

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Introduzione al path integral in teoria quantistica: principi e applicazioni

Relatore:  
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:  
Francesco Medri

Anno Accademico 2023/2024

*Per Elisa*

## Sommario

In questa tesi viene introdotto il path integral nelle sue formulazioni in meccanica quantistica non relativistica e in teoria dei campi quantistica, illustrandone le applicazioni e le implicazioni teoriche. Si è evidenziato il ruolo che l'integrazione funzionale ricopre nella connessione tra dinamica e geometria.

Nel Capitolo 1 si introducono i concetti fondamentali e si deriva la formula per il path integral in meccanica quantistica non relativistica.

Nel Capitolo 2 viene trattata la teoria dei campi quantistici a partire dalla teoria classica e si mostra come il path integral può essere utilizzato in tali contesti.

Nel Capitolo 3 vengono esposte alcune applicazioni del path integral per mostrare in che modo il path integral è utile per costruire una teoria coerente.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Prolegomeni: la nascita del path integral</b>	<b>4</b>
1.1 Le intuizioni di Dirac . . . . .	4
1.2 La svolta di Feynman . . . . .	8
1.3 Motivazioni e prospettive . . . . .	18
<b>2 Path integral in teoria dei campi</b>	<b>22</b>
2.1 Teoria dei campi classica e quantistica . . . . .	23
2.2 Path integral per campi quantistici . . . . .	35
2.3 Principio variazionale di Schwinger e simmetrie . . . . .	40
<b>3 Applicazioni</b>	<b>50</b>
3.1 Lagrangiane quadratiche in meccanica quantistica non relativistica . . . . .	50
3.2 Formalismo operatoriale . . . . .	55
3.3 Path integral per stati coerenti . . . . .	59
<b>Conclusioni</b>	<b>68</b>
<b>A Integrali Gaussiani</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>70</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>73</b>

# Introduzione

Spès l'è e dò ad brèscia a fè vinz la partida.

---

Detto popolare romagnolo

La meccanica quantistica non relativistica moderna parte da un grande assunto: per ogni sistema esiste un operatore hamiltoniano  $\hat{H}$  appartenente agli operatori autoaggiunti agenti sullo spazio di Hilbert dei ket  $|\psi\rangle$ , con cui è possibile costruire la corrispondente equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle \quad (0.0.1)$$

da cui si ottiene la dinamica dell'intero sistema quantistico, conoscendo la corrispondente hamiltoniana classica  $H_c$ .

Questo risultato è in realtà frutto di una serie di intuizioni precedenti alla formulazione moderna dovuta a Dirac, dove la meccanica quantistica era appunto geneticamente legata con la teoria delle onde.

La costruzione della meccanica quantistica dall'equazione di Schrödinger è avvenuta grazie a un attento studio della meccanica classica hamiltoniana, perché quest'ultima si era dimostrata un formidabile strumento per lo studio dei fondamenti della meccanica, permettendo una libertà mai vista prima tramite lo studio dello spazio delle fasi. Questo si dimostrò un approccio vincente per i progressi della fisica del XX secolo, alla luce degli enormi successi ottenuti dalla formulazione ordinaria della meccanica quantistica. Fu la trattazione della meccanica hamiltoniana in stretta corrispondenza con l'ottica geometrica tramite la teoria di Hamilton-Jacobi che ispirò l'idea di un sistema hamiltoniano più ampio, dotato di onde propagantesi nello spazio delle fasi seguendo una geometria determinata dal sistema dinamico stesso (Cfr.[1]).

La meccanica classica, secondo questo punto di vista, sarebbe semplicemente il limite della meccanica quantistica nello stesso modo in cui l'ottica geometrica, che descrive il comportamento di raggi luminosi, è il limite per grandi frequenze della teoria ondulatoria elettromagnetica. La giustificazione data da Schrödinger per questa intuizione fu tanto semplice quanto nebulosa: possiamo identificare una particella localizzata nello spazio come un punto di interferenza costruttiva delle onde che vengono rappresentate come soluzione del moto quantistico. Per quanto ciò possa darci un quadro dei processi in atto a livello quantistico, rimaniamo incerti su come possa emergere nei suoi principi fondamentali la teoria classica.

Certamente, ciò accade ed è facilmente verificabile trattando il limite classico  $\hbar \rightarrow 0$ ,

ma non risulta direttamente intuibile dalla teoria esposta. Era forse questa la difficoltà che più colpì i fisici che per primi dovettero capire quale posizione avesse la meccanica quantistica nell'ordine delle cose.

Ma è bene non scordarsi mai delle proprie origini. La meccanica analitica si è sviluppata in primo luogo dall'approccio lagrangiano, che si fonda semplicemente sullo spazio delle configurazioni e da questo definisce gli impulsi corrispondenti tramite la funzione lagrangiana. Seppur possa sembrare svantaggioso ricondursi a una trattazione meno generale come quella derivante dall'approccio lagrangiano, ciò riconduce a principi estremamente illuminanti, che meritano una discussione al pari della stessa teoria hamiltoniana. Di fatto, quest'ultima eredita dalla teoria lagrangiana l'impiego di *principi variazionali* della descrizione della dinamica.

Intendiamo genericamente con tale termine un metodo compatto per ottenere le leggi caratteristiche di una teoria a partire dall'imposizione di certe richieste specifiche sulla variazione infinitesima di una grandezza caratteristica del sistema, che si tratti di imporre una limitazione sul segno o considerarla come nulla. Nei capitoli seguenti avremo modo di ritornare sull'argomento, ma è interessante notare fin da subito il vantaggio di poter dare una prescrizione generale per le equazioni caratteristiche di un sistema a partire da una quantità di facile costruzione. La fisica normalmente spinge verso processi di sintesi e semplificazione, dove ad esempio le leggi del moto di Newton permisero di ricondurre il moto dei corpi a una causa semplice e generale, oppure la teoria lagrangiana che rese le equazioni del moto conseguenza della forma della Lagrangiana del sistema.

Molte delle teorie moderne preferiscono ricondursi a un principio generale da cui poi ottenere, a seconda della situazione specifica, la dinamica del sistema, ed è ciò che normalmente viene fatto con il principio di azione stazionaria (si veda sotto) o il principio di Fermat, l'uno per la meccanica, l'altro per l'ottica. Nonostante spesso non venga prodotta nuova fisica tramite l'introduzione di un principio variazionale, la riflessione sulla natura di tali principi interessa una grossa parte del dibattito scientifico, in virtù della grande attrattiva che un principio che impone una condizione di minimizzazione o stazionarietà può avere nei confronti di considerazioni di natura metafisica, che fanno riferimento a ordine e predeterminazione.

Con l'apertura di questo tipo di percorso, possiamo capire come l'analogia tra la luce e la meccanica sia ben più profonda di un semplice parallelismo tra meccanica hamiltoniana e ottica, ma si capisce che il principio di Fermat è un equivalente del principio di azione stazionaria. Lo stesso Schrödinger, nella seconda derivazione esposta della sua famosa equazione, fece riferimento a un principio variazionale (Cfr. [1]).

Tralasciando considerazioni di natura teleologica o metafisica che possono emergere dalla discussione dei principi variazionali, capiamo che, esattamente come avviene nella trattazione hamiltoniana del formalismo di Schrödinger, possiamo farci un'idea del limite classico della meccanica quantistica tramite l'introduzione della trattazione lagrangiana, fortemente legata con i principi variazionali fondamentali in meccanica classica, e i suoi risultati devono portare agli stessi ottenuti tramite l'approccio hamiltoniano, come d'altronde avviene già nella teoria classica.

# Capitolo 1

## Prolegomeni: la nascita del path integral

### 1.1 Le intuizioni di Dirac

Il primo a mettere davvero seriamente sotto esame questo tipo di trattazione fondata su un approccio lagrangiano fu Dirac [2], [3], ma ciò che riuscì a trarre fu semplicemente qualche principio generale; non per questo dobbiamo ignorare la forza di tali risultati, siccome rappresentano delle regole semplici e penetranti, in linea con l'intera carriera scientifica di un fisico quale Dirac.

Supponendo di avere un sistema dinamico, avente analogo classico, con coordinate generalizzate  $q^1$  appartenenti allo spazio delle configurazioni, possiamo costruire una base dello spazio di Hilbert degli stati del sistema  $|q\rangle$ . Indichiamo con  $\hat{T}$  l'operatore unitario di propagazione temporale ( $\hat{T}^\dagger = \hat{T}^{-1}$ ) individuato dalla relazione

$$i\hbar \frac{d\hat{T}}{dt} = \hat{H}\hat{T}$$

tale per cui  $|q_t\rangle := \hat{T}^\dagger |q_{t_0}\rangle$  è una base dipendente dal tempo trasformata a partire dal ket  $|q_{t_0}\rangle$  preso al tempo  $t_0$  (nonostante a livello matematico non sia fondamentale specificare il tempo del ket iniziale, siccome formalmente stiamo cambiando lo schema (picture) dei ket).

Supponiamo che

$$\langle q_t'' | q_{t_0}' \rangle = e^{iS/\hbar} \quad (1.1.1)$$

con  $S$  funzione di  $q_t''$  e  $q_{t_0}'$ . Ricordiamo che, se i ket  $|q\rangle$  sono autoket dell'operatore  $\hat{Q}$  nello schema di Schrödinger, allora i  $|q_t\rangle$  diventano autoket di  $\hat{Q}_t = \hat{T}^\dagger \hat{Q} \hat{T}$  nello schema di Heisenberg, per cui gli autovalori  $q_t$  vanno intesi come autovalori al tempo  $t$  dell'osservabile  $\hat{Q}_t$ , l'evoluto temporale dell'osservabile  $\hat{Q}$ . Assumendo il limite classico, per cui  $\hbar \rightarrow 0$ , vediamo che

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle q_t'' | q_{t_0}' \rangle = i\hbar \langle q_t'' | \frac{d\hat{T}}{dt} | q_{t_0}' \rangle = \langle q_t'' | \hat{T}^\dagger \hat{H} \hat{T} | q_{t_0}' \rangle \quad (1.1.2)$$

---

<sup>1</sup>D'ora in avanti intenderemo con  $q$  un insieme generale di coordinate  $q^\alpha$  con  $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n$  in uno spazio  $n$ -dimensionale.

si riduce all'equazione

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_c \left( q''_t, \frac{\partial S}{\partial q''_t} \right) = 0 \quad (1.1.3)$$

dove  $H_c(q, p)$ <sup>2</sup> è l'hamiltoniana classica a cui corrisponde l'operatore  $\hat{H}(\hat{Q}, \hat{P})$ . Un'equazione analoga può essere ottenuta anche per  $t_0$ , invertendo il segno delle derivate. L'equazione precedente è di fatto l'equazione di Hamilton-Jacobi (seppur non nella forma finale proposta da Jacobi, ma piuttosto secondo il metodo di integrazione delle equazioni del moto proposto da Hamilton) il che ci permette di assumere che  $S$ , nel limite classico, si riduca alla funzione caratteristica di Hamilton

$$S(t, q''; t_0, q') = \int_{t_0}^t d\tau L_c(q(\tau), \dot{q}(\tau)) = \int_{t_0}^t d\tau L_c(\tau) \quad (1.1.4)$$

dove  $q(\tau)$  è la traiettoria che soddisfa le equazioni del moto e connette le coordinate  $q'$  al tempo  $t_0$  con le coordinate  $q''$  al tempo  $t$ , mentre  $L_c$  è la lagrangiana classica del sistema. Un'occhiata veloce alla funzione  $\langle q'_t | q'' \rangle = \langle q'' | \hat{T} | q' \rangle$  ci mostra come questa non sia nient'altro che un elemento di matrice dell'operatore  $\hat{T}$  e che quindi ci restituisca i fattori di fase acquisiti dal ket  $|q'\rangle$  in una transizione dal tempo  $t_0$  al tempo  $t$ ; in pratica stiamo prendendo la proiezione su  $|q_t\rangle$  del ket  $|q_{t_0}\rangle$  dopo che ha subito una propagazione nel futuro, che quindi rappresenta l'ampiezza di probabilità per la misura di  $\hat{Q}$  con risultato  $|q_t\rangle$ .

Usando le parole di Dirac [2]:

The square of the modulus of the transformation function  $\langle q_t | q_T \rangle$  can be interpreted as the probability of an observation of the coordinates at the later time  $t$  giving the result  $q_t$  for a state for which an observation of the coordinates at an earlier time  $T$  is certain to give the result  $q_T$ .

Osserviamo anche che, se  $t - t_0 = \delta t$  è sufficientemente piccolo, possiamo ottenere la forma della lagrangiana quantistica all'istante  $t_0$ , sfruttando l'uguaglianza che la definisce

$$\langle q''_{t_0+\delta t} | q'_{t_0} \rangle = \exp \left( \frac{i}{\hbar} L(t_0) \delta t \right) \quad (1.1.5)$$

ma si ha come differenza rispetto al caso classico, la dipendenza di  $L(t_0)$  dalle coordinate  $q'$  al tempo  $t_0 + \delta t$  e dalle coordinate  $q''$  al tempo  $t_0$ , piuttosto che essere una funzione delle coordinate e delle velocità all'istante  $t_0$ <sup>3</sup>.

Vogliamo ora poter tradurre il principio di azione stazionaria, o principio di Hamilton, in meccanica quantistica, ricordando che a livello classico, il principio è enunciato dalla prescrizione di stazionarietà del funzionale d'azione

$$\delta I[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L_c(q, \dot{q}) = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L_c(t) = 0 \quad (1.1.6)$$

<sup>2</sup>Per semplicità, consideriamo in questi contesti funzioni hamiltoniane indipendenti dal tempo.

<sup>3</sup>In generale non possiamo affermare che esista una funzione  $L$  tale per cui  $S = L$ , in quanto questo equivale a imporre condizioni specifiche di derivabilità su  $S$ . Vedremo più avanti, tramite il calcolo esplicito dell'ampiezza  $\langle q'' | q' \rangle$  che forma può assumere la  $S$ .



dove la variazione  $\delta$  è da intendersi come  $\delta I[q] = I[q + \delta q] - I[q]$  per una variazione arbitraria e piccola della traiettoria  $q$  tale per cui  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ . Notare che funzionale d'azione e funzione caratteristica di Hamilton sono aspetti diversi della stessa quantità: sostanzialmente si tratta di due oggetti matematici differenti, dove il funzionale d'azione dipende dalla traiettoria nello spazio delle configurazioni, mentre la funzione caratteristica di Hamilton è calcolata sulla traiettoria che soddisfa le equazioni del moto e dipende dai punti iniziali e finali della traiettoria; i due oggetti sono identificabili l'uno con l'altro nel momento in cui ci si riduce a considerare le traiettorie per cui sono soddisfatte le equazioni del moto e in tal caso diviene lecito parlare di *azione*. La vicinanza dei due concetti può essere anche evidenziata indicando il funzionale d'azione con  $S[q]$ .

Formalmente, assumendo una traiettoria variata  $\tilde{q}(t) = q(t) + \epsilon \delta q(t)$  con  $\delta q(t)$  funzione  $C^r$ ,  $r > 0$ , arbitraria a meno dell'annullarsi agli estremi di integrazione, il principio può essere riscritto come

$$\left. \frac{dI[\tilde{q}]}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (1.1.7)$$

Nel regime classico, poniamo

$$B(t_b, t_a) := \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt L_c(t) \right) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(t_b, q_{t_b}; t_a, q_{t_a}) \right] \quad (1.1.8)$$

corrispondente classico della quantità  $\langle q_{t_b} | q_{t_a} \rangle$  (dove abbiamo tolto gli apici da  $q$  per semplicità, ma continuiamo ad assumere  $q_{t_b}$  e  $q_{t_a}$  relativi a due autovalori di  $\hat{Q}$  anche differenti) e supponiamo che l'intervallo  $t_b - t_a$  venga suddiviso in una grande quantità di intervalli di lunghezza infinitesima, introducendo una suddivisione di intervalli  $t_k$  tale che  $t_0 = t_a$  e  $t_N = t_b$ . Risulterà da ciò

$$B(t_b, t_a) = \prod_{k=0}^{N-1} B(t_{k+1}, t_k) \quad (1.1.9)$$

Volendo l'equivalente quantistico, ricordiamo che una base di autoket di un osservabile soddisfa la seguente relazione di completezza<sup>4</sup>

$$\int |q\rangle dq \langle q| = 1 \quad (1.1.10)$$

dove si indica con  $\hat{1}$  l'operatore identità, per cui possiamo riscrivere  $\langle q_{t_b} | q_{t_a} \rangle$  come

$$\langle q_{t_b} | q_{t_a} \rangle = \int \langle q_{t_b} | q_{t_{N-1}} \rangle dq_{t_{N-1}} \langle q_{t_{N-1}} | q_{t_{N-2}} \rangle dq_{t_{N-2}} \dots \langle q_{t_2} | q_{t_1} \rangle dq_{t_1} \langle q_{t_1} | q_{t_a} \rangle \quad (1.1.11)$$

Osserviamo che ogni fattore in Eq.(1.1.9)  $B(t_b, t_a)$  ha una dipendenza dai valori  $q_{t_k}$  e  $q_{t_{k+1}}$  alla luce della sua definizione in funzione di  $S$ , per cui l'intero fattore  $B(t_b, t_a)$  deve dipendere da tutti i  $q$  intermedi; ciò equivale a dire che i valori di  $q$  che compaiono in Eq.(1.1.9) sono quelli per la traiettoria effettiva. La giustificazione di ciò la

<sup>4</sup>La misura  $dq$  è da intendersi in senso più ampio, dove, per osservabili  $\hat{Q}$  a spettro sia discreto che continuo, l'integrale su  $dq$  indica una sommatoria su tutti gli autovalori discreti nello spettro di  $\hat{Q}$  e un'integrazione sulla parte continua dello stesso.

vediamo considerando il principio di azione stazionaria, siccome  $S$  non varia per piccole variazioni di  $q$  attorno ai valori della traiettoria classica, per cui otteniamo che anche  $B(t_b, t_a)$  è stazionario rispetto a tali valori, come ci si aspetterebbe dalla sua definizione che prevede solamente una dipendenza da  $q_{t_b}$  e da  $q_{t_a}$ . L'introduzione del principio di azione stazionaria in meccanica quantistica avviene osservando, come verrà mostrato qui sotto, che nell'Eq.(1.1.11) l'integrazione su tutti i valori intermedi di  $q$  indica che il peso di ciascun valore possibile di  $q_{t_k}$  nel risultato finale è proporzionale al contributo che questo apporta nell'integrale.

Vogliamo ora capire come possiamo collegare le due formule e vediamo che il punto di giunzione sta proprio nelle interpretazioni appena proposte; considerando infatti il limite classico  $\hbar \rightarrow 0$ , notiamo che, siccome la funzione integranda nella (1.1.11) è della forma  $e^{iF/\hbar}$  dipendente dai  $q$  intermedi, questa avrà un andamento fortemente oscillatorio anche per variazioni piccole di  $F$ , dato il limite classico. Capiamo quindi che, gli unici punti in cui non si avrà interferenza distruttiva tra gli esponenziali complessi sono quelli per cui  $F$  è stazionaria; considerando la forma dei vari termini (1.1.8), risulta evidente che la  $F = \sum S(t_{k+1}, t_k)$ , sarà stazionaria esattamente per i valori appartenenti alla traiettoria classica e di conseguenza, data appunto la natura oscillatoria dell'integranda, il risultato dell'integrale sarà determinato dai valori della funzione nei pressi dei punti stazionari per piccole variazioni per  $q$  intermedi; abbiamo in questo modo riottenuto il collegamento tra le due forme della (1.1.8), oltre che un interessante punto di vista sul limite classico.

Arrivati a questo punto, pur non avendo esposto nulla di nuovo che non sia già contenuto nella meccanica quantistica ordinaria, siamo in possesso di un nuovo punto di vista sulla questione del limite classico e della modellizzazione a livello quantistico. Oltretutto, stiamo trattando, nel caso della Eq.(1.1.11), con equazioni esatte che ci illuminano sul ruolo dell'azione in fisica quantistica, in quanto la traiettoria classica sembrerebbe il punto dove le fasi dei vari termini che compaiono in Eq.(1.1.11) si compongono coerentemente e individuano precisamente la posizione della particella; tutto questo si è visto facendo riferimento ai principi variazionali che animano la meccanica lagrangiana.

Effettivamente già Schrödinger si era speso per poter comprendere in termini di funzioni d'onda il moto classico delle particelle, ma il suo punto di vista si concentrò su aspetti più cinematici e non fece riferimento a quantità scalari caratteristiche della fisica, quali il funzionale d'azione.

Risulta anche di grande interesse il fatto che per  $\hbar$  non trascurabili l'integrazione vista in (1.1.11) dipende da un continuo di percorsi possibili per la particella analogamente a come il funzionale d'azione prevede una dipendenza dai vari percorsi; questa libertà nella scelta delle traiettorie viene eliminata col principio di azione stazionaria che si configura come una conseguenza delle regole del moto quantistiche.

Su questi principi fondamentali si fonda quello che poi conosceremo con il nome di *Path Integral* il quale non fu sviluppato da Dirac, probabilmente per un eccesso di zelo nei confronti del formalismo matematico che sarebbe stato necessario per questo nuovo strumento.

## 1.2 La svolta di Feynman

La moderna formulazione del path integral, chiamato anche *integrale funzionale* o *integrale sui percorsi*, fu elaborata grazie agli sforzi di un giovane Richard Feynman, che ne delineò gli aspetti salienti nella tesi di dottorato [4], ma riuscì a mostrare pienamente la potenza di questo nuovo approccio nei suoi successivi lavori [5], [6], [7], arrivando all'esposizione di una teoria completa nello storico libro *Path Integrals and Quantum Mechanics* [8].

In questa sede ci proponiamo di riportare l'approccio di Feynman a livello puramente espositivo, in quanto non è nell'interesse di questa tesi seguire le idee da lui utilizzate per riottenere la meccanica quantistica ordinaria a partire da pochi semplici postulati e ad ogni modo gran parte dei risultati di Feynman saranno ottenuti seguendo percorsi differenti; nonostante ciò, parte di questo approccio verrà mostrato nelle pagine a seguire.

L'idea fondamentale del path integral muove dalle scoperte di Dirac sul ruolo della lagrangiana in meccanica quantistica e viene riportata qui di seguito, seguendo l'introduzione che normalmente viene fatta dell'argomento nei moderni testi di meccanica quantistica o teoria quantistica dei campi (Cfr.[9]).

Il punto di partenza è l'equazione di Schrödinger (0.0.1), che osserviamo essere lineare nel ket caratteristico del sistema  $|\psi\rangle$ , e possiamo quindi ipotizzare l'esistenza di un operatore lineare unitario  $\hat{U}(t, s)$  che chiameremo *propagatore* o *operatore di evoluzione temporale* (o più in generale *funzione di Green per il problema di Schrödinger*) tale per cui  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, s)|\psi(s)\rangle$  (dove  $t$  è il tempo<sup>5</sup>) soddisfa l'Eq.(0.0.1), ammesse le condizioni adeguate per l'operatore hamiltoniano.

Affinché sia soddisfatta l'equazione di Schrödinger, il propagatore deve rispettare la seguente condizione:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, s)}{\partial t} = \hat{H}(t)\hat{U}(t, s) \quad (1.2.1)$$

e, notando che  $i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{ds} = 0$ , dimostriamo anche l'analoga

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t, s)}{\partial s} = -\hat{U}(t, s)\hat{H}(s) \quad (1.2.2)$$

Dalla definizione di  $\hat{U}$  notiamo anche le seguenti proprietà

$$\hat{U}(t_2, t_0) = \hat{U}(t_2, t_1)\hat{U}(t_1, t_0) \quad (1.2.3)$$

$$\hat{U}(s, t) = \hat{U}^{-1}(t, s) \quad (1.2.4)$$

$$\hat{U}(t, t) = 1 \quad (1.2.5)$$

Dimostriamo l'unitarietà di  $\hat{U}$  notando che

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\hat{U}^\dagger(t, s)\hat{U}(t, s)) = \hat{U}^\dagger(t, s)\hat{H}(t)\hat{U}(t, s) - \hat{U}^\dagger(t, s)\hat{H}(t)\hat{U}(t, s) = 0 \quad (1.2.6)$$

---

<sup>5</sup>Spesso viene imposta la condizione  $t > s$  per avere continuità con il caso classico ed evitare ambiguità, ma in vista di una trattazione relativistica dove l'ordinamento temporale risulta naturalmente dai principi della teoria, risulta vantaggioso fare riferimento al caso generale.

(dove si è fatto uso di  $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ ) da cui segue

$$\hat{U}^\dagger(t, s)\hat{U}(t, s) = \hat{U}^\dagger(s, s)\hat{U}(s, s) = 1 \quad (1.2.7)$$

Ripetendo i calcoli, derivando la quantità sopra rispetto a  $s$  e scambiando  $\hat{U}$  con  $\hat{U}^\dagger$ , otteniamo la relazione  $\hat{U}(t, s)\hat{U}^\dagger(t, s) = 1$  da cui possiamo infine concludere

$$\hat{U}(s, t) = \hat{U}^\dagger(t, s) = \hat{U}^{-1}(t, s) \quad (1.2.8)$$

e quindi la proprietà di unitarietà ricercata.

Notiamo che l'operatore  $\hat{U}$  è esattamente l'operatore  $\hat{T}$  in quanto condivide con questo l'equazione del moto, ma in questo caso l'evoluzione temporale è associata ai ket poiché stiamo trattando lo schema di Schrödinger, mentre la discussione di Dirac parte dallo schema di Heisenberg.

Come soluzione formale alle Eqq.(1.2.1), (1.2.2) che rispetti le proprietà di Eqq.(1.2.3), (1.2.4), (1.1.8), nel caso in cui l'operatore  $\hat{H}$  sia indipendente dal tempo, troviamo:

$$\hat{U}(t, s) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-s)\hat{H}} := \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{-i(t-s)}{\hbar} \right]^k \frac{\hat{H}^k}{k!} \quad (1.2.9)$$

Parliamo di soluzione formale perché per serie infinite di operatori è da verificare la convergenza, alla luce della natura non limitata degli operatori che normalmente vengono impiegati in meccanica quantistica; questa criticità si riflette anche sulla formulazione del teorema spettrale, cruciale in teoria quantistica, che deve subire una riformulazione per essere utilizzato in modo soddisfacente (Cfr.[10]).

Decidiamo comunque di assumere che  $\hat{U}$  sia ben definito sul dominio di ket di nostro interesse, così da poter maneggiare impunemente l'equazione (1.2.9).

Notiamo inoltre che, se  $\hat{H}$  avesse una dipendenza dal tempo, non sarebbe sufficiente mettere all'esponente l'integrale di  $\hat{H}(t)$ , in quanto non necessariamente vale la relazione

$$[\hat{H}(t), \hat{H}(s)] = 0$$

per cui capiamo che l'espressione

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_s^t dt' \hat{H}(t')\right)$$

è definita in modo ambiguo, poiché si presentano problemi di ordinamento dei fattori. La soluzione effettiva andrebbe riscritta come

$$\hat{U}(t, s) = T \left\{ \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_s^t dt' \hat{H}(t')\right) \right\} \quad (1.2.10)$$

dove  $T$  sta ad indicare un ordinamento dei termini al suo interno  $T\{\hat{A}(t)\hat{B}(s)\} = \theta(t-s)\hat{A}(t)\hat{B}(s) + \theta(s-t)\hat{B}(s)\hat{A}(t)$  dove  $\theta(x) = 1$  se  $x \geq 0$  e  $\theta(x) = 0$  se  $x < 0$ .

Decidiamo di scegliere il caso di  $\hat{H}$  indipendente da  $t$ , e cerchiamo di calcolare l'elemento di matrice

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) := \langle q_b | \hat{U}(t_b, t_a) | q_a \rangle \quad (1.2.11)$$

dove indichiamo con  $|q\rangle$  gli autoket di autovalore  $q$  relativi alla serie di operatori autoaggiunti  $\hat{Q}$  corrispondenti alle coordinate fisiche del sistema, come fatto in precedenza; lo spazio sarà assunto  $n$ -dimensionale per cui  $q = (q^\alpha)$  con  $\alpha = 1, \dots, n$ . Per semplicità si considereranno solo coordinate cartesiane.

