

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI
E LE EQUAZIONI CARDINALI DELLA
STATICA

Tesi di Laurea in Matematica

Relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
Emanuela Caliceti

Presentata da:
Francesca Ettore

Anno Accademico 2023/2024

ai miei genitori... Grazie

Introduzione

In questo elaborato vengono analizzate e messe a confronto le due principali metodologie utilizzate per la ricerca delle condizioni di equilibrio di un generico sistema materiale nell'ambito della meccanica classica: il principio dei lavori virtuali e le equazioni cardinali della statica. Dopo aver richiamato nel primo capitolo le principali nozioni e i risultati alla base di questa tematica, facendo riferimento soprattutto ai trattati [4] e [5], si passa ad illustrare il primo metodo a partire dalla caratterizzazione del *vincolo liscio* e delle corrispondenti reazioni vincolari. Più precisamente nel Capitolo 2, sviluppato in riferimento ai testi [2] e [6], dopo aver distinto gli spostamenti elementari dei punti in *possibili* e *virtuali*, si perviene alla condizione per cui l'assenza di attrito si traduce nella non negatività del lavoro virtuale del sistema di reazioni vincolari che rappresentano un dato vincolo. Sulla base di questo assunto si perviene alla dimostrazione del principio dei lavori virtuali, che fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione sia di equilibrio per il corpo: tale criterio consiste nella non positività del lavoro virtuale delle forze attive agenti sul corpo. Esso rappresenta uno strumento molto utile per la determinazione delle configurazioni di equilibrio di un qualunque sistema meccanico, particolarmente efficace nel caso di vincoli bilaterali e forze conservative. In questo caso infatti, la condizione si traduce nell'imporre l'annullarsi del gradiente del potenziale, asserendo cioè che le configurazioni di equilibrio del sistema sono tutti e soli i punti di stazionarietà del potenziale. Nella ricerca delle condizioni di equilibrio di un corpo questo metodo tuttavia fornisce solo una risposta parziale in quanto non dà alcuna indicazione per la determinazione delle reazioni vincolari che vanno applicate al corpo per assicurare l'equilibrio. Questo problema viene invece affrontato dal secondo metodo, le equazioni cardinali della statica, trattato nel terzo capitolo, utilizzando principalmente le referenze [3] e [1]. Queste in generale rappresentano un sistema di sei equazioni scalari, le cui incognite sono innanzitutto le configurazioni di equilibrio, ciascuna individuata da una n -upla di parametri lagrangiani, se $n \in \mathbb{N}$ rappresenta il grado di libertà del corpo. Se il corpo è soggetto a vincoli risulteranno incognite anche le corrispondenti reazioni vincolari che compaiono in entrambe le equazioni vettoriali, le quali impongono

l'annullarsi rispettivamente del vettore risultante e del momento risultante delle forze agenti sul corpo. Dunque per un corpo che presenti un grado di libertà superiore a sei, il problema si presenta a priori come indeterminato. Un secondo punto debole è dato dal fatto che le equazioni cardinali della statica rappresentano una condizione necessaria ma in generale non sufficiente per l'equilibrio di un generico sistema meccanico. È possibile tuttavia superare questo ostacolo almeno nel caso del *corpo rigido* (i cui punti mantengono a due a due distanza costante nel tempo). Infatti per questo sistema le equazioni cardinali sono condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio. Poiché un corpo rigido libero ha esattamente sei gradi di libertà, il problema non appare a priori indeterminato; se invece è vincolato allora il grado di libertà si riduce e rimane il necessario margine, fra le incognite, per inserire le dovute reazioni vincolari. Infine nel Capitolo 4 i due metodi vengono confrontati sul piano delle applicazioni, attraverso l'illustrazione di alcuni esempi notevoli riferiti a corpi rigidi: corpo rigido con un punto fisso, con un asse fisso e infine corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa. Per quest'ultima parte ci si è riferiti soprattutto a [4] e [5].

Indice

Introduzione	1
1 Nozioni di base della meccanica	1
2 Principio dei lavori virtuali	7
2.1 Spostamenti elementari, vincoli lisci e principio dei lavori virtuali	7
2.2 Equilibrio di un corpo rigido	11
3 Equazioni cardinali della statica	15
4 Applicazioni e confronto tra i due metodi	21
4.1 Corpo rigido con un punto fisso	21
4.2 Corpo rigido con asse fisso	24
4.3 Corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa	28

Capitolo 1

Nozioni di base della meccanica

In questo capitolo vengono richiamate le notazioni e le definizioni di base sulle quali si baseranno i risultati presentati in questa tesi.

Un vettore in \mathbb{R}^3 si denoterà con \vec{u} e potrà essere rappresentato come una terna ordinata di numeri reali, o, equivalentemente, come classe di segmenti orientati aventi lo stesso modulo, stessa direzione e stesso verso.

Se si vuole introdurre un sistema di riferimento cartesiano con origine in un punto O e assi Ox , Oy , Oz , un vettore $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ viene identificato con il punto P , secondo estremo del segmento orientato di origine in O , rappresentante della classe identificata da \vec{u} ; a sua volta P si identifica con la terna (x, y, z) delle sue coordinate cartesiane. Se si indica con $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ la base canonica dei versori (vettori di modulo unitario) orientati come i tre assi cartesiani, potremo utilizzare le seguenti rappresentazioni per il vettore \vec{u} :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = P - O = P = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Inoltre se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ con $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, per il loro prodotto scalare si avrà

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Il prodotto vettoriale invece rappresenta un vettore, denotato con $\vec{u} \wedge \vec{v}$, di modulo

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin(\theta)$$

dove θ è l'angolo fra \vec{u} e \vec{v} . Si ha che

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}.$$

Conoscere il moto di un punto P allora sarà equivalente a conoscere la funzione vettoriale $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(t)$ al variare del tempo, ovvero conoscere le tre funzioni che definiscono le coordinate del punto in ogni istante: $(x(t), y(t), z(t))$.

Osservazione 1.1. Geometricamente le tre funzioni appena definite rappresentano la parametrizzazione di una curva rispetto al parametro t ; tale curva è detta traiettoria del punto.

Per rappresentare la variazione del moto di un punto al variare del tempo, rispetto a un sistema di riferimento fissato, si utilizza il vettore velocità indicato con $\vec{v}(P) = \frac{d}{dt}(P - O) = \dot{P} = \frac{dP}{dt}$. Anche quest'ultimo perciò caratterizza il moto e la sua variazione è rappresentata dal vettore accelerazione indicato con $\vec{a}(P) = \frac{d}{dt}\vec{v}(P) = \ddot{P} = \frac{d^2P}{dt^2}$. Si ricorda inoltre che un corpo (o sistema meccanico) è un insieme costituito da un numero arbitrario (anche infinito) di punti materiali (dotati di massa).

Definizione 1.2. La **configurazione** di un corpo è l'insieme dei punti geometrici dello spazio da esso occupati. Il corpo si dice **libero** in una configurazione se può passare da essa ad ogni altra configurazione vicina geometricamente possibile. Si dice invece **vincolato** se è presente un dispositivo che non permette al corpo di passare a una delle possibili configurazioni vicine. Tale dispositivo è detto **vincolo**.

Il concetto di vincolo appena introdotto può avere una definizione più specifica: quando ci sono delle relazioni tra le coordinate dei punti che limitano l'arbitrarietà del sistema riducendo il numero di variabili indipendenti che caratterizzano il problema, tali relazioni sono detti **vincoli**. Esistono diverse tipologie di vincolo:

- **interno** o **esterno**: il primo è dovuto all'interazione tra le particelle del sistema, il secondo invece dall'interazione tra sistema e ambiente;
- **olonomo** o **anonomo**: il primo è un vincolo fra le coordinate dei punti del sistema e caratterizzabile mediante equazioni e disequazioni in termini finiti, mentre il secondo è espresso mediante una forma differenziabile non esatta;
- **bilaterale** o **unilaterale**: il primo è esprimibile solo mediante relazioni di uguaglianza mentre la formulazione del secondo deve contenere almeno una relazione di disuguaglianza.

Per quanto riguarda la nozione di forza si ricorda che si tratta di un vettore applicato del tipo (\vec{F}, P) , dove $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ è il vettore della forza e P il suo punto di applicazione. Le forze si distinguono in:

- **reazioni vincolari**, dovute all'azione dei vincoli;
- **forze attive**, tutte le altre.

Possono inoltre essere

- **forze interne:** le forze agenti su un corpo dovute a punti interni ad esso;
- **forze esterne:** dovute a punti, o corpi, esterni al sistema meccanico.

Osservazione 1.3. L'esperienza permette di stabilire che il vettore \vec{F} di una forza che agisce su un punto materiale P , in generale, è funzione della posizione del punto P , cioè delle sue coordinate, della sua velocità e del tempo, ossia $\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, t)$ ovvero, indicando con $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ le coordinate del punto in funzione del tempo, $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ le componenti della velocità, si avrà che l'espressione della forza è: $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$.

