

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Introduzione alla Teoria Dei Modelli
e sue Applicazioni ai Campi
Algebricamente Chiusi

Tesi di Laurea in Logica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Martino Lupini

Presentata da:
Edoardo Bianchini

Anno Accademico 2023/2024

*“Se c’è una soluzione perché ti preoccupi?
Se non c’è una soluzione perché ti preoccupi?”*

Introduzione

La teoria dei modelli è una branca della logica matematica che analizza strutture matematiche attraverso lo studio delle formule che esprimono le proprietà delle stesse, o dei loro elementi, tramite il formalismo dato dalla logica del primo ordine. In breve, una formula è un'espressione composta da variabili (solitamente indicate con x, y, z, \dots), connettivi logici ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$), quantificatori (\forall, \exists) e altri simboli, che dipendono dalla struttura che si sta studiando. Questi ultimi possono essere costanti, funzioni o relazioni, e insieme formano quello che si chiama un linguaggio.

Prendiamo come esempio il linguaggio dei gruppi, composto dal simbolo e , rappresentante una costante, e dal simbolo \cdot , rappresentante una funzione binaria. Una proprietà che possiamo scrivere con una formula è che e funge da elemento neutro rispetto alla funzione \cdot ,

$$\forall x (x \cdot e = x \wedge e \cdot x = x).$$

Un insieme di formule in cui tutte le variabili sono quantificate, ovvero che esprimono proprietà della struttura invece che di specifici elementi, si dice una teoria. Le formule che costituiscono una teoria si dicono anche assiomi della teoria, e possono essere infiniti.

Continuando il precedente esempio, la teoria dei gruppi è quindi l'insieme degli assiomi che, se soddisfatti, conferiscono a un insieme la struttura di gruppo. Un gruppo dato, quindi, si dice un modello della teoria dei gruppi.

La nascita della teoria dei modelli come branca indipendente è dovuta a Alfred Tarski, che negli anni '50 ha coniato questo nome in seguito a vari risultati della prima metà del XX secolo, i quali hanno formato le basi per questo campo di studio. Questi includono i lavori sulle strutture logiche di Thoralf Skolem, Leopold Löwenheim, e Kurt Gödel, in particolare il suo Teorema di Completezza.

Il primo capitolo di questa tesi consiste in un'introduzione alla logica del primo ordine, e in una presentazione di alcuni risultati di algebra commutativa che saranno necessari per il resto dell'elaborato.

Il secondo capitolo tratterà gli strumenti essenziali per lo studio di teorie e dei loro modelli. Una teoria di cui esiste almeno un modello si dice soddisfacibile. Il primo risultato che affronteremo, e probabilmente il più importante, è il Teorema di Compattezza, il quale afferma che una teoria è soddisfacibile se e solo se lo è ogni suo sottoinsieme finito. Poiché nella teoria dei modelli è frequente la costruzione di nuove teorie di cui si vuole trovare un modello, questa conclusione fornisce un'importante semplificazione al dimostrarne la soddisfacibilità. La dimostrazione che forniremo sfrutta una costruzione dovuta a Leon Henkin, che consiste nell'espandere il linguaggio della teoria con infinite costanti.

Successivamente, esamineremo come definire per strutture generiche concetti analoghi a quelli di omomorfismo e isomorfismo per gruppi o campi. In particolare, discuteremo come una struttura si può immergere in un'altra, il che ci permetterà di parlare di sottostrutture ed estensioni. Vedremo essere di particolare importanza le estensioni elementari, ovvero estensioni di strutture che mantengono la veridicità di ogni formula. A tal proposito, dimostreremo i Teoremi di Löwenheim-Skolem, i quali affermano che ogni struttura di cardinalità infinita ha estensioni elementari di ogni cardinalità maggiore e sottostrutture elementari di ogni cardinalità infinita minore.

Introdurremo poi i tipi, strumento per studiare le proprietà degli elementi di una struttura. Un tipo di una teoria è un insieme massimale di formule tutte soddisfatte da un elemento di almeno un modello della teoria. Possiamo quindi pensarli come le 'possibili' proprietà di un elemento, che potrebbe appartenere o meno a un dato modello. In tal caso si dice che il modello rispettivamente realizza o omette il tipo. Tratteremo a riguardo i Teoremi di Realizzazione e Omissione dei tipi, che stabiliscono quando ciò può accadere. La dimostrazione del Teorema di Omissione sfrutterà la costruzione di Henkin già usata nel Teorema di Compattezza.

Concluderemo il capitolo dando due nozioni di 'piccolezza' di modelli di una teoria, ovvero quelle di modello primo, un modello che si immerge in ogni altro modello della

teoria, e modello atomico, un modello che realizza il minor numero possibile di tipi, e vedremo come queste sono collegate.

Nel terzo e ultimo capitolo useremo gli strumenti descritti sinora per studiare la teoria dei campi algebricamente chiusi. Questa ha come linguaggio il linguaggio dei campi, costituito dalle funzioni $+$, \cdot e $-$, e dalle costanti 0 e 1 . Dopo averne esplicitato gli assiomi, dimostreremo che questa teoria possiede la proprietà di eliminazione dei quantificatori: ogni formula è equivalente a una senza quantificatori. Nel linguaggio dei campi, questo equivale a essere congiunzione o disgiunzione di formule della forma $f(x) = 0$ o $g(x) \neq 0$, dove f e g sono polinomi a coefficienti interi.

Un corollario notevole di questa proprietà è che, fissando un campo algebricamente chiuso, ogni altro campo algebricamente chiuso della stessa caratteristica soddisfa esattamente le stesse formule. Si dice che la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica p è completa.

Questo risultato ci permetterà di classificare i tipi della teoria, e di conseguenza di dimostrare l'esistenza della chiusura algebrica dei campi \mathbb{F}_p , ovvero di un modello primo della teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica p .

Un'altra conseguenza della completezza è il Principio di Lefschetz, il quale afferma che una formula è soddisfatta dai campi algebricamente chiusi di caratteristica zero se e solo se è soddisfatta dai campi algebricamente chiusi di caratteristica p , per p arbitrariamente grande. Come applicazione di questo principio, esamineremo il Teorema di Ax-Grothendieck, secondo il quale ogni funzione polinomiale da \mathbb{K}^n a \mathbb{K}^n , se è iniettiva, è anche suriettiva.

L'elaborato si conclude con una dimostrazione del Teorema degli Zeri di Hilbert che fa uso dei precedenti risultati di teoria dei modelli.

Indice

Introduzione	i
1 Nozioni Preliminari	1
1.1 Introduzione alla Logica del Primo Ordine	1
1.1.1 Linguaggi, Strutture e Formule	1
1.1.2 Teorie, Modelli e Completezza	4
1.2 Preliminari di Algebra Commutativa	6
2 Strumenti Fondamentali di Teoria dei Modelli	7
2.1 Teorema di Compattezza	7
2.2 Immersioni e Teoremi di Löwenheim-Skolem	13
2.3 n -tipi in Modelli e Teorie	20
2.3.1 Realizzazione e Omissione	21
2.3.2 Modelli Primi e Atomici	27
3 Teoria dei Campi Algebricamente Chiusi	31
3.1 Eliminazione dei Quantificatori	33
3.2 Completezza e Modelli Primi	40
3.3 Principio di Lefschetz e Teorema di Ax-Grothendieck	45
3.4 Teorema degli Zeri di Hilbert	48

Capitolo 1

Nozioni Preliminari

1.1 Introduzione alla Logica del Primo Ordine

In questa sezione daremo le definizioni principali della logica del primo ordine, sistema formale che ci permette di esprimere proprietà di strutture matematiche e di loro elementi tramite formule, di cui faremo uso nella totalità di questo elaborato.

1.1.1 Linguaggi, Strutture e Formule

Definizione 1.1. Un *linguaggio* \mathcal{L} è un insieme di oggetti, detti *simboli*, divisi in tre categorie: simboli di costante, che indicheremo con c , simboli di funzione, che indicheremo con f e simboli di relazione, che indicheremo con R .

Ogni simbolo di funzione e relazione ha associato un numero naturale, detto *arietà*, che indicherà il numero di argomenti a cui il simbolo può essere applicato.