Vediamo che tale elemento di matrice non è nient'altro che la proiezione del ket  $|q_a\rangle$  propagato allo stesso istante di  $|q_b\rangle$  su  $|q_b\rangle$  stesso, ed è quindi da interpretare, come espresso dalla citazione di Dirac riportata nella sezione precedente, come ampiezza di probabilità della transizione da  $q_a$  a  $q_b$  nell'intervallo  $t_b - t_a$ .

Spezzando  $\Delta t = t_b - t_a$  in una serie di  $N$  intervalli  $\epsilon$  tale per cui  $\Delta t = N\epsilon$ , riscriviamo

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = \langle q_b | \prod_{k=1}^N e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H}} | q_a \rangle \quad (1.2.12)$$

e facciamo uso dell'Eq.(1.1.10) intercalando tra ciascun esponenziale della Eq.(1.2.12) un'identità data dalla relazione di completezza. Si ottiene quindi

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = \int \langle q_N | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H}} | q_{N-1} \rangle dq_{N-1} \langle q_{N-1} | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H}} | q_{N-2} \rangle dq_{N-2} \dots dq_1 \langle q_1 | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{H}} | q_0 \rangle \quad (1.2.13)$$

operando le identificazioni  $q_b = q_N$  e  $q_a = q_0$ .

Per svolgere il calcolo esplicito dei fattori presenti nell'equazione precedente, facciamo riferimento alla forma comunemente impiegata della hamiltoniana di un sistema con coordinate cartesiane<sup>6</sup>

$$H_c(q, p) = T(p) + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (1.2.14)$$

che si traduce nell'operatore

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{Q}) \quad (1.2.15)$$

Per gli esponenziali di operatori non valgono le stesse regole per gli esponenziali di complessi, ma possiamo comunque fare uso del limite  $N \rightarrow \infty$  per ignorare tutti i termini  $O(\epsilon^2)$ , in quanto in questo limite sono trascurabili rispetto alle grandezze di interesse (una discussione più approfondita si trova in [9]). Alla luce di ciò, data la relazione

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon(\hat{T}+\hat{V})} = e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{T}} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{V}} + O(\epsilon^2) \quad (1.2.16)$$

dove i termini  $O(\epsilon^2)$  coinvolgono termini dipendenti dal commutatore  $[\hat{T}, \hat{V}]$ , vediamo la validità della formula per il prodotto di Trotter (per una dimostrazione formale, Cfr.[10])

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle q_b | (e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{T}} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{V}})^N | q_a \rangle \quad (1.2.17)$$

Notiamo che vale l'equazione

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{V}\right) | q_k \rangle = | q_k \rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(q_k)\right) \quad (1.2.18)$$

---

<sup>6</sup>Notare che  $p^2 = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha^2$ .

e introduciamo anche una base di autoket  $|p\rangle$  appartenenti all'operatore  $\hat{P}$ , per cui è ancora valida la relazione di completezza Eq.(1.1.10) e per cui vale la relazione

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar}pq} \quad (1.2.19)$$

dove  $pq$  indica il prodotto scalare euclideo  $\sum_{\alpha=1}^n q^\alpha p_\alpha$ . La relazione (1.2.19) è necessaria affinché siano valide contemporaneamente le relazioni di completezza per  $|q\rangle$  e  $|p\rangle$ , insieme alle relazioni di commutazione canoniche

$$[\hat{Q}^\alpha, \hat{P}_\beta] = i\hbar\delta_\beta^\alpha \quad (1.2.20)$$

Notiamo che vale anche la relazione

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{T}\right)|p_k\rangle = |p_k\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\epsilon\frac{p_k^2}{2m}\right) \quad (1.2.21)$$

Inserendo anche le relazioni di completezza per  $|p\rangle$  nel mezzo di ciascuna coppia di operatori  $e^{-i\epsilon\hat{T}/\hbar}$  e  $e^{-i\epsilon\hat{V}/\hbar}$  nella Eq.(1.2.12), otteniamo grazie alle Eqq.(1.2.18), (1.2.19), (1.2.21) la formula

$$\begin{aligned} U(t_b, q_b; t_a, q_a) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{k=0}^{N-1} \left[ dp_k \langle q_{k+1} | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{T}} | p_k \rangle \langle p_k | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\hat{V}} | q_k \rangle \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{k=0}^{N-1} dp_k \langle q_{k+1} | p_k \rangle \langle p_k | q_k \rangle \exp \left[ -\frac{i}{\hbar}\epsilon \left( \frac{p_k^2}{2m} + V(q_k) \right) \right] \end{aligned}$$

che dà come risultato finale

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \prod_{k=0}^{N-1} \frac{dp_k}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ p_k(q_{k+1} - q_k) - \epsilon \left( \frac{p_k^2}{2m} + V(q_k) \right) \right] \right\} \quad (1.2.22)$$

Abbiamo ottenuto una formula che riduce il calcolo a una serie di integrazioni, ma vediamo che può essere fatta un'ulteriore semplificazione.

Prima è però necessario guardare attentamente la Eq.(1.2.22), dove risulta una funzione integranda data dall'esponenziale complesso di

$$\epsilon \sum_{k=0}^{N-1} \left[ p_k \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} \right) - H_c(q_k, p_k) \right] \quad (1.2.23)$$

Nel limite  $N \rightarrow \infty$  si ha  $\epsilon \rightarrow 0$  e questo sembrerebbe indicare che il termine

$$\dot{q}_k := \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon}$$

sia effettivamente la velocità istantanea di una traiettoria ottenuta fissando tutti i  $q_k$  e interpretano questi come coordinate di una traiettoria a un istante  $t_k = t_a + k\epsilon$ <sup>7</sup>; si

<sup>7</sup>Si tratta di una convenzione utilizzare  $t_a$  come istante iniziale, ma ciò torna utile a livello interpretativo.

potrebbe obiettare che, al contrario di  $\epsilon$ ,  $q_{k+1} - q_k$  non è in generale arbitrariamente piccolo poiché l'integrazione sui  $q_k$  avviene, normalmente, su un dominio non limitato, quindi una traiettoria siffatta sarebbe funestata da velocità pressoché infinite per la maggior parte dei possibili percorsi che si presenterebbero nell'integrazione.

Fortunatamente, seguendo le osservazioni di Dirac sul limite classico, nel momento in cui ci allontaniamo dal regime in cui  $\frac{q_{k+1}-q_k}{\epsilon}$  è finito, il carattere della funzione integranda diventa fortemente oscillatorio e quindi il contributo in queste regioni di integrazione diventa trascurabile; l'interesse fisico è ristretto a quei percorsi per cui la velocità, per come è definita sopra, è finita. Oltretutto, considerando che le integrazioni devono essere svolte prima della valutazione del limite, poiché, per quanto si conosce ad oggi, non si è in grado di calcolare contemporaneamente un numero infinito di integrazioni, le velocità considerate saranno generalmente alte, ma finite, per cui il problema delle velocità infinite è solamente di natura interpretativa, e si mostra come una difficoltà analoga a quelle che si presentano in teoria dei campi con il limite del continuo.

La non rilevanza delle alte velocità torna utile come velo protettivo contro gli effetti relativistici che non sono considerati nella nostra trattazione, ma fortunatamente non possono nemmeno presentarsi nei regimi studiati poiché per percorsi che ammettono velocità confrontabili con  $c$  l'integrazione è passata oltre la soglia dei percorsi di interesse fisico.

Ammissa quindi la coerenza con l'interpretazione della velocità possiamo identificare  $\dot{q}_k := \frac{q_{k+1}-q_k}{\epsilon}$  e osserviamo che i termini sommati in Eq.(1.2.23) sono della forma

$$L_c(t_k) = p_k \dot{q}_k - H_c(q_k, p_k) \quad (1.2.24)$$

ovvero riproducono la lagrangiana associata alla traiettoria  $q$ , ottenuta fissando i  $q_k$ , calcolata nello spazio delle fasi all'istante  $t_k$ , dove quindi non vi è un rapporto fissato tra i momenti e le velocità. Procedendo in questa direzione, l'Eq.(1.2.23) non può risultare che come un'integrale sul tempo tra gli istanti  $t_a$  e  $t_b$ , ovvero, si tratta del funzionale d'azione calcolato seguendo la traiettoria  $q$ , ma in questo caso è presente una dipendenza dalla traiettoria delle  $p_k$ .

Nel limite  $N \rightarrow \infty$ , la (1.2.23) diventerebbe quindi

$$S[p, q] = \int_{t_a}^{t_b} dt' [p\dot{q} - H(q, p)] \quad (1.2.25)$$

Siccome le integrazioni su  $dq$  e  $dp$  nel limite di  $N \rightarrow \infty$  determinano delle integrazioni sui percorsi nello spazio delle fasi, i fattori contenenti queste misure possono essere visti come una misura sullo spazio di tutti i percorsi nello spazio delle fasi che partono da  $q_a$  e terminano in  $q_b$  indicata con  $\mathcal{D}q\mathcal{D}p$  e possiamo dare una forma definitiva alla soluzione per l'elemento di matrice di  $\hat{U}$ , ovvero il **Path Integral nello spazio delle fasi**

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = \int_{(q_a, t_a)}^{(q_b, t_b)} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} S[q, p]} \quad (1.2.26)$$

dove i termini introdotti ereditano la loro interpretazione dalle considerazioni precedenti e dal limite della Eq.(1.2.22).

Il termine 'path integral' indica di fatto un'integrazione su tutti i percorsi possibili, ma



in questo contesto tale concetto rimane ancora in parte nascosto dietro l'astrattezza dello spazio delle fasi. Nonostante si sia fatto uso del termine 'misura' per  $\mathcal{D}q\mathcal{D}p$ , non è del tutto corretto trattare questo oggetto come tale, ma si dovrebbe ricorrere a requisiti formali sul vero concetto di misura che in questa sede sono state completamente ignorate, in linea con la tradizione della didattica sull'argomento. Per quanto uno studio delle proprietà strettamente formali del problema rappresenta un argomento di profondo interesse, il successo del path integral è prima di tutto motivato dal suo semplice accordo con i dati nonostante gli strumenti matematici che lo costituiscono siano meno raffinati di quanto sarebbe desiderabile.

Siccome ciascun percorso è dipendente dai punti iniziali e finali nelle coordinate, ma non nei momenti, possiamo eseguire l'integrazione sui momenti assumendo che lo spettro di questi sia uguale a tutto lo spazio  $\mathbb{R}^n$ ; l'integrazione risulta in questo modo agevolata considerando che coinvolge integrali gaussiani complessi, facilmente valutabili tramite una continuazione analitica.

Più concretamente, valutiamo l'integrale nelle  $p_k$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dp_k}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \epsilon \left( p_k \dot{q}_k - \frac{p_k^2}{2m} \right) \right] = \\ & = \exp \left( \frac{im\epsilon}{2\hbar} \dot{q}_k^2 \right) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dp_k}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left[ -\frac{i}{2m\hbar} \epsilon (p_k - m\dot{q}_k)^2 \right] = \\ & = \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \epsilon} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left( \frac{im\epsilon}{2\hbar} \dot{q}_k^2 \right) \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Osservando l'Eq.(1.2.22), vediamo che questa si riduce a

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \epsilon} \right)^{\frac{Nn}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \exp \left[ \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \frac{m}{2} \dot{q}_k^2 - V(q_k) \right) \right] \quad (1.2.28)$$

L'integrazione sulle  $p$  sembra aver preservato la forma prevista per lo spazio delle fasi, siccome l'integranda in Eq.(1.2.28) è sempre un esponenziale complesso di una somma di lagrangiane classiche

$$L_c(t_k) = \frac{m}{2} \dot{q}_k^2 - V(q_k)$$

Ciò avvalorerebbe la tesi secondo cui possiamo trattare tutti i  $q_k$  come coordinate di una traiettoria fisica e vediamo che la formula rimane concettualmente invariata, siccome potremmo vedere l'integrazione sui momenti come una trasformazione di Legendre che collega lo spazio delle configurazioni con lo spazio delle fasi; il contenuto fisico delle diverse formule per il path integral è legato alla natura dello spazio su cui si basano.

In questo caso si presenta un funzionale d'azione dipendente dai percorsi nello spazio delle configurazioni con estremi fissati ed è esattamente il funzionale d'azione classica che si presenta nel principio di azione stazionaria.

Riscriviamo simbolicamente l'Eq.(1.2.28) in analogia con Eq.(1.2.26) come **Path Integral nello spazio delle configurazioni**

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = \int_{(q_a, t_a)}^{(q_b, t_b)} \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \quad (1.2.29)$$



dove  $S[q]$  è una scrittura alternativa per il funzionale d'azione.

Questa è la forma ordinaria che viene associata al path integral nella maggior parte delle presentazioni, in quanto è più semplice da maneggiare della controparte nello spazio delle fasi e il ricorso a tutti i percorsi nello spazio delle configurazioni risulta di più facile interpretazione.

La forma finale del path integral ne giustifica completamente il nome, in quanto il path integral è di fatto un integrale su tutti i percorsi che è possibile descrivere tra due punti fissati nello spazio; in questo senso il calcolo di Eq.(1.2.29) associa a ciascun percorso un fattore di fase dipendente dall'azione classica del sistema su tale percorso.

L'Eq.(1.2.28) si ricollega con l'Eq.(1.1.11) inizialmente ottenuta da Dirac, siccome rappresenta una forma chiusa per il calcolo dell'ampiezza di transizione; facendo riferimento all'Eq.(1.1.5), alla luce della suddivisione dell'intervallo  $t_b - t_a$  in un grande numero di intervalli infinitesimi imposta nel paragrafo precedente, il grande numero di integrazioni avrebbe restituito una relazione del tipo

$$\langle q_{t_b} | q_{t_a} \rangle = \int \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \langle q_{t_{k+1}} | q_{t_k} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \exp \left( \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)(t_{j+1} - t_j) \right) \quad (1.2.30)$$

con  $L$  lagrangiana quantistica, sulla cui forma Dirac non ha avanzato ipotesi generali. Siccome ricordiamo che  $\langle q_{t_b} | q_{t_a} \rangle = \langle q'_{t_a} | \hat{T} | q_{t_a} \rangle = \langle q'_{t_a} | \hat{U}(t_b, t_a) | q_{t_a} \rangle$  dove  $q'_{t_a}$  e  $q_{t_b}$  sono due autovalori dello stesso operatore nello schema di Heisenberg  $\hat{Q}_{t_a}$  e siccome  $t_a$  è un istante arbitrario e può essere identificato con l'operatore  $\hat{Q}$  nello schema di Schrödinger,  $\langle q_{t_b} | q_{t_a} \rangle$  è esattamente l'elemento di matrice  $U(t_b, q_b; t_a, q_a)$  con  $|q_b\rangle = |q'_{t_a}\rangle$  e  $|q_a\rangle = |q_{t_a}\rangle$ . Possiamo quindi confrontare la Eq.(1.2.30) con la (1.2.28) e imponendo  $t_{j+1} - t_j = \epsilon$  otteniamo la relazione

$$L(t_k) = L_c(t_k) + \frac{i\hbar n}{2\epsilon} \ln \left( \frac{2\pi\hbar i\epsilon}{m} \right) \quad (1.2.31)$$

che verifica la condizione

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} L = L_c$$

e presenta una dipendenza dalla suddivisione temporale  $\epsilon$  che comporta un soddisfacente accordo con quanto osservato nella nota 4 1.1, ovvero che la lagrangiana quantistica non può rappresentare la derivata temporale della funzione  $S$  tale per cui

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = e^{\frac{i}{\hbar} S}$$

(definita in Eq.(1.1.1)) data la sua natura non locale nel tempo; a questo proposito, è bene sottolineare che la dicitura  $L(t_k)$  non indica una dipendenza di  $L$  dall'istante  $t_k$ , ma si tratta semplicemente della lagrangiana riferita alla particella nell'istante  $t_k$ , per cui sarebbe adeguato utilizzare la scrittura

$$L = L(q_{k+1}, q_k, t_{k+1}, t_k)$$

In termini rigorosi, anche la definizione di  $L_c(t_k)$  presenta una dipendenza dello stesso tipo, ma nel limite formale  $N \rightarrow \infty$  si ottiene la forma effettiva di una lagrangiana classica la cui natura è prettamente locale.

Capiamo quindi che già nei lavori di Dirac erano implicite le idee del path integral, ma

senza una forma esplicita per la lagrangiana quantistica il metodo non era completo.

Estremamente importante è il fondamento concettuale del path integral, che prosegue per una serie di identificazioni che ci permettono alla fine di riconoscere l'azione classica, ma che non godono di una solidità matematica confrontabile con le altre formulazioni della meccanica quantistica. Di fatto, l'interpretazione data dell'integrazione funzionale come integrazione su tutti i percorsi prevede un calcolo su percorsi tipicamente non derivabili, ma semplicemente continui e costruiti a partire dall'unione di un numero crescente di segmenti, che da un lato pone una grossa limitazione per quanto riguarda l'interpretazione matematica, ma dall'altro ci chiarisce le idee sulla natura dei "moti", se così possiamo chiamarli, che una particella segue in meccanica quantistica: una particella segue contemporaneamente una serie di traiettorie che uniscono due punti in cui avviene una misura, ma siccome non esiste un modo per determinare con precisione una traiettoria, la particella sarà portata a spostarsi in posizioni la cui probabilità è dettata dalle leggi della meccanica quantistica. Questo tipo di interpretazione mostra una sorprendente vicinanza con il moto browniano, ma non si tratta di una coincidenza poiché di fatto il moto browniano condivide con il path integral una serie di proprietà di grande interesse.

Oltretutto, lo studio del moto browniano permise l'applicazione di una serie di concetti matematici che permisero di dare una solida base formale al fenomeno; data quindi la forte vicinanza con il path integral, questi formalismi furono prontamente trasposti nella teoria matematica del path integral. Per un approfondimento, si consulti [8] e [9].

Alla luce dei risultati precedenti, Feynman propose di riformulare l'intera meccanica quantistica non relativistica, utilizzando tre postulati fondamentali e dimostrando che da questi può essere riottenuta l'intera teoria nella sua forma tradizionale.

I postulati che introdusse sono motivati da poche semplici intuizioni basate sia su fatti sperimentali che sulle considerazioni introdotte da Dirac e il loro sviluppo mostrato sopra; questi mirano a definire precisamente la fenomenologia quantistica a partire dalle tecniche di calcolo conseguenti dai principi predisposti. Feynman osservò che [8]

The concept of probability is not altered in quantum mechanics. When we say the probability of a certain outcome of an experiment is  $p$ , we mean the conventional thing, i.e., that if the experiment is repeated many times, one expects that the fraction of those which give the outcome in question is roughly  $p$ . [...] What is changed, and changed radically, is the method of calculating probabilities. The effect of this change is greatest when dealing with objects of atomic dimension.

Vediamo ad esempio un esperimento mentale dove vengono svolte tre misure successive nel tempo delle tre grandezze  $a$ ,  $b$  e  $c$  con relativi osservabili  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  che assumiamo essere completi, ovvero che ciascuna misura  $a$ ,  $b$ ,  $c$  specifica separatamente e univocamente lo stato quantomeccanico del sistema, il che equivale ad affermare la nondegenerazione dello spettro di ciascun operatore. Definiamo quindi  $P(b|a)$  come la probabilità che, se la misura di  $\hat{A}$  ha restituito il risultato  $a$  allora la misura di  $\hat{B}$  darà il risultato  $b$ . Assumendo che tutti gli eventi tra la misura di  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  siano indipendenti da tutti gli

eventi che avvengono tra la misura di  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , è valida la regola della probabilità classica

$$P(c|a) = \sum_b P(c|b)P(b|a) \quad (1.2.32)$$

dove la sommatoria è eseguita su tutto lo spettro di  $\hat{B}$ , e l'idea alla base assume che il sistema, per passare da un valore  $a$  a un valore  $c$  deve per forza passare in uno degli stati che è specificato dal valore  $b$ .

Possiamo affermare che ciò sia vero in meccanica classica, ma in meccanica quantistica non è così, in quanto la determinazione di un osservabile in un certo valore  $b$  non è determinata fino a quando avviene la misura, e non possiamo quindi dire che il processo che prevede le sole misure di  $\hat{C}$  e  $\hat{A}$  sia equivalente al processo di tutte e tre le misure. Come esempio di questa deviazione della meccanica quantistica, prendiamo l'esperimento della doppia fenditura con un emettitore di fotoni, dove la figura di interferenza sulla lastra fotografica (e quindi la distribuzione di probabilità) con entrambe le fenditure aperte non è la stessa figura che si otterrebbe sommando le due distribuzioni che si osserverebbero chiudendo una fenditura alla volta; lo sarebbe piuttosto ponendo un rivelatore che sia in grado di determinare per ogni fotone in quale fenditura passa, poiché in tal caso è del tutto lecito affermare che necessariamente ogni fotone deve passare in una delle due fenditure.

La meccanica quantistica, piuttosto, obbedisce a una regola diversa, che non coinvolge le probabilità, ma le ampiezze di probabilità, ovvero le grandezze  $\varphi(b|a)$  tali per cui  $|\varphi(b|a)|^2 = P(b|a)$ .

$$\varphi(c|a) = \sum_b \varphi(c|b)\varphi(b|a) \quad (1.2.33)$$

che contraddice quanto affermato da Eq.(1.2.32), ma è esattamente in accordo con le regole della meccanica quantistica; di fatto la costruzione di un'ampiezza di probabilità avviene tipicamente tramite un prodotto interno

$$\varphi(b|a) = \langle b|a \rangle$$

per cui Eq.(1.2.33) discende naturalmente come relazione di completezza per  $|b\rangle$ .

Nel suo libro scritto in collaborazione con Hibbs [8], Feynman discute diffusamente le implicazioni di Eq.(1.2.33), giustificandola utilizzando esattamente la fenomenologia conosciuta sulla meccanica quantistica; l'esperimento della doppia fenditura è di grande interesse per la descrizione della natura probabilistica della meccanica quantistica, rappresentando a tutti gli effetti un modello per la discussione di Feynman, il quale asserisce, nello stesso libro che:

The amplitude for an event is the sum of the amplitudes for the various alternative ways that the event can occur.

ovverosia, che per ottenere l'ampiezza di probabilità sullo schermo finale, è necessario conoscere l'ampiezza di probabilità nel caso in cui la particella passi nell'una o nell'altra fenditura.

Più in generale, se avessimo dei rivelatori che sono in grado di osservare il passaggio solo di alcuni fotoni nella fenditura, allora tutti i fotoni rilevati daranno una distribuzione di

probabilità sulla lastra fotografica ottenibile sommando le distribuzioni di probabilità che si hanno per il passaggio in fenditure distinte, ovvero dato da Eq.(1.2.32), mentre i fotoni non rilevati seguiranno una distribuzione a bande tipica di due fenditure che interferiscono, ovvero data dalla Eq.(1.2.33).

Per un apparato sperimentale qualsiasi che misuri  $\hat{A}$  e  $\hat{C}$ , se nessuna misura viene svolta su  $\hat{B}$ , allora è corretta la Eq.(1.2.33), mentre, se viene impostato un apparato di misura anche per  $\hat{B}$ , ammettendo pure che non avvenga alcuna lettura dei suoi valori misurati, rimane valida la Eq.(1.2.32), in virtù della perturbazione che l'apparato sperimentale svolge sul sistema.

Un'idea del genere pose, secondo l'opinione di Feynman, la base di un forte realismo della teoria quantistica, in quanto, pur non potendo ritenere valida la Eq.(1.2.32) se non in casi particolari, i possibili percorsi che una particella può seguire interferiscono tra di loro e contribuiscono nella probabilità finale tramite le loro ampiezze, come se il sistema si trovasse in tutti gli stati intermedi allo stesso tempo; secondo questa idea, nell'esperimento della doppia fenditura la particella passa in entrambe le fenditure le quali interferiscono l'una con l'altra.

Si tratta comunque di interpretazioni che influiscono poco sull'apparato fenomenologico della teoria, in quanto, pur trovandosi in contrasto con l'interpretazione di Copenaghen (la quale affermerebbe che i fotoni passano nelle fenditure solo se questo passaggio viene osservato), le equazioni fondamentali che descrivono la teoria conseguente da queste considerazioni sono equivalenti all'equazione di Schrödinger, che, come si mostrerà, può essere derivata dalla formula per il path integral.

L'importanza di questa idea di probabilità risulta dal fatto che è fondamentale per la formulazione dei postulati di Feynman, siccome, immaginando di voler trovare l'ampiezza di probabilità per il processo di transizione di una particella dalla posizione  $q_a$  al tempo  $t_a$  alla posizione  $q_b$  al tempo  $t_b$ ,  $\varphi(b|a)$ , è necessario sommare tutte le ampiezze di transizione per ciascun percorso possibile che unisca i due eventi (utilizziamo il termine 'evento' per indicare la coppia  $(t, q)$ , il quale tornerà utile nel contesto relativistico).

Possiamo arrivare a tale conclusione anche immaginando un apparato sperimentale analogo a quello pensato per l'esperimento della doppia fenditura, dove tra l'emettitore e la lastra fotografica sono frapposti un gran numero di schermi forati; secondo quanto visto, ciascun fotone deve passare per una serie di fenditure, che ne determinano univocamente il percorso, per cui la sommatoria di Eq.(1.2.33) va estesa a tutte le combinazioni possibili di fenditure.

Risulta naturalmente che, aumentando all'infinito il numero di schermi e il numero di fenditure per schermo, in modo tale che questo sia sostanzialmente intangibile, riotteniamo l'ampiezza di probabilità per il semplice moto nello spazio, dove la sommatoria su tutte le possibili combinazioni di fenditure è da intendersi come la sommatoria su tutti i possibili percorsi nello spazio che riuniscono i due eventi, esattamente come avevamo concluso in precedenza.

La discussione di questi punti ci aiuta a comprendere quindi i tre postulati introdotti da Feynman:

- 1- La probabilità  $P$  di un processo è data dal modulo quadrato di un numero  $\varphi$ , detto ampiezza di probabilità

- 2- L'ampiezza di probabilità per un processo è data sommando tutti i contributi relativi a ciascun percorso possibile nello spazio delle configurazioni
- 3- Il contributo per ciascun percorso è proporzionale a  $e^{iS/\hbar}$ , dove  $S$  è l'azione classica calcolata su tale percorso

Questi enunciati così introdotti ricoprono una certa utilità anche perché permettono il calcolo di valori di aspettazione ed elementi di matrice, ma il risultato più grande, fondamentale per il programma scientifico di Feynman, fu riottenere la meccanica quantistica di Schrödinger, Born, Heisenberg e Dirac a partire dai suoi postulati.

Feynman dimostrò che il path integral era tanto fondamentale quanto l'equazione di Schrödinger.

Prima di concludere il presente paragrafo, vediamo una breve discussione dei postulati di Feynman: il postulato 1 è equivalente al postulato di Born sulla distribuzione di probabilità nello spazio delle configurazioni di una particella, per cui era naturale la sua introduzione; il postulato 2 non è nient'altro che una riproposizione di quanto mostrato in precedenza sui concetti probabilistici; il postulato 3 è la ricetta fondamentale per il calcolo del path integral, e possiamo capire come il contributo di Dirac, tramite la Eq.(1.1.8), abbia dato l'indizio necessario a Feynman per la sua costruzione.

Il percorso logico seguito da Feynman è quindi inverso a quello che convenzionalmente viene proposto nella didattica (ovvero quello riportato qui sopra): utilizzando i tre postulati, si può facilmente riottenere la Eq.(1.2.29) e di conseguenza tutta la meccanica quantistica. Senza il postulato 3, o più precisamente una forma precisa per l'ampiezza di transizione per un percorso, non sarebbe stata possibile la costruzione del path integral, se non a posteriori partendo da altre teorie.

