrittura di $A(z)$

Lemma 4.2.2. *Il termine $A(z)$ è scrivibile come $\frac{1}{2}(Lz, z)$ per un certo operatore limitato e autoaggiunto $L = L_1 + L_2$.*

Dimostrazione. Siano:

$$P^\pm : H^{\frac{1}{2}} \rightarrow H^\pm$$

le proiezioni in $H^\pm$, allora:

$$\begin{aligned} (A'(z), h)_A &= B[z, h] = ((P^+ - P^-)z, h)_A \\ \implies A(z) &= \frac{1}{2} (A'(z), z)_A = \frac{1}{2} ((P^+ - P^-)z, z)_A \\ &\implies L = (P^+ - P^-) \end{aligned}$$

□

Ricordiamo che il prodotto scalare usato su $H^{1/2}$ è quello descritto in 4.4.

4.2.2 Compattezza del gradiente b'

Per garantire che il gradiente di b sia compatto, vorremmo imporre delle condizioni sulla crescita di H , così da poter usare il seguente risultato.

Lemma 4.2.3. *Sia $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ un'hamiltoniana che soddisfa:*

$$|H(z)| \leq a_1 + a_2|z|^s \quad (4.7)$$

$$|\nabla H(z)| \leq b_1 + b_2|z|^r \quad (4.8)$$

per qualche $2 \leq r \leq s < +\infty$ e per ogni z , allora il gradiente di:

$$b(z) = \int_0^{2\pi} H(z) dt \in \mathcal{C}^2\left(H^{\frac{1}{2}}, \mathbb{R}\right)$$

che ha forma:

$$(b'(z), h)_A = \int_0^{2\pi} \nabla H(z) \cdot h dt$$

è compatto.

Dimostrazione. Ricordiamo che la condizione (4.7) (e similmente (4.8)) implica per $p \geq 1$:

$$z \in L^p(S^1) \implies H(z) \in L^{p/s}(S^1)$$

dove questa corrispondenza è continua, perciò b è effettivamente definita su $H^{1/2} \subset L^s$ e dalla continuità di H segue quella di b .

Sia $u_m \in H^{1/2}$ una successione limitata, allora esiste $u \in H^{1/2}$ tale che:

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{rispetto a } H^{\frac{1}{2}}$$

ed essendo l'immersione $H^{1/2} \hookrightarrow L^s$ compatta, abbiamo per una certa sottosuccessione la convergenza forte in norma L^s :

$$u_m \rightarrow u \quad \text{in norma } L^s$$

Dalla condizione (4.8) segue che ∇H porta mappe dallo spazio L^s in $L^{s/r}$ in maniera continua, e perciò per $u_m \rightarrow u$ in norma L^s :

$$\nabla H(u_m) \rightarrow \nabla H(u) \quad \text{in norma } L^{\frac{s}{r}}$$

Infine, usando la disuguaglianza di Hölder, la disuguaglianza (4.2) e la scrittura della norma³:

$$\|v\|_A = \sup_{\|\psi\| \leq 1} (v, \psi)_A$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \|b'(u_m) - b'(u)\|_A &\leq \sup_{\|\psi\| \leq 1} \int_0^{2\pi} |\nabla H(u_m) - \nabla H(u)| |\psi| dt \\ &\leq \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|\nabla H(u_m) - \nabla H(u)\|_{L^{s/r}} \|\psi\|_{L^s} \leq C_s \|\nabla H(u_m) - \nabla H(u)\|_{L^{s/r}} \end{aligned}$$

garantendo così, per la sotto-successione $u_m \rightharpoonup u$ rispetto a $H^{1/2}$:

$$b'(u_m) \rightarrow b'(u) \quad \text{in norma } H^{\frac{1}{2}}$$

□

Diamo quindi la seguente approssimazione di H , dove il parametro $K > 0$ è da determinare:

$$H_K(z) = \chi(|z|)H(z) + (1 - \chi(|z|)) R_1 |z|^4$$

La funzione *cut-off* χ , di classe $\mathcal{C}_0^\infty$, è come segue:

$$\chi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \chi(x) &\equiv 1 \quad \text{per } x \leq K \\ \chi(x) &\equiv 0 \quad \text{per } x \geq K+1 \\ \chi'(x) &< 0 \quad \text{per } K < x < K+1 \end{aligned}$$

e la costante $R_1 = R_1(K) > 0$ soddisfa:

$$R_1 \geq \max_{K \leq |z| \leq K+1} \frac{H(z)}{|z|^4}$$

Chiaramente $H_K \geq 0$ e per z vicino a 0 vale $H_K \equiv H = o(|z|^2)$; scriviamo quindi il gradiente di H_K moltiplicato per z :

$$\nabla H_K(z) \cdot z = \chi'(|z|) (H(z)|z| - R_1 |z|^5)$$

³La norma di ψ nel sup è intesa rispetto a $H^{1/2}$

$$+\chi(|z|)\nabla H(z) \cdot z + (1 - \chi(|z|)) 4R_1|z|^4$$

Per $|z| \leq K$ e $|z| \geq R$, che per K abbastanza grande sicuramente esiste:

$$\nabla H_K(z) \cdot z = \nabla H(z) \cdot z \geq \mu H(z) = \mu H_K(z) \quad (4.9)$$

mentre per $|z| \geq K + 1$:

$$\nabla H_K(z) \cdot z = 4R_1|z|^4 = 4H_K(z)$$

Nel caso $K < |z| < K + 1$, dalla definizione di R_1 abbiamo:

$$H(z)|z| - R_1|z|^5 \leq 0$$

e per come abbiamo definito χ anche $\chi' < 0$, per cui, essendo il primo termine in (4.9) non negativo:

$$\begin{aligned} \nabla H_K(z) \cdot z &\geq \chi(|z|)\nabla H(z) \cdot z + (1 - \chi(|z|)) 4R_1|z|^4 \\ &\geq \mu\chi(|z|)H(z) + 4(1 - \chi(|z|)) R_1|z|^4 \geq \nu H_K(z) \end{aligned}$$

dove $\nu = \min\{4, \mu\}$.