Definizione 1.2. Dato un linguaggio \mathcal{L} , una \mathcal{L} -*struttura* \mathcal{M} consiste di un insieme M , chiamato *universo*, dotato di *interpretazioni* di ogni simbolo di \mathcal{L} :

- Ogni simbolo di costante c ha come interpretazione un elemento $c^{\mathcal{M}} \in M$.
- Ogni simbolo di funzione f di arietà n ha come interpretazione una funzione $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$.

- Ogni simbolo di relazione R di arietà n ha come interpretazione una relazione $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$.

Fissiamo ora un linguaggio \mathcal{L} e un nuovo insieme V di simboli, detti *variabili*.

Definizione 1.3. Definiamo ricorsivamente l'insieme degli \mathcal{L} -termini:

- Ogni variabile $x \in V$ è un \mathcal{L} -termine.
- Ogni simbolo di costante $c \in \mathcal{L}$ è un \mathcal{L} -termine.
- Se t_1, \dots, t_n sono \mathcal{L} -termini, e $f \in \mathcal{L}$ è un simbolo di funzione di arietà n , allora l'espressione $f(t_1, \dots, t_n)$ è un \mathcal{L} -termine.

Sia \mathcal{M} è una \mathcal{L} -struttura, $t = t(x_1, \dots, x_n)$ è un termine ottenuto usando le variabili x_1, \dots, x_n e $\underline{m} = (m_1, \dots, m_n)$ è una tupla di elementi di M . Allora $t^{\mathcal{M}}(\underline{m})$ è l'elemento di M ottenuto usando le interpretazioni in \mathcal{M} dei simboli di funzione e di costante che compaiono in t , sostituendo le variabili x_i con l'elemento m_i . Più precisamente:

- Se t è la singola variabile x_i , allora $t^{\mathcal{M}}(\underline{m}) = m_i$.
- Se t è il simbolo di costante c , allora $t^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}}$.
- Se t è $f(t_1, \dots, t_r)$, dove f è un simbolo di funzione di arietà r , allora $t^{\mathcal{M}}(\underline{m}) = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(\underline{m}), \dots, t_r^{\mathcal{M}}(\underline{m}))$.

Definizione 1.4. Dato un linguaggio \mathcal{L} , definiamo \mathcal{L} -formula atomica un'espressione della forma $t_1 = t_2$, dove t_1 e t_2 sono \mathcal{L} -termini, oppure della forma $R(t_1, \dots, t_n)$, dove t_1, \dots, t_n sono \mathcal{L} -termini e R è un simbolo di relazione di \mathcal{L} di arietà n .

L'insieme delle \mathcal{L} -formule è quindi definito ricorsivamente:

- Se φ è una \mathcal{L} -formula atomica, allora è una \mathcal{L} -formula.
- Se φ e ψ sono \mathcal{L} -formule, allora $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$ sono \mathcal{L} -formule.
- Se φ è una \mathcal{L} -formula e $x \in V$ una variabile, allora $\exists x \varphi$ e $\forall x \varphi$ sono \mathcal{L} -formule.

Una \mathcal{L} -formula si dice *senza quantificatori* se nella sua costruzione non compaiono i quantificatori $\exists x$ o $\forall x$. Le variabili che compaiono in una \mathcal{L} -formula φ senza comparire in un quantificatore si dicono *variabili libere*, e spesso le esplicheremo insieme alla formula scrivendo $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, o più brevemente $\varphi(\underline{x})$.

Una \mathcal{L} -formula senza variabili libere si chiama \mathcal{L} -*sentenza*.

Per semplicità, scriveremo spesso la formula $\neg(t_1 = t_2)$ come $t_1 \neq t_2$.

Osservazione 1.1. L'insieme delle \mathcal{L} -formule ha cardinalità $\max\{|\mathcal{L}|, \aleph_0\}$, in quanto si possono pensare come un sottoinsieme delle sequenze finite di simboli del linguaggio \mathcal{L} , i simboli logici (ovvero connettivi, quantificatori, parentesi e il simbolo di uguale) e le variabili di V , che assumiamo numerabili.

Spieghiamo ora cosa significa che una formula è 'vera' o 'falsa' in una struttura, sfruttando la loro costruzione ricorsiva.

Definizione 1.5. Sia \mathcal{M} una \mathcal{L} -struttura, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una \mathcal{L} -formula in n variabili libere e $\underline{m} = (m_1, \dots, m_n) \in M^n$. Diciamo che \mathcal{M} *soddisfa* φ in m_1, \dots, m_n , scrivendo $\mathcal{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n)$, quando:

- Se $\varphi(\underline{x})$ è atomica di forma $t_1 = t_2$, allora $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$ se e solo se $t_1^{\mathcal{M}}(\underline{m}) = t_2^{\mathcal{M}}(\underline{m})$.
- Se $\varphi(\underline{x})$ è atomica di forma $R(t_1, \dots, t_s)$, allora $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$ se e solo se $(t_1^{\mathcal{M}}(\underline{m}), \dots, t_s^{\mathcal{M}}(\underline{m})) \in R^{\mathcal{M}}$.
- Se $\varphi(\underline{x}) = \neg\psi(\underline{x})$, allora $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$ se e solo se $\mathcal{M} \not\models \psi(\underline{m})$.
- Se $\varphi(\underline{x}) = \psi_1(\underline{x}) \wedge \psi_2(\underline{x})$, allora $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$ se e solo se $\mathcal{M} \models \psi_1(\underline{m})$ e $\mathcal{M} \models \psi_2(\underline{m})$.
- Se $\varphi(\underline{x}) = \psi_1(\underline{x}) \vee \psi_2(\underline{x})$, allora $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$ se e solo se $\mathcal{M} \models \psi_1(\underline{m})$ o $\mathcal{M} \models \psi_2(\underline{m})$.
- Se $\varphi(\underline{x}) = \psi_1(\underline{x}) \rightarrow \psi_2(\underline{x})$, allora $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$ se e solo se $\mathcal{M} \not\models \psi_1(\underline{m})$ o $\mathcal{M} \models \psi_2(\underline{m})$.
- Se $\varphi(\underline{x}) = \psi_1(\underline{x}) \leftrightarrow \psi_2(\underline{x})$, allora $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$ se e solo se $\mathcal{M} \models \psi_1(\underline{m}) \rightarrow \psi_2(\underline{m})$ e $\mathcal{M} \models \psi_2(\underline{m}) \rightarrow \psi_1(\underline{m})$.

- Se $\varphi(\underline{x}) = \exists y \psi(y, \underline{x})$, allora $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$ se e solo se $\mathcal{M} \models \psi(a, \underline{m})$ per un certo $a \in M$.
- Se $\varphi(\underline{x}) = \forall y \psi(y, \underline{x})$, allora $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m})$ se e solo se $\mathcal{M} \models \psi(a, \underline{m})$ per ogni $a \in M$.

Due \mathcal{L} -formule $\varphi(\underline{x})$ e $\psi(\underline{x})$ sono *equivalenti* se in ogni \mathcal{L} -struttura \mathcal{M} e per ogni $\underline{m} \in M^n$ si ha

$$\mathcal{M} \models \varphi(\underline{m}) \iff \mathcal{M} \models \psi(\underline{m}).$$

Ogni formula è equivalente a una ottenuta utilizzando soltanto i connettivi \neg e \wedge , e il quantificatore \exists . Spesso nell'elaborato dimostreremo quindi un enunciato sulle formule procedendo per induzione sul numero di connettivi e quantificatori, mostrando il passo base per formule atomiche, e che l'enunciato rimane verificato applicando \neg , \wedge o \exists nel passo induttivo.

Dalla logica proposizionale deriva il seguente risultato riguardante le formule senza quantificatori, che saranno molto importanti nel Capitolo 3.

Proposizione 1.2 (Forma Normale Disgiuntiva). *Ogni \mathcal{L} -formula senza quantificatori $\varphi(\underline{x})$ è equivalente a una \mathcal{L} -formula della forma*

$$\bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^l \theta_{i,j}(\underline{x}) \wedge \bigwedge_{s=1}^k \neg \xi_{i,s}(\underline{x}) \right),$$

dove ogni $\theta_{i,j}$ e $\xi_{i,s}$ è una \mathcal{L} -formula atomica.