### 1.3 Motivazioni e prospettive

Il significato del path integral, pur apparendo in parte oscurato dalla mole di strumenti introdotti per definirlo e renderlo di più facile gestione, non rappresenta nient'altro che un approccio alternativo e più generale alla propagazione. Di fatto l'introduzione del path integral è avvenuta tramite l'operatore  $\hat{U}$  che si ottiene direttamente dall'hamiltoniano del sistema, ma, seguendo il programma di Feynman per una definizione avulsa dal contesto hamiltoniano, le sue applicazioni prevedono anche sistemi privi di una formulazione hamiltoniana.

Mostriamo ora come possiamo riottenere la meccanica quantistica nella rappresentazione di Schrödinger tramite l'approccio path integral. Prendendo delle coordinate, che per semplicità assumiamo cartesiane,  $q$ , siamo a conoscenza della relazione fondamentale per la funzione d'onda

$$\psi(q) = \langle q | \psi \rangle$$

e assumeremo inoltre che il sistema classico corrispondente sia descritto da una lagrangiana  $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)$ , siccome rappresenta l'unico caso visto fino ad ora. Introducendo ora una dipendenza dal tempo per  $\psi(q, t) = \langle q_t | \psi \rangle$  data dagli autoket dell'operatore  $\hat{Q}_t$

(ci troviamo nello schema di Heisenberg), possiamo scrivere direttamente

$$\psi(q'', t + \eta\delta t) = \langle q''_{t+\eta\delta t} | \psi \rangle = \int \langle q''_{t+\eta\delta t} | q'_t \rangle dq'_t \langle q'_t | \psi \rangle \quad (1.3.1)$$

La presenza di  $\eta$  è necessaria per poter distinguere tra i vari ordini  $O(\eta^k)$  coinvolti nei calcoli che seguiranno e si può pensare come valore tendente a 0; sappiamo infatti che deve valere un'uguaglianza per ciascun ordine  $O(\eta^k)$  tra lato destro e lato sinistro, in quanto si stanno svolgendo differenti sviluppi in  $\eta$  che devono concordare in ciascun termine.

Ad ogni modo la Eq.(1.3.1) è valida per un  $\delta t$  qualsiasi, dove all'interno dell'integrale va sostituita la forma calcolata tramite path integral dell'ampiezza di transizione.

Vediamo dalle Eqq.(1.1.5),(1.2.31) e dalla forma di  $\dot{q}_k$ , che la Eq.(1.3.1) verrà riscritta, utilizzando le diciture  $y = q''_{t+\eta\delta t}$  e  $x = q'_t$ , come

$$\psi(y, t + \eta\delta t) = \left( \frac{m}{2\pi\hbar i\eta\delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \int dx \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m}{2} \frac{(y-x)^2}{\eta\delta t} - \eta\delta t V(y) + O(\eta^{3/2}) \right) \right] \psi(x, t) \quad (1.3.2)$$

dove il potenziale è stato valutato in  $y$  piuttosto che in  $x$ , siccome questo comporta delle correzioni sulla funzione all'interno dell'esponenziale nell'ordine di ordine  $O(\eta^{3/2})$ , ovvero trascurabili; ciò può essere visto facilmente osservando che nell'Eq.(1.3.2), si presenta un integrale gaussiano dove vengono soppresse le deviazioni di  $x$  da  $y$  al di sopra dell'ordine  $O(\eta^{1/2})$ .

Sostituendo  $\xi = \frac{x-y}{\sqrt{\eta}}$ , otteniamo

$$\psi(y, t + \eta\delta t) = \left( \frac{m}{2\pi\hbar i\delta t} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-i\eta\delta t V(y)/\hbar} \int d\xi \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \frac{m}{2} \frac{\xi^2}{\delta t} + O(\eta^{3/2}) \right) \right] \psi(\sqrt{\eta}\xi + y, t)$$

Procedendo ora con lo sviluppo in ordini di  $\eta$ , otteniamo

$$\exp \left( -\frac{i}{\hbar} \eta\delta t V(y) \right) = 1 - \frac{i}{\hbar} \eta\delta t V(y) + O(\eta^2) \quad (1.3.3)$$

e

$$\psi(\sqrt{\eta}\xi + y, t) = \psi(y, t) + \sqrt{\eta}\xi \cdot \nabla_y \psi(y, t) + \frac{\eta}{2} (\xi \cdot \nabla_y) (\xi \cdot \nabla_y) \psi(y, t) + O(\eta^{3/2}) \quad (1.3.4)$$

dove il simbolo  $\nabla_y$  indica il gradiente rispetto ad  $y$  e quindi si intende con  $\xi \cdot \nabla_y$  la derivata direzionale lungo la direzione di  $\xi$ , avendo reintrodotta per chiarezza il simbolo  $\cdot$  per l'ordinario prodotto scalare euclideo.

Grazie alle proprietà degli integrali gaussiani (si veda Appendice A), possiamo quindi calcolare esplicitamente il risultato della Eq.(1.3.2) notando che nel termine  $O(\eta)$  in (1.3.4) sopravvivono solamente i contributi dove compaiono delle componenti di  $\xi$  al quadrato, poiché quelli con prodotti di componenti diverse risultano nulli.

Abbiamo quindi

$$\psi(y, t + \eta\delta t) = \psi(y, t) + \frac{i\eta\delta t}{\hbar} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_y^2 \psi(y, t) - V(y) \psi(y, t) \right) + O(\eta^{3/2}) \quad (1.3.5)$$

Facendo ora lo sviluppo di

$$\psi(y, t + \eta\delta t) = \psi(y, t) + \eta\delta t \frac{\partial\psi}{\partial t}(y, t) + O(\eta^2) \quad (1.3.6)$$

e confrontando i due lati dell'Eq.(1.3.5), otteniamo l'uguaglianza per gli ordini  $O(\eta)$

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}(y, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_y^2 \psi(y, t) + V(y)\psi(y, t) \quad (1.3.7)$$

ovvero l'equazione di Schrödinger nella rappresentazione di Schrödinger.

Notiamo che per dimostrare questo risultato si è fatto riferimento solamente a risultati che possono essere visti come discendenti direttamente dai postulati di Feynman, in modo tale da mostrare la piena equivalenza della sua formulazione della dinamica con quella di Schrödinger, ma si sarebbe potuto ottenere lo stesso risultato nello schema di Schrödinger, considerando l'uguaglianza  $\psi(q, t + \eta\delta t) = \langle q | \hat{U}(t + \eta\delta t, t) | \psi(t) \rangle$ ; da ciò si può riutilizzare il risultato (1.2.29), oppure, seguendo un processo del tutto analogo alla derivazione del path integral, avremmo riottenuto la Eq.(1.3.2) per cui capiamo come l'intera derivazione del path integral non faccia altro che ripercorrere la propagazione di una quantità nello tempo e nello spazio, qualsiasi sia il significato fisico di tale quantità.

L'approccio lagrangiano alla meccanica quantistica quindi presenta i medesimi risultati di quello hamiltoniano, ma non ha bisogno di una quantizzazione dell'hamiltoniana classica che avviene generalmente per schemi di quantizzazione imposti per convenzione piuttosto che effettive motivazioni fisiche; in questo senso le ambiguità dell'approccio hamiltoniano vengono eliminate, ma se ne presenteranno nuove di natura più sottile.

La presentazione degli argomenti fin qui mostrata è in realtà il primo passo nello studio dell'integrazione funzionale, siccome le applicazioni non si esauriscono nella meccanica quantistica non relativistica, ma vanno a toccare una serie di ambiti, dalla teoria quantistica dei campi, alla meccanica statistica, fino alla teoria della misura.

La meccanica quantistica non relativistica rappresenta semplicemente il tassello fondamentale per poter mostrare il potenziale del path integral, il quale ha ricevuto la sua popolarizzazione tramite il largo impiego in elettrodinamica quantistica e teorie affini, siccome, secondo il programma di idee previsto da Dirac, la dinamica di un sistema è riconducibile alla sua formulazione lagrangiana, che si tratti di campi o particelle.

I primi lavori di Feynman, ([4], [5], [6], [7]) si occuparono nello specifico delle applicazioni nell'elettrodinamica quantistica del metodo dell'integrazione funzionale, ma dovevano anche risolvere problematiche circa una teoria sull'elettrodinamica classica proposta da Feynman e Wheeler ([11]) secondo cui nelle soluzioni delle equazioni di Maxwell, oltre ai potenziali ritardati di Wiechert e Lienard, rientrano anche delle componenti avanzate, ovvero dipendenti da configurazioni future dell'universo; oltretutto Feynman volle occuparsi di un approccio lagrangiano alla meccanica quantistica poiché permette una trattazione più generale per quei sistemi che non possiedono un corrispettivo hamiltoniano. A questo aggiungiamo tutte le considerazioni fatte in apertura sul confronto Hamilton-Lagrange.

Ad ogni modo, le esposizioni precedenti sono solamente un accenno di quello che davvero significa il metodo del path integral e sono mirate ad evidenziarne la completa coerenza con la teoria quantistica che normalmente viene studiata, e sarà compito delle prossime pagine presentare certi aspetti di questo argomento che meglio delineano



argomenti di largo interesse, in modo da mostrare anche come si possano estendere i metodi proposti, data l'estrema versatilità che un concetto matematico complesso come l'integrazione funzionale porta.



## Capitolo 2

# Path integral in teoria dei campi

Si tratta di un problema annoso quello della completa messa in coerenza della meccanica quantistica con la teoria relativistica generale.

Ciò non significa che non è possibile trattare fenomeni che congiungano aspetti quantistici con aspetti gravitazionali, siccome di fatto una grande parte della teoria quantistica si occupa di fenomeni su uno spaziotempo curvo, ma si tratta solamente di una teoria che preferisce dividere in pezzi gli elementi in gioco, piuttosto che trattare tutto sotto con un unico metodo: un campo si muove su uno spaziotempo fissato che eventualmente viene perturbato debolmente dal campo stesso.

Ammesso che esista questo tassello fondamentale che è in grado di porre la gravitazione e la teoria quantistica come elementi di una teoria più ampia, di certo non siamo ancora riusciti ad arrivarvi se non tramite teorie la cui verifica deve ancora avvenire in modo completamente decisivo.

I pregiudizi estetici che animano la ricerca della fisica teorica moderna non sono ancora stati soddisfatti da quanto proposto fino ad ora.

La problematica di una teoria quantistica della gravitazione è in realtà parte di una questione ancor più ampia, siccome l'introduzione della relatività generale ha posto la base per una trattazione più completa dei problemi, che prevede la produzione di teorie covarianti in principio da cui possiamo avere un'estensione a ogni sistema di riferimento dello spaziotempo. La covarianza secondo le trasformazioni di Lorentz è quanto di più si è riusciti ad ottenere nel modello standard, siccome non si è ancora stati in grado di incorporare una dinamica dei campi non perturbativa che contribuisca alla determinazione della geometria dello spaziotempo. Un buon principio guida comunque può essere ritrovato nel principio di equivalenza, che impone una geometria localmente minkowskiana per qualsiasi sistema di riferimento in caduta libera.

La determinazione di teorie per la gravità quantistica rappresenta un problema estremamente complesso che non può di certo essere discusso in questa sede, per cui vogliamo piuttosto capire come il path integral può essere introdotto come elemento chiarificatore per il ruolo di simmetrie (e quindi la covarianza lato sensu) nella descrizione della fisica, utilizzando un approccio di pretese più modeste, ovvero fondato sulla relatività speciale.

In questa direzione, la teoria quantistica dei campi rappresenta uno dei maggiori successi della fisica moderna e la sua trattazione permetterà di portare alla luce risultati di grande interesse.

## 2.1 Teoria dei campi classica e quantistica

L'intera formulazione della meccanica quantistica, come ricordato in precedenza, muove dalla teoria ondulatoria e ha costruito la sua intera interpretazione della fenomenologia su pochi semplici principi che sembrano, almeno a livello non relativistico, funzionare formidabilmente.

Risulterebbe naturale, alla luce dei successi della meccanica quantistica e le idee riguardanti la funzione d'onda che costituiscono le fondamenta della teoria, chiedersi se la natura della funzione d'onda sia in effetti quella di un campo, come quello elettromagnetico; d'altronde, superficialmente, sembrerebbe del tutto analoga la dinamica della funzione d'onda con quella di onde elettromagnetiche o onde in generale, che sappiamo bene essere conseguenze di teorie di campo.

Si vuole mostrare, in linea con i ragionamenti seguiti da Schrödinger [1], come la teoria quantistica non relativistica sia in effetti una teoria di campo, ma prima di ciò è necessaria una breve introduzione sul significato fisico e la trattazione matematica dei campi, pur non esaminando dettagliatamente gli elementi che sarebbero da studiare più approfonditamente nelle apposite sedi a cui si rimanda nella bibliografia [12] e che costituiscono una teoria di enorme interesse fisico a sé stante.

Il salto da teoria di un singolo corpo a teoria di campo classica si snoda su quella che viene indicata come *ipotesi del continuo* e può essere sommariamente descritta nel modo seguente: considerando corpi costituiti da un grande numero di particelle interagenti, come ad esempio un solido cristallino o una corda elastica, è possibile costruire una teoria che ignora la struttura microscopica, la quale necessariamente deve fare riferimento a ciascuna particella singola, ma che tratta l'oggetto come un continuo, ammesso che le scale che si trattano nel problema siano abbastanza grandi; un sistema che possiede un numero praticamente infinito di punti materiali è così descritto da una serie di funzioni continue chiamate *campi*.

Di conseguenza, un insieme abbastanza grande di particelle può essere considerato come un campo. Viceversa, sappiamo dalla meccanica quantistica che la funzione d'onda di una particella, che, per quanto ne sappiamo non rappresenta il limite continuo di una teoria di infinite particelle, può essere interpretata come una particella nel caso presentasse una regione fortemente localizzata nello spazio ed è un concetto del tutto generale il fatto che una perturbazione localizzata su un campo può essere interpretata come una particella.

Esiste quindi una relazione stretta tra particelle e campi, seppur, per quanto visto fino ad ora, si tratta solo di una relazione puramente basata su interpretazioni. Sarà necessario in seguito formalizzare questo concetto.

Un campo è rappresentato da una o più quantità  $\psi$  (che per ora supponiamo reali) su una varietà (il nostro spaziotempo  $n$ -dimensionale) dipendenti da un certo numero di parametri; l'esempio più comune è dato dalle coordinate di un dato punto nello spaziotempo

$$\psi(x^\mu)$$

dove quindi conosciamo il valore di  $\psi$  punto per punto.

Un altro metodo di rappresentazione è dato dai coefficienti  $c_i$  nell'equazione di rappre-

sentazione spettrale

$$\psi(x^\mu) = \sum_i c_i \phi_i(x^\mu)$$

dove  $\phi_i$  formano una base completa di funzioni. Una conoscenza di tutti i coefficienti  $c_i$ , determinata la base  $\phi_i$ , fornisce una conoscenza  $\psi$ .

La rappresentazione con serie di Fourier è un caso particolare di rappresentazione spettrale. Per ora sarà più conveniente restringersi ad una rappresentazione del campo come funzione dipendente dalle coordinate.

A partire da questi semplici elementi, è necessario costruire una teoria che assicuri la covarianza almeno a livello della relatività speciale (per la relatività generale si ottengono risultati simili) e per farlo bisogna quindi interrogarsi sulle caratteristiche e le condizioni che bisogna imporre sulle quantità che descrivono un campo per ottenere una teoria fisica coerente.

La teoria classica dei campi non rivoluziona la struttura formale della meccanica classica, ma anzi ne mantiene gli elementi fondamentali, espandendo dove necessario, siccome non si ha più a che fare con semplici grandezze  $q^\alpha, p_\alpha$ , ma con funzioni (o distribuzioni) delle coordinate spaziotemporali. Le variabili che rappresentano il campo quindi dovranno seguire delle equazioni del moto concettualmente identiche a quelle impiegate nella meccanica ordinaria, ma la dinamica in meccanica classica è interamente data dall'evoluzione temporale delle variabili  $q^\alpha(t), p_\alpha(t)$ , mentre in teoria dei campi è necessario definire con più cura l'entità dell'evoluzione di un campo e chiaramente non si può più parlare di traiettorie.

In primo luogo è necessario costruire una teoria che non faccia riferimento esplicito al tempo  $t$  in quanto questo porterebbe a selezionare un sistema di riferimento specifico piuttosto che un altro, in secondo luogo un campo è definito a partire da  $n - 1$  coordinate spaziali e 1 temporale, per cui è bene ripensare attentamente al ruolo del tempo nell'evoluzione di un campo.

Immaginando di avere un campo  $\psi(x^\mu) = \psi(t, \vec{x})$  definito nello spaziotempo, trovate due ipersuperfici di tipo spazio<sup>1</sup> non limitate  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$ , potremmo chiederci quale evoluzione segue il campo conoscendo che valori prende su entrambe le ipersuperfici trovate; in questo modo si ottiene una generalizzazione del concetto di evoluzione tra due tempi distinti  $t_a$  e  $t_b$  siccome è sempre possibile selezionare  $\sigma_a$  come l'intero spazio dato al tempo  $t_a$  e  $\sigma_b$  come l'intero spazio al tempo  $t_b$ . Potremmo chiedere con più generalità che siano superfici di Cauchy in uno spaziotempo globalmente iperbolico<sup>2</sup> siccome

<sup>1</sup>Un'ipersuperficie è di tipo spazio se, data una metrica  $g_{\mu\nu}$  di segnatura  $(+, -, -, \dots, -)$ , l'intervallo quadrato invariante  $\Delta s^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$  tra due punti qualsiasi dell'ipersuperficie, ha segno negativo. Analogamente, si può dire che un'ipersuperficie è di tipo spazio se nessun punto di essa possiede un cono luce che interseca l'ipersuperficie stessa (escludendo dall'intersezione il punto stesso).

<sup>2</sup>La definizione di iperbolicità globale risulta alquanto tecnica (Cfr.[13]) e indica la struttura causale dello spaziotempo stesso: una varietà  $\mathcal{M}$  è globalmente iperbolica se possiede una *superficie di Cauchy*  $\Sigma$ , ovvero un insieme chiuso e acronale tale per cui il suo dominio di dipendenza (ovvero l'insieme di tutti i punti per cui la determinazione delle variabili fisiche impone una conoscenza di tutte le variabili fisiche su  $\Sigma$ ) sia uguale a  $\mathcal{M}$ . Un insieme è acronale se nessuna curva di tipo tempo lo interseca più di una volta, e può essere pensata come una proprietà che generalizza il concetto di ipersuperficie di tipo spazio. In sostanza, l'iperbolicità globale impone l'esistenza di almeno una ipersuperficie per cui sia ben posto il problema di Cauchy del campo che si sta studiando.

questa definizione si adatta al contesto general relativistico, ma in uno spaziotempo minkowskiano è sufficiente richiedere ipersuperfici di tipo spazio non limitate.

L'evoluzione temporale così pensata non fa riferimento alcuno a una particolare scelta di coordinate e permette di formulare la dinamica in modo totalmente covariante. Vediamo infatti che per gran parte dei sistemi di forte rilevanza in teoria dei campi si ripresenta il funzionale d'azione dipendente da  $\psi$ ,  $\partial_\mu\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}$  e dalle coordinate  $x^\nu$

$$I[\psi] = \frac{1}{c} \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} d^n x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, x^\nu) \quad (2.1.1)$$

analogo al funzionale d'azione classico, dove  $d^n x = \sqrt{g}dx^0dx^1\dots dx^n$  è l'elemento infinitesimo invariante di volume dello spaziotempo ( $g$  è il valore assoluto del determinante della metrica  $g_{\mu\nu}$ ) e  $\mathcal{L}$  è l'equivalente della lagrangiana per la teoria dei campi, ovvero la densità lagrangiana, la quale ha unità di misura di un'energia su un volume spaziale (anche se le unità di misura non sono di grande importanza, considerato che spesso in teoria dei campi si preferisce utilizzare unità di misura naturali). In questo caso l'integrazione avviene su un volume dello spaziotempo che intercala le due ipersuperfici. Un'assunzione dell'esistenza di una densità lagrangiana che sia in grado di descrivere la dinamica del campo apre anche le porte per una formulazione tramite il path integral della controparte quantistica della teoria, e si vedrà in che modo questo sarà realizzato. Oltre a questo, costruendo una densità lagrangiana invariante per trasformazioni di sistema di riferimento, la teoria che ne segue deve essere necessariamente covariante, come si vedrà in breve; per questo  $\mathcal{L}$  deve essere uno scalare.

La presenza di un funzionale d'azione è motivata dalla possibilità di introdurre le equazioni di Eulero-Lagrange con un principio di azione stazionaria; vediamo infatti che variando la funzione continua  $\psi$  di  $\epsilon\delta\psi^3$  si ottiene una variazione

$$\delta I[\psi] = I[\psi + \epsilon\delta\psi] - I[\psi] = \frac{\epsilon}{c} \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} d^n x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\mu}} \delta(\psi_{,\mu}) \right) + O(\epsilon^2) \quad (2.1.2)$$

(dove si è usato  $\partial_\mu\psi = \psi_{,\mu}$ ) che, con un'integrazione per parti, diviene

$$\delta I[\psi] = \frac{\epsilon}{c} \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} d^n x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\mu}} \right) \right] \delta\psi + \frac{\epsilon}{c} \left( \int_{\sigma_b} - \int_{\sigma_a} \right) d^{n-1}x_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\mu}} \delta\psi \right) + O(\epsilon^2) \quad (2.1.3)$$

dove  $d^{n-1}x^\mu$  è l'elemento di volume infinitesimo delle ipersuperfici  $\sigma$  e il secondo integrale è calcolato su  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$ . Siccome i due integrali nell'Eq.(2.1.3) sono calcolati l'uno su un "volume" e l'altro sull'"area" che lo delimita l'uguaglianza

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} [\psi + \epsilon\delta\psi] \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (2.1.4)$$

impone che i due integrali si annullino indipendentemente, per cui otteniamo l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,\mu}} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0 \quad (2.1.5)$$

<sup>3</sup>Da notare che la variazione del campo  $\delta\psi$  è una variazione nella forma funzionale del campo  $\psi$  valutato in un punto fissato.

ovvero l'equazione del moto covariante necessaria per l'evoluzione del campo, mentre l'annullarsi del secondo integrale fornisce

$$\delta\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \Big|_{\sigma_a} = \delta\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \Big|_{\sigma_b} \quad (2.1.6)$$

che funge da equazione di conservazione sulle due ipersuperfici. Confrontando con il caso familiare della meccanica classica, vediamo che possiamo ottenere delle definizioni analoghe ai momenti della meccanica

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{,\mu}} \quad (2.1.7)$$

che è una generalizzazione covariante del momento, in questo caso relativo ad un campo; in realtà, si dimostra che solamente  $\Pi = \Pi_0$  (dove  $x^0$  è scelto convenzionalmente come coordinata temporale) è il momento coniugato al campo  $\psi$ .

Le interpretazioni fisiche risultano più complesse nel caso di un campo, sia per quanto riguarda la densità lagrangiana che non ammette più una scrittura del tipo  $T - V$ , sia per altri elementi coinvolti, come il campo stesso; questo comunque non deve spaventare in quanto si tratta di un fenomeno contingente più che di una vera e propria caratteristica della teoria dei campi. Non è la teoria dei campi che risulta difficile da interpretare, ma è piuttosto l'ordinaria meccanica classica che, data la vicinanza con l'esperienza di tutti i giorni, si è prestata ad essere interpretata con enorme facilità; d'altronde la sua intera costruzione è avvenuta per mano di concetti provenienti dall'esperienza.

L'interesse dell'introduzione della densità lagrangiana è più dato dalla sua capacità di spiegare la dinamica di un campo più che di rappresentare un elemento di chiarezza sulla fisica coinvolta; la chiarezza della fisica viene ottenuta, invece, dai risultati sperimentali.

Fino ad ora si è fatto riferimento solamente ad un campo singolo, ma una densità lagrangiana può contenere più campi, come ad esempio le varie componenti del campo elettromagnetico, oppure campi distinti che interagiscono tra loro; in tal caso si ottiene un'Eq.(2.1.5) per ogni campo  $\psi_a$  coinvolto.

Si è inoltre fatto uso solamente di campi reali, ma può spesso capitare di avere a che fare con campi complessi, ed in tal caso basta semplicemente considerare le componenti di un campo  $\psi(x^\mu) = \phi_R(x^\mu) + i\phi_I(x^\mu)$  come campi distinti; nella maggior parte dei casi si preferisce far uso dei campi  $\psi$  e il suo complesso coniugato  $\psi^*$  e trattarli come campi distinti. L'unico accorgimento aggiuntivo da tenere a mente sta nel costruire una densità lagrangiana che generi equazioni del moto coerenti tra loro, considerata la relazione di coniugazione complessa che esiste tra i campi.

Facciamo ora un esempio che può aiutare a comprendere la teoria fino ad ora esposta: ritornando all'assunto di partenza secondo cui la meccanica quantistica non relativistica sia in realtà una teoria di campo, possiamo trovare una densità lagrangiana in termini del campo  $\psi$ , ovvero la funzione d'onda:

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \cdot \vec{\nabla} \psi - V \psi^* \psi + \frac{i\hbar}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (2.1.8)$$

Operando questa scelta per la densità lagrangiana, otteniamo a partire dall'Eq.(2.1.5) calcolata per  $\psi^*$ , l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \quad (2.1.9)$$

Ripetendo il calcolo con  $\psi$ , si ottiene semplicemente la complessa coniugata dell'equazione precedente, dimostrando che la densità lagrangiana così scelta è ben posta per il problema in esame.

Il fatto che l'intera meccanica quantistica possa così essere espressa come teoria di campo rappresenta un elemento di grande interesse, siccome permette di trattare in un formalismo estremamente ampio, ereditato dalla teoria dei campi, l'intero corpo di fenomeni della meccanica quantistica. Questo tipo di approccio non è del tutto vantaggioso in molti problemi a cui meglio si presta l'ordinaria teoria quantistica, ma permette di dare un nuovo punto di vista sull'evoluzione temporale della funzione d'onda e permette di capire come, in fin dei conti, la separazione tra teorie di campo quantistiche e meccanica quantistica sia più sottile di quanto si potrebbe pensare.

Questa osservazione non basta a esaurire le questioni che circondano la teoria dei campi, siccome nel momento in cui la teoria viene quantizzata, si presentano elementi che allontanano sensibilmente la teoria quantistica dei campi (relativistica per costruzione) dalla normale teoria quantistica non relativistica; l'elemento che differenzia le due teorie sembrerebbe trovarsi negli effetti relativistici e nelle rappresentazioni del gruppo di Poincaré coinvolte.

Si configura in questo modo una fenomenologia che espande i concetti della meccanica quantistica, ma necessariamente deve prendere le distanze anche da interpretazioni statistiche della funzione d'onda<sup>4</sup> che ci hanno guidati nella formulazione del path integral. Ad ogni modo, tali complicazioni non devono preoccuparci allo stato attuale, in quanto la nostra esposizione vuole solamente evidenziare elementi utili per la formulazione corretta di un path integral nella teoria dei campi quantistici. Procediamo quindi con la quantizzazione di un campo classico (Cfr.[14], [15]).

Dati una collezione di campi  $\psi_a$  e i corrispondenti momenti coniugati  $\Pi_i$  che diventano le nuove variabili di interesse fisico, sostituendo  $q$  e  $p$ , la quantizzazione nella forma canonica deve essere definita a partire dalle parentesi di Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  classiche che possono essere definite per la teoria dei campi analogamente come avviene nella meccanica ordinaria<sup>5</sup>. La coniugazione di momento e campo può essere espressa come segue

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \Pi_b(t, \vec{y})\} = \delta_{ab}\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.1.10)$$

Si può anche dimostrare che

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b(t, \vec{y})\} = 0 \quad (2.1.11)$$

<sup>4</sup>Perlomeno per interpretazioni dirette come quella di Born. Sappiamo infatti che esiste un'interpretazione statistica dei campi, la quale può comunque tornare utile in certi contesti.