Ricapitolando vale (4.5) per ν come appena detta e $R^* = \min\{R, K\}$, in particolare (4.6) diventa:

$$H_K(z) \geq C_1|z|^\nu - C_2 \quad (4.10)$$

e le costanti C_1 e C_2 non dipendono da K (se K è abbastanza grande).

È chiaro che H_K soddisfa le ipotesi del Lemma 4.2.3 per $s = 4$ e $r = 3$, dunque il gradiente di $b = b_K = \int H_K$ è compatto.

4.2.3 Verifica della condizione di Palais-Smale

Lemma 4.2.4. *Il funzionale reale:*

$$I(z) = I_K(z) = A(z) - \lambda \int_0^{2\pi} H_K(z) dt$$

definito su $H^{1/2}$, soddisfa la condizione di Palais-Smale.

Dimostrazione. Sia $z_m \in H^{1/2}$ una successione tale che:

$$|I(z_m)| \leq M$$

$$I'(z_m) \rightarrow 0$$

per una qualche $M > 0$.

Supponendo m sufficientemente grande:

$$-\frac{1}{2} (I'(z_m), z_m) \leq \frac{1}{2} \|I'(z_m)\| \|z_m\| \leq \|z_m\|$$

perciò:

$$\begin{aligned} M + \|z_m\| &\geq I(z_m) - \frac{1}{2} (I'(z_m), z_m) = \lambda \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \nabla H_K(z_m) \cdot z_m - H_K(z_m) dt \\ &\geq \left[\lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu} \right) \int_0^{2\pi} \nabla H_K(z_m) \cdot z_m dt \right] - M_1 \end{aligned}$$

Notiamo intanto che la stima sopra al momento non dipende da K e $(1/2) - (1/\nu) > 0$, per cui:

$$M + \|z_m\| \geq M_2 \|z_m\|_{L^4}^4 - M_3 \quad (4.11)$$

data la particolare forma di H_K ; sottolineiamo che M_2 e M_3 dipendono da K .

Similmente s'ottiene, scrivendo $z_m = z_m^0 + z_m^+ + z_m^-$:

$$\begin{aligned} M + \|z_m\| &\geq \left[\lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu} \right) \int_0^{2\pi} \nabla H_K(z_m) \cdot z_m dt \right] - M_1 \\ &\geq \left[\lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu} \right) \nu \int_0^{2\pi} H_K(z_m) dt \right] - M_4 \geq M_5 \|z_m\|_{L^\nu}^\nu - M_6 \\ &\geq M_7 \|z_m\|_{L^2}^\nu - M_6 \geq 2\pi M_7 |z_m^0|^\nu - M_6 \end{aligned}$$

e le costanti appena introdotte non dipendono da K .

In altre parole, per una certa costante M_8 :

$$|z_m^0| \leq M_8 (1 + \|z_m\|^{1/\nu}) \quad (4.12)$$

Dato che:

$$(A'(z_m), z_m^+) - \lambda \left| \int_0^{2\pi} \nabla H_K(z_m) \cdot z_m^+ dt \right| \leq |(I'(z_m), z_m^+)| \leq \|z_m^+\|$$

segue:

$$2\|z_m^+\|^2 = 2A(z_m^+) = (A'(z_m), z_m^+) \leq \lambda \left| \int_0^{2\pi} \nabla H_K(z_m) \cdot z_m^+ dt \right| + \|z_m^+\|$$

Applichiamo la disuguaglianza di Hölder e (4.2) ($s \geq 2$):

$$\left| \int_0^{2\pi} \nabla H_K(z_m) \cdot z_m^+ dt \right| \leq \|\nabla H_K(z_m)\|_{L^4} \|z_m^+\|_{L^s} \leq C_s \|\nabla H_K(z_m)\|_{L^4} \|z_m^+\|_A$$

Usiamo (4.8) per $r = 3$:

$$\|\nabla H_K(z_m)\|_{L^4} \leq \alpha_1 \| |z_m|^3 \|_{L^4} + \alpha_2$$

Riapplichiamo la disuguaglianza di Hölder:

$$\| |z_m|^3 \|_{L^4} = \left(\| |z_m|^{12} \cdot 1 \|_{L^1} \right)^{1/4} \leq \left(2\pi \| |z_m|^{12} \|_{L^{1/3}} \right)^{1/4} = N \|z_m\|_{L^4}^3$$

In definitiva:

$$2\|z_m^+\|^2 \leq M_9 \left(1 + \|z_m\|_{L^4}^3 \right) \|z_m^+\|$$

ovvero, usando (4.11):

$$\|z_m^+\| \leq M_{10} \left(1 + \|z_m\|_{L^4}^3 \right) \leq M_{11} \left(1 + \|z_m\|^{3/4} \right) \quad (4.13)$$

Vale un risultato identico considerando $-z_m^-$ al posto di z_m^+ .

Dunque, mettendo assieme (4.12) e (4.13):

$$\|z_m\| \leq M_{12} \left(1 + \|z_m\|^{3/4} + \|z_m\|^{1/\nu} \right)$$

otteniamo che z_m è limitata.

Sicuramente $z_m^0 \in \mathbb{R}^{2n}$ ammette una sotto-successione convergente, in virtù della topologia finito-dimensionale; invece prendendo ad esempio z_m^+ :

$$z_m^+ = P^+ I'(z_m) + \lambda P^+ b'(z_m)$$

per $m \rightarrow +\infty$ il gradiente I' svanisce, mentre essendo b' compatto possiamo estrarre una sotto-successione z_m tale che $P^+ b'(z_m)$ converga, e di conseguenza anche z_m^+ convergerà.

Vale un ragionamento analogo per z_m^- , dimostrando così che esiste una sotto-successione convergente di z_m .