Definizione 1.4. Si chiama **momento di una forza** (\vec{F}, P) rispetto al polo $\Omega \in \mathbb{R}^3$ il vettore

$$\vec{M}_\Omega = \vec{F} \wedge (\Omega - P).$$

Osservazione 1.5. In generale il momento di una forza dipende dalla scelta del polo, scegliendo infatti un altro polo Ω_1 si avrà

$$\vec{M}_{\Omega_1} = \vec{F} \wedge (\Omega_1 - \Omega) + \vec{M}_\Omega.$$

Dato allora un sistema di forze $(\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$ si definiscono due elementi caratteristici:

1. Il **vettore risultante:**

$$\vec{R} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s$$

2. Il **momento risultante rispetto al polo** $\Omega \in \mathbb{R}^3$ assegnato:

$$\vec{M}_\Omega = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \wedge (\Omega - P_s).$$

Definizione 1.6. Si consideri un punto P di massa m a cui è applicata una forza (\vec{F}, P) . Si dice che il punto è **in quiete** nella posizione P_0 rispetto ad un osservatore inerziale $Oxyz$ se si verificano le seguenti condizioni:

1. $\overrightarrow{OP}(0) = \overrightarrow{OP}_0$, $\vec{v}(0) = 0$, ovvero il punto si trova all'istante iniziale in P_0 con velocità iniziale nulla;
2. $\vec{a}(t) = 0 \forall t \geq 0$, dove con $\vec{a}(t)$ si indica l'accelerazione del punto al variare del tempo t .

Definizione 1.7. Dato un punto materiale P di massa m al quale è applicata una forza (\vec{F}, P) , si dice che P è **in equilibrio** nella posizione P_0 , rispetto ad un osservatore inerziale $Oxyz$, se è soddisfatta la condizione sulla forza:

$$\vec{F}(P_0, 0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.1)$$

cioè se la forza applicata al punto e calcolata per $P = P_0$, $\vec{v} = 0$ si mantiene nulla in ogni istante, a partire da quello iniziale.

La legge fondamentale della dinamica (legge di Newton) dice che se un punto P di massa m agisce su un sistema di forze con vettore risultante \vec{R} , il punto si muove con accelerazione \vec{a} data da

$$m\vec{a} = \vec{R} \quad (1.2)$$

Principio 1.8 (Terzo principio della dinamica). Se su un punto materiale A agisce una forza dovuta ad un altro punto B , allora A esercita su B una forza di vettore opposto e con la stessa linea d'azione che coinciderà con la retta AB .

Osservazione 1.9. La quiete implica l'equilibrio ma in generale non vale il viceversa. Se nell'equazione fondamentale della dinamica $m\vec{a} = \vec{F}(P, \vec{v}, t)$ si impongono le condizioni 1. e 2. della Definizione 1.6 si ottiene $\vec{F}(P_0, 0, t) = 0, \forall t \geq 0$, cioè la definizione di equilibrio. Dato l'equilibrio, invece, la quiete segue solo se \vec{F} è lipschitziana, ossia se esiste $L > 0$ tale che per ogni P_0, P_1 distinti nel dominio di \vec{F} vale la disequazione

$$|\vec{F}(P_1, 0, t) - \vec{F}(P_0, 0, t)| \leq L|P_1 - P_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

La definizione di equilibrio può infatti essere espressa tramite il sistema seguente

$$\begin{cases} \ddot{P} = 0 \\ \overrightarrow{OP}(0) = \overrightarrow{OP}_0, \quad \vec{v}(0) = 0 \end{cases}$$

che presenta un'equazione, la prima, differenziale omogenea del secondo ordine con condizioni iniziali $\overrightarrow{OP}(0) = \overrightarrow{OP}_0$ e $\dot{P}(0) = 0$. Per il teorema di Cauchy, di esistenza e unicità della soluzione, il sistema avrà un'unica soluzione se è verificata l'ipotesi di lipschitzianità. D'altra parte, le forze di natura fisica sono lipschitziane, perciò la ricerca delle posizioni di equilibrio equivale all'individuazione delle condizioni per la quiete.

Se un punto P è soggetto a forze attive di vettore risultante \vec{F} e all'azione di vincoli rappresentati da un sistema di reazioni vincolari di vettore risultante $\vec{\Phi}$, allora la condizione di equilibrio (1.1) assumerà la forma seguente:

$$\vec{F}(P_0, 0, t) + \vec{\phi}(P_0, 0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.3)$$

Osservazione 1.10. Le forze in statica possono essere funzioni solo di P e di t , ma non della velocità \vec{v} del punto, avendo supposto in ogni istante la condizione $\vec{v} = 0$.

Definizione 1.11. Si dice che un sistema di punti materiali è **in equilibrio** se e solo se ogni suo punto è in equilibrio.

Fra i sistemi meccanici risulta di particolare interesse il cosiddetto **corpo rigido** per il quale la distanza fra due suoi punti qualunque si mantiene costante nel tempo. Denotando con C un tale corpo si ha la seguente formula fondamentale della cinematica rigida:

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(\Omega) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\Omega P} \quad \forall P, \Omega \in C \quad (1.4)$$

dove $\vec{\omega}$ è il vettore di Poisson del corpo, definito dalle formule di Poisson

$$\begin{cases} \dot{\vec{i}}_1 = \vec{\omega} \wedge \vec{i}_1 \\ \dot{\vec{j}}_1 = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1 \\ \dot{\vec{k}}_1 = \vec{\omega} \wedge \vec{k}_1 \end{cases} \quad (1.5)$$

essendo $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ una terna ortonormale orientata come gli assi di un sistema di riferimento solidale con C . La (1.4) è conosciuta anche con il nome di **legge di distribuzione delle velocità**.

Osservazione 1.12. Dalla (1.4) per conoscere il moto di un corpo rigido è sufficiente conoscere il moto di un suo punto particolare Ω e il suo vettore di Poisson $\vec{\omega}$. Pertanto basta conoscere sei parametri: le coordinate di Ω e le componenti di $\vec{\omega}$, ad ogni istante $t \geq 0$. Si suole esprimere questo risultato dicendo che un corpo rigido è un sistema a sei gradi di libertà.

Più in generale si ha la seguente

Definizione 1.13. Un sistema ha n **gradi di libertà** quando si può rappresentare la sua configurazione, almeno in una certa regione dello spazio, mediante n parametri indipendenti, i quali sono chiamati **parametri lagrangiani** e si denotano con q_1, \dots, q_n .

Osservazione 1.14. Dalla Definizione 1.13 segue che una generica configurazione di un sistema a n gradi di libertà potrà essere identificata con una n -upla di parametri lagrangiani $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$.

Esempio 1.15. Un punto materiale libero nello spazio ha 3 gradi di libertà, se vincolato a muoversi su una curva nota ha invece un grado di libertà e così via.

I parametri che permettono di identificare la configurazione del sistema nel tempo possono essere scelti in vari modi, basti pensare alle coordinate cartesiane o a quelle polari. Inoltre essi rappresentano la configurazione del sistema fino a quando sono compresi in un certo campo che può essere limitato o illimitato in base al sistema in studio. Ad esempio, per un punto materiale libero nello spazio le coordinate possono assumere tutti i valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$, mentre se il punto è vincolato a muoversi all'interno di una stanza le coordinate potranno assumere solo valori che competono ai punti della stanza.

Definizione 1.16. *Nel caso in cui il campo è limitato e alcuni parametri assumono i valori al contorno del campo stesso, la configurazione da essi rappresentata è detta **di confine**, altrimenti si dice **interna**.*

Esempio 1.17. Nel caso di un punto vincolato a muoversi all'interno di una stanza, quando il punto è su una parete si avrà una configurazione di confine.

La definizione appena data permette inoltre di distinguere gli spostamenti in invertibili e non invertibili, i quali verranno trattati nel capitolo successivo.

Capitolo 2

Principio dei lavori virtuali

2.1 Spostamenti elementari, vincoli lisci e principio dei lavori virtuali

Questo capitolo si concentra sul principio dei lavori virtuali, una metodologia utilizzata per trovare le configurazioni di equilibrio di un sistema.

Seguono perciò le definizioni che saranno utili per la trattazione di tale argomento.

Definizione 2.1. *Dato un sistema olonomo costituito da n punti materiali, si possono considerare diversi tipi di spostamenti. Matematicamente tali spostamenti si ottengono differenziando in maniera opportuna i vettori $\overrightarrow{OP}_s = \overrightarrow{OP}_s(q_1, \dots, q_n, t) \quad \forall s = 1, \dots, N$ che identificano i punti di un sistema: uno spostamento **elementare**, indicato con dP_s , è uno spostamento che si ottiene differenziando le coordinate cartesiane del punto P_s ignorando la presenza dei vincoli. Si tratta di uno spostamento puramente matematico che non ha interesse dal punto di vista cinematico. Uno spostamento **possibile** è uno spostamento infinitesimo che tiene conto dei vincoli e della loro eventuale dipendenza dal tempo. Si caratterizza come:*

$$\partial P_s = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \partial q_h + \frac{\partial P_s}{\partial t} \partial t, \quad \forall s = 1, \dots, N.$$

Uno spostamento **virtuale** è uno spostamento infinitesimo che tiene conto dei vincoli, ma non della loro eventuale dipendenza dal tempo. È uno spostamento istantaneo che immaginiamo avvenga con velocità infinita in un intervallo di tempo nullo. Sarà allora caratterizzato come:

$$\delta P_s = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h, \quad \forall s = 1, \dots, N.$$

Gli spostamenti infine sono **invertibili** quando i vincoli del sistema permettono lo spostamento opposto a partire dalla stessa configurazione iniziale; in caso contrario sono definiti **non invertibili**.

Osservazione 2.2. È stata scelta la parola virtuale per definire quegli spostamenti che non interagiscono con eventuali forze attive né con il moto dei vincoli, non hanno alcuna dipendenza dal tempo, bensì dipendono esclusivamente dalla geometria del vincolo e dal sistema materiale. Sono infatti spostamenti puramente immaginari che non avvengono nella realtà.

Da questa definizione è possibile definire nuovamente il concetto di configurazione interna o di confine:

Definizione 2.3. Una configurazione è detta **interna** se a partire da essa ogni spostamento virtuale è invertibile; se invece a partire da essa esiste uno spostamento virtuale non invertibile sarà detta **di confine**.