<sup>5</sup>Si tenga a mente che la definizione delle parentesi di Poisson rappresenta una procedura meno banale di quanto si potrebbe pensare, in quanto si tratta di strumenti matematici che definiscono la dinamica. Esistono comunque delle scelte standard. Nonostante questo, si tratteranno le parentesi di Poisson in questo contesto come un oggetto matematico astratto che rispetta le usuali regole delle parentesi di Poisson, senza però darne una definizione esplicita.

e

$$\{\Pi_a(t, \vec{x}), \Pi_b(t, \vec{y})\} = 0 \quad (2.1.12)$$

Importante notare che si seleziona una parentesi di Poisson per le due funzioni prese nello stesso istante. Questo sembrerebbe violare la covarianza, o perlomeno non la rende manifesta fin da subito, siccome si fa riferimento esplicito al tempo  $t$ . Questo è in realtà un problema diffuso in tutta la teoria quantistica che fa riferimento esplicito all'operatore hamiltoniano  $\hat{H}$ , siccome, dando una rapida occhiata a Eq.(0.0.1), si nota subito come il tempo sia trattato su un piano differente rispetto alle altre coordinate; ciò comunque non significa necessariamente che la teoria non è covariante.

Si può effettivamente dimostrare che tutte le parentesi di Poisson dei campi e dei momenti coniugati possono essere scritte come combinazioni della funzione  $\Delta(x^\mu - y^\mu)$  e delle sue derivate; la funzione  $\Delta$  è definita, nell'ordinario spazio di Minkowski, da:

$$\Delta(x^\mu) = -\frac{i}{16\pi^3} \int \frac{d^3k}{\omega} [\exp i(k_x x + k_y y + k_z z + c\omega t) - \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - c\omega t)]$$

con  $\omega = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \chi^2}$  dove  $\chi$  è una costante caratteristica del campo (ad esempio la massa). Questa funzione ha la peculiarità di essere nulla quando viene preso un punto al di fuori del cono luce con vertice nell'origine; ciò significa che presi due eventi nello spaziotempo per cui l'uno è al di fuori del cono luce dell'altro, qualsiasi campo o momento coniugato preso al primo evento avrà parentesi di Poisson nulla con qualsiasi campo preso al secondo evento, e questo viene motivato fisicamente dal fatto che non può esistere un segnale che viene inviato dall'uno all'altro evento (non può esserci influenza reciproca tra campi o momenti per questi due eventi separati). Questa definizione è covariante e mostra che la teoria è fisicamente ben posta.

L'interesse di queste parentesi di Poisson è presto individuato, identificando  $\psi_a$  e  $\Pi_a$  con degli operatori autoaggiunti della teoria quantistica. Le parentesi di Poisson diventeranno quindi commutatori e l'intera fenomenologia potrà essere ottenuta recuperando il formalismo dell'ordinaria meccanica quantistica non relativistica

$$[\hat{\psi}_i(t, \vec{x}), \hat{\Pi}_i(t, \vec{y})] = i\hbar\delta_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.1.13)$$

Una problematica che deve essere affrontata è però la corretta definizione del concetto di stato, misura, particella e simili, che fanno uso di un intero complesso di strumenti sviluppati nel caso non relativistico dove non è necessario preoccuparsi di elementi quali la velocità di propagazione della luce e diversi sistemi di riferimento.

Oltretutto in teoria quantistica si presentano anche relazioni analoghe alla Eq.(2.1.13) per campi di diverso tipo, ma che coinvolgono anticommutatori invece che commutatori, così da permettere l'aderenza al teorema di spin-statistica al fine di non generare teorie acausali; di fatto bisogna poter trattare con piena generalità oggetti matematici più generali dei tensori che siamo abituati a conoscere in relatività.

L'introduzione degli operatori autoaggiunti di campo e momento deve essere accompagnata dall'introduzione di uno spazio di Hilbert su cui agire il quale, per campi liberi, ovvero in assenza di interazioni, risulta semplice da definire, ma risulta ben più complesso nel caso generale, siccome è necessaria una conoscenza della dinamica del campo; per questo motivo in teoria quantistica dei campi è risultato utile un approccio perturbativo rispetto ai campi liberi.



Oltre a questo, si ripresentano problemi di ordinamento, ma solamente per campi presi nello stesso punto spaziale, come si vede nell'Eq.(2.1.13), e complicazioni di questo tipo sono già presenti nella meccanica quantistica non relativistica. Ovviamente, la formulazione relativistica dei campi deve comprendere i risultati non relativistici come limite e per questo non possiamo aspettarci di modificare troppo radicalmente gli strumenti fondamentali della teoria.

Di passaggio notiamo che agli operatori  $\hat{Q}^\alpha$  introdotti nella teoria non relativistica rimangono anche in teoria dei campi, e rispettano le stesse relazioni di commutazione canoniche; se ad esempio vengono selezionate delle coordinate  $x^\mu$ , in cui è compreso anche il tempo  $t$ , data la simmetria tra tempo e spazio della teoria della relatività, per ciascuno di questi esisterà un operatore associato  $\hat{x}^\mu$  tale che  $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = 0$ , per cui alle configurazioni date da  $\hat{Q}^\alpha$  si aggiungerà un operatore per il tempo  $\hat{T}$ . Siccome il campo  $\hat{\psi}$  è esprimibile come funzione delle coordinate  $x^\mu$ , bisogna avere

$$[\hat{x}^\mu, \hat{\psi}] = 0$$

e

$$\langle x|\hat{\psi}|x'\rangle = \delta(x - x')\psi(x') \quad (2.1.14)$$

Un discorso analogo può essere fatto per i momenti coniugati  $\hat{P}_\alpha$  e l'energia  $\hat{H}$  e in tal caso si ha a che fare con la trasformata di Fourier del campo.

Per capire più chiaramente in cosa consiste la quantizzazione di un campo, trattiamo il caso di un singolo campo scalare reale  $\varphi$  descritto dalla densità lagrangiana (selezionando delle unità di misura per cui  $\hbar = c = 1$ )

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi) \quad (2.1.15)$$

con equazioni del moto date da

$$\partial_\mu\partial^\mu\varphi = \square\varphi = -\frac{dV}{d\varphi}(\varphi) \quad (2.1.16)$$

Nella densità lagrangiana sono identificabili un termine cinetico che dipende quadraticamente dalle derivate del campo e un termine di auto interazione dato dal potenziale  $V(\varphi)$ . Nel caso in cui  $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$ , si ottiene la celebre equazione di Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\varphi = 0 \quad (2.1.17)$$

che descrive l'evoluzione di un campo scalare dotato di massa  $m$ .

Il momento coniugato di  $\varphi$  è dato da

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,0}} = \partial^0\varphi \quad (2.1.18)$$

In generale si può definire, analogamente a come avviene per la densità lagrangiana, la densità hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \Pi \cdot \partial_0\varphi - \mathcal{L} \quad (2.1.19)$$



Risulta anche possibile costruire un'hamiltoniana, ottenibile dall'integrazione

$$H = \int dV \mathcal{H} \quad (2.1.20)$$

dove l'integrazione è estesa su tutto lo spazio, con elemento di volume infinitesimo  $dV$ . Dalle equazioni di Eulero-Lagrange, come avviene nella meccanica classica, si può dimostrare che valgono delle equazioni analoghe alle equazioni di Hamilton.

Per questo specifico caso si ottiene una densità hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[ \Pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 \right] + V(\varphi) \quad (2.1.21)$$

o, selezionando  $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[ \Pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \right] \quad (2.1.22)$$

che non presenta alcuna problematica di ordinamento per gli operatori, ma naturalmente ha una struttura non manifestamente covariante. Eq.(2.1.22) rivela una struttura di oscillatori armonici accoppiati, e, per comprendere al meglio l'interpretazione fisica dei campi e ricondurci alla discussione iniziale dell'ipotesi del continuo, sarà utile pensarli in questi termini. Sia chiaro che il campo è sostanzialmente diverso dal concetto delle particelle che lo 'compongono' e rappresenta un'entità a sé stante.

Mantenendo la scelta specifica di potenziale operata poc'anzi, supponiamo di trovarci su uno spazio unidimensionale e supponiamo che la coordinata  $x$  possa assumere solamente valori che sono multipli interi di una lunghezza  $l$ , che per semplicità assumiamo avere valore unitario. Di conseguenza  $x_n = nl = n$  e  $\varphi_n := \varphi(t_0, x_n)$ ,  $\Pi_n := \Pi(t_0, x_n)$ , con  $t_0$  tempo fissato.

Da ciò, si ottiene una hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \Pi^2 + (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 + m^2\varphi_n^2 \right] \quad (2.1.23)$$

che ricorda molto da vicino l'hamiltoniana di un solido cristallino dove il termine centrale indica l'accoppiamento tra due atomi adiacenti, mentre il termine  $m^2\varphi^2$  indica la forza di richiamo del singolo atomo. Le relazioni di commutazione per i campi corrispondenti divengono invece

$$[\hat{\varphi}_n, \hat{\Pi}_m] = i\delta_{nm} \quad (2.1.24)$$

$$[\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_m] = [\hat{\Pi}_n, \hat{\Pi}_m] = 0 \quad (2.1.25)$$

Secondo quanto conosciuto dalla meccanica classica, è naturale ricercare i modi normali di oscillazione di ciascun atomo. Inoltre, data l'invarianza traslazionale del sistema, possiamo introdurre le trasformate di Fourier degli operatori nella forma

$$\hat{\varphi}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn} \hat{\varphi}(k) \quad \hat{\Pi}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn} \hat{\Pi}(k) \quad (2.1.26)$$

dove  $\hat{\varphi}^\dagger(k) = \hat{\varphi}(-k)$  e  $\hat{\Pi}^\dagger(k) = \hat{\Pi}(-k)$  e supponiamo che le trasformate siano definite sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$ . Le relazioni di commutazione sono equivalenti quindi a:

$$[\hat{\varphi}(k), \hat{\Pi}(-k')] = i\hbar \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k')n} \quad (2.1.27)$$

$$[\hat{\varphi}(k), \hat{\varphi}(k')] = [\hat{\Pi}(k), \hat{\Pi}(k')] = 0 \quad (2.1.28)$$

Si noti che la sommatoria di Eq.(2.1.27) è uguale anche a  $2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k - k' + 2\pi n)$ , che può essere ridotta a  $2\pi\delta(k - k')$  estendendo il dominio di  $\hat{\varphi}$  e di  $\hat{\Pi}$  a tutto l'asse reale e rendendole funzioni periodiche di periodo  $2\pi$ .

Per quanto introdotto fino ad ora, vediamo che l'operatore hamiltoniano ottenuto da Eq.(2.1.23) può essere riscritto nella forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left\{ \hat{\Pi}^\dagger(k) \hat{\Pi}(k) + \hat{\varphi}^\dagger(k) \left[ m^2 + 2(1 - \cos k) \hat{\varphi}(k) \right] \right\} \quad (2.1.29)$$

Proponendo ora le seguenti definizioni

$$\begin{aligned} \omega_k &= \omega_{-k} = \sqrt{m^2 + 2(1 - \cos k)} \\ \hat{a}_k &= \frac{1}{(4\pi\omega_k)^{\frac{1}{2}}} (\omega_k \hat{\varphi}(k) + i\hat{\Pi}(k)) \\ \hat{a}_k^\dagger &= \frac{1}{(4\pi\omega_k)^{\frac{1}{2}}} (\omega_k \hat{\varphi}^\dagger(k) - i\hat{\Pi}^\dagger(k)) \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

si verifica facilmente la condizione

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta(k - k') \quad (2.1.31)$$

Questi operatori rispettano le proprietà algebriche di operatori di creazione e distruzione dell'oscillatore armonico, e possiamo dire che "creano" o "distruggono" un quanto di energia di frequenza  $\omega_k$ . Inserendo tali definizioni nella formula per l'operatore hamiltoniano si ottiene

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dk \omega_k (\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k) \quad (2.1.32)$$

mentre il campo e il momento coniugato possono essere scritti come rappresentazione spettrale

$$\hat{\varphi}_n = \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{1}{(4\pi\omega_k)^{\frac{1}{2}}} (\hat{a}_k e^{ikn} + \hat{a}_k^\dagger e^{-ikn}) \quad (2.1.33)$$

$$\hat{\Pi}_n = -i \int_{-\pi}^{\pi} dk \left( \frac{\omega_k}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a}_k e^{ikn} - \hat{a}_k^\dagger e^{-ikn}) \quad (2.1.34)$$

Per capire in modo più chiaro gli operatori di creazione ( $\hat{a}_k^\dagger$ ) e distruzione ( $\hat{a}_k$ ), si prenda un autostato dell'Hamiltoniana  $|E\rangle$  con autovalore  $E$  per cui si dimostra, tramite le relazioni di commutazione, che

$$\begin{aligned} \hat{H} \hat{a}_k |E\rangle &= \hat{a}_k \hat{H} |E\rangle + [\hat{H}, \hat{a}_k] |E\rangle = \hat{a}_k |E\rangle (E - \omega_k) \\ \hat{H} \hat{a}_k^\dagger |E\rangle &= \hat{a}_k^\dagger \hat{H} |E\rangle + [\hat{H}, \hat{a}_k^\dagger] |E\rangle = \hat{a}_k^\dagger |E\rangle (E + \omega_k) \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

ovvero, anche i ket  $\hat{a}_k \hat{H} |E\rangle$ ,  $\hat{a}_k^\dagger \hat{H} |E\rangle$  sono autostati dell'hamiltoniana, con autovalore  $E \mp \omega_k$ . Possiamo quindi applicare la teoria dell'oscillatore armonico per ogni valore di  $k$ .

I risultati ottenuti permettono un'interpretazione secondo cui ciascun atomo segue una vibrazione che è una sovrapposizione di oscillatori armonici ciascuno di frequenza  $\omega_k$  e ogni modo normale  $k$  possiede un numero intero di quanti di energia  $\hbar\omega_k$ . In questo modo comprendiamo la connessione tra particelle, ovvero atomi che vibrano secondo i modi normali  $k$  e i campi, ovvero le grandezze  $\varphi_n$ .

Si incontra già una complicazione: data la trattazione di ciascun modo normale come oscillatori armonici disaccoppiati, ciascuno avrà uno stato fondamentale di energia  $\frac{\omega_k}{2}$  e sommando su tutti i modi normali, si ottiene un'energia infinita, associata allo stato fondamentale dell'intero campo. Di fatto, indicando con  $|0\rangle$  l'autoket fondamentale di  $\hat{H}$  tale che

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0 \qquad \langle 0 | \hat{a}_k^\dagger = 0 \qquad (2.1.36)$$

per ogni  $k$ , si ottiene l'energia dello stato fondamentale

$$\langle 0 | \hat{H} |0\rangle = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dk \omega_k \langle 0 | \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger |0\rangle = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dk \omega_k \langle 0 | [\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] |0\rangle \qquad (2.1.37)$$

facendo uso di Eq.(2.1.32). Riprendendo Eq.(2.1.31), vediamo come stia venendo calcolato un integrale di  $\delta(0)$ , il che indica una quantità infinita.

Questo non pone una minaccia per la fisica in gioco, se consideriamo che l'energia dello stato fondamentale è sostanzialmente inosservabile: un campo nello stato fondamentale viene interpretato come 'vuoto'<sup>6</sup> siccome non sono presenti quanti di energia.

Oltretutto non interessano le energie assolute, ma solamente gli scambi di energia tra campo e altri elementi in gioco. Di conseguenza possiamo ridefinire l'energia sottraendo alla definizione di  $\hat{H}$  l'energia dello stato fondamentale

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dk \omega_k (\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - \langle 0 | \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |0\rangle) = \int_{-\pi}^{\pi} dk \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \qquad (2.1.38)$$

Il problema di questa scelta sta nel mantenere la Lorentz covarianza e, fortunatamente, ciò avviene.

Si può dimostrare che mandando a 0 la lunghezza caratteristica  $l$ , si ottengono integrazioni di  $k$  su tutto l'asse reale e la frequenza assume la forma

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \qquad (2.1.39)$$

che  $\omega_k$  ha la forma funzionale dell'energia di un corpo di massa  $m$  e modulo della quantità di moto  $k$ ; questo permette un'interpretazione fisica di  $k$  e  $\omega_k$ .

<sup>6</sup>Nel contesto general relativistico la definizione di 'vuoto' diventa ben più complessa, in quanto è necessario fornire una definizione rigorosa che non dipenda dal sistema di riferimento. L'entità della problematica può essere vista in fenomeni come l'effetto Unruh dove un osservatore accelerato registra la presenza di particelle che non sarebbero altrimenti osservate. Si consideri anche che è necessario definire se il concetto fornito di particella è globale, ovvero riferito all'intero campo, o locale, ovvero riferito a un singolo oscillatore di questo.

Vediamo ora come costruire l'intero spazio di Hilbert e per farlo si consideri come ket costituente l'operatore  $\hat{a}_f^\dagger$  definito dalla relazione

$$\hat{a}_f^\dagger|0\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dk f(k)\hat{a}_k^\dagger|0\rangle \quad (2.1.40)$$

che crea un pacchetto d'onda  $\hat{a}_f^\dagger|0\rangle$ . Poiché in uno spazio di Hilbert è importante trattare operatori normalizzabili, bisogna verificare che

$$\langle 0|\hat{a}_f\hat{a}_f^\dagger|0\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dk |f(k)|^2 < \infty \quad (2.1.41)$$

ovvero  $f(k)$  deve essere una funzione quadrato sommabile; si definisce, imponendo questa richiesta, una *distribuzione di operatori* data da Eq.(2.1.40).

Siccome i ket  $\hat{a}_k^\dagger|0\rangle$  hanno norma infinita, l'introduzione della (2.1.40) permette di definire degli stati matematicamente ben definiti (*smearred* con la funzione  $f$ ) che possono essere pensati come pacchetti d'onda di quantità di moto non definita, ma con una certa ampiezza  $\Delta k$  attorno a una quantità di moto media  $k$ ; possiamo interpretarli come stati di una singola particella (siccome sono sovrapposizioni lineari di  $\hat{a}_k^\dagger|0\rangle$ ), ovvero stati ad una particella di quantità di moto  $k$ ). D'altronde, è possibile vedere che

$$\hat{a}_{k'}^\dagger|0\rangle = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \int_{-\pi}^{\pi} dk e^{-\frac{(k-k')^2}{2\sigma^2}} \hat{a}_k^\dagger|0\rangle \quad (2.1.42)$$

ovvero, seppur gli stati di quantità di moto  $k$  definita non siano normalizzabili, possono essere visti come limiti di pacchetti gaussiani, appartenenti alle distribuzioni di operatori.

Per costruire lo spazio di Hilbert necessario per il nostro problema, vediamo che deve essere necessariamente dato dallo spazio generato dai ket

$$|r\rangle = \hat{a}_{f_1}^\dagger \dots \hat{a}_{f_r}^\dagger|0\rangle \quad (2.1.43)$$

Come nell'ordinaria meccanica quantistica dove vengono utilizzati anche stati non normalizzabili (ad esempio gli autostati della quantità di moto su tutto lo spazio) capiamo che non necessariamente dobbiamo escludere gli  $\hat{a}_k^\dagger|0\rangle$ , ma, alla luce dell'Eq.(2.1.42), capiamo che è possibile considerare anche uno spazio più ampio, e la procedura per ottenerlo è suggerita dall'equazione stessa, ovvero includendo anche tutti i ket che sono limite di una serie di Cauchy di ket normalizzabili; chiamiamo questa procedura *completamento di Cauchy*, poichè in questo modo si ottiene uno spazio topologico necessariamente completo, il che è utile per questioni di convergenza dei ket.

Lo spazio così definito, viene detto *spazio di Fock*.

Si comprende quindi quanto detto in precedenza: non è banale definire a priori lo spazio di Hilbert su cui andranno ad agire gli operatori corrispondenti agli osservabili, ma una definizione naturale deriva da delle considerazioni adatte al modello in esame. In ogni caso, lo spazio di Fock, rappresenta un buon modello di spazio di Hilbert quantistico per quanto riguarda le teorie libere.

Definendo, come per l'oscillatore armonico, l'operatore

$$\hat{N} = \int_{-\pi}^{\pi} dk \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (2.1.44)$$

vediamo che il ket

$$|n, k\rangle = \hat{a}_{k_1}^\dagger \dots \hat{a}_{k_n}^\dagger |0\rangle$$

è un suo autoket con autovalore  $n$  intero non negativo; possiamo affermare che nello stato  $|n\rangle$  così definito siano presenti  $n$  particelle. Vediamo quindi che l'intero apparato matematico così costruito segue gli stessi principi dell'oscillatore armonico quantistico, dove un modo normale in uno stato eccitato equivale alla presenza di un certo numero di particelle.

In questo caso specifico possiamo dire di più su queste particelle: si prenda lo stato generico normalizzabile  $|r\rangle$  dato da

$$\begin{aligned} |r\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 \dots \int_{-\pi}^{\pi} dk_r f_1(k_1) \dots f_r(k_r) \hat{a}_{k_1}^\dagger \dots \hat{a}_{k_r}^\dagger |0\rangle = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 \dots \int_{-\pi}^{\pi} dk_r \frac{1}{r!} \sum_{\alpha} f_{\alpha_1}(k_{\alpha_1}) \dots f_{\alpha_r}(k_{\alpha_r}) \hat{a}_{k_{\alpha_1}}^\dagger \dots \hat{a}_{k_{\alpha_r}}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (2.1.45)$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le possibili combinazioni di  $\alpha_i$ .

Da questa relazione leggiamo come integranda una funzione simmetrica per lo scambio di due  $f$  diverse; di conseguenza esiste una simmetria per lo scambio di due particelle distinte e otteniamo in questo modo un esempio di statistica di Bose. Possiamo quindi affermare che il campo scalare rappresenta dei Bosoni.

Come ultimo elemento dell'analisi del campo scalare, è utile considerare l'evoluzione temporale, che è facilmente decodificata dalle equazioni del moto. Facendo uso del formalismo Hamiltoniano nello schema di Heisenberg, si può dimostrare che:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_n(t) &= i[\hat{H}, \hat{\varphi}_n(t)] = \hat{\Pi}_n(t) \\ \hat{\Pi}_n(t) &= i[\hat{H}, \hat{\Pi}_n(t)] \end{aligned} \quad (2.1.46)$$

con  $\varphi_n(0) = \varphi_n$  e  $\Pi_n(0) = \Pi_n$ . La soluzione di queste equazioni differenziali è ottenuta ricordando Eq.(1.2.9), restituendo:

$$\hat{\varphi}_n(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{\varphi}_n e^{-i\hat{H}t} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{(4\pi\omega_k)^{\frac{1}{2}}} (\hat{a}_k e^{-i\omega_k t + ikn} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t - ikn}) \quad (2.1.47)$$

con  $\hat{\Pi}_n(t) = \dot{\hat{\varphi}}_n(t)$ . Chiaramente gli operatori  $\hat{a}_k e^{-i\omega_k t}$  e  $\hat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t}$  soddisfano la relazione di commutazione (2.1.31) e rappresentano l'evoluto temporale degli operatori di creazione e distruzione; il fatto che la loro evoluzione implichi solamente l'aggiunta di un fattore di fase, mostra la presenza di frequenze positive e negative all'interno del campo, come si può vedere in Eq.(2.1.47). Vediamo quindi che, al contrario di quanto avviene in meccanica quantistica ordinaria dove lo stato del 'campo' considerato è dato da una funzione d'onda, ora la quantità che descrive il campo è rappresentata da un operatore autoaggiunto agente sullo spazio di Fock nonostante risolva anch'esso un'equazione d'onda (Eq.(2.1.16)) analoga all'equazione di Schrödinger. Il campo è di fatto una sovrapposizione di funzioni che risolvono l'equazione d'onda ( $e^{\pm i(\omega_k t - kn)}$ ) con coefficienti operatoriali. Quanto descritto qui prende il nome di *seconda quantizzazione*, che si distingue dalla prima quantizzazione della meccanica quantistica non relativistica.

Quanto esposto per il campo scalare  $\varphi$  si generalizza, con adeguate variazioni, a campi

di diversa tipologia e per questo rappresenta una buona introduzione agli elementi fondamentali della teoria quantistica dei campi; ovviamente non si ha la pretesa di aver esposto la teoria nella sua interezza, ma piuttosto, sono stati messi in evidenza i punti di contatto con quanto di già conosciuto per poter ottenere una formula generalizzata del path integral.

## 2.2 Path integral per campi quantistici

La teoria quantistica dei campi rappresenta, al momento, l'apice della nostra conoscenza per quanto riguarda la fisica quantistica siccome è stata in grado di coniugare, almeno in parte, enormi successi sperimentali con la chiarezza concettuale.

Si è inoltre visto che la teoria quantistica dei campi è l'evoluzione naturale della meccanica quantistica non relativistica, per cui sarebbe del tutto naturale ricercare una formula del path integral applicabile per la teoria dei campi come si è fatto per la meccanica quantistica.

La dimostrazione a livello quantistico è partita dall'equazione di Schrödinger (0.0.1) per poi ottenere delle equazioni differenziali per l'operatore di evoluzione temporale; questo può essere riproposto anche in teoria dei campi, tenendo a mente gli strumenti introdotti nella sezione precedente. Si ricordi comunque che i concetti di stato e funzione d'onda non sono stati eliminati nella teoria dei campi, ma hanno perso il ruolo centrale che possedevano nella teoria non relativistica.

In quanto per la teoria dei campi continuano a valere delle equazioni analoghe a quelle di Hamilton per forma e interpretazione fisica, supponiamo che continuino ad esistere delle equazioni differenziali per lo stato  $|\Psi\rangle$  uguali in forma all'equazione di Schrödinger, ma adattate in modo tale da rispettare l'idea di evoluzione temporale per un campo introdotta in precedenza.

Sia  $\sigma$  una ipersuperficie di tipo spazio e supponiamo che  $|\Psi\rangle$  sia uno stato definito su tale ipersuperficie (analogo a definire uno stato  $|\psi\rangle$  al tempo  $t$ ), per cui possiamo scrivere lo stato  $|\Psi\rangle$  come un funzionale di  $\sigma$ ,  $|\Psi[\sigma]\rangle$ .

Vogliamo ora definire un metodo di derivazione adatto per funzionali di questo tipo: preso un punto  $P$  dell'ipersuperficie  $\sigma$ , sia  $\sigma'$  un'ipersuperficie che si sovrappone a  $\sigma$  a esclusione di un intorno arbitrariamente piccolo di  $P$ . Denotando con  $\delta\omega_P$  il volume della regione compresa tra  $\sigma$  e  $\sigma'$ , possiamo definire la derivata del funzionale  $F[\sigma]$  rispetto a  $\sigma$  nel punto  $P$  come il limite

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(P)}F[\sigma] = \lim_{\sigma' \rightarrow \sigma} \frac{F[\sigma'] - F[\sigma]}{\delta\omega_P} \quad (2.2.1)$$

la quale definizione non fa riferimento alcuno a una coordinata temporale precisa e generalizza la derivata temporale. Oltretutto, vediamo come nota di interesse che, calcolando l'analogo della funzione caratteristica di Hamilton (1.1.4), ovvero il funzionale delle due ipersuperfici di tipo spazio  $\sigma_1, \sigma_2$  definito come

$$S[\sigma_2, \varphi_2; \sigma_1, \varphi_1] = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^n x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, x^\nu) \quad (2.2.2)$$

dove i campi  $\psi = \psi(x^\mu)$  sono le soluzioni delle equazioni del moto con condizioni al contorno sulle ipersuperfici  $\sigma_1, \sigma_2$  i campi  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , si ha il seguente risultato:

$$\frac{\delta}{\delta\sigma_2(P)} S[\sigma_2, \psi_2; \sigma_1, \psi_1] + \mathcal{H} \left( \psi(P), \vec{\nabla}\psi(P), \frac{\delta S}{\delta\psi(P)} \right) = 0 \quad (2.2.3)$$

ovvero, si ottiene un risultato equivalente all'equazione di Hamilton-Jacobi Eq.(1.1.3), come accade in meccanica classica.