□

4.2.4 Ultime verifiche su I

Riprendiamo le notazioni della Proposizione 3.3.2:

$$S = \partial B_\rho \cap H^+$$

$$Q = \left(\overline{B}_{r_2} \cap \left(H^0 \oplus H^- \right) \right) \oplus \{re : 0 \leq r \leq r_1\}$$

dove $e \in H^+$ ha norma unitaria, $0 < r_1 < \rho$ e $r_2 > 0$.

Come abbiamo già visto S è ∂Q linkano rispetto a Φ .

Dimostriamo quindi:

Lemma 4.2.5. *Esistono $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tali che:*

$$I|_S = I|_{\partial B_\rho \cap H^+} \geq \alpha > 0$$

Dimostrazione. Dalla condizione 2 abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$H_K(z) \leq \varepsilon |z|^2$$

per ogni z di norma $|z|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq \delta$.

Per come è scritta H_K , esiste $M = M(\varepsilon, K) > 0$ tale che:

$$\frac{H_K(z)}{|z|^4} \leq M$$

per $|z| \geq \delta$.

Mettendo assieme le due disuguaglianze abbiamo:

$$H_K(z) \leq \varepsilon |z|^2 + M |z|^4$$

per ogni z .

Integriamo questa disequazione e usiamo (4.2):

$$\int_0^{2\pi} H_K(z) dt \leq \varepsilon \|z\|_{L^2}^2 + M \|z\|_{L^4}^4 \leq (C_2 \varepsilon + C_4 M \|z\|^2) \|z\|^2$$

Dunque per $z \in H^+$:

$$I(z) = A(z) - \lambda b(z) \geq \frac{\|z\|^2}{2} - \lambda (C_2 \varepsilon + C_4 M \|z\|^2) \|z\|^2$$

In particolare per $\varepsilon = (\lambda C_2 n)^{-1}$ e $\rho^2 = (\lambda C_4 M n)^{-1}$:

$$I(z) \geq \frac{n-2}{2n} \rho^2$$

Perciò considerando $n \geq 3$ e α come il termine a destra della disequazione sopra, otteniamo quanto detto.

Si nota che α e ρ dipendono da K , in quanto dipendono da M . $\square$

Lemma 4.2.6. *Esistono r_1, r_2 e $\omega \leq 0$ tali che:*

$$I|_{\partial Q} \leq \omega \leq 0$$

Dimostrazione. Siano $z = z^0 + z^-$ e $r \geq 0$:

$$I(z + re) = 2r^2 - 2\|z^-\|^2 - \lambda \int_0^{2\pi} H_K(z + re) dt$$

Usiamo dapprima (4.9), per poi applicare la disuguaglianza di Hölder:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H_K(z + re) dt &\geq C_1 \int_0^{2\pi} |z + re|^\nu dt - 2\pi C_2 \\ &\geq C_3 \left(\int_0^{2\pi} |z + re|^2 dt \right)^{\nu/2} - C_4 \\ &= C_3 \left(\int_0^{2\pi} |z^0|^2 + |z^-|^2 + r^2 |e|^2 dt \right)^{\nu/2} - C_4 \\ &\geq C_5 (|z_0|^\nu + r^\nu) - C_4 \end{aligned}$$

e la stima *non dipende* da K .

Quindi:

$$I(z + re) \leq (2r^2 - \lambda C_5 r^\nu + C_4) - (2\|z^-\|^2 + \lambda C_5 |z^0|^\nu)$$

Sia:

$$\phi(r) = 2r^2 - \lambda C_5 r^\nu + C_4$$

Dato che $\nu > 2$, esiste $r_1 > 0$ tale che per $r \geq r_1$:

$$\phi(r) \leq 0$$

e necessariamente:

$$I(z + re) \leq 0$$

Siano ora:

$$\psi(z) = 2\|z^-\|^2 + \lambda C_5 |z^0|^\nu$$

$$M = \max_{r \in [0, r_1]} \phi(r)$$

Consideriamo r_2 tale che per $\|z\| \geq r_2$:

$$\psi(z) \geq M$$

allora vale:

$$I(z + re) \leq 0$$

In conclusione abbiamo trovato $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$, che *non dipendono* da K , tali che, per $z \in \partial B_{r_2} \cap E_2$:

$$I(z + re) \leq 0$$

per $z \in E_2$ sicuramente ($H_K \geq 0$):

$$I(z) = -2\|z^-\|^2 - \lambda \int_0^{2\pi} H_K(z) dt \leq 0$$

mentre per $r = r_1$:

$$I(z + r_1 e) \leq 0$$

In altre parole:

$$I|_{\partial Q} \leq 0$$

□

4.2.5 Regolarità di z_K

Dato che l'azione dell'hamiltoniana H_K soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 3.3.4, esiste un valore critico $c_K > 0$ con annesso punto critico $z_K \in H^{1/2}$.

Vogliamo verificare che $z_K \in \mathcal{C}^2$ e non sia costante.

Dato che $I'(z_K) = 0$, per ogni $\zeta \in H^1 \subset H^{1/2}$:

$$(I'(z_K), \zeta)_A = B[z_K, \zeta] - \lambda \int_0^{2\pi} \nabla H_K(z_K) \cdot \zeta \, dt = 0$$

In particolare prendendo $\zeta = e_k$, dove $\{e_k\}_{k=1}^{2n}$ sono la base canonica di $\mathbb{R}^{2n}$, s'ottiene che il valore atteso di $\nabla H_K(z_K)$ è nullo:

$$[J\nabla H_K(z_K)] = [\nabla H_K(z_K)] := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla H_K(z_K) \, dt = 0$$

Dato che il valore atteso è il coefficiente costante della serie di Fourier, essendo $[J\nabla H_K(z_K)] = 0$, possiamo integrare $\lambda J\nabla H_K(z_K)$ e ottenere una funzione periodica z in L^2 ; questa risolve dunque:

$$\dot{z} = \lambda J\nabla H(z_K)$$

Sia $\lambda J\nabla H(z_K) = \sum_{k \neq 0} a_k e^{ikt}$, consideriamo in particolare z tale che $[z] = [z_K]$:

$$z = [z_K] + \sum_{k \neq 0} \frac{a_k}{ik} e^{ikt} \in H^1$$

Presa $\zeta \in H^1$, abbiamo allora:

$$\int_0^{2\pi} (z, J\dot{\zeta}) \, dt = \lambda \int_0^{2\pi} \nabla H_K(z_K) \cdot \zeta \, dt = B[z_K, \zeta] = \int_0^{2\pi} (z_K, J\dot{\zeta}) \, dt$$

Quindi i termini della serie di z non costanti sono uguali a quelli di z_K , ma avendo assunto $[z] = [z_K]$, abbiamo proprio $z = z_K$.