Il lavoro di una forza applicata a un punto è definito come il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento del punto. Viste allora le definizioni sopra, che identificano le varie tipologie di spostamenti infinitesimi, si avrà una particolare classificazione anche per il lavoro.

Definizione 2.4. Il **lavoro elementare** di una forza (\vec{F}, P) è definito come il prodotto scalare tra il vettore della forza e lo spostamento elementare del suo punto di applicazione, ossia

$$dL = \vec{F} \cdot dP = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (2.1)$$

dove con F_x, F_y, F_z si sono indicate le componenti del vettore \vec{F} lungo gli assi cartesiani. Il **lavoro possibile** è definito come il prodotto scalare tra il vettore \vec{F} e lo spostamento infinitesimo di P :

$$\partial L = \vec{F} \cdot \partial P = F_x \partial x + F_y \partial y + F_z \partial z. \quad (2.2)$$

Infine definiamo il **lavoro virtuale** come il prodotto scalare di \vec{F} per lo spostamento virtuale di P :

$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta P = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z. \quad (2.3)$$

In generale, se su un generico corpo agisce un sistema di N forze $(S) = \{(\vec{F}_1, P_1), \dots, (\vec{F}_N, P_N)\}$ applicate ai punti $P_s, s = 1, \dots, N$ del corpo, si ha la seguente

Definizione 2.5. Il **lavoro virtuale del sistema di forze** (S) è

$$\delta L = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta P_s. \quad (2.4)$$

Dalla semplice definizione di lavoro virtuale per un sistema di forze deriva un risultato importante, detto **postulato delle reazioni vincolari**, che definisce un'ulteriore tipologia di vincolo.

Definizione 2.6. *Un vincolo si dice **liscio** quando è capace di esplicitare tutte e sole quelle reazioni vincolari il cui lavoro virtuale risulta non negativo per ogni spostamento virtuale.*

Segue allora il principio dei lavori virtuali con annessa dimostrazione.

Teorema 2.7 (Principio dei lavori virtuali). *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema meccanico sottoposto a vincoli lisci sia in equilibrio in una configurazione C^* è che il lavoro virtuale del sistema delle forze attive agenti sul corpo sia non positivo per ogni spostamento virtuale compiuto a partire da C^* . In particolare il lavoro risulterà nullo per tutti gli spostamenti invertibili effettuati a partire da C^* .*

Dimostrazione. Per agevolare la dimostrazione si effettua una suddivisione dei punti del sistema meccanico. Il sistema può essere soggetto a vincoli che non necessariamente interessano tutti i punti del sistema; si suddivide allora l'insieme di punti in due sottoinsiemi S_l e S_v : S_l raccoglie i punti liberi del sistema mentre S_v i punti soggetti al vincolo. La definizione di equilibrio di un sistema di punti materiali assume quindi la forma seguente:

$$\begin{cases} \vec{F}_s = 0, & \forall P_s \in S_l \\ \vec{F}_s + \vec{\phi}_s = 0, & \forall P_s \in S_v, \end{cases}$$

dove \vec{F}_s e $\vec{\phi}_s$ indicano rispettivamente il vettore risultante delle forze attive e quello delle reazioni vincolari agenti sul punto P_s . Si ipotizzi ora che il sistema sia in equilibrio, ossia che valgano le condizioni espresse nel sistema sopra, per provare la validità della condizione sul lavoro virtuale delle forze attive. Quest'ultimo si indica con δL^a ed è definito come la sommatoria di tutti i prodotti scalari tra la risultante delle forze che agiscono sul punto P_s , indicata con \vec{F}_s , e lo spostamento di tale punto. Utilizzando la suddivisione del sistema, si ha che

$$\delta L^a = \sum_{P_s \in S_l} \vec{F}_s \cdot \delta P_s + \sum_{P_s \in S_v} \vec{F}_s \cdot \delta P_s.$$

Per ipotesi inoltre si ha che per ogni punto P_s libero $\vec{F}_s = 0$ perciò

$$\delta L^a = \sum_{P_s \in S_v} \vec{F}_s \cdot \delta P_s.$$

Si noti ora che $\vec{F}_s + \vec{\phi}_s = 0$ implica $\vec{F}_s = -\vec{\phi}_s$ per tutti i punti in S_v da cui

$$\delta L^a = - \sum_{P_s \in S_v} \vec{\phi}_s \cdot \delta P_s$$

per ogni δP_s . Dalle ipotesi inoltre si ha che il vincolo è liscio, si può perciò affermare che il lavoro virtuale delle reazioni vincolari δL^v è non negativo. Si avrà cioè $\delta L^v \geq 0$ da cui $\delta L^a \leq 0$ ossia la tesi.

Si supponga ora che per tutti gli spostamenti virtuali, a partire da C^* , si abbia $\delta L^a \leq 0$. Tale disequazione dovrà essere soddisfatta anche da una particolare classe di spostamenti C_0 che sposta arbitrariamente solo i punti liberi, ossia i punti di S_l . Si noti inoltre che, per definizione di punto libero, tutti gli spostamenti in C_0 sono invertibili, pertanto l'ipotesi sui lavori virtuali sarà valida come uguaglianza:

$$\delta L^a = \sum_{P_s \in S_l} \vec{F}_s \cdot \delta P_s = 0$$

per ogni spostamento in C_0 . Dato che tale condizione deve essere verificata per ogni spostamento di un punto in S_l , dovrà essere soddisfatta anche da uno spostamento δP_k con $P_k \in S_l$, si può perciò affermare che $\vec{F}_k \cdot \delta P_k = 0$ cioè, chiamando θ l'angolo tra \vec{F}_k e δP_k , si avrà

$$|\vec{F}_k| |\delta P_k| \cos \theta = 0.$$

Dal momento che δP_k è arbitrario, si dovrà verificare

$$\vec{F}_k = 0 \tag{2.5}$$

ossia la condizione di equilibrio per il punto P_k . Si può così affermare che tutti i punti liberi del sistema meccanico sono in equilibrio, per l'arbitrarietà di P_k in S_l . Si osservi inoltre che le forze dipendono sia dalle posizioni che dal tempo, ma non dagli spostamenti δP_s , perciò le (2.5) sono valide indipendentemente dagli spostamenti virtuali che si effettuano. Si potrà allora considerare il lavoro delle forze attive in corrispondenza di qualunque spostamento virtuale e, grazie unicamente a (2.5), l'espressione del lavoro si semplifica notevolmente:

$$\delta L^a = \sum_{P_s \in S_v} \vec{F}_s \cdot \delta P_s \leq 0$$

tenendo conto che in generale gli spostamenti potrebbero essere non invertibili.

Siano

$$\phi_s^* = -\vec{F}_s \tag{2.6}$$

dei simboli che rappresentano le forze necessarie a mantenere in equilibrio i punti di S_v ; di seguito si prova che tali forze sono quelle espresse dai vincoli a cui è sottoposto il

sistema. Innanzitutto si sostituiscono le nuove forze all'interno dell'espressione per il lavoro virtuale delle forze attive, ottenendo il lavoro virtuale delle nuove forze:

$$\delta L^a = - \sum_{P_s \in S_v} \phi_s^* \cdot \delta P_s = -\delta L^* \leq 0 \quad \forall \delta P_s$$

dove ovviamente δL^* è il lavoro delle ϕ_s^* . Si ottiene quindi che $\delta L^* \geq 0$ per ogni spostamento. Utilizzando ora di nuovo la definizione di vincolo liscio si può affermare che

$$\phi_s^* = \vec{\phi}_s \quad (2.7)$$

cioè i simboli introdotti sono le reazioni vincolari. Si ottiene così che (2.6) è effettivamente una condizione di equilibrio che però grazie alla (2.7) diventa:

$$\vec{F}_s + \vec{\phi}_s = 0$$

per ogni punto in S_v , ossia la condizione di equilibrio per i punti vincolati, e la tesi risulta perciò completamente dimostrata. \square

Osservazione 2.8. Si nota subito come l'unica restrizione presente nell'enunciato riguardi i vincoli: devono essere lisci. In mancanza di tale ipotesi infatti si perde anche la necessità del principio in quanto non è possibile applicare la proprietà dei lavori virtuali espressa nella definizione di vincolo liscio. La spiegazione fisica di questo fatto è dovuta all'esperienza: se i vincoli non sono lisci vuol dire che è presente anche l'attrito e questo comporta delle configurazioni di equilibrio valide che non sarebbero tali in presenza di vincoli lisci. Trattare un vincolo come fosse liscio diventa quindi una condizione di sicurezza in quanto la presenza dell'attrito facilita l'equilibrio; perciò se si trova una configurazione di equilibrio per un sistema meccanico sottoposto a vincoli che supponiamo essere lisci, a maggior ragione questa sarà configurazione di equilibrio anche per vincoli non lisci.

2.2 Equilibrio di un corpo rigido

Si tratterà ora il caso particolare del corpo rigido. Si mostrerà infatti l'espressione del lavoro virtuale che determina l'equilibrio del sistema. Come detto già nel capitolo iniziale, il corpo rigido viene studiato come se fosse un sistema materiale discreto di punti che soddisfano la condizione di rigidità. L'unica verifica da fare per applicare il principio dei lavori virtuali riguarda la natura dei vincoli del sistema: si deve verificare se sono lisci o meno. Nel caso del corpo rigido l'ipotesi sui vincoli risulta verificata grazie alle due osservazioni seguenti.

Osservazione 2.9. Le *forze interne* di un corpo rigido sono le forze dovute alla reciproca interazione tra i punti del corpo; tali forze sono perciò quelle che realizzano il vincolo. Si può allora affermare che le forze interne di un corpo rigido sono tutte di natura vincolare.