Notare che è stata usata la definizione

$$\frac{\delta S}{\delta\psi(P)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(\psi(P), \partial_\mu \psi(P), x^\nu(P)) - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} \psi} \right) (\psi(P), \partial_\mu \psi(P), x^\nu(P))$$

dove ogni termine è valutato nel punto  $P$  conoscendo una soluzione delle equazioni del moto  $\psi(x^\mu)$ .

Si osservi che  $\mathcal{H}$  è la densità hamiltoniana associata alla data scelta di coordinata temporale, ovvero alla scelta dell'ipersuperficie  $\sigma_2$ . Più precisamente, si determina in questo modo la coordinata  $t$  definendo il vettore di base  $\vec{e}_0$  come la normale all'ipersuperficie nel punto  $P$ ; definendo per ogni punto dell'ipersuperficie  $\sigma_2$  il vettore  $\vec{e}_0$  è possibile costruire un intorno di  $\sigma_2$  dove ad ogni punto viene assegnata una coordinata  $t$  associata al vettore di base  $\vec{e}_0$ ; la grandezza dell'intorno così determinato dipende dalla geometria dello spaziotempo. Ottenuta la coordinata  $t$ , seguono naturalmente le coordinate spaziali adattate all'ipersuperficie, da cui è possibile ottenere la forma dell'operatore gradiente spaziale  $\vec{\nabla}$ .

Questo collega direttamente la teoria dei campi con la meccanica e ci mostra che possiamo supporre, con buona probabilità, che esista un analogo all'equazione di Schrödinger:

$$\left( \hat{\mathcal{H}}(P) - i\hbar \frac{\delta}{\delta\sigma(P)} \right) |\Psi[\sigma]\rangle = 0 \quad (2.2.4)$$

in quanto l'equazione di Hamilton-Jacobi non è nient'altro che l'approssimazione per piccole lunghezze d'onda dell'equazione di Schrödinger.

Siamo fiduciosi quindi nel poter associare all'Eq.(2.2.4) una certa espressione analoga al path integral nello stesso modo impiegato nel contesto non relativistico.

L'equazione precedente è in forma relativistica siccome  $\mathcal{H}$  è uno scalare, per cui possiamo ottenere una propagazione dello stato  $|\Psi[\sigma]\rangle$  tra  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  (dove le due ipersuperfici differiscono per una sola in un intorno infinitesimo di  $P$ , come sopra) con la seguente equazione

$$|\Psi[\sigma_2]\rangle = \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}(P) \delta\omega_P \right) |\Psi[\sigma_1]\rangle \quad (2.2.5)$$

Per due ipersuperfici che differiscono per una regione finita, basta ripetere un numero infinito di volte la trasformazione descritta sopra, ottenendo infine una soluzione analoga a Eq.(1.2.10):

$$\hat{W}[\sigma_2; \sigma_1] = \prod_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}} \delta\omega \right) \quad (2.2.6)$$

dove la produttoria è estesa a tutte le ipersuperfici che intercalano  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

In questo caso non compare una forma specifica di ordinamento temporale  $T(\dots)$ , siccome questo significherebbe far riferimento a una scelta specifica di coordinata  $t$ ; di fatto

quel che interessa è l'ordinamento delle ipersuperfici durante l'evoluzione del campo. La teoria così definita sembra soddisfacente, siccome possiamo costruire un elemento di matrice

$$W[\sigma_2, \psi_2; \sigma_1, \psi_1] = \langle \psi_2 | \hat{W}[\sigma_2; \sigma_1] | \psi_1 \rangle \quad (2.2.7)$$

dove con  $|\psi\rangle$  si indica l'autoket dell'operatore indipendente da  $\sigma$ ,  $\hat{\psi}$  con autovalore  $\psi$  (in questo caso l'autovalore è una funzione sull'ipersuperficie).

La soluzione a questo problema non differisce molto da quanto visto in precedenza per il caso non relativistico come si può notare mettendo in evidenza certi punti.

In primo luogo, vediamo che l'operatore  $\hat{W}$ , definendo con  $n_1^\mu$  e  $n_2^\mu$  i vettori normali alle ipersuperfici, rispetta le seguenti equazioni differenziali

$$i\hbar n_2^\mu \frac{\delta}{\delta x^\mu(P)} \hat{W}[\sigma_2; \sigma_1] = \hat{\mathcal{H}}(P) \hat{W}[\sigma_2; \sigma_1] \quad (2.2.8)$$

$$i\hbar n_1^\mu \frac{\delta}{\delta x^\mu(P)} \hat{W}[\sigma_2; \sigma_1] = -\hat{W}[\sigma_2; \sigma_1] \hat{\mathcal{H}}(P) \quad (2.2.9)$$

analoghe a quanto visto nelle Eqq.(1.2.1),(1.2.2); oltre a ciò,  $\hat{W}$  soddisfa tutte le proprietà viste per  $\hat{U}$ . Notare che nell'equazione precedente è impiegata la derivata funzionale definita da:

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} F[f] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(y) + \epsilon \delta(y-x)] - F[f]}{\epsilon}$$

che può essere usata anche per definire il differenziale

$$\delta F[f] = \int dx \frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} \delta f(x)$$

Si può dimostrare che Eq.(2.2.1) è una derivata funzionale.

I passaggi che seguono a queste equazioni per riottenere una forma chiusa del path integral sono in realtà praticamente identici a quanto visto per il caso non relativistico. Formalmente quindi, l'elemento di matrice di Eq.(2.2.7) per un campo qualsiasi  $\psi$  può essere scritto come path integral

$$W[\sigma_2, \psi_2; \sigma_1, \psi_1] = \int_{\psi|_{\sigma_1}=\psi_1}^{\psi|_{\sigma_2}=\psi_2} \mathcal{D}\psi e^{\frac{i}{\hbar} S[\psi]} \quad (2.2.10)$$

con  $S[\psi]$  funzionale d'azione

$$S[\psi] = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^n x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, x^\nu) \quad (2.2.11)$$

Come visto in precedenza, la misura  $\mathcal{D}\psi$  indica una forma di integrazione su tutte le possibili configurazioni di campo con condizioni al contorno date da  $\psi_1$  e  $\psi_2$ . Un'equazione del genere non pone problemi dal punto di vista concettuale siccome non introduce elementi di novità rispetto a quanto già visto, ma pone delle complicazioni che non possono essere facilmente ignorate: non è così raro trovarsi davanti a un path integral con elementi divergenti, in quanto nel caso di infiniti gradi di libertà, come quelli posseduti dai campi, il numero di integrazioni necessarie per il calcolo del path integral diviene



talmente grande da eccedere lo smorzamento permesso dagli integrandi oscillanti. Non per questo è necessario abbandonare il path integral. Risulta comunque un elemento di grandissimo interesse nella teoria quantistica, siccome permette di svolgere calcoli a livello non perturbativo.

Vediamo come possiamo fare per riottenere un path integral che sia ben posto e ci permetta comunque di calcolare degli elementi di interesse.

Operiamo una scelta di coordinata  $t$  (del tutto lecita in quanto la teoria fino ad ora esposta è completamente covariante) e immaginiamo di imporre la sostituzione per il tempo euclideo  $\tau, \tau = it$ , ovvero una *rotazione di Wick*, così da avere  $d^n x = -id\tau dV := -id^n x_E$ , mentre si considera

$$\frac{\partial}{\partial t} = i \frac{\partial}{\partial \tau}$$

cosicch 

$$\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi = - \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 + (\vec{\nabla} \psi)^2 \right] \quad (2.2.12)$$

ovvero il prodotto Minkowskiano diventa un prodotto euclideo (da cui il nome). Si noti che  $dV := d^{n-1} x^\mu n_\mu$  dove  $n_\mu$    il vettore unitario ortogonale alle ipersuperfici  $t = \text{cost}$ , per la scelta fatta di coordinata temporale.

Come visto nell'esempio del campo scalare, all'interno del funzionale d'azione possono essere presenti dei termini cinetici come quello dell'Eq.(2.2.12), per cui, facendo riferimento alla densit  lagrangiana (2.1.15) come esempio illustrativo, vediamo che si ottiene

$$S[\varphi] = i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^n x_E \left[ (\partial_\tau \varphi)^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2 + V(\varphi) \right] := iS_E[\varphi] \quad (2.2.13)$$

Si osserva quindi che non   pi  necessario utilizzare la metrica di Minkowski, ma la metrica euclidea (propriet  generale); l'esponenziale complesso all'interno di Eq.(2.2.10) diventa  $e^{-\frac{S_E[\varphi]}{\hbar}}$ . Assumendo che  $V(\varphi)$  sia limitato inferiormente, possiamo scegliere uno 0 dell'energia in modo tale che il potenziale non sia mai negativo; in questo modo  $S_E[\varphi]$    definito positivo   l'integranda in Eq.(2.2.10) restituisce un integrale necessariamente convergente siccome le grandi fluttuazioni rispetto alla soluzione classica, ovvero dove l'azione   stazionaria, sono soppresse esponenzialmente. In generale, l'integrazione nello spazio euclideo su configurazioni euclidee del campo  $\psi(\tau, \vec{x})$  sono convergenti e permettono di riottenere il caso minkowskiano per continuazione analitica.

L'espressione del path integral gode di una grandissima variet  di utilizzi in teoria quantistica dei campi che espongono quanto fatto in meccanica quantistica: ampiezze di transizione vuoto-vuoto, diagrammi di Feynman, propagatori di Feynman, prodotti ordinati temporalmente e molti altri; il vantaggio del path integral sta nella sua chiarezza concettuale, ma continua a rimanere, come visto in precedenza, l'enorme difficolt  nel calcolo.

Come esempio, verr  calcolata l'ampiezza di transizione per un campo scalare  $\langle \varphi_N[\sigma_N] | \varphi_0[\sigma_0] \rangle = W[\sigma_N, \varphi_N; \sigma_0, \varphi_0]$  selezionando la coordinata temporale  $t$ .

In primis, considerando i ket  $|\varphi\rangle$  e  $|\Pi\rangle$  si dimostra, data la coniugazione degli operatori

$\hat{\varphi}$  e  $\hat{\Pi}$

$$\langle \varphi | \Pi \rangle = \exp \left( i \int dV \varphi(x) \Pi(x) \right) \quad (2.2.14)$$

che è la corrispettiva di Eq.(1.2.19) in teoria dei campi.  
La densità hamiltoniana

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left[ \hat{\Pi}^2 + (\vec{\nabla} \hat{\varphi})^2 \right] + \hat{V}(\hat{\varphi}) \quad (2.2.15)$$

permette di ottenere l'operatore hamiltoniano

$$\hat{H} = \int dV \hat{\mathcal{H}} \quad (2.2.16)$$

e si dimostra, a partire dall'equazione differenziale (2.2.8) che l'operatore  $\hat{W}$  è dato da:

$$\hat{W}[\sigma_N; \sigma_0] = \hat{W}(t_N, t_0) = \exp \left( -i(t_N - t_0) \hat{H} \right) \quad (2.2.17)$$

Va notato che l'operatore  $\vec{\nabla} \hat{\varphi}$  è una combinazione lineare di  $\hat{\varphi}$ , per cui  $|\varphi\rangle$  è anche un suo autoket.

Di conseguenza, analogamente a come avviene nel caso non relativistico, sono presenti un termine dipendente solo dai momenti e un termine dipendente solo dai campi; sembrerebbe quindi convenire utilizzare gli stessi passaggi utilizzati in precedenza.

Possiamo infatti affermare, data l'autoaggiunzione dell'operatore  $\hat{\varphi}$ , che

$$\int |\varphi\rangle \tilde{\mathcal{D}}\varphi \langle \varphi| = 1 \quad (2.2.18)$$

dove l'integrazione avviene su tutte le configurazioni possibili del campo a un tempo fissato  $t$ .

Inserendo  $N - 1$  relazioni di completezza Eq.(2.2.18) all'interno di

$$W[t_N, \varphi_N; t_0, \varphi_0] = \langle \varphi_N | (e^{-i\epsilon \hat{H}})^N | \varphi_0 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \varphi_N | (e^{-i\epsilon \hat{T}} e^{-i\epsilon \hat{\Phi}})^N | \varphi_0 \rangle \quad (2.2.19)$$

(dove si è posto  $\epsilon := \frac{t_n - t_0}{N}$  e i termini  $T$  e  $\Phi$  sono rispettivamente, in analogia con la teoria non relativistica, la parte dipendente da  $\Pi$  e quella dipendente da  $\varphi$ ) si ottiene un'espressione nella forma

$$\int \langle \varphi_N | e^{-i\epsilon \hat{T}} e^{-i\epsilon \hat{\Phi}} | \varphi_{N-1} \rangle \tilde{\mathcal{D}}\varphi_{N-1} \langle \varphi_{N-1} | \dots | \varphi_1 \rangle \tilde{\mathcal{D}}\varphi_1 \langle \varphi_1 | e^{-i\epsilon \hat{T}} e^{-i\epsilon \hat{\Phi}} | \varphi_0 \rangle \quad (2.2.20)$$

Rimane da valutare ciascun elemento di matrice coinvolto, il che può essere fatto nel seguente modo: assumendo una relazione di completezza analoga di Eq.(2.2.18) per i momenti coniugati  $\Pi$  è possibile scrivere

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{k+1} | e^{-i\epsilon \hat{T}} e^{-i\epsilon \hat{\Phi}} | \varphi_k \rangle &= \int \langle \varphi_{k+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{T}} | \Pi_k \rangle \tilde{\mathcal{D}}\Pi_k \langle \Pi_k | e^{-i\epsilon \hat{\Phi}} | \varphi_k \rangle = \\ &= \int \tilde{\mathcal{D}}\Pi_k \exp \left( i \int dV \Pi_k(\vec{x}) (\varphi_{k+1}(\vec{x}) - \varphi_k(\vec{x})) \right) \\ &\quad \times \exp \left[ -i\epsilon \int dV \left( \frac{1}{2} \Pi_k^2(\vec{x}) + \mathcal{V}(\varphi_k) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Possiamo ora eseguire l'integrazione su tutte le configurazioni di  $\Pi$  considerando gli integrali che compaiono negli esponenti dell'integranda di Eq.(2.2.21) come una somma di infiniti pezzi valutati in un punto  $\vec{x}$  moltiplicato per il volume spaziale infinitesimo  $d^{n-1}x$ ; siccome  $\tilde{\mathcal{D}}\Pi = \prod_{\vec{x}} d\Pi(\vec{x})$  dove  $d\Pi(\vec{x})$  indica un'integrazione su tutti i valori che può assumere il campo nel punto spaziale  $\vec{x}$  (in questo caso è un'integrazione su tutto l'asse reale), mentre la produttoria è estesa a tutti i punti dello spazio, si può separare l'integranda in pezzi dipendenti dal solo  $\Pi(\vec{x})$  e calcolare degli integrali gaussiani. Si ottiene di conseguenza

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{k+1} | e^{-i\epsilon\hat{T}} e^{-i\epsilon\hat{\Phi}} | \varphi_k \rangle &= \mathcal{N} \exp \left( i\epsilon \int dV \mathcal{L}(\varphi_k, \partial_\mu \varphi_k) \right) \\ &= \mathcal{N} \exp \left\{ i\epsilon \int dV \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi_{k+1}(\vec{x}) - \varphi_k(\vec{x})}{\epsilon} \right)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi_k)^2 - V(\varphi_k) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

dove  $\mathcal{N}$  è una costante di normalizzazione (la quale potrebbe anche divergere). Notare che lo stesso risultato può essere ottenuto con più rigore usando la teoria degli integrali gaussiani e considerando i termini in Eq.(2.2.21)  $\int dV \Pi_k(\vec{x})(\varphi_{k+1}(\vec{x}) - \varphi_k(\vec{x}))$  e  $\int dV \Pi_k^2$  come prodotti scalari o operatori applicati alle funzioni  $\Pi_k(\vec{x})$  (Cfr. Appendice A). Dal risultato precedente, otteniamo analogamente a come fatto nel caso non relativistico la relazione formale

$$W[t_N, \varphi_N; t_0, \varphi_0] = \mathcal{N} \int_{\varphi(t_0)=\varphi_0}^{\varphi(t_N)=\varphi_N} \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]} \quad (2.2.23)$$

dove  $\mathcal{D}\varphi = \prod_{k=1}^N \tilde{\mathcal{D}}\varphi_k$  dove si interpreta l'integrazione su  $\tilde{\mathcal{D}}\varphi_k$  come l'integrazione di tutte le possibili configurazioni spaziali del campo al tempo  $t_k = t_0 + \epsilon k$ ; in questo modo l'integrazione della Eq.(2.2.23) è un'integrazione su tutte le configurazioni nello spaziotempo del campo  $\varphi$  tra gli istanti  $t_0$  e  $t_N$  in modo tale che rimanga fissato il campo a questi due istanti.

Osserviamo che nella nostra derivazione del risultato precedente, le derivate temporali e spaziali sono state calcolate in modo diverso, secondo l'influenza della scelta di una coordinata privilegiata  $t$  che parametrizza l'evoluzione del campo.

Oltretutto questa separazione è sintomo anche dalla struttura stessa di una misurazione: per verificare una transizione è necessario misurare tra due tempi diversi, per cui è naturale trattare il tempo, che si differenzia dalle coordinate spaziali per il  $+$  invece che il  $-$  nella metrica di Minkowski, come parametro privilegiato. Il motivo per cui il tempo abbia questo status è da ricercarsi in argomenti di cosmologia e termodinamica che non possono essere trattati in questa sede.

## 2.3 Principio variazionale di Schwinger e simmetrie

Prima di concludere il capitolo dedicato alla teoria dei campi, risulta necessario introdurre un argomento direttamente collegato al path integral, poiché può essere considerato il suo corrispettivo differenziale: il principio variazionale di Schwinger, introdotto da Julian Schwinger in [19].

Si consideri un operatore unitario  $\hat{T}$  il quale lascia invariato lo spettro di un operatore  $\hat{A}$  se questo è soggetto alla trasformazione

$$\hat{A}' = \hat{T}^\dagger \hat{A} \hat{T} \quad (2.3.1)$$

Si è già incontrato un operatore unitario, ovvero  $\hat{U}(t, s)$ , il quale descrive un'evoluzione temporale; effettivamente l'evoluzione temporale deve lasciare invariato lo spettro dell'operatore evoluto nel tempo.

Supponiamo che si tratti di un operatore infinitesimo dato da

$$\hat{T} = 1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{G} \quad \hat{T}^\dagger = 1 + \frac{i}{\hbar} \epsilon \hat{G} \quad (2.3.2)$$

dove  $\hat{G}$  è un operatore autoaggiunto che chiamiamo *generatore della trasformazione* e  $\epsilon$  è una grandezza infinitesima.

Vediamo allora che una trasformazione di un operatore qualsiasi per effetto di  $\hat{H}$  è data da

$$\hat{A}' = \hat{A} + \delta \hat{A} + O(\epsilon^2) \quad (2.3.3)$$

dove si è posto

$$\delta \hat{A} = -\frac{i}{\hbar} \epsilon [\hat{A}, \hat{G}] \quad (2.3.4)$$

Il vantaggio di avere a che fare con una trasformazione unitaria infinitesima come quella definita sopra è quello di permettere una trattazione differenziale della teoria delle trasformazioni e dei rappresentativi di uno stato. Immaginiamo infatti di avere un insieme completo di operatori autoaggiunti commutanti<sup>7</sup>  $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_p$  che indicheremo con  $\hat{A}$ . Se è possibile trovare una trasformazione infinitesima tale per cui  $\delta \hat{A}_k$  commuta con tutti gli  $\hat{A}$ , allora l'autoket  $|a\rangle$  diagonalizza anche  $\delta \hat{A}_k$  e quindi il ket  $\hat{T}^\dagger |a\rangle$  avrà autovalore  $a_k + \delta a_k$  con  $\delta a$  infinitesimo; questo mostra che lo spettro di  $\hat{A}_k$  è continuo.

Si guardi ora al caso dei campi quantistici e alla loro dinamica: come visto in precedenza, bisogna affidarsi alle ipersuperfici di tipo spazio come elementi fondamentali per la descrizione dell'evoluzione della fisica, cosicché uno stato  $|\zeta_1[\sigma_1]\rangle$  sia univocamente definito dagli autovalori  $a_k(\zeta_1)$  di un insieme di operatori autoaggiunti commutanti completi  $\hat{A}_{1k}$  costruiti a partire dai campi presi sull'ipersuperficie  $\sigma_1$ .

La definizione di un ipersuperficie di tipo spazio è fondamentale per ottenere una descrizione fisica coerente, in assenza di questa sarebbe infatti impossibile una definizione covariante del concetto di 'istante' a cui prendere i campi.

Un cambio di rappresentazione degli stati fisici del sistema che mantiene invariato lo spettro congiunto necessario per definire univocamente uno stato della base di autoket di  $\hat{A}_{1k}$  sarà collegato ad una trasformazione unitaria che mappa gli operatori  $\hat{A}_{1k}$  in nuovi operatori completi  $\hat{A}'_{2k}$  su una nuova ipersuperficie  $\sigma_2$ .

La trasformazione sarà data, sopprimendo per comodità il pedice  $k$ , da

$$\hat{A}_2 = \hat{W}_{21}^\dagger \hat{A}_1 \hat{W}_{21} \quad (2.3.5)$$

<sup>7</sup>Una collezione di operatori autoaggiunti commutanti tra loro si dice *completa* se data una base congiunta  $|\zeta\rangle$ , ovvero una base che diagonalizza contemporaneamente tutti gli operatori ( $\hat{A}_k |\zeta\rangle = |\zeta\rangle a_k(\zeta)$ ), questa è non degenere, ovvero non esistono due ket distinti di questa base che hanno lo stesso multipletto di autovalori corrispondenti. La completezza di operatori indica che è possibile identificare univocamente uno stato fisico con gli autovalori degli  $\hat{A}_k$ .

e

$$|\zeta_2[\sigma_2]\rangle = \hat{W}_{21}^\dagger |\zeta_1[\sigma_1]\rangle \quad \zeta_1 = \zeta_2 \quad (2.3.6)$$

dove  $\hat{W}_{21} := \hat{W}[\sigma_2; \sigma_1]$ , definito in Eq.(2.2.6) (notare che stiamo usando lo schema di Heisenberg per l'evoluzione temporale).

La descrizione dell'evoluzione temporale, e quindi delle ampiezze di transizione utili per le verifiche empiriche, sarà possibile ottenendo la relazione che intercorre tra due autovettori del sistema completo associati a due diverse ipersuperfici di tipo spazio. Ci aspettiamo che la dinamica sia codificata nel prodotto interno

$$\langle \zeta_2'[\sigma_2] | \zeta_1[\sigma_1] \rangle = \langle \zeta_1'[\sigma_1] | \hat{W}_{21} | \zeta_1[\sigma_1] \rangle \quad (2.3.7)$$

ovvero l'ampiezza di transizione discussa in precedenza.

L'operatore  $\hat{W}_{21}$ , oltre a contenere la dinamica dettagliata del sistema, dipende anche dalla scelta di rappresentazioni in  $\sigma_1$  e in  $\sigma_2$  oltre che dipendere dalla scelta stessa di ipersuperfici. Questo significa che ogni variazione infinitesima delle quantità da cui dipende  $\hat{W}_{21}^\dagger$  induce una variazione infinitesima in quest'ultimo

$$\delta \langle \zeta_2'[\sigma_2] | \zeta_1[\sigma_1] \rangle = \langle \zeta_1'[\sigma_1] | \delta \hat{W}_{21} | \zeta_1[\sigma_1] \rangle \quad (2.3.8)$$

Vediamo ora che, siccome per un operatore unitario si ha  $\delta(\hat{T}^\dagger \hat{T}) = \delta \hat{T}^\dagger \hat{T} + \hat{T}^\dagger \delta \hat{T} = \delta \hat{T} \hat{T}^\dagger + \hat{T} \delta \hat{T}^\dagger = 0$ , l'operatore  $i\hat{T}^\dagger \delta \hat{T}$  deve essere autoaggiunto.

Scriviamo quindi

$$\delta \hat{W}_{21} = \frac{i}{\hbar} \hat{W}_{21} \delta \hat{I}_{21} \quad (2.3.9)$$

dove  $\delta \hat{I}_{21}$  è un operatore infinitesimo autoaggiunto.

In questo modo si ottiene

$$\delta \langle \zeta_2'[\sigma_2] | \zeta_1[\sigma_1] \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \zeta_2'[\sigma_2] | \delta \hat{I}_{21} | \zeta_1[\sigma_1] \rangle \quad (2.3.10)$$

Vediamo inoltre che, data una sequenza di tre ipersuperfici di tipo spazio  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  si dovrà avere

$$\delta \hat{I}_{32} + \delta \hat{I}_{21} = \delta \hat{I}_{31} \quad (2.3.11)$$

assumendo una qualche variazione dei parametri fisici su queste tre ipersuperfici, siccome si può vedere che

$$\begin{aligned} \delta \langle \zeta_3''[\sigma_3] | \zeta_1[\sigma_1] \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \zeta_3''[\sigma_3] | \delta \hat{I}_{31} | \zeta_1[\sigma_1] \rangle = \\ &= \delta \int \langle \zeta_3''[\sigma_3] | \zeta_2'[\sigma_2] \rangle d\mu(\zeta_2') \langle \zeta_2'[\sigma_2] | \zeta_1[\sigma_1] \rangle = \\ &= \frac{i}{\hbar} \int \langle \zeta_3''[\sigma_3] | \delta \hat{I}_{32} | \zeta_2'[\sigma_2] \rangle d\mu(\zeta_2') \langle \zeta_2'[\sigma_2] | \zeta_1[\sigma_1] \rangle + \\ &+ \frac{i}{\hbar} \int \langle \zeta_3''[\sigma_3] | \zeta_2'[\sigma_2] \rangle d\mu(\zeta_2') \langle \zeta_2'[\sigma_2] | \delta \hat{I}_{21} | \zeta_1[\sigma_1] \rangle = \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle \zeta_3''[\sigma_3] | (\delta \hat{I}_{32} + \delta \hat{I}_{21}) | \zeta_1[\sigma_1] \rangle \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

dove si è fatto uso della relazione di completezza

$$\int |\zeta'_2[\sigma_2]\rangle d\mu(\zeta'_2) \langle \zeta'_2[\sigma_2]| = 1 \quad (2.3.13)$$

che è un'integrazione su tutti i possibili autoket dell'insieme completo di operatori autoaggiunti in  $\sigma_2$  (la misura  $d\mu(\zeta'_2)$  può anche indicare una sommatoria su tutti i numeri quantici  $\zeta'_2$  appartenenti alla parte discreta dello spettro). La proprietà ottenuta sembrerebbe suggerire che, siccome le variazioni infinitesime di  $\hat{I}$  sono additive, l'unica rappresentazione che può possedere è data da:

$$\hat{I}_{21} = \frac{1}{c} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^n x \hat{\mathcal{L}} \quad (2.3.14)$$

in quanto, supponendo che l'operatore  $\hat{\mathcal{L}}$  sia un invariante sono rispettate tutte le condizioni imposte su  $\hat{I}_{21}$ . Un sistema fisico è descritto imponendo che  $\hat{\mathcal{L}}$  sia una funzione dei campi e delle loro derivate, oltre che dei punti dello spaziotempo stesso.

Data l'evidente analogia con la teoria dei campi classica, chiamiamo  $\hat{I}_{21}$  operatore d'azione e  $\hat{\mathcal{L}}$  operatore densità lagrangiana.