Dato che $z_K = z \in H^1$, possiamo assumere questa continua, e perciò dalla continuità di H segue che z_K è una soluzione classica e periodica di:

$$\dot{y} = \lambda J\nabla H_K(y) \tag{4.14}$$

in maniera simile a quanto visto nel Teorema 2.2.2.

Se per assurdo fosse z_K costante, avremmo:

$$0 < c_K = I(z_K) = - \int_0^{2\pi} H_K(z_K) \, dt \leq 0$$

per cui z_K è una soluzione non banale del problema (4.14).

4.2.6 Esistenza d'una soluzione per il problema di partenza

Ricapitoliamo: data H che soddisfa le ipotesi del teorema:

1. $H \geq 0$
2. $H(z) = o(|z|^2)$ per $z \rightarrow 0$
3. Esistono $R > 0$ e $\mu > 2$ tali che per $|z| \geq R$:

$$0 < \mu H(z) \leq z \cdot \nabla H(z) \quad (4.15)$$

abbiamo trovato un'approssimazione H_K (dove $K > 0$), tale che per $|z| \leq K$ vale $H_K \equiv H$, e una soluzione classica, periodica e non banale z_K del problema:

$$\dot{z} = \lambda J \nabla H_K(z)$$

Dunque, per come è definita H_K , vogliamo vedere che per una certa $K > 0$ vale:

$$\|z_K\|_{L^\infty} \leq K$$

di modo che z_K risolve:

$$\dot{z}_K = \lambda J \nabla H_K(z_K) = \lambda J \nabla H(z_K)$$

Più precisamente troveremo $K_0 > 0$ tale che per ogni K :

$$\|z_K\|_{L^\infty} \leq K_0$$

per cui ogni $K \geq K_0$ soddisferà i nostri requisiti.

Ricordiamo dal Teorema 3.3.4 che c_K ha forma:

$$c_K = \inf_{h_t \in \Gamma^*} \sup_{u \in Q} I(h_{t=1}(u))$$

Senza richiamare la definizione di Γ^* , ci basta sapere che l'omotopia uguale all'identità per ogni t appartiene a Γ^* , quindi:

$$c_K \leq \sup_{u \in Q} I(u)$$

Come abbiamo visto prima, posto $z = z^0 + z^-$, vale la stima:

$$I(z + re) \leq 2r^2 - 2\|z^-\|^2 - \int_0^{2\pi} H_K(z + re) dt$$

e su Q :

$$I(z + re) \leq 2r_1^2$$

dove ricordiamo che r_1 *non dipende* da K .

Dunque, come già visto:

$$\begin{aligned} 2r_1^2 &\geq c_K = I(z_K) = I(z_K) - \frac{1}{2}(I'(z_K), z_K) \\ &= \lambda \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \nabla H_K(z_K) \cdot z_K - H_K(z_K) dt \\ &\geq \left[\lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu} \right) \int_0^{2\pi} \nabla H_K(z_K) \cdot z_K dt \right] - M_1 \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto una stima per $\int \nabla H_K(z_K) \cdot z_K$ che non dipende da K .

Ma dato che H_K soddisfa la condizione (4.5), in particolare se $K \geq R$:

$$H_K(\zeta) \leq \nu^{-1} \nabla H_K(\zeta) \cdot \zeta + M^*$$

per una certa M^* che non dipende da K e per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^{2n}$.

Nel caso particolare di z_K , ricordando che $H_K(z_K)$ è costante, in quanto z_K è soluzione di (4.14), integrando otteniamo:

$$2\pi H_K(z_K) \leq \nu^{-1} \int_0^{2\pi} \nabla H_K(z_K) \cdot z_K dt + 2\pi M^* \leq K_0$$

La costante K_0 è fornita dalla stima ottenuta prima su $\int \nabla H_K(z_K) \cdot z_K$.

In conclusione per $K \geq K_0$ la soluzione z_K è soluzione di:

$$\dot{y} = \lambda J \nabla H(y)$$

e, riparametrizzando, otteniamo una soluzione classica non banale di periodo T di:

$$\dot{y} = J \nabla H(y)$$

e il teorema è dimostrato. □

Osservazione 17. Il teorema fornisce una soluzione y con periodo T , ma questo non è necessariamente il suo *periodo minimo*: quindi esiste un intero $k \geq 1$ tale che y ha periodo minimo $\frac{T}{k}$.

Corollario 4.2.7. *Sotto le ipotesi del teorema, esistono infinite soluzioni periodiche delle equazioni canoniche.*

Dimostrazione. Preso $T > 0$ esiste una soluzione y_1 con periodo T ; sia $\frac{T}{k_1}$ il suo periodo minimo, consideriamo allora una soluzione y_2 con periodo $\frac{T}{2k_1}$. Questa è sicuramente distinta da y_1 in quanto il suo periodo minimo è minore (per costruzione) di $\frac{T}{k_1}$.

Ripetendo il procedimento uno ottiene così un'infinità di soluzioni periodiche non banali. $\square$

4.3 Esistenza per data superficie d'energia

Come preannunciato, dal Teorema 4.2.1 segue molto facilmente un teorema d'esistenza d'orbite periodiche su una superficie d'energia fissata.