Osservazione 2.10. Le *forze interne di un corpo rigido compiono tutte lavoro nullo*. Questo è un importante risultato la cui dimostrazione deriva dall'espressione del lavoro virtuale del corpo rigido. Quest'ultimo assume infatti una forma particolare dovuta alla **legge di distribuzione degli spostamenti**, che ovviamente devono rispettare la condizione di rigidità che caratterizza il corpo rigido. Tale legge è conseguenza diretta della legge di distribuzione delle velocità, scrivendo infatti quest'ultima nella forma seguente, considerando P e Ω due punti del corpo e $\vec{\omega}$ velocità angolare,

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\Omega P}$$

e passando poi alla forma differenziale si ha

$$dP = d\Omega + \vec{\omega} dt \wedge \overrightarrow{\Omega P}.$$

Si introduce infine il vettore $d\vec{\psi} = \vec{\omega} dt$ ottenendo così

$$dP = d\Omega + d\vec{\psi} \wedge \overrightarrow{\Omega P}.$$

Specializzando ora tale legge nel caso degli spostamenti possibili si ottiene

$$\partial P_s = \partial\Omega + \partial\vec{\psi} \wedge \overrightarrow{\Omega P_s}$$

e per gli spostamenti virtuali invece:

$$\delta P_s = \delta\Omega + \delta\vec{\psi} \wedge \overrightarrow{\Omega P_s}.$$

Si noti però che nel caso in cui il corpo rigido sia libero gli spostamenti virtuali e quelli possibili coincidono in quanto l'unico vincolo a cui è sottoposto il corpo è quello di rigidità, che è indipendente dal tempo; coincideranno allora anche il lavoro virtuale e quello possibile.

Grazie alla legge di distribuzione appena presentata si può quindi calcolare il lavoro virtuale di un sistema di forze applicato al corpo rigido:

$$\delta L = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot (\delta\Omega + \delta\vec{\psi} \wedge \overrightarrow{\Omega P_s}) = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta\Omega + \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta\vec{\psi} \wedge \overrightarrow{\Omega P_s}. \quad (2.8)$$

Si noti che $\delta\Omega$ è indipendente dall'indice s , lo si può allora raccogliere nella prima sommatoria:

$$\sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \delta\Omega = \left(\sum_{s=1}^N \vec{F}_s \right) \cdot \delta\Omega = \vec{R} \cdot \delta\Omega$$

con \vec{R} vettore risultante delle forze applicate al corpo rigido. Utilizzando poi la proprietà commutativa del prodotto scalare e le proprietà del prodotto misto si ottiene che

$$\vec{F}_s \cdot \delta\vec{\psi} \wedge \overrightarrow{\Omega P_s} = \delta\vec{\psi} \wedge \overrightarrow{\Omega P_s} \cdot \vec{F}_s = \delta\vec{\psi} \cdot \overrightarrow{\Omega P_s} \wedge \vec{F}_s.$$

Inserendo tale risultato nella seconda sommatoria della (2.8) si ha che

$$\sum_{s=1}^N \delta\vec{\psi} \cdot \overrightarrow{\Omega P_s} \wedge \vec{F}_s = \delta\vec{\psi} \cdot \left(\sum_{s=1}^N \overrightarrow{\Omega P_s} \wedge \vec{F}_s \right) = \vec{M}_\Omega \cdot \delta\vec{\psi},$$

dove \vec{M}_Ω indica il vettore momento risultante delle forze applicate presentato nel primo capitolo (Definizione 1.4).

Si è così ottenuta la forma finale del lavoro virtuale di un sistema di forze per il corpo rigido:

$$\delta L = \vec{R} \cdot \delta\Omega + \vec{M}_\Omega \cdot \delta\vec{\psi}. \quad (2.9)$$

Lo stesso risultato si otterrà poi per il lavoro possibile.

Applicando ora al sistema del corpo rigido il terzo principio della meccanica (Principio 1.8), che è valido non solo per i corpi rigidi ma per qualunque sistema materiale, si può affermare che le forze interne costituiscono un sistema di forze a braccio nullo perciò il risultante e il momento risultante sono nulli. Di conseguenza, data l'espressione (2.9) il lavoro delle forze interne sarà

$$dL^i = \vec{R}^i \cdot d\Omega + \vec{M}_\Omega^i \cdot d\vec{\psi} = 0 \quad (2.10)$$

ed è quindi soddisfatta la condizione espressa nella definizione di vincolo liscio.

Una conseguenza dell'Osservazione 2.9 è che le forze attive possono essere solo esterne, perciò $\delta L^a = \delta L^{(e,a)}$. Il principio dei lavori virtuali (Teorema 2.7) dunque si traduce per un corpo rigido nella condizione seguente:

$$\vec{R}^{(e,a)} \cdot \delta\Omega + \vec{M}_\Omega^{(e,a)} \cdot \delta\vec{\psi} \leq 0 \quad (2.11)$$

per ogni spostamento, avendo indicato con $\vec{R}^{(e,a)}$ il vettore risultante delle forze attive esterne, $\delta\Omega$ l'eventuale traslazione del polo Ω , punto del corpo utilizzato anche per calcolare il momento risultante $\vec{M}_\Omega^{(e,a)}$ delle forze attive esterne, e infine $\delta\vec{\psi}$ l'eventuale rotazione.

In particolare per spostamenti invertibili la condizione risulta verificata come uguaglianza.

Si nota subito come il principio dei lavori virtuali abbia poche richieste: la conoscenza delle forze attive e la presenza di vincoli lisci. Il vantaggio dell'utilizzo di tale metodo

nello studio dell'equilibrio di un sistema materiale è proprio il fatto che non sia necessario conoscere le reazioni vincolari, forze che nei problemi di statica sono in generale incognite ma che influiscono sull'equilibrio del sistema. Non è comunque scontato che non occorra conoscere tali forze; ci sono infatti casi in cui è addirittura necessario trovare un'espressione per le reazioni vincolari, in questi casi applicare il principio dei lavori virtuali per trovarle risulta essere molto laborioso e complicato.

Capitolo 3

Equazioni cardinali della statica

Il principio dei lavori virtuali, come osservato in precedenza, non è sempre la strategia migliore per risolvere i problemi di statica. Pertanto, si presenterà in questo capitolo una metodologia differente, ricavata direttamente dalla definizione di equilibrio.

Si consideri un sistema materiale formato dai punti P_1, \dots, P_N sui quali agiscono, rispettivamente, le forze di vettori $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$.

Osservazione 3.1. Per ogni $s = 1, \dots, N$ il vettore \vec{F}_s è da considerarsi come il vettore risultante delle forze che agiscono sui singoli punti.

Anziché separare tali forze, come fatto nel capitolo precedente, in forze attive e reazioni vincolari, si distinguono in forze interne ed esterne: per ogni $s = 1, \dots, N$, $\vec{F}_s = \vec{F}_s^e + \vec{F}_s^i$. Le condizioni di equilibrio saranno allora

$$\vec{F}_s^e + \vec{F}_s^i = 0, \quad \forall s = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Proiettando i vettori delle forze su un sistema di assi cartesiani ortogonali, le condizioni per l'equilibrio appena espresse formeranno un sistema di $3N$ equazioni per $3N$ incognite rappresentate dalle coordinate x_s, y_s, z_s dei punti P_s , $s = 1, \dots, N$. Si nota subito che la soluzione di un problema di questo tipo sarebbe immediata se tutte le forze fossero note, in generale non è possibile però determinare le forze interne date dalla mutua interazione tra le particelle di un corpo. Tali forze, essendo di natura microscopica, sono infatti troppo numerose ed estremamente deboli per essere misurate. Il terzo principio della meccanica ovvia a questo problema per un qualunque sistema di punti materiali: come osservato già nel capitolo precedente per il corpo rigido infatti, le forze interne sono riducibili a coppie di braccio nullo, sono cioè caratterizzate dalle equazioni

$$\vec{R}^i = 0 \quad \vec{M}_\Omega^i = 0, \quad (3.2)$$

per un qualunque polo Ω . Queste relazioni riguardano momento risultante e forza risultante delle forze interne del sistema; per utilizzarle dunque si combinano linearmente le condizioni di equilibrio del sistema, sommando tra loro i vettori delle forze rispetto all'indice s :

$$\sum_{s=1}^N \vec{F}_s^e + \sum_{s=1}^N \vec{F}_s^i = 0$$

ossia, ponendo rispettivamente \vec{R}^e e \vec{R}^i i vettori risultanti delle forze esterne ed interne,

$$\vec{R}^e + \vec{R}^i = 0$$

utilizzando ora la (3.2), si ottiene la seguente condizione per l'equilibrio

$$\vec{R}^e = 0. \quad (3.3)$$

Si giunge così ad un'equazione in cui non è richiesta la presenza di forze interne.

Rimane dunque da utilizzare l'informazione sul momento delle forze interne: si sceglie un qualunque polo Ω e facendo il prodotto vettoriale tra $\overrightarrow{\Omega P}_s$ e (3.1) si avrà

$$\overrightarrow{\Omega P}_s \wedge \vec{F}_s^e + \overrightarrow{\Omega P}_s \wedge \vec{F}_s^i = 0, \quad \forall s = 1, \dots, N;$$

sommando poi sull'indice s

$$\sum_{s=1}^N \overrightarrow{\Omega P}_s \wedge \vec{F}_s^e + \sum_{s=1}^N \overrightarrow{\Omega P}_s \wedge \vec{F}_s^i = 0$$

e ricordando infine che $\vec{M}_\Omega^i = 0$ si ottiene

$$\vec{M}_\Omega^e = 0 \quad (3.4)$$

come ulteriore condizione sull'equilibrio.