Il **principio variazionale di Schwinger** è quindi scritto, nella sua forma finale

$$\delta \langle \zeta'_2[\sigma_2] | \zeta_1[\sigma_1] \rangle = \frac{i}{\hbar c} \langle \zeta'_2[\sigma_2] | \delta \left( \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^n x \hat{\mathcal{L}} \right) | \zeta_1[\sigma_1] \rangle \quad (2.3.15)$$

e definisce un metodo differenziale per studiare le trasformazioni infinitesime unitarie come quelle definite in Eq.(2.3.2). Bisogna precisare che sono escluse le trasformazioni che invertono l'ordinamento temporale (dato dalla scelta di ipersuperfici) siccome in tal caso bisogna considerare la relazione che esiste tra spin e statistica.

Affermare che l'operatore densità lagrangiana sia effettivamente il corrispettivo della densità lagrangiana non è difficile, considerando che la dinamica ottenuta con questa identificazione è esattamente quella familiare ottenuta in precedenza.

Per vederlo, proviamo a riottenere le equazioni del moto a partire da tale principio: si considerino delle trasformazioni unitarie del sistema che lasciano invariati i parametri del sistema, per cui le uniche variazioni possono scaturire da variazioni di  $\zeta$  o  $\sigma$ ; questo implica che si tratta di trasformazioni infinitesime che agiscono solamente sui "bordi" della regione di integrazione e di conseguenza la variazione  $\delta \hat{I}_{21}$  sarà esprimibile come

$$\delta \hat{I}_{21} = \epsilon (\hat{F}[\sigma_2] - \hat{F}[\sigma_1]) \quad (2.3.16)$$

siccome è l'unica forma compatibile con Eq.(2.3.11).

Da notare che trasformazioni di questo tipo sono sufficienti per determinare l'evoluzione del sistema siccome, assumendo di avere a che fare con una teoria deterministica, fissando i risultati delle misure al contorno si determina univocamente l'evoluzione.

Questa forma di variazione dell'operatore di azione è l'equivalente del principio di azione stazionaria, siccome le variazioni dei campi comprese tra le due ipersuperfici sono nel punto stazionario dell'operatore funzionale  $\hat{I}_{21}$ . Assumendo quindi un operatore densità lagrangiana che dipende al massimo da derivate prime, prendendo delle variazioni dei

campi  $\delta\hat{\psi}_a$  e delle variazioni della regione di integrazione  $\delta x^\mu$  abbiamo

$$\begin{aligned} \delta\hat{I}_{21} = & \frac{\epsilon}{c} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^n x \left[ \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\psi_a} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\psi_{a,\mu}} \right) \right] \delta\hat{\psi}_a + \\ & + \frac{\epsilon}{c} \left( \int_{\sigma_2} - \int_{\sigma_1} \right) d^{n-1} x_\mu \left[ \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\psi_{a,\mu}} \delta\hat{\psi}_a + \hat{\mathcal{L}} \delta x^\mu \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

e si ottiene un'equazione equivalente a Eq.(2.1.3), ma più generale per quanto riguarda le variazioni coinvolte.

Va notato che nella derivazione devono essere considerate le relazioni di commutazione dei campi, per cui l'espressione precedente va intesa più in senso simbolico che letterale; ad esempio nel momento in cui viene effettuata una variazione, di un termine come  $\hat{\psi}^2$  è necessario ricordarsi che equivale a  $\delta\hat{\psi}\hat{\psi} + \hat{\psi}\delta\hat{\psi}$ , ma si sottintende che questo sia uguale a  $\frac{\partial\hat{\psi}^2}{\partial\hat{\psi}}\delta\hat{\psi}$ .

Per semplificare le cose, si assumerà che la struttura di  $\hat{\mathcal{L}}$  e le relazioni di commutazione di  $\delta\hat{\psi}_a$  siano tali per cui la variazione di  $\hat{\mathcal{L}}$  presenti contributi che differiscono solamente per una diversa posizione di  $\delta\hat{\psi}_a$ .

In questo modo è possibile riottenere le equazioni di Eulero-Lagrange in forma operatoriale

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\psi_{a,\mu}} \right) = \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\psi_a} \quad (2.3.18)$$

Questo sembra motivare con forza l'identificazione dell'operatore densità lagrangiana con la densità lagrangiana ordinaria. Il principio variazionale di Schwinger sembrerebbe quindi affermare che la variazione di una ampiezza di transizione è proporzionale all'elemento di matrice della variazione del funzionale di azione.

Va anche notato che, ogniquale volta vengono modificate le condizioni al contorno in un processo sperimentale tra due ipersuperfici  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , sono automaticamente soddisfatte le equazioni del moto per il campo.

Possiamo anche dire di più, considerando i termini di bordo dell'Eq.(2.3.17); confrontando la Eq.(2.3.17) con Eq.(2.3.16) vediamo infatti che

$$\hat{F}[\sigma] = \frac{1}{c} \int_\sigma d^{n-1} x_\mu \left[ \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\psi_{a,\mu}} \delta\hat{\psi}_a + \hat{\mathcal{L}} \delta x^\mu \right] \quad (2.3.19)$$

Fino ad ora la variazione  $\delta\hat{\psi}_a$  considerata è semplicemente una variazione della forma funzionale del campo a un punto fissato, ma vogliamo ora considerare la variazione totale del campo  $\Delta\hat{\psi}_a$  ovvero considerando la differenza che consideri anche la variazione delle ipersuperfici.

Nel trattare questa variazione, bisogna considerare come vantaggioso il descrivere i campi  $\hat{\psi}_a$  rispetto al sistema di coordinate locale di  $\sigma$ ; questo implica che verranno considerati solo variazioni rigide delle superfici, ovvero moti tali per cui un vettore spaziale infinitesimale viene mappato in uno di uguale lunghezza su  $\sigma$  variata, e questa richiesta è equivalente alla condizione

$$\partial_\mu \delta x_\nu = -\partial_\nu \delta x_\mu \quad (2.3.20)$$

Procedendo in questa direzione è possibile dimostrare che il generatore  $\hat{F}$  assume la forma

$$\hat{F}[\sigma] = \frac{1}{c} \int_{\sigma} d^{n-1}x_{\mu} [\hat{\Pi}_a^{\mu} \Delta \hat{\psi}_a + \hat{T}_{\nu}^{\mu} \delta x^{\nu}] \quad (2.3.21)$$

dove compare il *tensore di energia impulso*  $\hat{T}_{\nu}^{\mu}$ , il quale è una grandezza che descrive il contenuto energetico dei campi.

La forma precedente permette di trattare le leggi di conservazione a livello quantistico, siccome, se  $\hat{F}[\sigma_2] = \hat{F}[\sigma_1]$ , è possibile ottenere delle conservazioni di quantità di interesse fisico. Ad esempio, prendendo  $\Delta \hat{\psi}_a = 0$  e la rototraslazione  $\delta x_{\mu} = \epsilon_{\mu} - \epsilon_{\mu\nu} x^{\nu}$  con  $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ , si ha

$$\hat{F}[\sigma] = \epsilon_{\mu} \hat{P}^{\mu}[\sigma] + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu}[\sigma] \quad (2.3.22)$$

dove si è posto il vettore energia-impulso

$$\hat{P}^{\mu}[\sigma] = \frac{1}{c} \int_{\sigma} d^{n-1}x_{\nu} \hat{T}^{\nu\mu} \quad (2.3.23)$$

e il tensore momento angolare

$$\hat{J}^{\mu\nu}[\sigma] = \frac{1}{c} \int_{\sigma} d^{n-1}x_{\lambda} (x^{\mu} \hat{T}^{\lambda\nu} - x^{\nu} \hat{T}^{\lambda\mu}) \quad (2.3.24)$$

La conservazione di  $\hat{F}$  implica separatamente la conservazione di  $\hat{P}^{\mu}[\sigma]$  e  $\hat{J}^{\mu\nu}[\sigma]$ ; come in meccanica classica, l'invarianza del sistema rispetto a rotazioni e traslazioni implica la conservazione del momento angolare e della quantità di moto del campo.

Si prenda in considerazione la variazione  $\Delta \hat{\psi}_a = -\frac{ie}{\hbar c} \epsilon^a \hat{\psi}_a \delta \lambda$  e  $\delta x^{\mu} = 0$  dove  $\epsilon^a$  è una caratteristica del campo che può assumere i valori  $0, \pm 1$ . Vediamo allora che in questo caso la grandezza conservata è data da

$$\hat{Q}[\sigma] = \frac{1}{c} \int_{\sigma} d^{n-1}x_{\mu} \hat{j}^{\mu} \quad (2.3.25)$$

con

$$\hat{j}^{\mu} = -\frac{ie}{\hbar c} \hat{\Pi}_a^{\mu} \epsilon^a \hat{\psi}_a \quad (2.3.26)$$

e questa quantità scalare segue le stesse leggi di conservazione della carica, in quanto, equivale a porre

$$\partial_{\mu} \hat{j}^{\mu} = 0 \quad (2.3.27)$$

che è un'equazione di continuità, data una corrente  $\hat{j}^{\mu}$  accuratamente definita.

Una lagrangiana che presenta un campo con una legge di conservazione di questo tipo permette di caratterizzare il campo stesso tramite una carica.

In pratica, considerando trasformazioni delle condizioni al contorno che lasciano invariato l'operatore di azione, ovvero delle *simmetrie* di quest'ultimo, si ottengono delle conservazioni di elementi dinamici.

Il principio variazionale di Schwinger per una simmetria diviene:

$$\delta \langle \zeta_2'[\sigma_2] | \zeta_1[\sigma_1] \rangle = 0 \quad (2.3.28)$$



Per quanto visto sulla descrizione della dinamica a partire dall'ampiezza di transizione, un'invarianza come quella descritta dall'equazione precedente implica una simmetria dinamica; la dinamica rimane invariata per trasformazioni che lasciano invariato l'operatore d'azione il quale quindi codifica la dinamica del sistema. Questa forma di invarianza mostra la stretta connessione che esiste tra simmetria e legge di conservazione, così come in teoria dei campi compare il teorema di Nöther. Di fatto il teorema di Nöther permette di capire quale sia la quantità conservata, mentre il principio variazionale di Schwinger permette di capire in che modo questo può essere connesso alla dinamica quantistica.

Oltretutto, poiché l'invarianza dell'ampiezza di transizione implica un'invarianza della dinamica, l'ottenere il principio di azione stazionaria da essa risulta naturale; imporre  $\delta\langle\zeta'_2[\sigma_2]|\zeta_1[\sigma_1]\rangle = 0$  restringendosi a trasformazioni del tipo Eq.(2.3.16) significa imporre una conservazione dell'evoluzione temporale per come viene intesa normalmente (ovvero una transizione tra due stati) ed è naturale aspettarsi che questa condizione restituisca, come effettivamente si è verificato, le equazioni del moto.

Per quanto le applicazioni fino ad ora descritte siano di grande interesse, il principio variazionale di Schwinger è stato introdotto in virtù della sua stretta connessione con il path integral; l'introduzione alla teoria quantistica che fa Bryce DeWitt in [20] evidenzia la centralità di questi due risultati come fondamento per la quantizzazione di una teoria.

L'intera teoria dei campi di Schwinger è imperniata sul suo principio variazionale, che rappresenta uno strumento semplice e più maneggevole del path integral, pur essendo in stretto contatto con questo; d'altro canto, il path integral sembra toccare in modo più profondo la dinamica e i fondamenti concettuali della teoria. Ad ogni modo, possono essere visti come due facce della stessa medaglia. Esiste di fatto un modo alquanto elegante per riottenere Eq.(2.2.10) a partire dal principio variazionale di Schwinger, ma una sua esposizione deve necessariamente essere accompagnata dall'introduzione di concetti appartenenti alla teoria delle supervarietà, la quale risulta fin troppo estesa per essere riportata anche solo sommariamente; per il lettore interessato, si rimanda al testo che ha introdotto le supervarietà di Bryce DeWitt [21].

D'altro canto, è possibile ottenere il principio variazionale di Schwinger a partire dalla formula del path integral tramite una dimostrazione del tutto elementare che verrà riportata in breve. Prima risulta necessario dimostrare un risultato del tutto generale per il path integral.

Si prenda un operatore  $\hat{O}(x)$  nello schema di Heisenberg, il quale si suppone dipendere unicamente da operatori (campi) presi sull'ipersuperficie  $\sigma$  valutati in un singolo punto di essa  $x$  (ovvero  $\hat{O}(x)|\zeta\rangle = |\zeta\rangle O[\zeta](x) := |\zeta\rangle O(x)$  data la completezza degli operatori  $\hat{A}_k$ ), e si prenda il suo elemento di matrice

$$\langle\zeta'_2[\sigma_2]|\hat{O}(x)|\zeta_1[\sigma_1]\rangle$$

Notare che nell'operatore è resa esplicita la dipendenza da un punto  $x$ , poiché essendo costruito da dei campi è necessario che dipenda da un punto dell'ipersuperficie  $\sigma$ ; in seguito verrà esteso a operatori che possono dipendere da più punti distinti dello spaziotempo. Selezioniamo ora una coordinata temporale  $t$ , per semplicità, e diciamo che

il tempo  $t$  associato a  $\sigma$  sia compreso tra i tempi delle due ipersuperfici  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , ovvero  $t_1$  e  $t_2$ .

Scrivendo per chiarezza  $\mathcal{D}$  come  $\mathcal{D}\psi[t_2, t_1]$  e ricordando la derivazione per il caso di un campo scalare della sezione precedente, capiamo che possiamo con tutta generalità affermare che, a meno di una costante di normalizzazione,

$$\mathcal{D}\psi[t_2, t_1] = \prod_{t=t_1}^{t_2} \tilde{\mathcal{D}}\psi_t \quad (2.3.29)$$

dove la produttoria è estesa a tutti i tempi tra  $t_1$  e  $t_2$  e  $\tilde{\mathcal{D}}\psi_t$  indica un'integrazione su tutte le configurazioni di campo a un tempo fissato. Possiamo valutare nel modo seguente l'elemento di matrice

$$\begin{aligned} \langle \zeta'_2[t_2] | \hat{O}(x) | \zeta_1[t_1] \rangle &= \langle \zeta'_2[t_2] | \hat{O}[t] | \zeta[t] \rangle d\mu(\zeta) \langle \zeta[t] | \zeta_1[t_1] \rangle = \\ &= \int O(x) \langle \zeta'_2[t_2] | \zeta[t] \rangle d\mu(\zeta) \langle \zeta[t] | \zeta_1[t_1] \rangle \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

richiamando ancora Eq.(2.3.13).

Utilizzando la notazione di questa sezione, scriviamo

$$\langle \zeta'_2[t_2] | \zeta_1[t_1] \rangle = \int_{\psi_1(\zeta_1)}^{\psi_2(\zeta_2)} \mathcal{D}\psi[t_2, t_1] e^{\frac{i}{\hbar} S[\psi]} \quad (2.3.31)$$

dove si ricorda che i multipletti  $\zeta$  determinano univocamente i valori delle misure di ciascun operatore autoaggiunto dell'insieme completo e che ciascuno di questi operatori è costruito a partire dai campi (e di conseguenza ciascun campo è costruibile da questi operatori); perciò i campi al contorno  $\psi_1(\zeta_1)$  e  $\psi_2(\zeta_2)$  sono definiti come le configurazioni di campo univocamente determinate dalle misure di ciascun operatore dell'insieme completo; in sostanza si ha una relazione che si assume invertibile tra le configurazioni dei campi e i multipletti  $\zeta$ .

Di conseguenza, l'elemento di matrice diventa

$$\begin{aligned} \int d\mu(\zeta) \int_{\psi(\zeta)}^{\psi_2(\zeta_2)} \mathcal{D}\psi[t_2, t] \int_{\psi_1(\zeta_1)}^{\psi(\zeta)} \mathcal{D}\psi[t, t_1] \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_t^{t_2} d^n x \mathcal{L} \right] O(x) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t d^n x \mathcal{L} \right] = \\ = \int d\mu(\zeta) \int_{\psi(\zeta)}^{\psi_2} \mathcal{D}\psi[t_2, t] \int_{\psi_1}^{\psi(\zeta)} \mathcal{D}\psi[t, t_1] O(x) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} d^n x \mathcal{L} \right] \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

dove  $\psi(\zeta)$  è il campo determinato all'istante  $t$  da  $\zeta$ .

Notiamo ora che l'integrazione  $d\mu(\zeta)$  è di fatto a sua volta un'integrazione  $\mathcal{D}\psi_t$  su tutte le configurazioni del campo siccome, come evidenziato in precedenza, una configurazione del campo è univocamente determinata dal multipletto  $\zeta$ ;  $\psi(\zeta)$  in questo senso non è fissato.

Notato questo, prendendo Eq.(2.3.29) e ricordando che  $t$  è compreso tra  $t_1$  e  $t_2$  osserviamo che

$$\int d\mu(\zeta) \int_{\psi(\zeta)}^{\psi_2(\zeta_2)} \mathcal{D}\psi[t_2, t] \int_{\psi_1(\zeta_1)}^{\psi(\zeta)} \mathcal{D}\psi[t, t_1] = \int_{\psi_1(\zeta_1)}^{\psi_2(\zeta_2)} \mathcal{D}\psi[t_2, t_1] \quad (2.3.33)$$

Da questo, possiamo infine ottenere il risultato finale

$$\langle \zeta'_2[t_2] | \hat{O}(x) | \zeta_1[t_1] \rangle = \int_{\psi_1(\zeta_1)}^{\psi_2(\zeta_2)} \mathcal{D}\psi[t_2, t_1] O(x) e^{\frac{i}{\hbar} S[\psi]} \quad (2.3.34)$$

con  $O(x) := O[\zeta](x)$  dove è sottintesa la dipendenza unicamente dai campi su  $t$  data la relazione invertibile che esiste tra  $\zeta$  e  $\psi$ .

Più in generale, si dimostra allo stesso modo che

$$\langle \zeta'_2[t_2] | T \left( \hat{O}_{k_1}(x_{k_1}) \dots \hat{O}_{k_p}(x_{k_p}) \right) | \zeta_1[t_1] \rangle = \int_{\psi_1(\zeta_1)}^{\psi_2(\zeta_2)} \mathcal{D}\psi[t_2, t_1] O_{k_1}(x_{k_1}) \dots O_{k_p}(x_{k_p}) e^{\frac{i}{\hbar} S[\psi]} \quad (2.3.35)$$

sempre assumendo che ciascun operatore dipenda dai campi a un tempo  $t_k$  compreso tra  $t_1$  e  $t_2$  presi in un singolo punto  $x_k$ .

Notiamo che l'ordinamento temporale non pone pericoli per la covarianza: se i due punti  $x_k$  e  $x_{k'}$  hanno una separazione di tipo spazio, i campi presi in questi due punti commutano sempre e l'ordinamento temporale  $T(\dots)$  non è rilevante; se la separazione è di tipo tempo, allora l'ordinamento temporale è ben definito poiché non dipende dal sistema di riferimento.

In quanto il calcolo di elementi di matrice di questo tipo è estremamente comune in teoria dei campi, si capisce che il motivo per cui il path integral sia preferibile ad altri metodi è dato dal fatto che nel calcolo dell'integrale non è necessario preoccuparsi dell'ordine degli integrandi, poiché l'ordinamento temporale risulta naturalmente dal path integral. Un'ulteriore generalizzazione è possibile a partire dalla precedente

$$\langle \zeta'_2[t_2] | T \left( \hat{O}(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) \right) | \zeta_1[t_1] \rangle = \int_{\psi_1(\zeta_1)}^{\psi_2(\zeta_2)} \mathcal{D}\psi[t_2, t_1] O_{k_1}(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) e^{\frac{i}{\hbar} S[\psi]} \quad (2.3.36)$$

dove  $\hat{O}$  è una costruito a partire dai campi presi agli istanti  $t_{k_1}, \dots, t_{k_p}$ ; l'ordinamento temporale in questo caso indica un ordinamento dei termini che costituiscono l'operatore  $\hat{O}$ .

Siamo ora in grado di ottenere il principio variazionale di Schwinger dal path integral: assumendo di avere una trasformazione che non inverta l'ordine temporale e notando che la trasformazione sicuramente lascia invariato  $\mathcal{D}\psi[t_2, t_1]$  (a meno di un fattore moltiplicativo costante) così come il dominio di integrazione, poiché un'integrazione su tutte le configurazioni dei campi comprende sia le configurazioni dei campi  $\psi$  così come dei campi  $\psi'$  trasformati, si ottiene

$$\delta \langle \zeta'_2[t_2] | \zeta_1[t_1] \rangle = \frac{i}{\hbar} \int_{\psi_1(\zeta_1)}^{\psi_2(\zeta_2)} \mathcal{D}\psi[t_2, t_1] \delta S[\psi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\psi]} \quad (2.3.37)$$

e, per i risultati Eqq.(2.3.34),(2.3.35),(2.3.36) si riottiene infine il principio variazionale di Schwinger, in quanto la forma integrale di  $\hat{I}_{21}$  è già ordinata temporalmente.

Vogliamo ora ricollegarci alla teoria delle trasformazioni unitarie vista in precedenza e capire cosa comportano. Si ritorni quindi alla forma dell'operatore di trasformazione data da Eq.(2.3.2) che implica una variazione:

$$\delta \hat{A} = -\frac{i}{\hbar} \epsilon [\hat{A}, \hat{G}] \quad (2.3.38)$$

Si prenda ad esempio una variazione dell'ipersuperficie  $\sigma_2$  e di  $\zeta'_2$ ; dando una rapida occhiata a Eq.(2.3.17), si nota che solamente la seconda parte è non nulla e di conseguenza bisogna considerare la forma di  $\hat{F}[\sigma_2]$  data da Eq.(2.3.21). Assumendo che l'ipersuperficie non venga variata  $\Delta\hat{\psi}_a = \delta\hat{\psi}_a$  e

$$\hat{F}[\sigma_2] = \frac{1}{c} \int_{\sigma_2} d^{n-1}x_\mu \hat{\Pi}_b^\mu(t, \vec{x}) \delta\hat{\psi}_b(t, \vec{x}) \quad (2.3.39)$$

Selezionando una coordinata temporale, viene determinato anche il momento coniugato di ciascun campo  $\hat{\Pi}_b$  e si ha, ponendo  $\epsilon = 1$

$$\delta\hat{I}_{21} = \hat{F}[\sigma_2] = \int_{\sigma_2} dV \hat{\Pi}_b(t, \vec{x}) \delta\hat{\psi}_b(t, \vec{x}) \quad (2.3.40)$$

per cui, riprendendo il principio variazionale di Schwinger, si può trattare la trasformazione dell'elemento di matrice come se vi venisse applicata una trasformazione con

$$\hat{G} = \delta\hat{I}_{21} \quad (2.3.41)$$

considerando come agisce una trasformazione su un singolo ket.

Si supponga ora che la variazione dei campi sia costruita a partire dai campi stessi o dalle coordinate, in modo tale che commuti con ciascun campo nello spaziotempo (e quindi i campi hanno spettro continuo, per quanto mostrato sopra).

Si prenda quindi la variazione generata dall'operatore  $\hat{G}$

$$\delta\hat{\psi}_a(t, \vec{y}) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\psi}_a(t, \vec{y}), \hat{G}] \quad (2.3.42)$$

che diventa

$$\delta\hat{\psi}_a(t, \vec{y}) = -\frac{i}{\hbar} \int_{\sigma_2} dV [\hat{\psi}_a(t, \vec{y}), \hat{\Pi}_b(t, \vec{x})] \delta\hat{\psi}_b(t, \vec{x}) \quad (2.3.43)$$

la quale è risolta unicamente se

$$[\hat{\psi}_a(t, \vec{y}), \hat{\Pi}_b(t, \vec{x})] = i\hbar\delta_{ab}\delta(\vec{y} - \vec{x}) \quad (2.3.44)$$

dove i campi sono valutati sull'ipersuperficie  $\sigma_2$ , ovvero al tempo  $t$ .

In un modo analogo, facendo riferimento alla teoria delle trasformazioni, possono essere ottenute anche le equazioni di Heisenberg.

Il principio variazionale di Schwinger non solo permette quindi di ottenere le proprietà dinamiche del sistema, ma anche le relazioni di commutazione canoniche che nella precedente sezione abbiamo posto a fondamento della teoria quantistica dei campi.

Il principio variazionale di Schwinger, che può essere direttamente collegato con il path integral rappresenta uno strumento di unificazione tra simmetrie, dinamica e cinematica di un sistema, suggerendo la stretta relazione che esiste tra questi elementi; in questo modo viene esplicitata la forte dipendenza dalle simmetrie che caratterizza la teoria dei campi e che si inserisce di peso all'interno del path integral in quanto quest'ultimo è direttamente legato alla struttura dello spazio delle configurazioni su cui avviene l'integrazione. Ulteriori informazioni sono contenute in testi dedicati, e.g. [23].

# Capitolo 3

## Applicazioni

Dopo aver esposto alcuni punti teorici che possono mostrare i fondamenti dell'integrazione funzionale è necessario dare un'idea concreta delle possibilità che il path integral permette di seguire.

Rimane quindi da mostrare le applicazioni, che, sia chiaro, non si esauriscono con quanto verrà mostrato qui di seguito, ma riescono a toccare una moltitudine di applicazioni che richiederebbe ben più pagine di quelle a nostra disposizione. Un buon resoconto può essere trovato in [9].

La selezione di argomenti qui esposti mira principalmente da una parte a dare un'idea pratica dell'integrazione funzionale, ovvero come è possibile svolgere i calcoli, e dall'altra mostrare come il formalismo che deriva dal path integral è equivalente a quello conosciuto dall'ordinaria teoria quantistica.

### 3.1 Lagrangiane quadratiche in meccanica quantistica non relativistica

In questa sezione si intende tornare alla forma ottenuta inizialmente per il path integral Eq.(1.2.29) e mostrare i calcoli di alcuni sistemi non relativistici che compaiono spesso in meccanica quantistica. I risultati così ottenuti non vogliono andare oltre quanto ottenuto normalmente con la trattazione comune della meccanica quantistica, ma vogliono mostrare un percorso alternativo per lo studio della meccanica quantistica oltre a dare una prospettiva su una delle tante tecniche di calcolo.

Per semplicità ci si limiterà a sistemi unidimensionali con coordinata  $q$  dove lo spazio delle configurazioni è omeomorfo alla retta reale; vengono quindi esclusi sistemi con coordinate periodiche, che necessitano una trattazione più completa (Cfr.[9], [23]).

Si parta con una lagrangiana classica scritta nella forma

$$L_c = a(t)\dot{q}^2 + b(t)\dot{q}q + c(t)q^2 + d(t)\dot{q} + e(t)q + f(t) \quad (3.1.1)$$

Come possiamo calcolare il path integral per questa lagrangiana classica? Un modo utile sarebbe quello di svolgere un numero infinito di integrali come proposto nella definizione del path integral non relativistico, ma si tratta di una procedura che anche per i casi più semplici risulta particolarmente tediosa, nonostante sia comunque possibile in teoria in quanto si tratterebbe dell'integrazione di una forma quadratica.

Si supponga invece di avere la traiettoria  $q_c(t)$  che risolve le equazioni del moto classiche

e si scriva una traiettoria generica come

$$q(t) = q_c(t) + \tilde{q}(t)$$

dove quindi è costruita a a partire dalla sua deviazione dalla traiettoria classica; si pone inoltre  $\tilde{q}(t_a) = \tilde{q}(t_b) = 0$ .