Teorema 4.3.1. *Siano $H \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ un'hamiltoniana,*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : H(x) = 1\}$$

la superficie d'energia al livello 1; se S è il bordo d'un compatto stellato rispetto all'origine, e per $z \in S$ vale:

$$\nabla H(z) \cdot z \neq 0$$

allora esiste una soluzione periodica (non banale) su S del sistema hamiltoniano associato a H .

Osservazione 18. Questo teorema, come detto all'inizio del capitolo, è una generalizzazione del Teorema 2.2.2, dove al posto d'una superficie convessa, quindi stellata rispetto ad ogni suo punto, consideriamo una superficie stellata rispetto all'origine.

Questi due teoremi, dimostrati da A.Weinstein e P.Rabinowitz nel caso convesso e nel caso stellato rispettivamente, sono entrambi del 1978, anche se i metodi utilizzati sono estremamente diversi.

Dimostrazione. Ricordiamo che grazie alla Proposizione 2.2.1 siamo liberi di scegliere l'hamiltoniana $\bar{H}$, a patto che:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : H(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \bar{H}(x) = 1\}$$

Quindi sia $\alpha(z)$ la funzione di gauge di S , definita in (2.3), consideriamo allora:

$$\bar{H}(z) = (\alpha(z))^4$$

Chiaramente $\bar{H}(z) \geq 0$, mentre per ogni $\varepsilon > 0$ e per $z \rightarrow 0$ si ha:

$$\bar{H}(z) \leq M|z|^4 \leq \varepsilon|z|^2$$

ed essendo $\bar{H}$ omogenea di grado 4, questa soddisfa chiaramente (4.5).

Le ipotesi del Teorema 4.2.1 sono soddisfatte, quindi per ogni $T > 0$ esiste una soluzione periodica z_T avente periodo T , non banale, di:

$$\dot{y} = J\nabla\bar{H}(y) \tag{4.16}$$

Anche se non necessariamente vale $\bar{H}(z_T) = 1$, sicuramente $\bar{H}(z_T) = \beta \neq 0$, perciò moltiplicando per $\gamma = \beta^{-1/4}$:

$$\gamma\dot{z}_T = \gamma J\nabla\bar{H}(z_T) = \gamma^{-2} J\nabla\bar{H}(\gamma z_T)$$

in quanto $\nabla\bar{H}$ è omogeneo di grado 3.

Abbiamo che $\gamma z_T \in S$:

$$\bar{H}(\gamma z_T) = \gamma^4 \bar{H}(z_T) = \gamma^4 \beta = 1$$

dunque, riparametrizzando γz_T , otteniamo una soluzione di (4.16):

$$\gamma z_T(\gamma^2 \cdot) \tag{4.17}$$

Dalla Proposizione 2.2.1 esiste poi una riparametrizzazione di (4.17), sempre in S , che è soluzione (ancora periodica) del sistema hamiltoniano originario, dimostrando così il teorema. $\square$

Appendice A

Costruzione e proprietà del grado

A.1 Grado di Brouwer

Diamo una costruzione analitica del grado di Brouwer, seguendo [15].

A.1.1 Caso regolare

Definizione A.1. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, diremo che $x \in \Omega$ è un punto critico di f se la matrice jacobiana $J_f(x)$ è singolare, e chiameremo in questo caso $p = f(x)$ un valore critico di f .

Lemma A.1.1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$; se $p \notin f(\partial\Omega)$ e p non è un valore critico di f , allora:*

1. *La pre-immagine $f^{-1}(p)$ contiene finiti punti $a_1, a_2, \dots, a_k \in \Omega$.*
2. *Esistono $\varepsilon > 0$, degli intorni $V_1, V_2, \dots, V_k \subset \Omega$ di $a_1, a_2, \dots, a_k$ rispettivamente, tali che, per $i \neq j$:*

$$V_i \cap V_j = \emptyset$$

$$f^{-1}(B_\varepsilon(p)) = \bigcup_{j=1}^k V_j$$

e $f|_{V_j}$ è un diffeomorfismo.

Dimostrazione. Sia a una soluzione di $f(x) = p$, dalle ipotesi a non può essere un punto critico, quindi:

$$\det J_f(a) \neq 0$$

Dal teorema della funzione inversa, la mappa f è localmente invertibile attorno a a , perciò a è un punto isolato e $f^{-1}(p)$ è composta da finiti punti, altrimenti s'avrebbe l'esistenza d'un punto d'accumulazione $\bar{a} \in \bar{\Omega}$; dalla continuità di f seguirebbe $f(\bar{a}) = p$, per cui $\bar{a} \in \Omega$, il che è assurdo in quanto $\bar{a}$ dovrà essere anche punto isolato.

Siano allora $a_1, \dots, a_k \in \Omega$ le soluzioni di $f(x) = p$, prendiamo i loro rispettivi intornoi $\omega_1, \dots, \omega_k$, che, a meno di restringerli, supporremo soddisfino (per $i \neq j$):

$$\omega_i \cap \omega_j = \emptyset \quad \omega_i \subset \Omega$$

inoltre, sempre applicando il teorema della funzione inversa, supporremo che $f|_{\omega_i}$ sia un diffeomorfismo e quindi che $f(\omega_i)$ sia un aperto.

Abbiamo allora che $\cap f(\omega_i)$ è un aperto e un intorno di p , per cui esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$B_\varepsilon(p) \subset \bigcap f(\omega_i)$$

Richiediamo inoltre (d indica la distanza):

$$\varepsilon < d\left(p, f(\bar{\Omega} \setminus \bigcup \omega_i)\right)$$

Dunque poniamo:

$$V_i := f|_{\omega_i}^{-1}(B_\varepsilon(p))$$

Dato che:

$$V_i \subset f|_{\omega_i}^{-1}(f|_{\omega_i}(\omega_i)) = \omega_i$$

segue (per ogni $i \neq j$):

$$V_i \cap V_j \subset \omega_i \cap \omega_j = \emptyset$$

e $f|_{V_i}$ è un diffeomorfismo.