Si sono trovate così le **equazioni cardinali della statica**:

$$\begin{cases} \vec{R}^{(e,a)} + \vec{R}^{(e,v)} = 0 \\ \vec{M}_\Omega^{(e,a)} + \vec{M}_\Omega^{(e,v)} = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

dove con $\vec{R}^{(e,a)}$ e $\vec{M}_\Omega^{(e,a)}$ si indicano rispettivamente vettore risultante e momento risultante delle forze attive esterne, mentre con $\vec{R}^{(e,v)}$ e $\vec{M}_\Omega^{(e,v)}$ si denotano rispettivamente vettore risultante e momento risultante delle reazioni vincolari esterne. Tale sistema non garantisce però la conoscenza delle condizioni di equilibrio di un qualunque sistema di punti materiali: basta pensare al caso di due punti liberi non coincidenti collegati da una molla ideale (Figura 3.1). In questo caso infatti il sistema avrà momento risultante e vettore risultante nulli, tuttavia è ovviamente non in equilibrio visto che c'è una

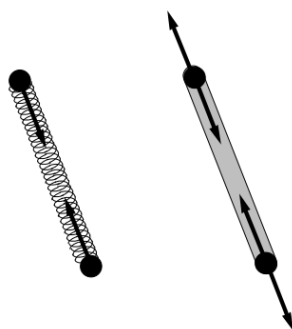


Figura 3.1: *Molla ideale*¹

deformazione. Si può dunque affermare che le equazioni cardinali della statica sono in generale condizioni necessarie e non sufficienti. Si osserva però che ponendo tra i due punti una sbarretta rigida si avrà l'equilibrio, proprio a causa della rigidità del nuovo sistema: tale vincolo genera una reazione vincolare opposta alla forza elastica, permettendo pertanto l'equilibrio. Non si tratta di una coincidenza, bensì di una conseguenza del seguente risultato molto importante.

Teorema 3.2. *Le equazioni cardinali della statica sono condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un corpo rigido.*

Dimostrazione. Dato che le equazioni cardinali della statica sono state trovate ponendo come ipotesi l'equilibrio di un sistema di punti, la dimostrazione che siano condizioni necessarie all'equilibrio è già stata presentata.

Si utilizza l'ipotesi ausiliaria che i vincoli siano lisci, così da poter applicare il principio dei lavori virtuali: si ricorda che l'espressione del lavoro virtuale di un corpo rigido è la seguente, con Ω e $\delta\vec{\psi}$ scelti come nella (2.9)

$$\delta L = \vec{R} \cdot \delta\Omega + \vec{M}_\Omega \cdot \delta\vec{\psi}.$$

Assumendo allora valide per ipotesi le equazioni cardinali, si può affermare che

$$\vec{R}^{(e,a)} \cdot \delta\Omega + \vec{R}^{(e,v)} \cdot \delta\Omega = 0$$

$$\vec{M}_\Omega^{(e,a)} \cdot \delta\vec{\psi} + \vec{M}_\Omega^{(e,v)} \cdot \delta\vec{\psi} = 0.$$

Sommando ora membro a membro queste ultime due equazioni scalari e riordinando si avrà:

$$\vec{R}^{(e,a)} \cdot \delta\Omega + \vec{M}_\Omega^{(e,a)} \cdot \delta\vec{\psi} + \vec{R}^{(e,v)} \cdot \delta\Omega + \vec{M}_\Omega^{(e,v)} \cdot \delta\vec{\psi} = 0. \quad (3.6)$$

¹Dal libro *Meccanica Razionale*, Alberto Strumia, 1996, pag.385 .

Si riconoscono ora nei primi due addendi della (3.6) il lavoro virtuale delle forze attive esterne e negli ultimi due il lavoro virtuale delle reazioni vincolari esterne, per un corpo rigido. Si può allora concludere che

$$\delta L^{(e,a)} + \delta L^{(e,v)} = 0,$$

per ogni $\delta\Omega$ e $\delta\vec{\psi}$, ossia per ogni spostamento virtuale, dato che non è stata fatta alcuna ipotesi su questi. Si nota ora che, come visto nel capitolo precedente, il lavoro delle forze interne in un corpo rigido è nullo; si può pertanto affermare che

$$\delta L^i = \delta L^{(i,a)} + \delta L^{(i,v)} = 0,$$

per ogni $\delta\Omega$ e $\delta\vec{\psi}$. Sommando ora membro a membro le ultime due equazioni si avrà

$$\delta L^{(e,a)} + \delta L^{(e,v)} + \delta L^{(i,a)} + \delta L^{(i,v)} = 0$$

ossia

$$\delta L^a + \delta L^v = 0$$

per ogni spostamento virtuale $\delta\Omega$ e $\delta\vec{\psi}$. Applicando infine la Definizione 2.6 di vincolo liscio, si ha $\delta L^v \geq 0$ per ogni $\delta\Omega$, $\delta\vec{\psi}$; si otterrà quindi $\delta L^a \leq 0$, ovvero la tesi, proprio grazie al principio dei lavori virtuali (Teorema 2.7). \square

Osservazione 3.3. Supporre che i vincoli a cui è sottoposto il sistema siano lisci, come già osservato in precedenza, matematicamente risulta essere un'ipotesi restrittiva. Fisicamente invece è semplicemente una condizione di sicurezza, in quanto l'attrito favorisce l'equilibrio (Osservazione 2.8).

Il teorema appena dimostrato prova la sufficienza delle equazioni cardinali della statica nella ricerca delle condizioni di equilibrio per un corpo rigido; tuttavia può capitare che esse non siano sufficienti per la determinazione delle reazioni vincolari. Ciò è una diretta conseguenza dell'utilizzo del principio dei lavori virtuali all'interno della dimostrazione, visto che di fatto non esprime alcuna informazione riguardante le reazioni vincolari. Questo però non influenza in nessun modo la sufficienza delle equazioni per la ricerca delle configurazioni di equilibrio per un corpo rigido: l'ipotesi ausiliaria non è necessaria in generale ma è utile per semplificare la dimostrazione. Sono infatti equazioni valide anche in presenza di vincoli non lisci.

Sorge spontaneo chiedersi quali sono i vantaggi e gli svantaggi nell'utilizzo di uno o l'altro metodo. Si può notare che per le equazioni cardinali non ci sono ipotesi sui vincoli e questo, congiuntamente al fatto che non si considerano le forze interne, risulta essere un

vantaggio rispetto al metodo precedente. Tuttavia sono proprio le forze interne a determinare uno svantaggio: per eliminarle sono state combinate linearmente le condizioni di equilibrio, diminuendo così il numero di equazioni linearmente indipendenti e ottenendo un sistema lineare che, nel caso più generale, è formato da sei equazioni. Da ciò segue che, generalmente, le equazioni cardinali della statica non sono condizioni sufficienti per l'equilibrio di un sistema. Tali equazioni permettono di fatto di risolvere un sistema a sei incognite e il sistema che ha un massimo di sei gradi di libertà è proprio il corpo rigido: i suoi gradi diminuiranno in presenza di vincoli, aumentando così il numero di incognite.

Capitolo 4

Applicazioni e confronto tra i due metodi

Si confrontano ora i due metodi presentati per lo studio dell'equilibrio di specifici corpi rigidi, gli unici sistemi per cui le equazioni cardinali sono condizioni sia necessarie che sufficienti.

4.1 Corpo rigido con un punto fisso

Si vogliono trovare le condizioni di equilibrio di un corpo rigido con punto fisso sfruttando entrambi i metodi. Si inizia con il principio dei lavori virtuali. Per utilizzarlo bisogna verificare la natura dei vincoli a cui il sistema è sottoposto: si è già provato nel secondo capitolo che la condizione di rigidità genera un vincolo liscio, dunque si rivolge l'attenzione solo al vincolo originato dal punto fisso. Fisicamente un vincolo di questo tipo può essere visualizzato come una cerniera, la quale però non è priva di dimensioni, ha infatti una struttura con delle superfici di contatto e perciò, nel caso non fosse presente l'attrito, le reazioni vincolari saranno normali alla superficie del vincolo. Si opera dunque una schematizzazione matematica: si vede il vincolo come un punto privo di dimensioni, così facendo infatti non ci sono superfici rispetto alle quali tracciare delle normali e non si può stabilire neanche se è presente l'attrito o meno. Si verifica ora se il vincolo generato dal punto fisso è liscio, utilizzando la Definizione 2.6: l'unica reazione vincolare $\vec{\Phi}$ è applicata al punto fisso, che sarà indicato con P . In questo caso l'espressione del lavoro virtuale relativa a tale forza è

$$\delta L = \vec{\Phi} \cdot \delta P.$$

Per ipotesi P è fisso perciò ogni spostamento di tale punto è proibito, cioè $\delta P = 0$, da cui $\delta L = 0$. Si può così affermare che il vincolo generato dal punto fisso è in effetti liscio. Ricordando che l'espressione del lavoro virtuale delle forze attive applicate al corpo rigido è

$$\delta L = \vec{R}^{(e,a)} \cdot \delta \Omega + \vec{M}_{\Omega}^{(e,a)} \cdot \delta \vec{\psi}$$

e scegliendo Ω coincidente con il punto fisso P , la condizione per l'equilibrio di un sistema di questo tipo diventa allora la seguente

$$\delta L = \vec{M}_{\Omega}^{(e,a)} \cdot \delta \vec{\psi} \leq 0.$$

Si osservi ora che il vincolo non permette al sistema di traslare, perciò gli unici spostamenti concessi sono rotazioni attorno al punto fisso Ω , le quali sono anche invertibili. Per avere l'equilibrio dovrà quindi essere verificata l'equazione

$$\delta L = \vec{M}_{\Omega}^{(e,a)} \cdot \delta \vec{\psi} = 0$$

per ogni spostamento $\delta \vec{\psi}$. Data infine la completa arbitrarietà di $\delta \vec{\psi}$ l'equazione sarà soddisfatta se e solo se

$$\vec{M}_{\Omega}^{(e,a)} = 0. \quad (4.1)$$

Dunque è unicamente quest'ultima la condizione per l'equilibrio di un corpo rigido con un punto fisso.