Si calcoli ora il funzionale di azione tra i punti  $a$  e  $b$

$$\begin{aligned} I[q_c + \tilde{q}] &= I[q_c] + I[\tilde{q}] + \int_{t_a}^{t_b} dt [2a(t)\dot{q}_c\dot{\tilde{q}} + \\ &+ b(t)(\dot{q}_c\tilde{q} + q_c\dot{\tilde{q}}) + 2c(t)q_c\tilde{q} - f(t)] \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Si consideri ora che, tramite un' integrazione per parti il precedente funzionale può essere ridotto in termini con integrande ordinate in potenze di  $\tilde{q}$  fino al secondo grado. Ricordando il principio di azione stazionaria Eq.(1.1.7) che determina la traiettoria classica  $q_c$ , vediamo che i termini con integranda lineare in  $\tilde{q}$  devono essere necessariamente nulli, ovvero

$$I[q] = S(q_b, t_b; q_a, t_a) + I_2[\tilde{q}] \quad (3.1.3)$$

con  $S(q_b, t_b; q_a, t_a) := S_c[b, a]$  funzione caratteristica di Hamilton e  $I_2$  dato da

$$I_2[\tilde{q}] = \int_{t_a}^{t_b} dt [a(t)\dot{\tilde{q}}^2 + b(t)\dot{\tilde{q}}\tilde{q} + c(t)\tilde{q}^2] \quad (3.1.4)$$

Nell'integrazione funzionale  $\mathcal{D}q = \mathcal{D}\tilde{q}$  siccome per ogni istante  $t$  il valore  $q_c(t)$  è fissato e siccome naturalmente la funzione caratteristica di Hamilton non dipende dai vari percorsi su cui avviene l'integrazione, si ottiene come risultato per il path integral

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = e^{\frac{i}{\hbar}S_c[b,a]} \int_{(0,t_a)}^{(0,t_b)} \mathcal{D}\tilde{q} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} I_2[\tilde{q}] \right] \quad (3.1.5)$$

dove l'integrazione funzionale avviene su tutti i percorsi chiusi che partono da 0; per questo motivo il path integral dell'equazione precedente non può dipendere dalle coordinate  $q_a$  e  $q_b$ , ma solamente dai tempi  $t_a$  e  $t_b$  così da determinare la forma generale:

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = e^{\frac{i}{\hbar}S_c[b,a]} F(t_b, t_a) \quad (3.1.6)$$

Vediamo quindi che la dipendenza spaziale della precedente ampiezza di transizione è completamente contenuta nella funzione caratteristica di Hamilton; notiamo inoltre che la dipendenza dai coefficienti  $d(t)$ ,  $e(t)$  ed  $f(t)$  è anch'essa totalmente contenuta in  $S_c[b, a]$  poiché di fatto non compaiono nella formula per  $F(t_b, t_a)$ .

Come visto anche in precedenza, nel calcolo dei path integrals, siccome non sempre è necessario calcolarsi l'intera espressione dell'ampiezza di transizione, si tende a lasciare fuori dal calcolo un fattore moltiplicativo come  $F(t_b, t_a)$ . Non per questo il suo calcolo, quando possibile, va ignorato.

In generale, data una lagrangiana dipendente al massimo da termini di secondo grado nelle variabili e nelle loro derivate, è possibile una semplificazione di questo tipo.

Alcuni esempi possono essere utili per mostrare l'idea che sta a fondamento di questi

calcoli.

Si parta dalla particella libera descritta dalla lagrangiana:

$$L_c = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \quad (3.1.7)$$

che determina delle traiettorie classiche date da

$$q_c(t) = q_a + \frac{q_b - q_a}{t_b - t_a}(t - t_a) \quad (3.1.8)$$

da cui è possibile calcolare la funzione caratteristica di Hamilton

$$S_c[b, a] = \frac{1}{2}m \frac{(q_b - q_a)^2}{t_b - t_a} \quad (3.1.9)$$

Vediamo ora che data l'invarianza del sistema per traslazioni temporali, allora anche  $F(t_b, t_a)$  deve essere dipendente da  $t_b - t_a$  per cui  $F(t_b, t_a) = F(t_b - t_a)$ . Risulta possibile ottenere altre proprietà: ricordando Eq.(1.2.33) per le ampiezze di probabilità, vediamo che si traduce in

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = \int dq_c U(t_b, q_b; t_c, q_c) U(t_c, q_c; t_a, q_a) \quad (3.1.10)$$

dove, inserendo i risultati ottenuti in precedenza e si ottiene l'uguaglianza

$$F(T + S) = \left( \frac{2\pi\hbar i}{m} \frac{TS}{T + S} \right)^{\frac{1}{2}} F(T)F(S) \quad (3.1.11)$$

e, definendo

$$F(T) = \left( \frac{m}{2\pi\hbar iT} \right)^{\frac{1}{2}} f(T) \quad (3.1.12)$$

si ottiene

$$f(T + S) = f(T)f(S) \quad (3.1.13)$$

che ha come soluzione

$$f(T) = e^{\alpha T} \quad (3.1.14)$$

con  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Per determinare  $f$  basta mettersi nel limite  $t_b - t_a \rightarrow 0$  dove possiamo fare un confronto con Eq.(1.1.5) per cui  $f(t_b - t_a) = 1$  che equivale a porre  $\alpha = 0$ .

Otteniamo come risultato finale

$$U(t_b, q_b; t_a, q_a) = \left( \frac{m}{2\pi\hbar i(t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{im}{2\hbar} \frac{(q_b - q_a)^2}{t_b - t_a} \right) \quad (3.1.15)$$

La medesima soluzione può essere ottenuta dalla normale formulazione della meccanica quantistica utilizzando le soluzioni dell'equazione di Schrödinger oppure calcolando una serie di integrali gaussiani e dimostrando per induzione che convergono al risultato finale qui ottenuto; il vantaggio di questo approccio è dato dal fattore di normalizzazione che è compreso nel calcolo.

Il risultato precedente mostra che la probabilità per unità di lunghezza che una particella che viene individuata in  $q_0$  al tempo  $t_0$  si trovi nel punto  $q$  al tempo  $t$  è data da

$$P(q, t) = \frac{m}{2\pi\hbar(t - t_0)} \quad (3.1.16)$$

Da notare che non è una probabilità normalizzabile, in quanto gli autostati della posizione e dell'impulso considerati nella soluzione dell'equazione di Schrödinger non sono normalizzabili a loro volta. La probabilità precedente va intesa come probabilità relativa, ovvero sono rilevanti i rapporti tra le varie probabilità piuttosto che il valore di  $P$ ; dati due processi di misura, uno tra i tempi  $t_0$  e  $t_1$  e uno tra i tempi  $t_0$  e  $t_2$ , si avrà allora

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} \quad (3.1.17)$$

il che significa che tanto maggiore è il tempo che passa tra le due misure, tanto minore è la probabilità di trovare una particella in una data posizione; questo fenomeno indica la dispersione del pacchetto d'onda.

Un altro sistema che viene comunemente trattato è l'oscillatore armonico descritto dalla lagrangiana

$$L_c = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \quad (3.1.18)$$

Come per la particella libera, si ha invarianza per traslazioni temporali, quindi, per semplicità, porremo  $t_a = 0$  e  $t_b = T$ . In tal caso, una soluzione dell'equazione del moto è data da

$$q(t) = \left( \frac{q_b - q_a \cos \omega T}{\sin \omega T} \right) \sin \omega t + q_a \cos \omega t \quad (3.1.19)$$

che permette di calcolare

$$S_c[b, a] = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} [(q_b^2 + q_a^2) \cos \omega T - 2q_a q_b] \quad (3.1.20)$$

Ottenere  $F(T)$  diventa molto più complesso in questa situazione, ma può essere fatto ricorrendo a un'altra tecnica comune nei path integrals.

Si prenda la formula per  $F$ , ridefinendo  $\tilde{q}$ , data da

$$F(T) = \int_{(0,0)}^{(0,T)} \mathcal{D}q \exp \left( \frac{im}{2\hbar} \int_0^T dt (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \right) \quad (3.1.21)$$

Siccome tutti i percorsi vanno da 0 a 0, possiamo trattarli come percorsi periodici con periodo  $T$  o  $T/n$  definito per tutti i tempi. Possiamo quindi usare una serie di Fourier per rappresentare i percorsi

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left( \frac{n\pi t}{T} \right) \quad (3.1.22)$$

I multipletti  $a_n$  determinano univocamente i percorsi, per cui possiamo pensare l'integrazione funzionale  $\mathcal{D}q$  come un'integrazione su tutti i possibili valori di  $a_n$ ; per un calcolo preciso è però necessario considerare anche lo Jacobiano  $J$  del cambio di variabili



di integrazione.

Si calcolino oragli integrali:

$$\frac{m}{2} \int_0^T dt \dot{q}^2 = \frac{m}{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{T} \frac{m\pi}{T} a_n a_m \int_0^T dt \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{m\pi t}{T}\right)$$

e infine, si ottiene

$$\frac{m}{2} \int_0^T dt \dot{q}^2 = \frac{mT}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 a_n^2 \quad (3.1.23)$$

Analogamente, si ottiene

$$\frac{m\omega^2}{2} \int_0^T dt q^2 = \frac{mT\omega^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad (3.1.24)$$

$J$  è indipendente dagli  $a_n$  siccome si tratta di un cambio di coordinate lineare, per cui, supponendo una suddivisione di  $T$  in  $N$  intervalli infinitesimi  $\epsilon$ , saranno necessari  $N-1$  coefficienti  $a_n$  per determinare univocamente il valore di ciascun percorso all'istante  $t_k = k\epsilon$ . Di conseguenza, utilizzando la definizione di  $\mathcal{D}q$  vista in Eq.(1.2.28) e considerando il cambio di variabili di integrazione  $q_k \rightarrow a_n$  con  $n = 1, \dots, N-1$  che, per quanto scritto sopra è non singolare, si ottiene

$$F(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} J \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{n=1}^{N-1} da_n \exp \left\{ \frac{imT}{4\hbar} \left[ \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right] a_n^2 \right\} \quad (3.1.25)$$

L'integranda viene separata in tanti pezzi ciascuno dipendente unicamente da  $a_n$  e si tratta di integrali gaussiani che possono essere facilmente valutati e danno come risultato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da_n \left( \frac{m}{2\pi\hbar i \epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{imT}{4\hbar} \left[ \left( \frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right] a_n^2 \right\} = \left( \frac{2}{\epsilon T} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{n^2\pi^2}{T^2} - \omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.1.26)$$

e si ottiene che  $F(T)$  è proporzionale a

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2\pi^2}{T^2} - \omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{T}{n\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\omega^2 T^2}{n^2\pi^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.1.27)$$

Vogliamo considerare, per confrontare con la particella libera, il limite  $\omega \rightarrow 0$ .

Siccome sia  $J$  che il primo termine moltiplicativo dell'equazione precedente non sono dipendenti da  $\omega$ , questi formano la costante  $C$ . Il secondo termine moltiplicativo invece, si dimostra essere uguale a  $[\omega T / \sin \omega T]^{\frac{1}{2}}$ . Otteniamo infine

$$F(T) = C \left( \frac{\omega T}{\sin \omega T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.28)$$

Si consideri ora il limite  $\omega \rightarrow 0$  che riduce il problema a quello della particella libera, per cui  $F(T)$  si deve ridurre a quello dato in Eq.(3.1.15); determinato in questo modo  $C$ , si ottiene infine

$$U(q_b, T; q_a, 0) = \left( \frac{m\omega}{2\pi\hbar i \sin \omega T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} [(q_b^2 + q_a^2) \cos \omega T - 2q_a q_b] \right) \quad (3.1.29)$$

Già per un sistema così semplice come l'oscillatore armonico sono necessari moltissimi passaggi per ottenere la forma completa dell'ampiezza di transizione; questo potrebbe suggerire che la potenza del path integral non sta nella sua efficienza per i calcoli, ma nella sua trattazione unitaria di elementi teorici che sono stati evidenziati nei capitoli precedenti. Nonostante questo, possiamo avere grandi vantaggi se ci accontentiamo solamente della dipendenza spaziale della nostra ampiezza di transizione per una lagrangiana quadratica, siccome in questo caso basta calcolarsi la funzione caratteristica di Hamilton.

Oltretutto, un calcolo dell'ampiezza di transizione con il path integral non richiede l'introduzione delle autofunzioni dell'hamiltoniano. Ad esempio nel sistema con un campo di forza costante ( $e(t) = e$  e tutti gli altri coefficienti nulli), dove le autofunzioni dell'hamiltoniano assumono una forma matematica difficile da maneggiare, si ha invece un risultato piuttosto semplice

$$U(q_b, T; q_a, 0) = \left( \frac{m}{2\pi\hbar iT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{m(q_b - q_a)^2}{2T} + \frac{eT(q_b + q_a)}{2} - \frac{e^2 T^3}{24m} \right] \right\} \quad (3.1.30)$$

Notiamo che in questo caso  $F(t_b, t_a)$  coincide con quello della particella libera siccome, come evidenziato in precedenza, nella formula di  $F(t_b, t_a)$  non compare il coefficiente  $f(t)$ .

Vediamo quindi che anche limitandosi ai soli elementi applicativi, il path integral può essere comunque una valida alternativa alla formulazione ordinaria della meccanica quantistica.

## 3.2 Formalismo operatoriale

Se si volesse seguire la prescrizione di Feynman nella costruzione della meccanica quantistica non relativistica a partire dal path integral, rimarrebbe da mostrare come si può introdurre la teoria degli operatori autoaggiunti fondamentale per la quantizzazione canonica di una teoria. Si è visto nel precedente capitolo che a partire dal principio variazionale di Schwinger si possono riottenere le relazioni di commutazione canoniche, suggerendo una via alternativa per riottenere l'azione degli operatori a partire da principi quale quello di Schwinger.

Per le presenti applicazioni ci si limiterà a risultati non relativistici per sistemi unidimensionali.

Si definiscono le seguenti notazioni introdotte da Feynman:

$$\langle \chi | F | \psi \rangle_S = \int dq_a \int dq_b \int_{(q_a, t_a)}^{(q_b, t_b)} \mathcal{D}q \left[ \chi^*(q_b, t_b) F[q] e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \psi(q_a, t_a) \right] \quad (3.2.1)$$

dato un funzionale  $F[q]$  e date due funzioni d'onda  $\chi$  e  $\psi$ .

Nel caso in cui non fossero considerati rilevanti le funzioni d'onda dell'elemento di matrice oppure il percorso scelto per l'integrazione, si preferisce scrivere

$$\langle F \rangle_S = \int \mathcal{D}q \left[ F[q] e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \right] \quad (3.2.2)$$

che, nonostante l'esponenziale complesso nell'integranda non funga da peso statistico, comunque si può trattare la precedente equazione come una sorta di valore di aspettazione di  $F$ .

Si osservi fin da subito che aggiungere una variazione dei percorsi  $q'(t) = q(t) + \epsilon\eta(t)$  lascia invariato il valore di  $\langle F \rangle_S$  siccome non modifica il dominio di integrazione e  $\mathcal{D}(q + \eta) = \mathcal{D}q$ .

Vediamo quindi, ricordando la definizione di derivata funzionale, che

$$0 = \int \mathcal{D}q \left[ F[q + \eta] e^{\frac{i}{\hbar} S[q + \eta]} - F[q] e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \right] = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \int dt \left[ \frac{\delta F}{\delta q(t)} + \frac{i}{\hbar} \frac{\delta S}{\delta q(t)} F[q] \right] \eta(t) + O(\eta^2) \quad (3.2.3)$$

che implica, data l'arbitrarietà di  $\eta(t)$  a meno degli estremi, come risultato finale

$$\left\langle \frac{\delta F}{\delta q(t)} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle \frac{\delta S}{\delta q(t)} F \right\rangle_S \quad (3.2.4)$$

che può essere vista come una formulazione alternativa del principio variazionale di Schwinger.

Si supponga ora di suddividere l'intervallo temporale su cui si vuole studiare una transizione, in un grande numero di intervalli infinitesimi come già è stato fatto in precedenza. Indicando con  $q_k$  la coordinata della traiettoria  $q(t)$  all'istante  $t_k = t_0 + k\epsilon$ , un funzionale generico può essere scritto come funzione di tutti i  $q_k$

$$F[q] = \lim_{N \rightarrow \infty} F(q_0, q_1, \dots, q_N) \quad (3.2.5)$$

Per cui, lasciando sottinteso il limite per  $N$ , si ha

$$\frac{\delta F}{\delta q(t_k)} = \frac{\partial F}{\partial q_k} \quad (3.2.6)$$

per cui

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial q_k} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle \frac{\partial S}{\partial q_k} F \right\rangle_S \quad (3.2.7)$$

Ricordando ora la forma discretizzata del funzionale d'azione data in Eq.(1.2.28), si scrive in conclusione

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial q_k} \right\rangle_S = \frac{i\epsilon}{\hbar} \left\langle \left[ \frac{m}{\epsilon^2} (q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1}) + \frac{\partial V}{\partial q}(q_k) \right] F \right\rangle_S \quad (3.2.8)$$

che possiamo riscrivere come

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial q_k} \right\rangle_S = \frac{i\epsilon}{\hbar} \left\langle \left[ m\ddot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q}(q_k) \right] F \right\rangle_S \quad (3.2.9)$$

utilizzando la definizione

$$\ddot{q}_k = \frac{\dot{q}_k - \dot{q}_{k-1}}{\epsilon} = \frac{q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1}}{\epsilon^2} \quad (3.2.10)$$

per l'accelerazione.

In questa equazione sono contenuti vari risultati sulla dinamica del sistema. Si prenda ad esempio  $F = 1$ , e si ottiene l'equazione di Newton quantistica

$$\langle m\ddot{q} \rangle_S = - \left\langle \frac{\partial V}{\partial q} \right\rangle_S \quad (3.2.11)$$

che equivale a dire che la media pesata su tutti i percorsi dell'accelerazione è proporzionale alla media pesata del gradiente del potenziale. In sostanza possiamo riottenere le equazioni del moto. In generale, siccome  $S = \epsilon \sum L_c(q_k, \frac{q_{k+1}-q_k}{\epsilon}) := \epsilon \sum L_k$ , si avrà

$$\left\langle \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial L_{k-1}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L_k}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L_k}{\partial q} \right\rangle_S = \left\langle \frac{\partial L_k}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_k}{\partial \dot{q}} \right) \right\rangle_S = 0 \quad (3.2.12)$$

ovvero si riottengono le equazioni di Eulero Lagrange.

Ponendo invece  $F = q_k$ , si ottiene

$$\langle 1 \rangle_S = \frac{i}{\hbar} \left\langle m q_k \left[ \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} - \frac{q_k - q_{k-1}}{\epsilon} \right] + \epsilon q_k \frac{\partial V}{\partial q}(q_k) \right\rangle_S \quad (3.2.13)$$

Nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , solamente uno dei termini nel lato destro dell'equazione precedente è non trascurabile e si ottiene

$$m \langle \dot{q}_k q_k - q_k \dot{q}_{k-1} \rangle_S = -i\hbar \langle 1 \rangle_S \quad (3.2.14)$$

L'equazione precedente sembra suggerire che, ordinando temporalmente i termini e interpretando  $m\dot{q}_k$  come la quantità di moto a tempo  $t_k$ , si sta scrivendo una relazione di commutazione canonica. Effettivamente, ricordando il risultato per la teoria dei campi Eq.(2.3.36), vediamo che facendo le dovute identificazioni  $\psi \rightarrow q$ ,  $x \rightarrow t$ , possiamo scrivere

$$\langle q_b, t_b | T(\hat{O}(t_b, \dots, t_a)) | q_a, t_a \rangle = \langle O \rangle_S \quad (3.2.15)$$

e vediamo che il risultato Eq.(3.2.14) è di fatto, come ci aspettavamo, la relazione di commutazione canonica  $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ .

Questo non sorprende siccome è un risultato già ottenuto per la teoria dei campi, ma il fatto che sia stato dimostrato anche per la teoria non relativistica sembra suggerire che il path integral non è un semplice strumento matematico legato indissolubilmente alla teoria sotto esame, ma che piuttosto è un principio guida in grado di riassumere una serie di proprietà della teoria a partire da pochi semplici principi. L'interpretazione del path integral come rappresentazione di una particella che si muove su un'infinità di percorsi per poi seguire, a livello classico, solamente quello che rende l'azione stazionaria, porta come conseguenza l'intera teoria quantistica; la semplicità delle ipotesi fondamentali per il path integral insieme all'enorme quantità di risultati che ne derivano non sono da ignorare, in quanto sono indicatori di una teoria coerente.

Siccome nel limite di  $\epsilon \rightarrow 0$  si può porre  $q_{k+1} = q_k + \epsilon \dot{q}_k$ ,  $\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + \epsilon \ddot{q}_k$ , si avrà  $q_{k+1}\dot{q}_k - q_k\dot{q}_{k-1} = O(\epsilon)$  e poiché in Eq.(3.2.14) si sono ignorati i termini  $O(\epsilon)$ , si può ottenere, sostituendo  $q_k\dot{q}_{k-1} \rightarrow q_{k+1}\dot{q}_k$  e il primo  $q_k$  con  $q_{k+1}$ ,

$$\left\langle \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} \right)^2 \right\rangle_S = \frac{\hbar i}{m\epsilon} \langle 1 \rangle_S \quad (3.2.16)$$

Questa conclusione sembrerebbe indicare che, aumentando la precisione di campionamento di un percorso quantomeccanico, ovvero diminuendo  $\epsilon$ , aumenta il valore d'aspettazione del modulo della velocità fino a divergere; questo mostra che sostanzialmente, il percorso tipico della meccanica quantistica non ha una tangente ben definita, ma è non differenziabile in ciascun suo punto. Questo indica anche che non è possibile scrivere la media pesata dell'energia cinetica come  $\frac{m}{2}\dot{q}_k^2$ , ma bisogna invece utilizzare la forma

$$\frac{m}{2} \left\langle \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} \right) \left( \frac{q_k - q_{k-1}}{\epsilon} \right) \right\rangle_S \quad (3.2.17)$$

la quale non diverge.

Quanto mostrato qui mostra una caratteristica più ampia del path integral, siccome è in grado di distinguere grandezze separate da intervalli infinitesimi come visto qui sopra. Supponiamo di prendere una qualsiasi quantità classica  $f(q, p)$  la quale permette di definire  $\langle f(q, p) \rangle_S$  senza alcun problema. Siccome, alla luce di Eq.(3.2.15) si ha una connessione tra la media pesata della quantità e l'operatore associato, risulta possibile ottenere informazioni sul formalismo operatoriale della teoria. Ad esempio, presa la grandezza  $p^2 q^2$ , siccome si è visto nell'esempio dell'energia cinetica che diversi componenti possono dover essere presi a tempi diversi, ciascuna scelta di ordinamento temporale delle componenti impone una scelta sull'operatore associato; il path integral in questo modo rappresenta un approccio per i problemi di ordinamento. Purtroppo, non risulta sufficiente per eliminare completamente le ambiguità di ordinamento.

Si riprenda ora la grandezza  $\langle \chi | F | \psi \rangle_S$  per trattare gli elementi di matrice degli operatori. Si prenda ad esempio  $F = m \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon}$ , per cui si ha

$$\langle \chi | F | \psi \rangle_S = \frac{m}{\epsilon} [\langle \chi | q_{k+1} | \psi \rangle_S - \langle \chi | q_k | \psi \rangle_S] \quad (3.2.18)$$

Ricordando che  $q_k = \int_{t_0}^{t_N} dt \delta(t_k - t) q(t)$  vediamo che

$$\langle q_k \rangle_S = \int dq_k U(q_b, t_b; q_k, t_k) q_k U(q_k, t_k; q_a, t_a) \quad (3.2.19)$$

ponendo come estremi del percorso generico  $(q_a, t_a)$  e  $(q_b, t_b)$ .

Considerando che

$$\psi(q_b, t_b) = \int dq_a U(t_b, q_b; t_a, q_a) \psi(q_a, t_a) \quad (3.2.20)$$

e scrivendo  $q$  al posto di  $q_k$ , si ottiene per il lato destro di Eq.(3.2.18)

$$\frac{m}{\epsilon} \int dq [\chi^*(q, t_k + \epsilon) \psi(q, t_k + \epsilon) - \chi^*(q, t_k) \psi(q, t_k)] q \quad (3.2.21)$$

Prendendo l'equazione di Schrödinger, che si ricorda esser stata ottenuta indipendentemente a partire dal path integral, e indicando con  $(H\psi)(q, t) = \langle q | \hat{H} | \psi(t) \rangle$  nella notazione ordinaria, possiamo scrivere

$$\frac{mi}{\hbar} \int dq [(H\chi)^*(q, t_k) \psi(q, t_k) - \chi^*(q, t_k) (H\psi)(q, t_k)] q \quad (3.2.22)$$

che, conoscendo la proprietà di autoaggiunzione dell'operatore  $H$  in rappresentazione di Schrödinger, facilmente dimostrabile dalla sua forma esplicita, restituisce il risultato per un tempo generico

$$\langle \chi | m\dot{q} | \psi \rangle_S = -\frac{im}{\hbar} \int dq \chi^*(q, t) [(qH - Hq)\psi](q, t) \quad (3.2.23)$$

Valutando il commutatore interno all'integrale, si ottiene infine

$$\langle \chi | m\dot{q} | \psi \rangle_S = -i\hbar \int dq \chi^*(q, t) \frac{\partial \psi}{\partial q}(q, t) \quad (3.2.24)$$

Si è ottenuta in questo modo la forma dell'operatore quantità di moto, il tutto a partire dal path integral.

Si capisce quindi che in linea di principio, a partire dal corrispondente classico  $F(q_0, \dots, q_N)$  di una certa quantità, dove è necessario aver determinato l'ordinamento temporale dei termini in modo adeguato, si può ottenere, con procedimenti analoghi a quelli visti qui sopra, la sua rappresentazione in quanto operatore.

Si tratta ad ogni modo di processi laboriosi e forse anche meno eleganti di quanto si è abituati a vedere nella formulazione di Dirac della meccanica quantistica, ma è estremamente interessante il fatto che a partire dalla semplice formulazione del path integral possano essere ripresi gli elementi fondamentali per quantizzare la teoria quantistica. Va anche notato che i calcoli fatti fino ad ora sono stati svolti facendo riferimento a una rappresentazione della funzione d'onda sullo spazio delle configurazioni, ma ricordando l'esistenza del path integral sullo spazio delle fasi si comprende come esista una possibilità molto maggiore, seguendo un processo analogo che faccia uso dei momenti invece che delle coordinate.

### 3.3 Path integral per stati coerenti

In teoria dei campi un campo è costruito come una serie di oscillatori armonici, ma sia il campo che il suo momento coniugato non hanno significato fisico evidente. Possiamo in alternativa concentrarci sugli operatori di creazione e distruzione, poiché da questi è possibile ottenere degli autostati chiamati *stati coerenti*. Si veda più precisamente come.

Si introduca un problema dell'oscillatore armonico unidimensionale definito da

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2) \quad (3.3.1)$$

dove si è posto  $m = \omega = \hbar = 1$ .

Possiamo definire gli operatori di creazione e distruzione nel modo seguente:

$$\hat{a} = \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad (3.3.2)$$

che si dimostra rispettano la regola di commutazione

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (3.3.3)$$

Definendo l'operatore

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (3.3.4)$$

questo avrà autovalori  $n$  interi non negativi con autoket normalizzati dati da

$$|n\rangle = (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \frac{1}{\sqrt{n!}} \quad (3.3.5)$$

dove l'autoket  $|0\rangle$  è normalizzato ed è definito dalla relazione

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (3.3.6)$$

Inoltre si mostra che

$$\hat{H} = \hat{N} + \frac{1}{2} \quad (3.3.7)$$

Costruiamo quindi uno *stato coerente* normalizzato

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2} + z\hat{a}^\dagger\right) |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \quad (3.3.8)$$

definito dalla proprietà

$$\hat{a}|z\rangle = |z\rangle z \quad (3.3.9)$$

con  $z$  numero complesso.