Dalla definizione abbiamo:

$$\bigcup V_i \subset f^{-1}(B_\varepsilon(p))$$

Sia dunque $y \in f^{-1}(B_\varepsilon(p))$ ma $y \notin \bigcup V_i$, per cui:

$$y \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup V_i$$

$$\varepsilon < d(p, f(\overline{\Omega} \setminus \bigcup \omega_i)) \leq d(p, f(\overline{\Omega} \setminus \bigcup V_i)) \leq d(p, f(y))$$

Ma allora $f(y) \notin B_\varepsilon(p)$, il che è assurdo. $\square$

Possiamo dare la seguente:

Definizione A.2. Per $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e limitato, preso $p \in \mathbb{R}^n$ al di fuori di $f(\partial\Omega)$, richiedendo inoltre che p sia un valore non critico di f , definiamo il grado:

$$d(f, p, \Omega) = \begin{cases} \sum_{x: f(x)=p} \text{sgn}(\det J_f(x)) & \text{se esiste } x \text{ tale che } f(x) = p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A.1.2 Estensione sui valori critici

Introduciamo la seguente famiglia di mollificatori (per $\varepsilon > 0$):

$$\mathcal{F}_\varepsilon := \left\{ \Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|y|) dy = 1 \quad \text{e per ogni } t \geq \varepsilon \text{ vale } \Phi(t) = 0 \right\}$$

Proposizione A.1.2. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$; se $p \notin f(\partial\Omega)$ e p non è un valore critico di f , allora:

$$d(f, p, \Omega) = \int_{\Omega} \Phi(|f(x) - p|) \det J_f(x) dx$$

per ogni $\varepsilon < d(p, f(\partial\Omega))$ e $\Phi \in \mathcal{F}_\varepsilon$.

Dimostrazione. Se $f^{-1}(p) = \emptyset$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in \overline{\Omega}$ vale $d(f(x), p) > \varepsilon$, dunque per ogni $\Phi \in \mathcal{F}_\varepsilon$:

$$\Phi(|f(x) - p|) = 0 \implies \int_{\Omega} \Phi(|f(x) - p|) J_f(x) dx = 0 = d(f, p, \Omega)$$

Se $f^{-1}(p) = \{a_1, \dots, a_k\}$, gli intorni $V_1, \dots, V_k$ e $\varepsilon > 0$ sono come nel Lemma A.1.1, allora, per $\Phi \in \mathcal{F}_\varepsilon$:

$$d(f, p, \Omega) = \sum_{j=1}^k \operatorname{sgn}(\det J_f(a_j)) = \sum \operatorname{sgn}(\det J_f(a_j)) \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(|y|) dy$$

Dato che $f|_{V_j}$ è un diffeomorfismo, effettuiamo un cambio di variabili con $y = f(x) - p$ e $dy = |\det J_f(x)| dx$:

$$\begin{aligned} &= \sum \operatorname{sgn}(\det J_f(a_j)) \int_{V_j} \Phi(|f(x) - p|) |J_f(x)| dx \\ &= \sum \int_{V_j} \Phi(|f(x) - p|) \operatorname{sgn}(\det J_f(a_j)) |\det J_f(x)| dx \end{aligned}$$

Il determinante è non nullo all'interno di V_j , perciò il suo segno rimane costante:

$$= \sum \int_{V_j} \Phi(|f(x) - p|) \det J_f(x) dx = \int_{\Omega} \Phi(|f(x) - p|) \det J_f(x) dx$$

in quanto $\Phi(|f(x) - p|)$ al di fuori dei V_j è nullo. $\square$

Possiamo dunque ampliare la definizione di prima:

Definizione A.3. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$; se $p \notin f(\partial\Omega)$ e prendiamo $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < d(f(\partial\Omega), p)$, allora per $\Phi \in \mathcal{F}_\varepsilon$ definiamo:

$$d(f, p, \Omega) = \int_{\Omega} \Phi(|f(x) - p|) \det J_f(x) dx$$

Osservazione 19. In questa nuova definizione p può essere un valore critico; come appena visto il grado non dipende dalla scelta di Φ , e comunque coincide con la definizione data prima se p non è un valore critico.

A.1.3 Estensione a $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$

Proposizione A.1.3. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, f e g due mappe $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$; dato $p \notin f(\partial\Omega)$, se esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$\begin{cases} |f(x) - p| \geq 7\varepsilon & \forall x \in \partial\Omega \\ |g(x) - f(x)| \leq \varepsilon & \forall x \in \overline{\Omega} \end{cases}$$

allora $p \notin g(\partial\Omega)$ e vale:

$$d(f, p, \Omega) = d(g, p, \Omega)$$

Dimostrazione. Abbiamo subito, per $x \in \partial\Omega$:

$$|g(x) - p| \geq |g(x) - f(x)| - |f(x) - p| \geq 7\varepsilon - \varepsilon = 6\varepsilon$$

per cui $p \notin g(\partial\Omega)$.

Ora sia $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R})$ a supporto compatto:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \leq 2\varepsilon \\ 0 & \text{per } t \geq 3\varepsilon \end{cases}$$

e comunque con valori in $[0, 1]$.

Definiamo allora la seguente combinazione convessa:

$$h(x) = f(x) + \gamma(|f(x) - p|)(g(x) - f(x))$$

Per $|f(x) - p| \leq 2\varepsilon$ si ha $h(x) \equiv g(x)$, mentre per $|f(x) - p| \geq 3\varepsilon$ vale $h(x) \equiv f(x)$.

Inoltre:

$$|h(x) - f(x)| = \gamma(|f(x) - p|)|g(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Data $\Phi_1 \in \mathcal{F}_{5\varepsilon}$, tale che:

$$\Phi_1(t) = 0 \quad \text{per } t \leq 4\varepsilon$$

abbiamo per $|f(x) - p| \leq 3\varepsilon$:

$$|h(x) - p| \leq |h(x) - f(x)| + |f(x) - p| \leq 4\varepsilon$$

ergo per tali x vale $\Phi_1(|f(x) - p|) = \Phi_1(|h(x) - p|) = 0$.