1.1.2 Teorie, Modelli e Completezza

Definizione 1.6. Dato un linguaggio \mathcal{L} , una \mathcal{L} -teoria è un insieme T di \mathcal{L} -sentenze.

Una \mathcal{L} -struttura \mathcal{M} tale che \mathcal{M} soddisfa φ per ogni $\varphi \in T$ si dice *modello* di T , e ciò lo indichiamo con $\mathcal{M} \models T$.

Se esiste almeno un modello di T , allora diciamo che T è una teoria *soddisfacibile*, altrimenti diciamo che T è una teoria *insoddisfacibile*.

Occasionalmente, in particolare nella sezione 2.3, useremo una nozione di soddisfacibilità anche per insiemi di formule con variabili libere. Un insieme P di \mathcal{L} -formule

in variabili libere x_1, \dots, x_n si dice soddisfacibile se esiste una \mathcal{L} -struttura \mathcal{M} e dei suoi elementi m_1, \dots, m_n tali che, per ogni $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in P$, \mathcal{M} soddisfi $\varphi(m_1, \dots, m_n)$.

Stiamo essenzialmente trattando le variabili x_1, \dots, x_n come simboli di costante.

Definizione 1.7. Sia T una \mathcal{L} -teoria e φ una \mathcal{L} -sentenza. Se per ogni modello \mathcal{M} di T si ha che \mathcal{M} soddisfa φ , allora diciamo che T *implica logicamente* φ , e ciò lo indichiamo sempre con $T \models \varphi$.

Definizione 1.8. Una \mathcal{L} -teoria T si dice *completa* se per ogni \mathcal{L} -sentenza φ si ha

$$T \models \varphi \quad \text{oppure} \quad T \models \neg\varphi.$$

T si dice *massimale* se per ogni \mathcal{L} -sentenza φ si ha

$$\varphi \in T \quad \text{oppure} \quad \neg\varphi \in T.$$

Quindi i modelli di una teoria completa soddisfano tutti le stesse \mathcal{L} -sentenze. Completezza e massimalità sono quasi equivalenti, infatti ogni teoria massimale è completa, e ogni teoria completa si può estendere alla teoria massimale

$$\{\varphi \mid \varphi \text{ è una } \mathcal{L}\text{-sentenza e } T \models \varphi\}.$$

Una teoria massimale banale è quella costituita da tutte le sentenze del linguaggio \mathcal{L} . Ma poichè una struttura non può soddisfare contemporaneamente una sentenza e la sua negazione, questa non è soddisfacibile.

A partire da una \mathcal{L} -struttura qualsiasi \mathcal{M} , possiamo invece sempre considerare la teoria massimale e soddisfacibile

$$\text{Th}(\mathcal{M}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ è una } \mathcal{L}\text{-sentenza e } \mathcal{M} \models \varphi\},$$

che chiamiamo *teoria completa di \mathcal{M}* .

Definizione 1.9. Due \mathcal{L} -strutture \mathcal{M} e \mathcal{N} si dicono *elementarmente equivalenti* se $\text{Th}(\mathcal{M}) = \text{Th}(\mathcal{N})$

1.2 Preliminari di Algebra Commutativa

In questa sezione enunciamo, senza dimostrazione, alcuni risultati di teoria dei campi e algebra commutativa, di cui faremo uso nelle dimostrazioni del Capitolo 3.

Teorema 1.3. *Sia \mathbb{K} un campo, $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{K}$ una sua estensione e $\alpha \in \mathbb{F}$ algebrico su \mathbb{K} , ovvero radice di un polinomio a coefficienti in \mathbb{K} . Allora esiste ed è unico, a meno di scalari, il polinomio minimo di α , ovvero un $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ irriducibile tale che $f(\alpha) = 0$.*

Teorema 1.4. *Se \mathbb{K} è un campo finito, e $\mathbb{F} \supseteq \mathbb{K}$ una sua estensione di grado finito, allora \mathbb{F} è un campo finito. In particolare, se $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$ è un'estensione, e $\alpha \in \mathbb{L}$ è algebrico su \mathbb{K} , allora $\mathbb{K}[\alpha]$ è un campo finito.*

Teorema 1.5. *Se A è un anello in cui ogni ideale è finitamente generato, allora ogni ideale di $A[x]$ è finitamente generato.*

Corollario 1.6. *Se \mathbb{K} è un campo, allora tutti gli ideali di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ sono finitamente generati, per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Definizione 1.10. Sia A un anello e P un suo ideale. Diciamo che I è un *ideale primo* se, per ogni $a, b \in A$ si ha

$$a \cdot b \in P \iff a \in P \quad \text{oppure} \quad b \in P.$$

Osservazione 1.7. Un ideale P di A è primo se e solo se l'anello quoziente A/P è un dominio di integrità.

Lemma 1.8. *Sia A un dominio d'integrità commutativo, e I un suo ideale radicale, ovvero tale che, per ogni $x \in A$ per cui $x^n \in I$ per un certo n , si ha $x \in I$. Sia poi $a \in A$, $a \notin I$. Allora esiste un ideale primo P tale che $I \subseteq P$, ma $a \notin P$.*

Capitolo 2

Strumenti Fondamentali di Teoria dei Modelli

2.1 Teorema di Compattezza

Iniziamo con il dimostrare lo strumento più importante per la teoria dei modelli, ovvero il Teorema di Compattezza. Questo fornisce una condizione necessaria e sufficiente per verificare la soddisfacibilità di una teoria, che sarà la seguente.

Definizione 2.1. Una \mathcal{L} -teoria T si dice *finitamente soddisfacibile* se per ogni $\Gamma \subseteq T$ finito, Γ è soddisfacibile.

Questa condizione ci permetterà in modo molto più agevole di mostrare la soddisfacibilità di una teoria senza esibirne esplicitamente un modello.

Lemma 2.1. *Se T è una \mathcal{L} -teoria massimale e finitamente soddisfacibile, $\Gamma \subseteq T$ finito tale che $\Gamma \models \varphi$, allora $\varphi \in T$.*

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo che $\varphi \notin T$. Allora, essendo T massimale, $\neg\varphi \in T$. Ma quindi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è un sottoinsieme finito di T non soddisfacibile, il che è assurdo essendo T finitamente soddisfacibile. \square

Per dimostrare il teorema, vorremo estendere una qualunque teoria finitamente soddisfacibile a una teoria di cui riusciremo a costruire un modello. A tal fine sarà utile la seguente proprietà.

Definizione 2.2. Una teoria T si dice *di Henkin* se per ogni \mathcal{L} -formula $\varphi(x)$ in una variabile libera, esiste un simbolo di costante c in \mathcal{L} tale che $T \models (\exists x \varphi(x)) \rightarrow \varphi(c)$.

In una teoria di Henkin, la presenza di simboli di costante per ogni formula esistenziale ci permetterà di costruirne un modello costituito da \mathcal{L} -termini ottenuti a partire da questi simboli di costante.

Proposizione 2.2. *Se T è una \mathcal{L} -teoria massimale, di Henkin e finitamente soddisfacibile, allora T è soddisfacibile.*

Dimostrazione. Costruiamo il modello \mathcal{M} di T . Sia N l'insieme dei \mathcal{L} -termini senza variabili, ottenuti solo con simboli di costante e di funzione di \mathcal{L} .

Su N definiamo una relazione di equivalenza \sim nel seguente modo. Per ogni $s, t \in N$ diciamo che $s \sim t$ se e solo se $s = t \in T$. Questa è ben posta per massimalità di T . Questa è una relazione di equivalenza grazie al Lemma 2.1, infatti

$$\begin{aligned} \emptyset &\models (t = t), \\ \{s = t\} &\models (t = s), \\ \{s = t, t = r\} &\models (s = r). \end{aligned}$$

Usiamo $M = N / \sim$ come universo per il modello, con le seguenti interpretazioni dei simboli di \mathcal{L} :

- Ogni simbolo di costante c , che quindi è un \mathcal{L} -termine, viene interpretato con la sua classe di equivalenza,

$$c^{\mathcal{M}} = [c].$$

- Ogni simbolo di funzione n -aria f viene interpretato dalla funzione

$$f^{\mathcal{M}}([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)].$$

Questa interpretazione è ben posta per il Lemma 2.1, dato che

$$\{t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n\} \models (f(t_1, \dots, t_n) = f(s_1, \dots, s_n)).$$

Di conseguenza, sono ben poste le interpretazioni di tutti i termini nel linguaggio \mathcal{L} nell'universo M .