Si dimostra che gli stati coerenti seguono un'evoluzione temporale data da

$$|z(t)\rangle = |ze^{-it}\rangle e^{-i\frac{t}{2}} \quad (3.3.10)$$

e vediamo che si ottengono i valori di aspettazione

$$\langle z(t)|\hat{Q}|z(t)\rangle = \sqrt{2}|z| \cos(\varphi_0 - t) \quad (3.3.11)$$

$$\langle z(t)|\hat{P}|z(t)\rangle = \sqrt{2}|z| \sin(\varphi_0 - t) \quad (3.3.12)$$

ponendo  $z = |z|e^{i\varphi_0}$ . Gli stati coerenti rappresentano quindi l'analogo quantistico del normale stato oscillatorio classico. Oltre a questo, gli stati coerenti saturano il principio di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta Q \Delta P = \frac{1}{2} \quad (3.3.13)$$

Si prenda ora la relazione di completezza della base di autoket di  $\hat{N}$  data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1 \quad (3.3.14)$$

e si dimostra che questa è equivalente alla relazione di completezza

$$\frac{1}{\pi} \int |z\rangle d^2z \langle z| = 1 \quad d^2z = d\Re[z] d\Im[z] \quad (3.3.15)$$

dove  $\Re$  e  $\Im$  indicano rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso. Da notare che la relazione di completezza non è unica siccome gli stati

$|z\rangle$  formano un insieme di autostati più grande di una base necessaria per lo spazio di Hilbert, e non sono nemmeno ortogonali tra di loro.

Si definisca ora la funzione d'onda per la rappresentazione degli stati coerenti

$$\psi(z) := e^{\frac{|z|^2}{2}} \langle z^* | \psi \rangle \quad (3.3.16)$$

Va notato che  $|z^*\rangle$  e  $|z\rangle$ , dove con  $z^*$  si indica il coniugato complesso di  $z$ , sono ket distinti; risulta quindi evidente che, se si vuole ottenere una funzione  $\psi(z)$  di  $z$  e non di  $z^*$ , è necessario calcolare un prodotto interno con il bra

$$\langle z^* | = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \langle n |$$

La definizione di Eq.(3.3.16) introduce la seguente forma del prodotto interno

$$\langle \chi | \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z e^{-|z|^2} \chi(z)^* \psi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int dz dz^* e^{-|z|^2} \chi(z)^* \psi(z) \quad (3.3.17)$$

dove si è usata la relazione di completezza con  $|z^*\rangle$  invece che con  $|z\rangle$ .

In base all'Eq.(3.3.16) possiamo ottenere i seguenti risultati tramite le regole di commutazione di  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$

$$e^{\frac{|z|^2}{2}} \langle z | \hat{a}^\dagger | \psi \rangle = \psi(z^*) z^* \quad e^{\frac{|z|^2}{2}} \langle z | \hat{a} | \psi \rangle = \frac{\partial \psi}{\partial z^*}(z^*) \quad (3.3.18)$$

che permettono quindi di definire un'associazione tra lo spazio di Hilbert dei bra e ket su cui agiscono gli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  e lo spazio di Hilbert delle funzioni analitiche  $\psi(z)$  con prodotto scalare dato da Eq.(3.3.15) dove l'azione degli operatori di creazione e distruzione è data da

$$\hat{a}^\dagger \rightarrow z^* \quad \hat{a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z^*} \quad (3.3.19)$$

Tale spazio è chiamato *spazio di Bargmann-Fock*. Alla luce di questo, data la definizione Eq.(3.3.5), capiamo che la base ortonormale corrispondente nello spazio delle funzioni è data da

$$f_n(z^*) = \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} \quad (3.3.20)$$

Vediamo ora come possiamo rappresentare un operatore nello spazio di Bargmann-Fock, considerando che un operatore generico può essere rappresentato come

$$\hat{A} = \sum_{n,m=0}^{\infty} |n\rangle A_{n,m} \langle m| \quad (3.3.21)$$

Utilizzando la relazione di completezza, si ottiene

$$(A\psi)(z^*) := e^{\frac{|z|^2}{2}} \langle z | \hat{A} | \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} \int d^2\xi \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} A_{n,m} \frac{\xi^m}{\sqrt{m!}} e^{-|\xi|^2} \psi(\xi^*) \quad (3.3.22)$$



per cui un operatore può essere rappresentato dal nucleo integrale

$$A(z^*, \xi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} A_{n,m} \frac{\xi^m}{\sqrt{m!}} e^{-|\xi|^2} \quad (3.3.23)$$

Vediamo che un nucleo integrale di questo tipo gode della seguente proprietà

$$(A_1 A_2)(z^*, \xi) = \frac{1}{\pi} \int d^2 \eta e^{-|\eta|^2} A_1(z^*, \eta) A_2(\eta^*, \xi) \quad (3.3.24)$$

Si definisca ora l'ordinamento normale di un operatore  $\hat{f}(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ , indicato con  $:\hat{f}(\hat{a}^\dagger, \hat{a}):$ , dove il simbolo così dato indica l'operatore  $\hat{f}$  dove tutti gli operatori di distruzione  $\hat{a}$  sono messi alla destra di tutti gli operatori di creazione  $\hat{a}^\dagger$ , in modo tale da avere  $:\hat{f}(\hat{a}^\dagger, \hat{a}): |0\rangle = 0$ ; ad esempio  $:\hat{a}\hat{a}^\dagger := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ . L'ordinamento normale viene utilizzato in fisica per eliminare i termini infiniti dell'energia dello stato fondamentale, per cui si richiede spesso di utilizzare un operatore hamiltoniano ordinato normalmente.

Si dimostra allora che

$$|0\rangle\langle 0| =: e^{-\hat{a}^\dagger\hat{a}} : \quad (3.3.25)$$

per cui è possibile scrivere

$$\hat{A} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle \frac{A_{n,m}}{\sqrt{n!m!}} \langle 0| \hat{a}^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{A_{n,m}}{\sqrt{n!m!}} : \hat{a}^{\dagger n} e^{-\hat{a}^\dagger\hat{a}} \hat{a}^m : \quad (3.3.26)$$

che può essere riscritta nella forma

$$\hat{A} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{A_{n,m}^N}{\sqrt{n!m!}} \hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \quad (3.3.27)$$

Questo implica l'esistenza di un nuovo nucleo per l'operatore  $\hat{A}$  che si definisce scrivendo

$$A^N(z^*, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} A_{n,m}^N \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \quad (3.3.28)$$

Notiamo ora che esiste un nucleo analogo alla delta di Dirac, come si mostra

$$\begin{aligned} f(z^*) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n|f\rangle = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int d^2 \xi e^{-|\xi|^2} \frac{z^{*n} \xi^n}{n!} f(\xi^*) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2 \xi e^{-|\xi|^2 + z^* \xi} f(\xi^*) \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

A partire dal risultato precedente è possibile ottenere

$$(\hat{a}^{\dagger n} \hat{a}^m \psi)(z^*) = z^{*n} \frac{d^m}{dz^{*m}} \psi(z^*) = \frac{1}{\pi} \int d^2 \xi e^{-|\xi|^2 + z^* \xi} z^{*n} \xi^m \psi(\xi^*) \quad (3.3.30)$$

e inserendo questo risultato nella definizione in Eq.(3.3.28) e confrontando con Eq.(3.3.23) si ottiene il risultato

$$A(z^*, \xi) = e^{z^* \xi} A^N(z^*, \xi) \quad (3.3.31)$$

Con i risultati ottenuti possiamo finalmente concentrarci sul problema del calcolo di un path integral nello spazio di Bargmann-Fock, considerando un operatore Hamiltoniano indipendente dal tempo costruito con soli operatori di creazione e distruzione ordinati normalmente (ricordando che in questo modo si possono evitare infiniti). Il suo nucleo integrale normale sarà indicato con  $h(z^*, \xi)$ .

Si potrebbe pensare di definire la grandezza

$$U(z_b^*, t_b; z_a, t_a)$$

analogamente a come è stato fatto per le rappresentazioni comuni, ovvero come l'ampiezza di transizione tra le due misure tra i due istanti. In questo caso ha poco senso fisico svolgere una misura degli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  in quanto non sono autoaggiunti e non possono rappresentare degli osservabili. Per questo, ci limiteremo a dire semplicemente che si tratta del nucleo integrale dell'operatore evoluzione temporale  $\hat{U}(t_b, t_a) = \exp(-i(t_b - t_a)\hat{H})$ .

Siccome sappiamo che l'operatore hamiltoniano è normalmente ordinato e considerando Eq.(3.3.28) nel suo confronto con Eq.(3.3.27), avremo necessariamente per  $t_b - t_a = \epsilon$  infinitesimo

$$U(z^*, \epsilon; \xi, 0) = \exp(z^* \xi - i\epsilon h(z^*, \xi)) \quad (3.3.32)$$

che, per  $\epsilon = 0$  si riduce nel nucleo dell'identità, come si vede in Eq.(3.3.29).

Per ottenere il risultato completo è possibile comporre un numero infinito di nuclei di questo tipo facendo uso della relazione Eq.(3.3.24) e questo permette di ottenere agevolmente il risultato finale per  $U(z_b^*, t_b; z_a, t_a)$  (dove si ricorda che  $2id^2z = dzdz^*$  e  $\epsilon = (t_b - t_a)/N$ ,  $z_N = z_b$  e  $z_a = z_0$ )

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{dz_k dz_k^*}{2\pi i} \exp \left[ z_b^* z_{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1} (z_k^* z_{k-1} - |z_k|^2) - i\epsilon \sum_{k=0}^{N-1} h(z_{k+1}^*, z_k) \right] \quad (3.3.33)$$

che può essere riscritto in notazione simbolica come

$$U(z_b^*, t_b; z_a, t_a) = \int_{(z_a, t_a)}^{(z_b^*, t_b)} \mathcal{D}(z, z^*) \exp \left\{ \frac{|z_b|^2 + |z_a|^2}{2} + i \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ \frac{\dot{z}^* z - z^* \dot{z}}{2i} - h(z^*, z) \right] \right\} \quad (3.3.34)$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto secondo un processo come quello visto per la dimostrazione della formula del path integral in meccanica quantistica non relativistica. Va notato che, alla luce del path integral e di come avviene l'integrazione funzionale,  $z$  e  $z^*$  vanno trattate come variabili indipendenti, per cui non sono l'una il coniugato complesso dell'altra.

I percorsi su cui avviene l'integrazione non sono percorsi nello spazio delle configurazioni, ma sono invece percorsi nello spazio delle fasi; infatti si mostra, a partire dalle definizioni Eq.(3.3.2) trasportate nello spazio di Bargmann-Fock che l'integranda è esattamente uguale a quella vista nel path integral sullo spazio delle fasi. Esattamente come avviene nell'integrazione nello spazio delle fasi, anche in questo caso le traiettorie non sono continue; in generale, il fatto che  $|z\rangle$  non formino una base ortonormale porta a considerare dei percorsi meno regolari di quelli visti nello spazio delle configurazioni già fortemente irregolari (si ricordi Eq.(3.2.16)).

Infatti, l'ampiezza  $\langle z|e^{-it\hat{H}}|z'\rangle$  non si riduce a una delta di Dirac per  $t = 0$  siccome gli stati  $|z\rangle$  non individuano univocamente una grandezza fisica.

Il vantaggio di una formulazione di questo tipo è in realtà nascosto nella teoria dei campi: come si è visto un campo può essere trattato come una collezione di oscillatori armonici, così da costruirlo come una sommatoria di operatori di creazione e distruzione; risulta quindi naturale un approccio al path integral dove si considerano le variabili  $z_k^*$  e  $z_k$  associate a un dato modo vibrazionale e si calcola la loro propagazione temporale. Una trattazione del genere permette di riottenere il path integral per campi, ma facendo ricorso a una formulazione più semplice.

Un altro vantaggio di questo tipo di trattazione è quello che può essere estesa a campi fermionici, dove le variabili  $z$  e  $z^*$  sono sostituite con delle grandezze anticommutanti  $\eta$  e  $\eta^*$  caratterizzate da  $\eta\eta^* = -\eta^*\eta$  e  $\eta^2 = \eta^{*2} = 0$ . In questo modo è possibile trattare una categoria più ampia di campi quantistici, tra cui rientrano i campi spinoriali, ovvero di spin  $\frac{1}{2}$ . Per ulteriori informazioni, si possono consultare i testi [9], [14].

Si prenda ora come esempio il caso  $\hat{H} = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} - f(t)\hat{a}^\dagger - f(t)^*\hat{a}$ , mantenendo  $\hbar = 1$ ; l'integranda in Eq.(3.3.34) è quadratica nelle variabili  $z$  e  $z^*$ , per cui possiamo utilizzare i risultati per lagrangiane quadratiche.

Considerando il rapporto tra  $p, q$  e  $z, z^*$ , le equazioni del moto sono date da

$$\begin{aligned} \dot{z} + [i\omega z - f(t)] &= 0 \\ \dot{z}^* - [i\omega z^* - f(t)^*] &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

che sono risolte da

$$\begin{aligned} z(t) &= z_a e^{-i\omega(t-t_a)} + i \int_{t_a}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} f(t') \\ z^*(t) &= z_b^* e^{i\omega(t-t_b)} + i \int_t^{t_b} dt' e^{i\omega(t-t')} f(t')^* \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

Calcolando in questo modo la funzione caratteristica di Hamilton corrispondente a questo sistema, ovvero

$$S_c[b, a] = \frac{|z_b|^2 + |z_a|^2}{2i} + \int_{t_a}^{t_b} dt \left[ \frac{\dot{z}^* z - z^* \dot{z}}{2i} - h(z^*, z) \right] \quad (3.3.37)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} -i z_b^* e^{-i\omega(t_b-t_a)} z_a + \int_{t_a}^{t_b} dt (z_b^* e^{-i\omega(t_b-t)} f(t) + f(t)^* e^{-i\omega(t-t_a)} z_a) - \\ + i \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} dt' f(t)^* e^{-i\omega(t-t')} f(t') \theta(t-t') \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

e, considerando Eq.(3.1.6), si ottiene

$$U(z_b^*, t_b; z_a, t_a) = F(t_b, t_a) e^{iS_c[b, a]} \quad (3.3.39)$$

Facendo lo stesso calcolo con una serie di integrazioni gaussiane si può mostrare che  $F(t_b, t_a) = 1$ .

Prendendo ora un campo scalare reale in uno spazio a una dimensione descritto dall'equazione

$$\hat{\varphi}(x) = \int dk [\hat{a}_k e^{ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{-ikx}] \quad (3.3.40)$$

(come si è visto nei capitoli precedenti) e l'operatore hamiltoniano

$$\hat{H} = \int dk [\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k - f_k(t) \hat{a}_k^\dagger - f_k(t)^* \hat{a}_k] \quad (3.3.41)$$

dove i termini con  $f$  sono interpretabili come termini di sorgenti esterne lineari nel campo. Siccome l'hamiltoniano è una combinazione lineare di infiniti operatori  $\hat{H}_k$  disaccoppiati,  $U$  sarebbe un prodotto degli infiniti termini  $U_k$  relativi al singolo oscillatore. Prendendo Eq.(3.3.39), è facile vedere che si ha come risultato per l'intero sistema

$$U(z_b^*, t_b; z_a, t_a) = \exp \left[ z_{kb}^* e^{-i\omega(t_b-t_a)} z_{ka} + i \int_{t_a}^{t_b} dt (z_{kb}^* e^{-i\omega(t_b-t)} f_k(t) + f_k(t)^* e^{-i\omega(t-t_a)} z_{ka}) - \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} dt' f_k(t)^* e^{-i\omega(t-t')} f_k(t') \theta(t-t') \right] \quad (3.3.42)$$

dove si indica con  $z$  l'insieme di tutti i valori  $z_k$ . Il risultato precedente permette di esprimere il path integral per i campi scalari utilizzando un risultato particolarmente semplice.



# Conclusioni

In questa tesi è stato presentato il path integral in uno sviluppo sia storico che concettuale.

In così poche pagine non è stato di certo possibile riportare nella sua interezza un argomento tanto vasto e probabilmente non sarebbe comunque possibile esaurire l'argomento; chiaramente non perché l'integrazione funzionale rappresenta una fonte inestinguibile di applicazioni (seppur non sia tanto lontano dal vero), ma piuttosto perché la sua stessa concettualizzazione e introduzione in meccanica quantistica amplia tremendamente gli orizzonti e riporta in auge il quesito su cosa sia davvero una teoria quantistica.

Si è visto che il path integral è in grado di riunire elementi cinematici e dinamici sotto un unico principio, ma la sua introduzione lascia interdetti: a livello fisico, che cosa accade? L'integrazione su un numero infinito di percorsi indica un qualcosa di reale?

Difficile dirlo, poiché sembra sempre più evidente che, se si vuole trovare una nuova teoria che unifica gravità e meccanica quantistica, sia necessario ripensare in un qualche modo alla teoria quantistica per metter in coerenza la forte relazione che esiste tra il mondo quantistico e una trattazione geometrica dello spaziotempo.

In questo il path integral è forse il primo segno evidente di un approccio che necessariamente doveva presentarsi, ma rimane da chiedersi se è necessario farne uso come chiave di volta per una nuova formulazione oppure usarlo come semplice principio guida.

Si consideri che la teoria quantistica dei campi per come la conosciamo oggi non esisterebbe senza il contributo di Feynman e l'introduzione del path integral, ma anche che la moderna teoria delle stringhe si fonda su tale formulazione, dove ad esempio si impiega un'integrazione su tutte le geometrie possibili dello spaziotempo.

Come già evidenziato, il path integral non deve essere preso come mero strumento di calcolo, poiché in tal caso si rischia di rimanere delusi dalla difficoltà nel risolvere anche problemi abbastanza banali perdendo di vista la sua importanza, ma deve essere pensato come un elemento concettuale aggiuntivo che non dipende tanto dalla teoria che lo utilizza quanto piuttosto dall'approccio che lo caratterizza.

Si pensi ad esempio alla teoria dei gruppi che vede applicazioni negli ambiti più disparati della fisica poiché è in grado di trattare in modo compatto le trasformazioni; allo stesso modo il path integral rappresenta uno strumento che geometrizza la dinamica e permette di racchiudere un'ampia gamma di risultati: le relazioni di commutazione relativistiche e non, le equazioni del moto, le simmetrie del sistema.

Per questo l'elemento  $\mathcal{D}q$  è puramente simbolico, dati gli infiniti significati che può assumere  $q$ .

Per questi motivi, possiamo affermare che il programma di Feynman nel voler racchiudere l'intera teoria quantistica all'interno di pochi semplici postulati che partissero dal path integral è stato compiuto, ma si potrebbe anche sperare in un futuro dove l'intera

fisica fondamentale è in grado di ricondursi a tale principio.  
Questa tesi ha voluto in un qualche modo mostrare questa via.

# Appendice A

## Integrali Gaussiani

In questa appendice si riportano le soluzioni per il calcolo di integrali gaussiani utili per la valutazione di path integrals. La seguente trattazione proviene da [23].

Sia  $\mathbb{X}$  uno spazio di Banach che può essere descritto da percorsi

$$x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^D \quad (\text{A.1})$$

dove  $\mathbb{T}$  è un intervallo temporale e  $\mathbb{R}^D$  è uno spazio delle configurazioni in meccanica quantistica. In teoria quantistica dei campi si può avere un'applicazione dalla varietà  $\mathbb{M}^D$  a uno spazio tensoriale o spinoriale, a seconda del tipo di campo.

Sia  $\mathbb{X}^*$  il duale di  $\mathbb{X}$ , ovvero lo spazio di tutte le forme lineari  $x^* : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  dove indicheremo con  $\langle x^*, x \rangle$  il valore che assume  $x^*$  in  $x$ .

Siano  $Q(x)$  e  $W(x^*)$  due forme quadratiche rispettivamente su  $\mathbb{X}$  e su  $\mathbb{X}^*$  che definiamo imponendo l'esistenza di due mappe lineari

$$D : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}^* \quad G : \mathbb{X}^* \rightarrow \mathbb{X}$$

tali che: Siano l'una l'inversa dell'altra

$$DG = 1 \quad GD = 1 \quad (\text{A.2})$$

Siano simmetriche

$$\begin{aligned} \langle Dx, y \rangle &= \langle Dy, x \rangle & x, y \in \mathbb{X} \\ \langle x^*, Gy^* \rangle &= \langle y^*, Gx^* \rangle & x^*, y^* \in \mathbb{X} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

e

$$Q(x) = \langle Dx, x \rangle \quad W(x^*) = \langle x^*, Gx^* \rangle \quad (\text{A.4})$$

Si definisce anche  $W(x^*, y^*) = \langle x^*, Gy^* \rangle$  per  $x^*, y^* \in \mathbb{X}^*$ . Definiamo l'elemento di volume gaussiano sullo spazio di Banach  $\mathbb{X}$  tramite la sua trasformata di Fourier  $\mathcal{F}\Gamma_{s,Q}$  data da

$$(\mathcal{F}\Gamma_{s,Q})(x^*) := \int_{\mathbb{X}} d\Gamma_{s,Q}(x) \exp(-2\pi i \langle x^*, x \rangle) = \exp(-s\pi W(x^*)) \quad (\text{A.5})$$

Facciamo anche la definizione formale

$$d\Gamma_{s,Q} = \mathcal{D}_{s,Q}(x) \exp\left(-\frac{\pi}{s}Q(x)\right) \quad (\text{A.6})$$



---

dove  $s = 1, i$ .  $\mathcal{D}_{s,Q}(x)$  può essere pensata come una misura naturale sullo spazio  $\mathbb{X}$ . Sia ad esempio  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$  con prodotto scalare definito positivo  $g(\cdot, \cdot)$ , per cui è possibile costruire un isomorfismo tra  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{X}^*$  dato da

$$x^* = g(x, \cdot) \tag{A.7}$$

e di conseguenza si possono identificare i due spazi tra loro.  $D$  è una matrice simmetrica  $M_{N \times N}(\mathbb{R})$  con inversa  $G \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ . Si ottiene in questo modo

$$(\mathcal{F}\Gamma_{s,Q})(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{D}_{s,Q}x' \exp\left(-\frac{\pi}{s}g(Dx', x') - 2\pi ig(x', x)\right) = \exp(-s\pi g(x, Gx)) \tag{A.8}$$

Si dimostra, tramite cambi di variabili e il teorema spettrale (necessario per diagonalizzare le matrici) come risultato generale

$$\int_{\mathbb{R}^N} d^D x \exp\left(-\frac{\pi}{s}g(Dx', x') - 2\pi ig(x', x)\right) = (\det(gD))^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{N}{2}} \exp(-s\pi g(x, D^{-1}x)) \tag{A.9}$$

dove  $g$  indica la matrice simmetrica associata al prodotto scalare.

Un risultato del genere può essere visto anche per uno spazio di Hilbert come quello della meccanica quantistica, dove al posto della matrice simmetrica può essere sostituito un operatore autoaggiunto. In linea di principio, l'Eq.(A.5) dà una regola generale per il calcolo di integrali gaussiani.

# Bibliografia

- [1] Schrödinger, Erwin. *Collected Papers on Wave Mechanics: Third Edition*. American Mathematical Soc., 2003.
- [2] P. A. M. Dirac. “The Lagrangian in Quantum Mechanics.” *Phys. Z. Sov.* 3 (1933) 64.
- [3] Dirac, Paul A. M. *I Principi Della Meccanica Quantistica*. Bollati Boringhieri, 1971.
- [4] Feynman, Richard P. “The Principle of Least Action in Quantum Mechanics.” PhDT, 1 Jan. 1942. Accessed 26 June 2024.
- [5] Feynman, Richard P. “Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics.” *Physical Review*, vol. 76, no. 6, 15 Sept. 1949, pp. 769–789.
- [6] Feynman, Richard P. “Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction.” *Physical Review*, vol. 80, no. 3, 1 Nov. 1950, pp. 440–457.
- [7] Feynman, Richard P. “Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics.” *Reviews of Modern Physics*, vol. 20, no. 2, 1 Apr. 1948, pp. 367–387.
- [8] Feynman, Richard P., et al. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Mineola, Ny Dover Publ, 2010.
- [9] Schulman, L. S. *Techniques and Applications of Path Integration*. Courier Corporation, 10 Oct. 2012.
- [10] Hall, Brian C. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer ; New York, Springer ; Beijing Shi, 2016.
- [11] Wheeler, John A., and Richard P. Feynman. “Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action.” *Reviews of Modern Physics*, vol. 21, no. 3, 1 July 1949, pp. 425–433.
- [12] Burgess, Mark. *Classical Covariant Fields*. Cambridge University Press, 4 Apr. 2002.
- [13] Hawking, S W, and Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 27 Feb. 1975.

- [14] Itzykson, Claude, and Jean-Bernard Zuber. *Quantum Field Theory*. Courier Corporation, 20 Sept. 2012.
- [15] S. Tomonaga. “On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields.” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 1, no. 2, 1 Aug. 1946, pp. 27–42. Accessed 7 June 2023.
- [16] Rovelli, Carlo. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 29 Nov. 2007.
- [17] Schwartz, Matthew D. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 15 Dec. 2013.
- [18] Maggiore, Michele. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2005.
- [19] Schwinger, Julian. “The Theory of Quantized Fields. I.” *Physical Review*, vol. 82, no. 6, 15 June 1951, pp. 914–927. Accessed 13 Dec. 2021.
- [20] DeWitt, Bryce S. *The Global Approach to Quantum Field Theory*. International Series of Monographs, 10 Sept. 2014.
- [21] DeWitt, Bryce S. *Supermanifolds*. CUP Archive, 1984.
- [22] Yourgrau, Wolfgang and Mandelstam, Stanley. *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*. Courier Corporation, 26 Apr. 2012.
- [23] Cartier, Pierre, and Cecile DeWitt-Morette. *Functional Integration*. Cambridge University Press, 30 Nov. 2006.

# Ringraziamenti

Nella propria vita è necessario tenere a mente quali sono i principi a cui far riferimento per non cadere nello sconforto e brancolare nel buio; è infatti inevitabile perdersi, in assenza di luci.

Il principio di causalità (corretto o meno che sia), sopra gli altri, rappresenta a mio parere l'elemento essenziale per comprendere la realtà che ci circonda e non sarebbe possibile per me affermare di poterne fare a meno senza che si perda l'intero senso delle mie azioni.

Per questo, ritengo che questa tesi non avrebbe avuto la stessa forma se non ci fossero state le persone che ringrazierò di seguito, ma naturalmente mi limiterò a ringraziare chi, a mio parere, ha lasciato maggiormente il suo segno in questi mesi di fermento che hanno accompagnato la produzione della presente tesi. In certa misura, tutte queste persone sono racchiuse in queste pagine in quanto causa remota di esse.

Ringrazio la mia famiglia: mia mamma e mio babbo, le mie sorelle Anna, Alice e Benedetta che mi hanno tenuto compagnia in casa nelle battute finali di redazione di questa tesi. Anche più banalmente, se preferite, non potrei essere qui senza di loro. Ringrazio anche i miei nonni che hanno sempre creduto in quello che faccio, a prescindere dalle circostanze.

Ringrazio i miei amici, a Cesena e Bologna, poiché la loro presenza ha permesso di rendermi più leggeri questi mesi; da non tralasciare, l'ispirazione che ho potuto trarre nel confrontarmi e discutere con loro.

Un ringraziamento speciale va al mio relatore, il Professore Fiorenzo Bastianelli, per la sua grandissima disponibilità e gentilezza. I suoi consigli sono stati di grandissimo aiuto e hanno permesso l'ultimazione di questa tesi.

Il ringraziamento più importante va alla mia morosa, Elisa, in quanto ritengo che nulla di questo sarebbe stato possibile senza la sua presenza; a partire dall'organizzazione (considerate il sottoscritto come un pessimo pianificatore) fino all'ultimazione della tesi: la sua impronta è onnipresente in queste pagine. La ringrazio per le sue parole, il suo amore, il suo entusiasmo, per aver sempre creduto in me, anche più di quanto io avrei mai potuto fare; in un certo senso, possiamo dire che sia lei a laurearsi grazie a questa tesi. La sua vicinanza in questi mesi, che ammetto possano essere risultati difficili da gestire per chi ha avuto modo di interagire con il sottoscritto, rappresentano la persona che è e che ho scelto di amare.

Tenendo a mente la centralità del principio di causalità, ritengo che nessuno si meriti di essere ringraziato più di lei e spero di averla ripagata, in piccolissima misura, con le poche pagine che si suppone abbiate letto.