Perciò, notando che $5\varepsilon < d(f, h(\partial\Omega), p)$:

$$d(f, p, \Omega) = \int_{\Omega} \Phi_1(|f(x) - p|) \det J_f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega \cap \{|f(x)-p| \geq 3\varepsilon\}} \Phi_1(|f(x)-p|) \det J_f(x) dx \\
&= \int_{\Omega \cap \{|f(x)-p| \geq 3\varepsilon\}} \Phi_1(|h(x)-p|) \det J_h(x) dx \\
&= \int_{\Omega} \Phi_1(|h(x)-p|) \det J_h(x) dx = d(h, p, \Omega)
\end{aligned}$$

Sia ora $\Phi_2 \in \mathcal{F}_\varepsilon$, dato che per $|f(x)-p| \geq 2\varepsilon$:

$$|g(x)-p| \geq |f(x)-p| - |g(x)-f(x)| \geq \varepsilon$$

$$|h(x)-p| \geq |f(x)-p| - |h(x)-f(x)| \geq \varepsilon$$

lì vale $\Phi_2(|g(x)-p|) = \Phi_2(|h(x)-p|) = 0$.

Dunque:

$$\begin{aligned}
d(g, p, \Omega) &= \int_{\Omega} \Phi_2(|g(x)-p|) \det J_g(x) dx \\
&= \int_{\Omega \cap \{|f(x)-p| \leq 2\varepsilon\}} \Phi_2(|g(x)-p|) \det J_g(x) dx \\
&= \int_{\Omega \cap \{|f(x)-p| \leq 2\varepsilon\}} \Phi_2(|h(x)-p|) \det J_h(x) dx \\
&= \int_{\Omega} \Phi_2(|h(x)-p|) \det J_h(x) dx = d(h, p, \Omega)
\end{aligned}$$

In conclusione:

$$d(f, p, \Omega) = d(h, p, \Omega) = d(g, p, \Omega)$$

□

Corollario A.1.4. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$; dati $p \notin f(\partial\Omega)$ e una successione $f_k \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ che tende ad f uniformemente, allora:*

1. *Per k grande $p \notin f_k(\partial\Omega)$, per cui è definito $d(f_k, p, \Omega)$.*
2. *Per k grande, ad esempio per $k \geq M$, essendo f_k una successione di Cauchy, il grado rimane costante.*

Da questo corollario segue:

Definizione A.4. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$; dati $p \notin f(\partial\Omega)$ e una successione $f_k \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ che tende ad f uniformemente, possiamo definire il grado di f in p , per k grande, come:

$$d(f, p, \Omega) := d(f_k, p, \Omega)$$

A.1.4 Proprietà

Da quanto abbiamo visto, sono immediate le seguenti proprietà (è inteso Ω come prima, f e g in $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$):

1. Se $p \in \Omega$, vale $d(Id, p, \Omega) = 1$.
2. Se $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ sono due aperti disgiunti (non necessariamente $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$), e $p \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, allora:

$$d(f, p, \Omega) = d(f, p, \Omega_1) + d(f, p, \Omega_2)$$

3. Se g approssima f in maniera $\mathcal{C}$, e $p \notin f(\partial\Omega)$, allora $p \notin g(\partial\Omega)$ e:

$$d(f, p, \Omega) = d(g, p, \Omega)$$

In particolare vediamo l'ultima:

Proposizione A.1.5. *Siano $f, g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, dato $p \notin f(\partial\Omega)$, se per un certo $\varepsilon > 0$ vale:*

$$\begin{cases} |f(x) - p| \geq 8\varepsilon & \text{per } x \in \partial\Omega \\ |f(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} & \text{per } x \in \overline{\Omega} \end{cases}$$

allora $p \notin g(\partial\Omega)$ e:

$$d(f, p, \Omega) = d(g, p, \Omega)$$

Dimostrazione. Siano f_n e g_n due successioni in $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ che tendono verso f e g rispettivamente in norma $\mathcal{C}$.

Per n grande valgono:

$$|f_n - g_n| \leq |f_n - f| + |f - g| + |g - g_n| \leq \varepsilon$$

e, per $x \in \partial\Omega$:

$$|f_n(x) - p| \geq |f(x) - p| - |f(x) - f_n(x)| \geq 7\varepsilon$$

Dunque dalla Proposizione A.1.3:

$$d(f, p, \Omega) = d(f_n, p, \Omega) = d(g_n, p, \Omega) = d(g, p, \Omega)$$

□

Abbiamo l'invarianza del grado per omotopia:

Proposizione A.1.6. *Siano $H_t \in \mathcal{C}([0, 1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $p \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$, allora è definito per ogni istante t il grado di H_t in p e questo rimane costante:*

$$d(H_0, p, \Omega) = d(H_t, p, \Omega) = d(H_1, p, \Omega)$$

Dimostrazione. Date le ipotesi esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$d(p, H([0, 1] \times \partial\Omega)) > 8\varepsilon$$

Dato che H è continua su un compatto, è anche uniformemente continua, quindi esiste $\delta > 0$ tale che, per $t_i \in [0, 1]$ e per ogni $x \in \overline{\Omega}$:

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies |H_{t_1}(x) - H_{t_2}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

La proposizione data prima ci garantisce che in ogni intervallo di lunghezza 2δ il grado è costante, per cui è costante su tutto $[0, 1]$. $\square$

Segue immediatamente:

Corollario A.1.7. *Date f e g uguali su $\partial\Omega$, per $p \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$, il grado è uguale:*

$$d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p)$$

Dimostrazione. Basta considerare l'omotopia:

$$h_t(x) = tf(x) + (1 - t)g(x)$$

$\square$

Teorema A.1.8. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $p \notin f(\partial\Omega)$; se $d(f, p, \Omega) \neq 0$, allora esiste $x \in \Omega$ tale che $f(x) = p$.*