- Ogni simbolo di relazione n -aria R viene interpretato dalla relazione

$$R^{\mathcal{M}} = \{([t_1], \dots, [t_n]) \mid R(t_1, \dots, t_n) \in T\}.$$

Questa è ben posta per ragionamento analogo al precedente.

Osserviamo che se $t(c_1, \dots, c_n)$ è un termine elemento di N , sicuramente per massimalità di T abbiamo che la formula $\exists x x = t(c_1, \dots, c_n)$ appartiene a T . Dunque, essendo T di Henkin, esiste un simbolo di costante c tale che $[c] = [t(c_1, \dots, c_n)]$. Ovvero ogni elemento di M è interpretazione di uno dei simboli di costante.

Resta da verificare che tale modello soddisfi T . Mostriamo per induzione sulla complessità della \mathcal{L} -sentenza φ che $\mathcal{M} \models \varphi$ se e solo se $\varphi \in T$.

Passo Base: assumiamo φ atomica, allora φ è $s = t$ o $R(t_1, \dots, t_n)$, quindi:

- $\mathcal{M} \models s = t \iff s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}} \iff s = t \in T$.
- $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n) \iff R^{\mathcal{M}} = \{([t_1], \dots, [t_n]) \iff R(t_1, \dots, t_n) \in T$.

Passo Induttivo:

- (\neg) : $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ è equivalente a $\mathcal{M} \not\models \varphi$, il che per ipotesi induttiva è verificato se e solo se $\varphi \notin T$, ovvero $\neg\varphi \in T$, essendo T massimale.
- (\wedge) : $\mathcal{M} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ se e solo se $\mathcal{M} \models \varphi_1$ e $\mathcal{M} \models \varphi_2$, il che per ipotesi induttiva è verificato quando $\varphi_1 \in T$ e $\varphi_2 \in T$, ovvero $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in T$, per massimalità di T e Lemma 2.1.
- (\exists) : Qui mostriamo una direzione alla volta.

Se $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x)$, allora per un certo simbolo di costante c abbiamo $\mathcal{M} \models \varphi([c])$. Quindi, poichè interpretiamo ogni simbolo di costante con la sua classe di equivalenza, $\mathcal{M} \models \varphi(c)$, che ora è una \mathcal{L} -sentenza. Dunque vale l'ipotesi induttiva $\varphi(c) \in T$, da cui $\exists x \varphi(x) \in T$.

Invece se $\exists x \varphi(x) \in T$, essendo T di Henkin, la formula $(\exists x \varphi(x)) \rightarrow \varphi(c)$ appartiene a T per un certo c . Quindi $\varphi(c) \in T$, da cui, per l'ipotesi induttiva, $\mathcal{M} \models \varphi(c)$. Concludiamo quindi che $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x)$.

Dunque, \mathcal{M} soddisfa T . □

Questa costruzione di un modello per una teoria di Henkin a partire dai simboli di costante ci servirà anche nella sezione 2.3 per dimostrare il Teorema di Omissione.

Osservazione 2.3. Se T è una teoria di Henkin soddisfacibile, allora esiste un suo modello in cui ogni elemento è interpretazione di un simbolo di costante.

Ora quindi vogliamo riuscire a estendere una teoria T a una che abbia queste proprietà.

Lemma 2.4. *Sia T una \mathcal{L} -teoria finitamente soddisfacibile, allora esistono un linguaggio $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ e una \mathcal{L}^* -teoria $T^* \supseteq T$ tali che T^* è finitamente soddisfacibile e di Henkin.*

Dimostrazione. Costruiremo ricorsivamente una successione di linguaggi e teorie. Poniamo $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ e $T_0 = T$, poi definiamo a partire da \mathcal{L}_i e T_i le successive. Per ogni \mathcal{L}_i -formula $\varphi(x)$ in una variabile libera, creiamo un simbolo di costante c_φ e una sentenza θ_φ della forma $(\exists x \varphi(x)) \rightarrow \varphi(c_\varphi)$.

Quindi, definiamo

$$\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i \cup \{c_\varphi \mid \varphi(x) \text{ è } \mathcal{L}_i\text{-formula in una variabile libera}\},$$

e

$$T_{i+1} = T_i \cup \{\theta_\varphi \mid \varphi(x) \text{ è } \mathcal{L}_i\text{-formula in una variabile libera}\}.$$

Osserviamo che T_{i+1} è una \mathcal{L}_{i+1} -teoria. Mostriamo per induzione che ogni T_i è finitamente soddisfacibile:

Passo Base: $T_0 = T$ è finitamente soddisfacibile per ipotesi.

Passo Induttivo: Assumiamo che T_i sia finitamente soddisfacibile. Consideriamo un sottoinsieme finito $\Gamma \subseteq T_{i+1}$, che quindi possiamo scrivere come $\Gamma = \Gamma_i \cup \{\theta_{\varphi_1}, \dots, \theta_{\varphi_n}\}$, dove Γ_i è sottoinsieme finito di T_i . Sia quindi $\mathcal{M} \models \Gamma_i$ un suo modello. Possiamo rendere il suo universo M un modello \mathcal{M}' di Γ , interpretando i simboli di \mathcal{L}_{i+1} nel seguente modo:

- I simboli che appartengono anche a \mathcal{L}_i mantengono la stessa interpretazione di \mathcal{M} . Dunque \mathcal{M}' continua a soddisfare Γ_i .
- Se $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x)$ allora sia $a \in M$ un elemento testimone di questa esistenza, interpretiamo c_φ con a .

- Se $\mathcal{M} \not\models \exists x \varphi(x)$, interpretiamo c_φ con un qualunque elemento di M .

In questo modo \mathcal{M}' soddisfa ogni θ_φ , e quindi soddisfa Γ .

Ora definendo $\mathcal{L}^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i$ e $T^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$, abbiamo che T^* è finitamente soddisfacibile, essendo ogni suo sottoinsieme finito un sottoinsieme di uno dei T_i . Inoltre T^* è di Henkin, in quanto per ogni $\varphi(x)$ \mathcal{L}^* -formula, $\varphi(x)$ è una \mathcal{L}_i -formula per un certo i , quindi $\theta_\varphi \in T_{i+1}$, che è contenuto in T^* . \square

L'ultimo risultato che manca per arrivare al Teorema di Compattezza è dimostrare che questa teoria appena costruita si possa espandere a una teoria massimale rimanendo finitamente soddisfacibile. A tal fine è necessario l'uso dell'Assioma della Scelta, nella forma del Lemma di Zorn.

Lemma 2.5 (Lemma di Zorn). *Sia X un insieme dotato di una relazione d'ordine \leq . Se ogni catena, ovvero ogni sottoinsieme di X in cui l'ordine indotto da \leq è totale, ha un maggiorante in X , allora esiste almeno un elemento di X massimale per l'ordine.*

Lemma 2.6. *Sia T una \mathcal{L} -teoria finitamente soddisfacibile, e sia φ una \mathcal{L} -sentenza, allora $T \cup \{\varphi\}$ è finitamente soddisfacibile oppure $T \cup \{\neg\varphi\}$ è finitamente soddisfacibile.*

Dimostrazione. Se $T \cup \{\varphi\}$ non è finitamente soddisfacibile, allora esiste un sottoinsieme finito $\Gamma \subseteq T$ tale che $\Gamma \cup \{\varphi\}$ non è soddisfacibile, quindi $\Gamma \models \neg\varphi$. Usiamo ciò per dimostrare che $T \cup \{\neg\varphi\}$ è finitamente soddisfacibile.

Sia $\Delta \subseteq T$ un sottoinsieme finito. Per ipotesi $\Gamma \cup \Delta$ è soddisfacibile, in quanto è sottoinsieme finito di T . Inoltre abbiamo visto che $\Gamma \models \neg\varphi$, quindi $\Gamma \cup \Delta \cup \{\neg\varphi\}$ è soddisfacibile, in particolare $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ è soddisfacibile.