Si verifica ora se si raggiunge tale risultato anche attraverso le equazioni cardinali della statica. Il caso di un corpo rigido con un punto fisso viene studiato tramite l'utilizzo di un sistema di assi fisso $Oxyz$, congiuntamente a una terna di assi solidale al corpo con origine in Ω . Così facendo infatti il moto del corpo rigido ha tre gradi di libertà, espressi mediante i seguenti tre angoli (angoli di Eulero), rappresentati in Figura 4.1:

- l'angolo θ compreso fra l'asse solidale ζ e z , detto **nutazione**;
- l'angolo φ compreso fra l'asse solidale ξ e la retta di intersezione tra il piano $\xi\eta$ con il piano xy , detta **linea dei nodi**. L'angolo è detto **angolo di rotazione propria**;
- l'angolo ψ compreso tra la linea dei nodi e l'asse x detto **angolo di precessione**

Osservazione 4.1. Dall'Osservazione 1.14 segue allora che le configurazioni di equilibrio sono del tipo $q = (\theta, \varphi, \psi)$.

Nel caso di un corpo rigido con punto fisso il vincolo è costituito unicamente dal punto fisso Ω , per cui la reazione vincolare è una ed è applicata nel punto fisso: $(\vec{\Phi}, \Omega)$. Si

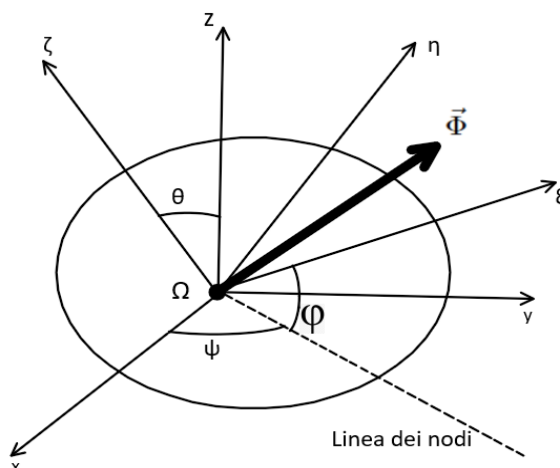


Figura 4.1: *Corpo rigido con un punto fisso*

sceglie Ω come polo dei momenti, in tal modo $\vec{\Phi}$ avrà momento nullo. Le equazioni della statica sono pertanto

$$\begin{cases} \vec{R}^{(e,a)} + \vec{\Phi} = 0 \\ \vec{M}_{\Omega}^{(e,a)} = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Osservazione 4.2. L'equazione dei momenti in (4.2) è la stessa espressa in (4.1), trovata con la strategia precedente, ma in quest'ultimo sistema si è ottenuta un'informazione in più: l'espressione della reazione vincolare.

Proiettando ora il sistema su una terna cartesiana ortogonale si ottiene

$$\begin{cases} R_x^{(e,a)}(\theta, \varphi, \psi, t) + \Phi_x = 0 \\ R_y^{(e,a)}(\theta, \varphi, \psi, t) + \Phi_y = 0 \\ R_z^{(e,a)}(\theta, \varphi, \psi, t) + \Phi_z = 0 \\ M_x^{(e,a)}(\theta, \varphi, \psi, t) = 0 \\ M_y^{(e,a)}(\theta, \varphi, \psi, t) = 0 \\ M_z^{(e,a)}(\theta, \varphi, \psi, t) = 0, \end{cases}$$

si hanno perciò sei equazioni per le sei incognite: i tre gradi di libertà sono espressi dagli angoli di Eulero e le tre componenti della reazione vincolare. Si ottengono così le configurazioni di equilibrio espresse da terne del tipo $q^* = (\theta^*, \varphi^*, \psi^*)$ e, sostituendo i valori trovati per le incognite, si determinerà anche la corrispondente reazione vincolare $\vec{\Phi}$.

4.2 Corpo rigido con asse fisso

Si consideri un corpo rigido con un asse fisso. Come per il caso precedente, si cercano le configurazioni di equilibrio prima attraverso il principio dei lavori virtuali poi con le equazioni cardinali della statica. Si suppone che l'asse fisso non abbia una struttura, si schematizza perciò come una retta geometrica dotata di una sola dimensione. Si deve ora verificare che il vincolo generato dalla retta fissa sia liscio: le reazioni vincolari in questo caso sono applicate sulla retta e i loro punti di applicazione sono punti fissi del corpo, per cui, ricordando le considerazioni fatte nel paragrafo precedente, il lavoro delle reazioni vincolari è nullo. È quindi possibile applicare il principio dei lavori virtuali per la ricerca delle condizioni di equilibrio, deve cioè essere soddisfatta la disequazione (2.11). Anche in questo caso le traslazioni sono proibite, gli unici spostamenti virtuali concessi sono dunque le rotazioni attorno all'asse fisso. Si nota inoltre che tali spostamenti sono tutti invertibili, pertanto la condizione per l'equilibrio ottiene la forma

$$\vec{M}_{\Omega}^{(e,a)} \cdot \delta\vec{\psi} = 0 \quad (4.3)$$

per ogni spostamento $\delta\vec{\psi}$. Si suppone ora che l'asse fisso abbia la direzione del versore \vec{k} relativo all'asse z nel piano cartesiano; si ha allora che

$$\delta\vec{\psi} = \vec{k} \cdot \delta\theta,$$

dove θ rappresenta l'angolo di rotazione del corpo attorno all'asse z posto fisso ed è inoltre l'unico parametro lagrangiano per un sistema di questo tipo. La condizione per l'equilibrio sarà perciò

$$\vec{M}_{\Omega}^{(e,a)} \cdot \vec{k} \delta\theta = M_z^{(e,a)} \delta\theta = 0,$$

con $M_z^{(e,a)}$ componente del momento risultante delle forze attive esterne rispetto all'asse z . Dato che, come nel caso di un corpo rigido con un punto fisso, $\delta\theta$ è arbitrario, tale equazione è soddisfatta per

$$M_z^{(e,a)} = 0. \quad (4.4)$$

È dunque quest'ultima la condizione per l'equilibrio di un corpo rigido con asse fisso.

Osservazione 4.3. Tale condizione per l'equilibrio riguarda solo il momento delle forze esterne agenti sul corpo ma può essere tradotta in una condizione sul vettore risultante $\vec{R}^{(e,a)}$ delle forze attive esterne: scegliendo Ω sull'asse fisso e considerando P punto di applicazione di $\vec{R}^{(e,a)}$ deve risultare

$$\vec{\Omega P} \wedge \vec{R}^{(e,a)} \cdot \vec{k} = 0,$$

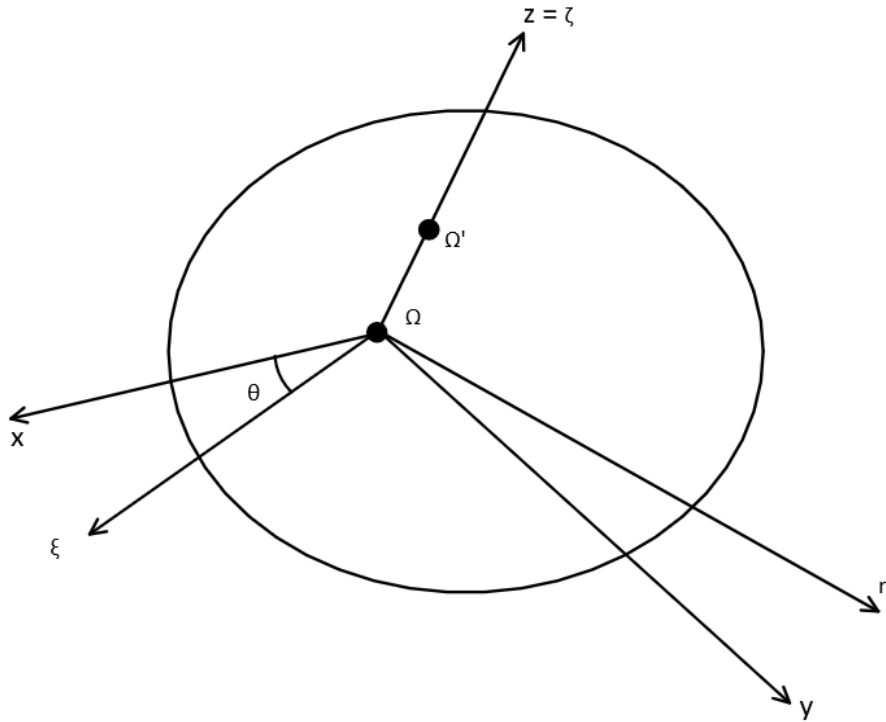


Figura 4.2: *Corpo rigido con asse fisso*

ossia i vettori $\overrightarrow{\Omega P}$, $\vec{R}^{(e,a)}$ e \vec{k} devono essere complanari. Si noti infine che Ω appartiene all'asse fisso mentre P alla retta d'azione della forza, perciò affinché ci sia equilibrio la retta d'azione della forza e l'asse fisso devono essere complanari.