Dimostrazione. Se per assurdo per ogni $x \in \Omega$ fosse $f(x) \neq p$, dalle ipotesi questo vale anche sul bordo, per cui dalla compattezza di $\overline{\Omega}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$d(p, f(\overline{\Omega})) \geq \varepsilon$$

Sia f_n una successione in $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ che tende verso f in norma $\mathcal{C}$, allora per n grande, per ogni $x \in \overline{\Omega}$:

$$|f_n(x) - p| \geq |f(x) - p| - |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ergo:

$$d(p, f_n(\overline{\Omega})) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

Data $\Phi \in \mathcal{F}_{\varepsilon/2}$, abbiamo:

$$d(f, p, \Omega) = d(f_n, p, \Omega) = \int_{\Omega} \Phi(|f(x) - p|) \det J_f(x) dx = 0$$

il che è assurdo. □

A.2 Grado di Leray-Schauder

Definizione A.5. Sia X uno spazio di Banach, diremo che $K : X \rightarrow X$ è *compatta* se per ogni insieme limitato $B \subset X$ la chiusura $\overline{K(B)}$ è un compatto.

Chiameremo le mappe della forma $F = Id - K$, dove K è compatta, *perturbazioni (compatte) dell'identità*.

Ancora, $F : \Omega \subset X \rightarrow X$ è detta *finito-dimensionale* se l'immagine $F(\Omega)$ ha dimensione finita.

Lemma A.2.1. Se $K : \Omega \subset X \rightarrow X$ è compatta, allora è approssimabile in maniera $\mathcal{C}$ da una mappa finito-dimensionale; ergo per ogni $\varepsilon > 0$ esiste K_ε finito-dimensionale tale che:

$$\sup_{u \in \Omega} |K(u) - K_\varepsilon(u)| < \varepsilon$$

Definizione A.6. Siano $F = Id - K$ una perturbazione dell'identità, Ω un aperto limitato in X , allora $F(\partial\Omega)$ è chiusa, per cui se $p \notin F(\partial\Omega)$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$d(p, F(\partial\Omega)) \geq \varepsilon > 0$$

Sia dunque K_ε una mappa finito-dimensionale definita su $\overline{\Omega}$ tale che:

$$\sup_{u \in \overline{\Omega}} |K(u) - K_\varepsilon(u)| < \varepsilon$$

Essendo K_ε finito-dimensionale esiste un sottospazio $X_1 \subset X$ avente dimensione finita per cui $K_\varepsilon(\overline{\Omega}) \subset X_1$, quindi definiamo il grado di Leray-Schauder di F usando il grado di Brouwer definito prima:

$$d_{LS}(Id - K, p, \Omega) := d\left((Id - K_\varepsilon)|_{\overline{X_1 \cap \Omega}}, p, X_1 \cap \Omega\right)$$

Si può dimostrare che le proprietà date prima per il grado di Brouwer vengono ereditate dal grado di Leray-Schauder, facendo attenzione che le mappe considerate siano perturbazioni dell'identità. In particolare l'invarianza per omotopia s'applica per omotopie della forma:

$$H_t(u) = u - K_t(u)$$

dove K_t è compatta.

Bibliografia

- [1] C. C. Pugh and C. Robinson, “The $\mathcal{C}^1$ closing lemma, including hamiltonians,” *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, vol. 3, no. 2, pp. 261–313, 1983.
- [2] F. H. Clarke, “A classical variational principle for periodic hamiltonian trajectories,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 76, no. 1, pp. 186–188, 1979.
- [3] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with application to differential equations*. No. 65 in Regional conference series in mathematics, American Mathematical Society, 1986.
- [4] V. Benci and P. H. Rabinowitz, “Critical point theorems for indefinite functionals,” *Inventiones Mathematicae*, vol. 52, no. 3, pp. 241–273, 1979.
- [5] J. Mawhin and M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*. No. 74 in Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 1989.
- [6] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*. Mathématiques appliquées pour le Master, Malakoff: Dunod, 2005.
- [7] R. L. Bishop and S. I. Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover Books on Mathematics, New York: Dover Publications, 1980.
- [8] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*. Universitext, Springer, seconda ed., 2011.

- [9] H. Hofer and E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Modern Birkhäuser Classic, Birkhäuser, 2011.
- [10] V. I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*. Roma: Editori Riuniti university press, 2010.
- [11] J. Moser, “On the volume elements on a manifold,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 120, no. 2, pp. 286–294, 1965.
- [12] A. Weinstein, “Periodic orbits for convex hamiltonian systems,” *Annals of Mathematics*, vol. 108, no. 3, pp. 507–518, 1978.
- [13] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, “Dual variational methods in critical point theory and applications,” *Journal of Functional Analysis*, vol. 14, no. 4, pp. 349–381, 1973.
- [14] M. Struwe, *Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. No. 34 in *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics*, Springer-Verlag, quarta ed., 2008.
- [15] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1985.
- [16] L. Brouwer, “Über abbildung von mannigfaltigkeiten,” *Mathematische Annalen*, vol. 71, no. 1, pp. 97–115, 1911.
- [17] J. Leray and J. Schauder, “Topologie et équations fonctionnelles,” *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, vol. 3e série, 51, pp. 45–78, 1934.
- [18] M. M. Vainberg, “Some questions of the differential calculus in linear spaces,” *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, vol. 7, no. 4(50), pp. 55–102, 1952.
- [19] P. H. Rabinowitz, “A variational method for finding periodic solutions of differential equations,” in *Nonlinear Evolution Equations* (M. G. Crandall, ed.), pp. 225–251, Academic Press, 1978.

-
- [20] P. H. Rabinowitz, “Periodic solutions of a hamiltonian system on a prescribed energy surface,” *Journal of Differential Equations*, vol. 33, no. 3, pp. 336–352, 1979.
 - [21] P. H. Rabinowitz, “Periodic solutions of hamiltonian systems,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 31, no. 2, pp. 157–184, 1978.
 - [22] A. Zygmund, *Trigonometric Series*. Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, terza ed., 2003.
 - [23] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*. No. 27 in Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford University Press, terza ed., 2017.