Concludiamo quindi che $T \cup \{\neg\varphi\}$ è finitamente soddisfacibile. \square

Proposizione 2.7. *Se T è una \mathcal{L} -teoria finitamente soddisfacibile, allora esiste una \mathcal{L} -teoria $T' \supseteq T$ massimale, finitamente soddisfacibile.*

Dimostrazione. Sia I l'insieme di tutte le \mathcal{L} -teorie $T_i \supseteq T$ finitamente soddisfacibili, su cui mettiamo l'ordine di inclusione. Sia poi $C \subseteq I$ una catena, ovvero un insieme di queste teorie su cui l'inclusione è un ordine totale. Allora definendo la teoria unione delle teorie di C

$$T_C = \bigcup_{T_i \in C} T_i,$$

questa è finitamente soddisfacibile, in quanto ogni suo sottoinsieme finito è sottoinsieme finito di uno dei T_i . Inoltre ogni T_i è incluso in T_C , quindi questo è un maggiorante della catena C .

Allora, per il Lemma di Zorn 2.5, esiste una teoria finitamente soddisfacibile T' che è massimale per inclusione. Questa è proprio una teoria massimale, infatti per ogni \mathcal{L} -sentenza φ , abbiamo dal Lemma 2.6 che $T' \cup \{\varphi\}$ o $T' \cup \{\neg\varphi\}$ è finitamente soddisfacibile, e quindi $\varphi \in T'$ oppure $\neg\varphi \in T'$. \square

Possiamo ora procedere con la dimostrazione del Teorema di Compatezza.

Teorema 2.8 (Teorema di Compatezza). *Sia T una \mathcal{L} -teoria. Allora T è soddisfacibile se e solo se è finitamente soddisfacibile.*

Dimostrazione. (\Rightarrow) Se T è soddisfacibile da un modello \mathcal{M} , allora \mathcal{M} soddisfa anche ogni sottoinsieme di T .

(\Leftarrow) Supponiamo che T sia finitamente soddisfacibile. Per il Lemma 2.4, esistono $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ e $T^* \supseteq T$, tali che T^* è finitamente soddisfacibile e di Henkin. Usiamo allora la Proposizione 2.7 per estendere T^* a una T' massimale. T' è ancora di Henkin essendo una \mathcal{L}^* -teoria che include una teoria di Henkin.

Infine, per Proposizione 2.2, esiste un modello $\mathcal{M} \models T'$, che di conseguenza è anche modello di T . \square

Osserviamo che per come abbiamo costruito il linguaggio \mathcal{L}^* nel Lemma 2.4 e il modello \mathcal{M} nella Proposizione 2.2, se \mathcal{L} è un linguaggio di cardinalità infinita minore o uguale a κ , allora anche \mathcal{M} avrà cardinalità al massimo κ .

Corollario 2.9. *Se T è una \mathcal{L} -teoria soddisfacibile, e κ è un cardinale infinito tale che $\kappa \geq |\mathcal{L}|$, allora esiste un modello \mathcal{M} di T tale che $|\mathcal{M}| \leq \kappa$.*

Un altro corollario del Teorema di Compatezza che risulterà utile è il seguente.

Corollario 2.10. *Sia T una \mathcal{L} -teoria. Allora $T \models \varphi$ se e solo se esiste un sottoinsieme finito $T_0 \subseteq T$ tale che $T_0 \models \varphi$.*

Dimostrazione. (\Rightarrow) Assumiamo per assurdo che per ogni sottoinsieme finito $T_0 \subseteq T$, la teoria $T_0 \cup \{\neg\varphi\}$ sia soddisfacibile. Allora, per il Teorema di Compatezza, $T \cup \{\neg\varphi\}$ è soddisfacibile, il che contraddice l'ipotesi $T \models \varphi$.

(\Leftarrow) Ogni modello di T è anche modello di T_0 , quindi se $T_0 \models \varphi$ allora $T \models \varphi$. \square

Terminiamo con un'applicazione del Teorema di Compatezza che ci sarà utile nella seguente sezione per dimostrare i Teoremi di Löwenheim-Skolem.

Proposizione 2.11. *Sia T una \mathcal{L} -teoria con almeno un modello di cardinalità infinita. Allora per ogni cardinale infinito $\kappa \geq |\mathcal{L}|$ esiste un modello $\mathcal{M} \models T$ di cardinalità κ .*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$ il linguaggio ottenuto a partire da \mathcal{L} aggiungendo κ nuovi simboli di costante. Consideriamo allora la \mathcal{L}^* -teoria

$$T^* = T \cup \{c_\alpha \neq c_\beta \mid \alpha, \beta \in \kappa \text{ e } \alpha \neq \beta\}.$$

Questa teoria è finitamente soddisfacibile, infatti, se $\Gamma \subseteq T$ è finito, allora le formule di Γ contengono un numero finito di c_α , quindi Γ è soddisfacibile dal modello infinito di T , interpretando come elementi distinti i finiti c_α che compaiono nelle formule di Γ , e i rimanenti simboli di costante come elementi qualunque.

Ma allora, per il Teorema di Compatezza e per il Corollario 2.9, T^* è soddisfacibile da un modello \mathcal{M} di cardinalità minore o uguale di $|\mathcal{L}^*| = \kappa$. Ma poichè ogni modello di T^* interpreta tutti i simboli di costante c_α con κ elementi distinti, \mathcal{M} ha cardinalità effettivamente κ , e soddisfa $T^* \supseteq T$. \square

2.2 Immersioni e Teoremi di Löwenheim-Skolem

Come esistono omomorfismi, immersioni e isomorfismi di strutture algebriche come gruppi o campi, si possono definire analoghe nozioni per generiche strutture in un linguaggio. Studieremo in particolare le immersioni, e quindi i modi in cui due strutture possono essere una inclusa nell'altra.

Definizione 2.3. Siano \mathcal{M} e \mathcal{N} due \mathcal{L} -strutture. Un *omomorfismo* di strutture da \mathcal{M} a \mathcal{N} è un'applicazione $\eta : M \rightarrow N$, che preserva l'interpretazione dei simboli di \mathcal{L} , ovvero per ogni $m_1, \dots, m_n \in M$:

- Per ogni simbolo di funzione n -aria f , si ha

$$\eta(f^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_n)) = f^{\mathcal{N}}(\eta(m_1), \dots, \eta(m_n)).$$

- Per ogni simbolo di costante c , si ha

$$\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}.$$

- Per ogni simbolo di relazione n -aria R , si ha

$$(m_1, \dots, m_n) \in R^{\mathcal{M}} \Rightarrow (\eta(m_1), \dots, \eta(m_n)) \in R^{\mathcal{N}}.$$

Un'immersione di \mathcal{M} in \mathcal{N} è un omomorfismo iniettivo da \mathcal{M} a \mathcal{N} , in cui la condizione sui simboli di relazione è rafforzata a

$$(m_1, \dots, m_n) \in R^{\mathcal{M}} \iff (\eta(m_1), \dots, \eta(m_n)) \in R^{\mathcal{N}}.$$

Un'immersione suriettiva si dice *isomorfismo* di \mathcal{L} -strutture.

Data un'immersione $\eta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, identificheremo spesso l'immagine di \mathcal{M} tramite η con \mathcal{M} stesso, chiamando \mathcal{M} una *sottostruttura* di \mathcal{N} , e \mathcal{N} un'*estensione* di \mathcal{M} . Ciò lo indicheremo semplicemente con $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

Osservazione 2.12. Poichè un'immersione preserva le interpretazioni dei simboli, preserva quindi l'interpretazione dei termini, e di conseguenza la veridicità di ogni \mathcal{L} -formula atomica.

Vedremo tra poco che, in un certo senso, questa condizione è sufficiente all'esistenza di un'immersione.

Esempio 1. Consideriamo \mathbb{N} e \mathbb{Z} come strutture nel linguaggio $\mathcal{L} = \{\leq\}$, dove il simbolo di relazione binaria \leq è interpretato con la relazione d'ordine standard. L'inclusione $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ è un'immersione di \mathbb{N} in \mathbb{Z} come \mathcal{L} -strutture, infatti è mantenuta l'interpretazione di ogni simbolo.

Possiamo rafforzare la nozione di immersione richiedendo che siano preservate tutte le proprietà esprimibili in formule.