Si prova ora a giungere allo stesso risultato tramite le equazioni cardinali della statica. Per utilizzarle occorre specificare le reazioni vincolari agenti sul sistema. Si fissa allora una retta: si scelgono due punti Ω_1 e Ω_2 appartenenti al corpo rigido e si considerano fissi, bloccando così la loro congiungente (che, come sopra, si suppone essere l'asse $z \equiv \zeta$) e generando due reazioni vincolari $(\vec{\Phi}_1, \Omega_1)$ e $(\vec{\Phi}_2, \Omega_2)$. Scegliendo inoltre il punto Ω_1 come polo di applicazione per i momenti (per far sì che il momento relativo a $(\vec{\Phi}_1, \Omega_1)$ si annulli), le equazioni cardinali si specializzeranno nel modo seguente:

$$\begin{cases} \vec{R}^{(e,a)} + \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 = 0 \\ \vec{M}_{\Omega_1}^{(e,a)} + \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \wedge \vec{\Phi}_2 = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Si ricordi ora che il problema ha un solo grado di libertà; occorre perciò un'unica equazione per la ricerca delle configurazioni di equilibrio, ottenuta proiettando la seconda equazione del sistema (4.5) sull'asse z :

$$\vec{M}_{\Omega_1}^{(e,a)} \cdot \vec{k} + \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \wedge \vec{\Phi}_2 \cdot \vec{k} = 0. \quad (4.6)$$

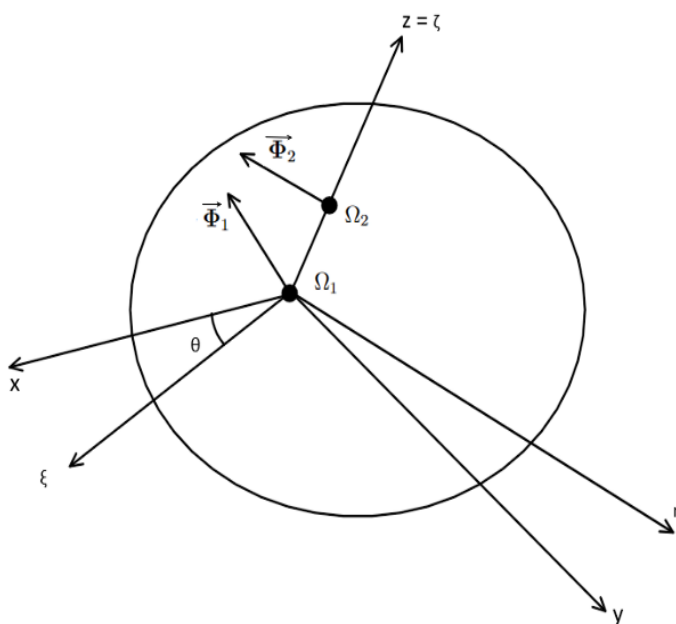


Figura 4.3: *Corpo rigido con asse fisso*

Notando infine che i vettori $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ e \vec{k} sono paralleli, come mostrato in Figura 4.3, si può affermare che anche con questo metodo si arriva alla conclusione che la condizione per l'equilibrio di questo tipo di sistema è $M_z^{(e,a)} = 0$, come nella (4.4). Come affermato anche in precedenza però tale metodo è particolarmente significativo in quanto permette di determinare non solo le configurazioni di equilibrio, ma anche le reazioni vincolari, solitamente incognite nei problemi. Si cerca perciò di trovare queste ultime proiettando tutte le equazioni su una terna cartesiana scelta come in figura, in modo che l'asse fisso coincida con l'asse z . Si ottiene così il seguente sistema di sei equazioni:

$$\begin{cases} R_x^{(e,a)}(\theta, t) + \Phi_{1x} + \Phi_{2x} = 0 \\ R_y^{(e,a)}(\theta, t) + \Phi_{1y} + \Phi_{2y} = 0 \\ R_z^{(e,a)}(\theta, t) + \Phi_{1z} + \Phi_{2z} = 0 \\ M_x^{(e,a)}(\theta, t) - l\Phi_{2y} = 0 \\ M_y^{(e,a)}(\theta, t) + l\Phi_{2x} = 0 \\ M_z^{(e,a)}(\theta, t) = 0, \end{cases}$$

in cui si è posto $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = l\vec{k}$ e $l = \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \cdot \vec{k}$. Si nota però che le incognite, ossia le varie componenti delle due reazioni vincolari, sono sei mentre le equazioni sono cinque. All'interno del sistema infatti le componenti x e y delle reazioni vincolari sono presenti in 4 equazioni che non contengono invece le componenti z . Sono allora proprio

queste ultime ad essere indeterminate, perciò tale problema viene detto **staticamente indeterminato**.

Osservazione 4.4. L'indeterminazione di un problema di questo tipo risulta giustificata; è infatti presente un vincolo sovrabbondante: aver fissato due punti per bloccare una retta di un corpo rigido. Fissando infatti anche un solo punto si evita lo scorrimento della retta, per cui non c'è di per sé bisogno di bloccare un altro punto, basterebbe bloccare solo la direzione della retta, mediante ad esempio un cursore cilindrico privo di attrito, come mostrato in Figura 4.4. La reazione risulterà in questo modo ortogonale alla

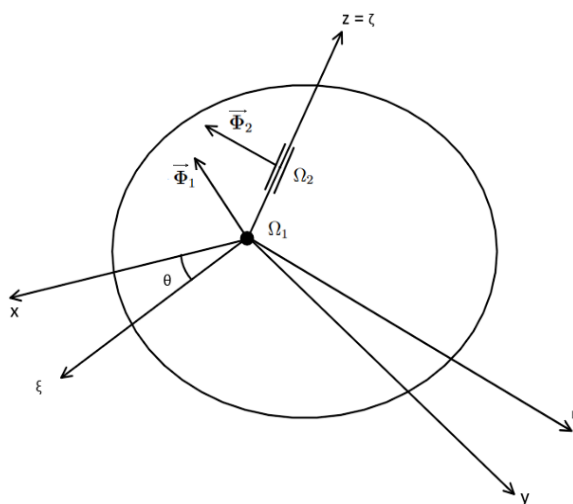


Figura 4.4: *Corpo rigido con asse fisso, con cerniera cilindrica*

superficie del cursore, ossia all'asse fisso, e così facendo si avrà un'ulteriore informazione: $\Phi_{2z} = 0$. Si elimina quindi un'altra incognita e il sistema diventa

$$\begin{cases} R_x^{(e,a)}(\theta, t) + \Phi_{1x} + \Phi_{2x} = 0 \\ R_y^{(e,a)}(\theta, t) + \Phi_{1y} + \Phi_{2y} = 0 \\ R_z^{(e,a)}(\theta, t) + \Phi_{1z} = 0 \\ M_x^{(e,a)}(\theta, t) - l\Phi_{2y} = 0 \\ M_y^{(e,a)}(\theta, t) + l\Phi_{2x} = 0 \\ M_z^{(e,a)}(\theta, t) = 0, \end{cases}$$

ossia un sistema a sei equazioni e sei incognite, che risulterà perciò essere determinato.

4.3 Corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa

Si procede ora, utilizzando lo stesso procedimento applicato ai due casi precedenti, al calcolo delle configurazioni di equilibrio per un corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa. Tale sistema può cioè ruotare e traslare lungo una semiretta fissa solidale con l'osservatore O ma non con il corpo, come in Figura 4.7 (dove si è posto $Oxyz$ come sistema di riferimento fisso dell'osservatore e con $\Omega\xi\eta\zeta$ si indica il sistema di riferimento

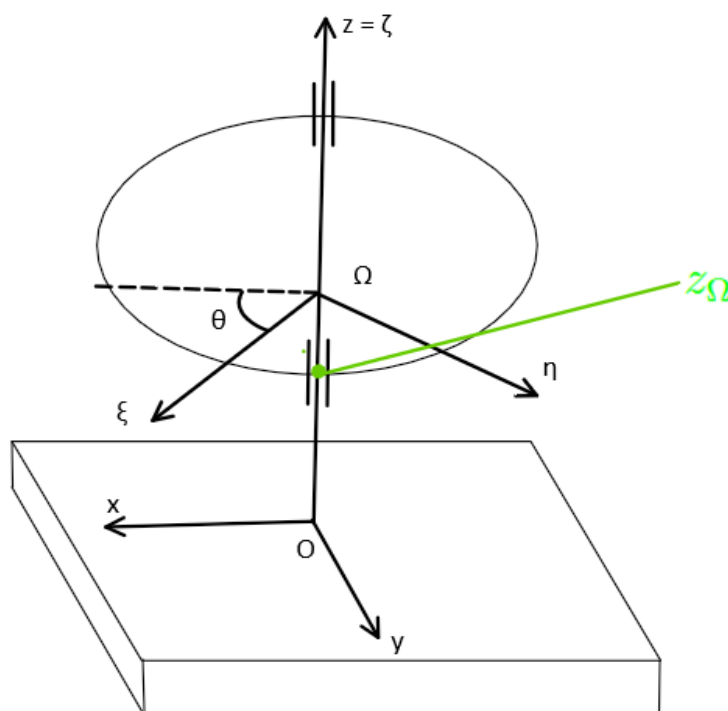


Figura 4.5: *Corpo scorrevole su una semiretta fissa*

solidale al corpo rigido). Si analizzano anzitutto i vincoli, meno quello generato dalla condizione di rigidità. Si nota che il vincolo causato dalla semiretta, posta sull'asse z , è un vincolo unilaterale che limita la traslazione del corpo lungo l'asse z ; si immagina pertanto che il movimento del corpo lungo tale retta sia bloccato da una superficie liscia. Si suppone inoltre che lo scorrimento del corpo sia reso possibile da dei cursori privi di attrito. In questo modo tutti i vincoli a cui il sistema è sottoposto sono lisci, quindi il principio dei lavori virtuali è effettivamente una condizione necessaria e sufficiente. Si sceglie ora Ω , un punto del corpo rigido, in modo che si trovi sulla retta solidale del corpo che trasla lungo la semiretta fissa e si denota con z_Ω la posizione di questo lungo la semiretta fissa: si assume che per $z_\Omega = 0$ il corpo si trovi nella configurazione di confine. Con θ si indica invece il parametro di rotazione del corpo rispetto all'asse z , come fatto in precedenza. Il problema avrà allora due gradi di libertà ($q = (\theta, z_\Omega)$) ed è presente la

limitazione $z_\Omega \geq 0$, che esprime la presenza del vincolo unilaterale. Si specializza ora la condizione (2.11): i vincoli permettono al corpo di traslare solo in una direzione, perciò si avrà

$$\delta\Omega = \delta z_\Omega \vec{k} \quad \delta\vec{\psi} = \delta\theta \vec{k}.$$