Definizione 2.4. Siano \mathcal{M} e \mathcal{N} due \mathcal{L} -strutture, e $\eta : M \rightarrow N$ un'immersione. η si dice *immersione elementare* se, per ogni \mathcal{L} -formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ e per ogni $m_1, \dots, m_n \in M$ si ha che

$$\mathcal{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\eta(m_1), \dots, \eta(m_n)).$$

Diremo che \mathcal{M} una *sottostruttura elementare* di \mathcal{N} , e \mathcal{N} un'*estensione elementare* di \mathcal{M} , ciò lo indicheremo con $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ o $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$.

Osservazione 2.13. Se $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, allora $\text{Th}(\mathcal{M}) = \text{Th}(\mathcal{N})$, ovvero \mathcal{M} e \mathcal{N} sono elementarmente equivalenti.

Esempio 2. L'immersione di \mathbb{N} in \mathbb{Z} come strutture nel linguaggio $\mathcal{L} = \{\leq\}$ non è un'immersione elementare, infatti la formula

$$\exists x \forall y x \leq y,$$

che esprime l'esistenza di un minimo, è soddisfatta da \mathbb{N} ma non da \mathbb{Z} .

Esempio 3. Una struttura può avere una sottostruttura a lei isomorfa, senza che questa sia una sottostruttura elementare. Continuando l'esempio di (\mathbb{N}, \leq) , consideriamo come sua sottostruttura il sottoinsieme $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ con interpretazioni ereditate. Questa è isomorfa a \mathbb{N} tramite l'isomorfismo $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n - 1$. Però, l'inclusione $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{N}$ non è un'immersione elementare, infatti

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} \models \forall x 1 \leq x,$$

ma non è così in \mathbb{N} .

Il nostro prossimo obiettivo è riuscire a determinare quando può esistere un'immersione o un'immersione elementare tra due \mathcal{L} -strutture. Per raggiungerlo costruiamo delle nuove teorie a partire dalla struttura che vogliamo immergere.

Definizione 2.5. Sia \mathcal{M} una \mathcal{L} -struttura, allora definiamo il linguaggio $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ aggiungendo a \mathcal{L} un simbolo di costante m per ogni elemento di M . Vedendo \mathcal{M} come $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -struttura, interpretando ogni nuovo simbolo di costante con il rispettivo elemento di M , definiamo il *diagramma atomico* di \mathcal{M} come la $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -teoria

$$\text{Diag}(\mathcal{M}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ è una } \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\text{-sentenza atomica o una sua negazione, e } \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

Invece il *diagramma elementare* di \mathcal{M} è la $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -teoria

$$\text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ è una } \mathcal{L}_{\mathcal{M}}\text{-sentenza e } \mathcal{M} \models \varphi\}.$$

Osserviamo che $\text{Diag}(\mathcal{M}) \subseteq \text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M})$.

Se \mathcal{N} è una \mathcal{L} -struttura, possiamo trasformarla in una $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ struttura aggiungendo interpretazioni dei simboli di costante m . Possiamo allora verificare se soddisfa o meno il diagramma atomico o il diagramma elementare di \mathcal{M} . Ciò determina rispettivamente l'esistenza di un'immersione o di un'immersione elementare.

Proposizione 2.14. *Sia \mathcal{M} una \mathcal{L} -struttura, \mathcal{N} una $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -struttura, e $\eta : M \rightarrow N$ definita come $\eta(m) = m^{\mathcal{N}}$.*

- i) Se $\mathcal{N} \models \text{Diag}(\mathcal{M})$, allora η è un'immersione di \mathcal{M} in \mathcal{N} .*
- ii) Se $\mathcal{N} \models \text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M})$, allora η è un'immersione elementare di \mathcal{M} in \mathcal{N} .*

Dimostrazione. *i)* Verifichiamo che η sia un'immersione.

- **Iniettività:** Se $m_1 \neq m_2$, allora la $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -sentenza $m_1 \neq m_2$ appartiene a $\text{Diag}(\mathcal{M})$. Ma per ipotesi $\mathcal{N} \models \text{Diag}(\mathcal{M})$, quindi in particolare $m_1^{\mathcal{N}} \neq m_2^{\mathcal{N}}$.
- **Preservazione dei simboli di funzione:** se in \mathcal{M} abbiamo che $f^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_n) = m_{n+1}$, allora la $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -sentenza $f(m_1, \dots, m_n) = m_{n+1}$ appartiene a $\text{Diag}(\mathcal{M})$, e dunque $f^{\mathcal{N}}(m_1^{\mathcal{N}}, \dots, m_n^{\mathcal{N}}) = m_{n+1}^{\mathcal{N}}$.
- **Preservazione dei simboli di relazione:** Analogamente, se $(m_1, \dots, m_n) \in R^{\mathcal{M}}$, allora la $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -sentenza $R(m_1, \dots, m_n)$ appartiene a $\text{Diag}(\mathcal{M})$, e quindi abbiamo $(m_1^{\mathcal{N}}, \dots, m_n^{\mathcal{N}}) \in R^{\mathcal{N}}$.

I simboli di costante sono preservati per definizione di η , e quindi concludiamo che \mathcal{M} è sottostruttura di \mathcal{N} .

ii) Se ora $\mathcal{N} \models \text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M})$, mostriamo che l'immersione definita nel punto precedente è anche elementare, ovvero che $\mathcal{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n)$ se e solo se $\mathcal{N} \models \varphi(m_1^{\mathcal{N}}, \dots, m_n^{\mathcal{N}})$.

(\Rightarrow) Se $\mathcal{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n)$, allora la $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -sentenza $\varphi(m_1, \dots, m_n)$ appartiene a $\text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M})$, che è soddisfatto da \mathcal{N} , e quindi $\mathcal{N} \models \varphi(m_1^{\mathcal{N}}, \dots, m_n^{\mathcal{N}})$.

(\Leftarrow) Viceversa, se $\mathcal{N} \models \varphi(m_1^{\mathcal{N}}, \dots, m_n^{\mathcal{N}})$, assumiamo per assurdo che $\mathcal{M} \not\models \varphi(m_1, \dots, m_n)$, cioè $\mathcal{M} \models \neg\varphi(m_1, \dots, m_n)$. Abbiamo così che la $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -sentenza $\neg\varphi(m_1, \dots, m_n)$ appartiene a $\text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M})$, e quindi $\mathcal{N} \models \neg\varphi(m_1^{\mathcal{N}}, \dots, m_n^{\mathcal{N}})$, ovvero $\mathcal{N} \not\models \varphi(m_1^{\mathcal{N}}, \dots, m_n^{\mathcal{N}})$, il che crea una contraddizione.

Concludiamo dunque che η è immersione elementare, ovvero \mathcal{M} è sottostruttura elementare di \mathcal{N} . \square

Possiamo ora applicare questa proposizione per costruire estensioni elementari arbitrariamente grandi.

Teorema 2.15 (Teorema di Löwenheim-Skolem Ascendente). *Data \mathcal{M} una \mathcal{L} -struttura di cardinalità infinita, e un cardinale $\kappa \geq \max\{|\mathcal{M}|, |\mathcal{L}|\}$, esiste un'estensione elementare $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ di cardinalità κ .*

Dimostrazione. Possiamo pensare \mathcal{M} come $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -struttura che soddisfa $\text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M})$. Essendo \mathcal{M} di cardinalità infinita e $\kappa \geq |\mathcal{L}_{\mathcal{M}}| = \max\{|\mathcal{M}|, |\mathcal{L}|\}$, grazie alla Proposizione 2.11, esiste un modello \mathcal{N} di $\text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M})$ con cardinalità κ . Ma allora, per la precedente Proposizione 2.14, $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. \square

Come suggerisce il nome, esiste una versione ‘discendente’ del teorema, che tratta quindi delle sottostrutture elementari di una struttura data. La dimostrazione di questo teorema necessita prima di un test per stabilire se una sottostruttura è effettivamente elementare.

Teorema 2.16 (Test di Tarski-Vaught). *Sia \mathcal{N} una \mathcal{L} -struttura, e $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ una sua sottostruttura. Allora sono equivalenti:*

- i) $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.
- ii) Per ogni \mathcal{L} -formula $\varphi(x, \underline{y})$ e per ogni $\underline{a} \in M^n$, se esiste $b \in N$ tale che $\mathcal{N} \models \varphi(b, \underline{a})$, allora esiste $c \in M$ tale che $\mathcal{N} \models \varphi(c, \underline{a})$.

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii)

Se esiste $b \in N$ tale che $\mathcal{N} \models \varphi(b, \underline{a})$, allora $\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x, \underline{a})$. Dato che $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ è una sottostruttura elementare, anche $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x, \underline{a})$, quindi esiste $c \in M$ tale che $\mathcal{M} \models \varphi(c, \underline{a})$, e dunque $\mathcal{N} \models \varphi(c, \underline{a})$.

(ii) \Rightarrow (i)

Vogliamo mostrare che per ogni $\varphi(\underline{x})$ e per ogni $\underline{a} \in M^n$, vale

$$\mathcal{M} \models \varphi(\underline{a}) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\underline{a})$$

Proseguiamo per induzione sulla complessità della formula $\varphi(\underline{x})$.

Passo Base: Se $\varphi(\underline{x})$ è atomica, allora da Osservazione 2.12, per ogni $\underline{a} \in M^n$ si ha

$$\mathcal{M} \models \varphi(\underline{a}) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\underline{a}).$$

Passo Induttivo: Assumiamo quindi la doppia implicazione per $\varphi(\underline{x})$.

- (\neg) : $\mathcal{M} \models \neg\varphi(\underline{a})$ se e solo se $\mathcal{M} \not\models \varphi(\underline{a})$, che per ipotesi induttiva è equivalente a $\mathcal{N} \not\models \varphi(\underline{a})$, ovvero $\mathcal{N} \models \neg\varphi(\underline{a})$.

- (\wedge) : $\mathcal{M} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2(\underline{a})$ se e solo se $\mathcal{M} \models \varphi_1(\underline{a})$ e $\mathcal{M} \models \varphi_2(\underline{a})$, che per ipotesi induttiva è equivalente a $\mathcal{N} \models \varphi_1(\underline{a})$ e $\mathcal{N} \models \varphi_2(\underline{a})$, ovvero $\mathcal{N} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2(\underline{a})$.

- (\exists) : Mostriamo una direzione alla volta.

Se $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x, \underline{a})$, allora per un certo $c \in M$ vale $\mathcal{M} \models \varphi(c, \underline{a})$. Ma quindi, per ipotesi induttiva, $\mathcal{N} \models \varphi(c, \underline{a})$ e di conseguenza $\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x, \underline{a})$.

Se invece $\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x, \underline{a})$, allora per un certo $b \in N$ vale $\mathcal{N} \models \varphi(b, \underline{a})$. Ma per ipotesi questo implica che esiste un $c \in M$ per cui vale $\mathcal{N} \models \varphi(c, \underline{a})$. Dunque usando l'ipotesi induttiva si ha $\mathcal{M} \models \varphi(c, \underline{a})$, e quindi $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x, \underline{a})$.

Abbiamo così che \mathcal{N} soddisfa la definizione di estensione elementare. \square

Quindi, perchè una sottostruttura sia elementare, questa necessita di testimoni per ogni formula esistenziale soddisfatta dalla struttura di cui fa parte.

Useremo questa idea per dimostrare il secondo teorema di Löwenheim-Skolem, il quale ci permette non solo di ridurre la cardinalità di una struttura, ma anche di preservare specifici sottoinsiemi di nostro interesse.

Teorema 2.17 (Teorema di Löwenheim-Skolem Discendente). *Sia \mathcal{M} una \mathcal{L} -struttura di cardinalità infinita e $A \subseteq M$. Allora esiste una sottostruttura elementare $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ di cardinalità infinita tale che $A \subseteq N$ e $|N| \leq \max\{|A|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.*

Dimostrazione. A partire dall'insieme A , consideriamo il linguaggio \mathcal{L}_A , ottenuto aggiungendo a \mathcal{L} un simbolo di costante a per ogni elemento di A . Questo linguaggio ha cardinalità minore o uguale di $\max\{|\mathcal{L}|, |A|, \aleph_0\}$. Posso vedere \mathcal{M} come una \mathcal{L}_A -struttura interpretando ogni nuovo simbolo con il rispettivo elemento di A .

Definiamo ora ricorsivamente una successioni di sottoinsiemi di M ,

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$

Partiamo da $A_0 = A$. Costruiamo poi A_{i+1} a partire da A_i :

Per ogni \mathcal{L}_{A_i} -formula in una variabile libera $\varphi(x)$, se $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x)$ (dove \mathcal{M} è una \mathcal{L}_{A_i} -struttura in modo analogo a prima), scelgo un elemento $b_\varphi \in M$ testimone di questa esistenza. Pongo quindi

$$A_{i+1} = A_i \cup \{b_\varphi\}_{\varphi(x) \text{ } \mathcal{L}_{A_i}\text{-formula}},$$

con i b_φ scelti in questo modo.

Sia allora $N = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Dall'Osservazione 1.1, l'insieme delle formule in un linguaggio \mathcal{L} ha cardinalità $\max\{|\mathcal{L}|, \aleph_0\}$, dunque ogni A_i , e di conseguenza N , ha cardinalità minore o uguale di $\max\{|A|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.

Allora definiamo \mathcal{N} come la struttura con universo N ottenuta ereditando da \mathcal{M} le interpretazioni dei simboli di \mathcal{L} , e mostriamo che questa è una sottostruttura elementare.

Mostriamo prima che è una sottostruttura. Basta mostrare che contenga le interpretazioni dei simboli di costante, e che le funzioni $f^{\mathcal{M}}$, interpretazioni dei simboli di funzione f in \mathcal{M} , siano chiuse su N :

- Se c è un simbolo di costante di \mathcal{L} , sicuramente $\mathcal{M} \models \exists x x = c$, e l'unico testimone di questa esistenza sarà $c^{\mathcal{M}}$, che quindi appartiene a $A_1 \subseteq N$.
- Se $a_1, \dots, a_n \in N$, allora $a_1, \dots, a_n \in A_i$ per un certo i . Quindi la \mathcal{L}_{A_i} -formula $\exists x x = f(a_1, \dots, a_n)$ ha un testimone in $A_{i+1} \subseteq N$. Ma tale testimone è sicuramente $f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)$.

Per mostrare che è elementare usiamo il Test di Tarski-Vaught, vogliamo quindi verificare che per ogni formula $\varphi(x, \underline{y})$ e $\underline{a} \in N^n$, se $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x, \underline{a})$, allora $\mathcal{M} \models \varphi(b, \underline{a})$ per un $b \in N$.

Ma questo è proprio il modo in cui abbiamo costruito N , infatti posso vedere la formula $\varphi(x, \underline{a})$ come \mathcal{L}_{A_i} -formula in una variabile libera x (per un certo i), e quindi avrà come testimone all'esistenza l'elemento $b_\varphi \in A_{i+1} \subseteq N$. Concludiamo dunque che \mathcal{N} è sottostruttura elementare. \square

2.3 n -tipi in Modelli e Teorie

Vogliamo ora descrivere le proprietà che gli elementi di un modello possono avere. Il modo in cui formalizziamo le proprietà di un elemento o una tupla di elementi è considerando l'insieme delle \mathcal{L} -formule che vogliamo siano soddisfatte.

Ricordiamo, per la seguente definizione, che $\text{Th}(\mathcal{M})$ è la teoria completa costituita da tutte le \mathcal{L} -sentenze soddisfatte da \mathcal{M} .

Definizione 2.6. Sia \mathcal{M} una \mathcal{L} -struttura. Un n -tipo di \mathcal{M} è un insieme p di \mathcal{L} -formule in variabili libere x_1, \dots, x_n , tale che $p \cup \text{Th}(\mathcal{M})$ sia soddisfacibile, ovvero esiste un modello \mathcal{N} di $\text{Th}(\mathcal{M})$ e degli elementi $a_1, \dots, a_n \in N$ per cui

$$\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \text{per ogni } \varphi(x_1, \dots, x_n) \in p.$$

Espliciteremo spesso le variabili delle formule di p , indicando quindi l' n -tipo con $p(x_1, \dots, x_n)$, o più brevemente $p(\underline{x})$.