Ma allora la condizione da rispettare è

$$\vec{R}^{(e,a)} \wedge \delta z_\Omega \vec{k} + \vec{M}_\Omega \wedge \delta\theta \vec{k} \leq 0,$$

ossia

$$R_z^{(e,a)} \delta z_\Omega + M_z^{(e,a)} \delta\theta \leq 0, \quad (4.7)$$

avendo posto rispettivamente $R_z^{(e,a)}$ e $M_z^{(e,a)}$ le componenti rispetto all'asse z del vettore risultante e del momento risultante delle forze attive esterne. Bisogna ora distinguere due casi: il caso ordinario, in cui cioè il corpo non si trova a contatto con la superficie ($z_\Omega > 0$), e il caso di confine ($z_\Omega = 0$). Si analizza quindi il primo caso: tutti gli spostamenti sono invertibili perciò la condizione (4.7) deve essere verificata come uguaglianza. Scegliendo ora uno spostamento particolare $\delta z_\Omega = 0$ e $\delta\theta$ arbitrario, la (4.7) comporta

$$M_z^{(e,a)} \delta\theta = 0, \quad \forall \delta\theta,$$

cioè $M_z^{(e,a)} = 0$, che introdotta nell'equazione di partenza implicherà $R_z^{(e,a)} = 0$. Si conclude allora che le configurazioni ordinarie di equilibrio per un sistema di questo tipo sono:

$$R_z^{(e,a)}(\theta, z_\Omega, t) = 0, \quad M_z^{(e,a)}(\theta, z_\Omega, t) = 0, \quad z_\Omega > 0. \quad (4.8)$$

Si considera ora il caso di confine, si suppone cioè $z_\Omega = 0$, $\delta z_\Omega \geq 0$. Le rotazioni (ossia spostamenti del tipo $\delta z_\Omega = 0$, $\delta\theta$ arbitrario) sono quindi spostamenti invertibili; al contrario, gli spostamenti traslatori e rototraslatori saranno non invertibili. Per gli spostamenti del primo tipo, ricordando che la condizione che deve essere rispettata per l'equilibrio è la (4.7), dovrà allora verificarsi, come nel caso ordinario, l'annullamento della componente del momento delle forze $M_z^{(e,a)}$, che introdotta in (4.7) comporta

$$R_z^{(e,a)} \delta z_\Omega \leq 0, \quad \forall \delta z_\Omega \geq 0.$$

Si nota ora che il vincolo impone la condizione $\delta z_\Omega \geq 0$, perciò la condizione (4.7) sarà soddisfatta se e solo se $R_z^{(e,a)} \leq 0$. Le condizioni di confine per l'equilibrio di un corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa sono dunque le seguenti:

$$R_z^{(e,a)}(\theta, 0, t) \leq 0, \quad , \quad M_z^{(e,a)}(\theta, 0, t) = 0. \quad (4.9)$$

Si conclude perciò che condizione necessaria e sufficiente per il verificarsi dell'equilibrio di un corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa, nel caso di confine, è che il vettore risultante punti contro la barriera unilaterale oppure sia normale alla semiretta fissa.

Osservazione 4.5. Si noti che al posto della variabile z_Ω si è posto 0 poiché è il suo valore di confine.

Si procede ora alla ricerca delle stesse condizioni attraverso le equazioni cardinali della statica. Dato che queste utilizzano anche le reazioni vincolari, bisogna fare subito la distinzione tra il caso ordinario e quello di confine. Nel primo infatti sono presenti due reazioni vincolari, $(\Phi_1, \Omega_1), (\Phi_2, \Omega_2)$, generate dai due cursori e perciò normali all'asse z . Il sistema delle equazioni cardinali della statica allora è il seguente

$$\begin{cases} \vec{R}^{(e,a)} + \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 = 0 \\ \vec{M}_\Omega^{(e,a)} + \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \wedge \vec{\Phi}_2 = 0, \end{cases}$$

avendo posto come polo di riduzione dei momenti Ω_1 . Si nota che il sistema è lo stesso del caso precedente, con la differenza però che ora Ω_1 e Ω_2 sono mobili rispetto all'osservatore O . Proiettando ora il sistema sugli assi cartesiani si ottiene:

$$\begin{cases} R_x^{(e,a)}(\theta, z_\Omega, t) + \Phi_{1x} + \Phi_{2x} = 0 \\ R_y^{(e,a)}(\theta, z_\Omega, t) + \Phi_{1y} + \Phi_{2y} = 0 \\ R_z^{(e,a)}(\theta, z_\Omega, t) = 0 \\ M_x^{(e,a)}(\theta, z_\Omega, t) - l\Phi_{2y} = 0 \\ M_y^{(e,a)}(\theta, z_\Omega, t) + l\Phi_{2x} = 0 \\ M_z^{(e,a)}(\theta, z_\Omega, t) = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

ponendo $\Omega_1\Omega_2 = l \vec{k}$ e $l = \Omega_1\Omega_2 \cdot \vec{k}$.

Osservazione 4.6. L'assenza delle componenti lungo l'asse z delle reazioni vincolari è dovuta al fatto che le reazioni vincolari sono normali a tale asse.

La terza e la sesta delle condizioni (4.10) forniscono dunque le (4.8), già ricavate con il principio dei lavori virtuali. Le restanti quattro equazioni determinano le quattro componenti di $\vec{\Phi}_1$ e $\vec{\Phi}_2$. Si analizza ora il caso di confine. Si suppone che l'appoggio in corrispondenza del vincolo unilaterale (la superficie priva di attrito in Figura 4.5) avvenga in un solo punto di contatto $\Omega_3 \equiv O$; in questo modo si genera un'ulteriore reazione vincolare $(\vec{\Phi}_3, \Omega_3)$, che risulta inoltre parallela all'asse z :

$$\vec{\Phi}_3 = \Phi_3 \vec{k}, \quad \Phi_3 = \vec{\Phi}_3 \cdot \vec{k}.$$

Il sistema delle equazioni cardinali in questo caso sarà allora

$$\begin{cases} \vec{R}^{(e,a)} + \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 + \vec{\Phi}_3 = 0 \\ \vec{M}_\Omega^{(e,a)} + \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} \wedge \vec{\Phi}_2 = 0. \end{cases}$$

Si noti che non è presente il momento di $(\vec{\Phi}_3, \Omega_3)$ in quanto è nullo: $\vec{\Phi}_3$ è, infatti, parallelo al vettore $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$. Proiettando ora il sistema sugli assi cartesiani si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x^{(e,a)}(\theta, 0, t) + \Phi_{1x} + \Phi_{2x} = 0 \\ R_y^{(e,a)}(\theta, 0, t) + \Phi_{1y} + \Phi_{2y} = 0 \\ R_z^{(e,a)}(\theta, 0, t) + \Phi_{3z} = 0 \\ M_x^{(e,a)}(\theta, 0, t) - l\Phi_{2y} = 0 \\ M_y^{(e,a)}(\theta, 0, t) + l\Phi_{2x} = 0 \\ M_z^{(e,a)}(\theta, 0, t) = 0, \end{array} \right. \quad (4.11)$$

sfruttando la stessa notazione del caso ordinario. La condizione per l'equilibrio pertanto è

$$M_z^{(e,a)}(\theta, 0, t) = 0, \quad (4.12)$$

per l'unico parametro incognito θ , in quanto il valore di confine z_Ω è stato fissato a 0. Le rimanenti equazioni forniranno poi le cinque componenti delle varie reazioni vincolari.

Osservazione 4.7. Mediante il principio dei lavori virtuali si è trovata inoltre la condizione $R_z^{(e,a)} \leq 0$, perciò sfruttando la terza equazione di (4.11), si può affermare che

$$\Phi_{3z} \geq 0.$$

Bibliografia

- [1] Battaia L.: *Appunti ed esercizi di meccanica razionale*, Dispense, Anno Accademico 2007/2008. Disponibili all'url https://www.dmi.unict.it/falsaperla/didattica/testo_fis_mat.pdf
- [2] Coopersmith J.: *The Principle of Virtual Work*, Articolo, 2017. Disponibile all'url <https://doi.org/10.1093/oso/9780198743040.003.0004>
- [3] Fiore G.: *Parte 3: Dinamica e Statica dei sistemi materiali*, Dispense, Anno Accademico 2021/2022. Disponibili all'url <https://www.docenti.unina.it/webdocenti-be/allegati/materiale-didattico/169403>
- [4] Graffi D.: *Elementi d Meccanica Razionale*, Pàtron, Bologna, 1973
- [5] Strumia, A.: *Meccanica Razionale*, Vol.1, Nautilus, 1996: Disponibile all'url <http://www.albertostrumia.it/meccanica-razionale-parte-I>
- [6] Tondo G. S.: *Appunti delle lezioni di meccanica razionale*, Dispense, Anno Accademico 2020/2021. Disponibili all'url https://moodle2.units.it/pluginfile.php/448551/mod_resource/content/1/Appunti_MR_1