Un n -tipo $p(\underline{x})$ si dice *completo* se per ogni \mathcal{L} -formula $\varphi(\underline{x})$ in variabili libere x_1, \dots, x_n si ha

$$\varphi(\underline{x}) \in p(\underline{x}) \quad \text{oppure} \quad \neg\varphi(\underline{x}) \in p(\underline{x}).$$

L'insieme di tutti gli n -tipi completi di \mathcal{M} si chiama *Spazio di Stone di \mathcal{M}* , e lo si indica $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}$.

Osserviamo che, a partire da una struttura \mathcal{M} e una tupla di elementi $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, possiamo definire il tipo completo

$$\text{tp}^{\mathcal{M}}(\underline{a}) = \{\varphi(\underline{x}) \text{ } \mathcal{L}\text{-formule} \mid \mathcal{M} \models \varphi(\underline{a})\}.$$

Questo è completo poichè per ogni \mathcal{L} -formula $\varphi(\underline{x})$, $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{a})$ oppure $\mathcal{M} \not\models \varphi(\underline{a})$, ovvero $\mathcal{M} \models \neg\varphi(\underline{a})$.

2.3.1 Realizzazione e Omissione

Definizione 2.7. Sia $p(\underline{x})$ un n -tipo completo. Diciamo che \mathcal{M} realizza $p(\underline{x})$ se esiste $\underline{a} \in M^n$ tale che

$$\mathcal{M} \models \varphi(\underline{a}) \text{ per ogni } \varphi(\underline{x}) \in p(\underline{x}).$$

In tal caso scriviamo $\mathcal{M} \models p(\underline{a})$.

Se \mathcal{M} non realizza $p(\underline{x})$ diciamo che \mathcal{M} omette $p(\underline{x})$.

Quindi, per definizione, \mathcal{M} realizza $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\underline{a})$ per ogni $\underline{a} \in M^n$.

Non ogni tipo in $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}$ è però necessariamente realizzato in \mathcal{M} . Possiamo allora estendere elementarmente \mathcal{M} in modo da realizzare un n -tipo omesso? Prima di rispondere facciamo un paio di verifiche sugli n -tipi di estensioni elementari.

Lemma 2.18. *Sia $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ un'estensione elementare, allora:*

$$i) \mathcal{S}_n^{\mathcal{M}} = \mathcal{S}_n^{\mathcal{N}}.$$

$$ii) \text{ Per ogni } \underline{a} \in \mathcal{M}, \text{tp}^{\mathcal{M}}(\underline{a}) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\underline{a}).$$

Dimostrazione. *i)* Sia $p(\underline{x})$ un n -tipo di \mathcal{M} . Questo significa che $p(\underline{x}) \cup \text{Th}(\mathcal{M})$ è soddisfacibile. Ma, poichè \mathcal{N} è un'estensione elementare, abbiamo che $\text{Th}(\mathcal{M}) = \text{Th}(\mathcal{N})$. Dunque $p(\underline{x}) \cup \text{Th}(\mathcal{N})$ è soddisfacibile, ovvero $p(\underline{x})$ è un n -tipo di \mathcal{N} . Analogamente vale la seconda inclusione.

$$ii) \text{ Essendo } \mathcal{N} \text{ estensione elementare, } \mathcal{M} \models \varphi(\underline{a}) \text{ se e solo se } \mathcal{N} \models \varphi(\underline{a}). \quad \square$$

Ha quindi senso estendere a \mathcal{N} le nozioni di realizzazione e omissione di n -tipi di \mathcal{M} , poichè questi dipendono solo dalla teoria completa di un modello, che è invariante per estensioni elementari. Vediamo allora che possiamo realizzare ogni n -tipo in una di queste estensioni.

Teorema 2.19 (Realizzazione di Tipi). *Sia \mathcal{M} una \mathcal{L} -struttura, e $p(\underline{x}) \in \mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}$ un suo n -tipo. Allora esiste un'estensione elementare $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ che realizza $p(\underline{x})$.*

Dimostrazione. Mostriamo che la teoria $T = p(\underline{x}) \cup \text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M})$ è soddisfacibile, usando il Teorema di Compattezza. Sia quindi $\Delta \subseteq T$ un sottoinsieme finito. Per mostrare che questo è soddisfacibile, possiamo mostrare che lo è la $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -formula, in variabili libere \underline{x} ,

$$\varphi(\underline{x}) \wedge \psi(\underline{m}),$$

dove $\varphi(\underline{x})$ è la congiunzione delle \mathcal{L} -formule di Δ appartenenti a $p(\underline{x})$, e $\psi(\underline{m})$ è la congiunzione delle $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -sentenze di Δ appartenenti a $\text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M})$.

Osserviamo che $\psi(\underline{m}) \in \text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M})$, da cui abbiamo in particolare che $\mathcal{M} \models \exists \underline{y} \psi(\underline{y})$.

Consideriamo ora un modello \mathcal{B} di $p(\underline{x}) \cup \text{Th}(\mathcal{M})$, che esiste per definizione di n -tipo, e che così soddisfa automaticamente $\varphi(\underline{x})$. Poichè $\mathcal{M} \models \exists \underline{y} \psi(\underline{y})$, che è una \mathcal{L} -sentenza, e $\mathcal{B} \models \text{Th}(\mathcal{M})$, si ha che $\mathcal{B} \models \exists \underline{y} \psi(\underline{y})$. Sia quindi $\underline{b} \in B^r$ tale che $\mathcal{B} \models \psi(\underline{b})$.

Ma allora, interpretando in \mathcal{B} i simboli di costante \underline{m} di $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ che compaiono in $\psi(\underline{m})$ come $\underline{m}^{\mathcal{B}} = \underline{b}$, abbiamo che

$$\mathcal{B} \models \varphi(\underline{x}) \wedge \psi(\underline{m}),$$

ovvero $\mathcal{B} \models \Delta$.

Abbiamo così mostrato che T è finitamente soddisfacibile, e quindi soddisfacibile per il Teorema di Compattezza. Dunque, se \mathcal{N} è un modello di $T = p(\underline{x}) \cup \text{Diag}_{\text{el}}(\mathcal{M})$, allora, per la Proposizione 2.14, \mathcal{N} è un'estensione elementare di \mathcal{M} . Questa estensione realizza $p(\underline{x})$ nelle interpretazioni di \underline{x} . \square

Esempio 4. Riprendiamo (\mathbb{N}, \leq) , e consideriamo il linguaggio esteso $\mathcal{L}_{\mathbb{N}} = \{\leq, 0, 1, 2, \dots\}$, a cui abbiamo aggiunto per ogni numero naturale un simbolo di costante, che interpretiamo con il rispettivo elemento di \mathbb{N} . Usando il Teorema di Compattezza è semplice verificare che

$$p(x) = \{0 \leq x, 1 \leq x, 2 \leq x, \dots\}$$

è un 1-tipo omesso da \mathbb{N} , infatti $p(x) \cup \text{Th}(\mathbb{N})$ è soddisfacibile. Esiste quindi un'estensione elementare di questa struttura che realizza $p(x)$, ovvero contenente un elemento maggiore di ogni numero naturale.

Un esempio di una tale estensione è l'insieme totalmente ordinato ottenuto da \mathbb{N} aggiungendo 'a destra' una copia di \mathbb{Z} , ovvero

$$A = \mathbb{N} \sqcup \mathbb{Z},$$

dotato delle relazioni di ordine standard di \mathbb{N} e \mathbb{Z} , dove inoltre ogni elemento di \mathbb{Z} è maggiore di ogni elemento di \mathbb{N} .

Poichè, come osservato precedentemente, lo spazio di Stone $\mathcal{S}_n^{\mathcal{M}}$ dipende esclusivamente dalla teoria completa $\text{Th}(\mathcal{M})$, possiamo definire gli n -tipi direttamente a partire da essa.

Definizione 2.8. Sia T una \mathcal{L} -teoria. Un n -tipo di T è un insieme $p(x_1, \dots, x_n)$ di \mathcal{L} -formule in variabili libere x_1, \dots, x_n , tale che $p(\underline{x}) \cup T$ sia soddisfacibile. Indichiamo l'insieme degli n -tipi di T con $\mathcal{S}_n(T)$.

Questa definizione non richiede che T sia completa, osserviamo però che se \mathcal{M} è un modello di una teoria T non necessariamente completa, e $\underline{a} \in \mathcal{M}$, allora

$$\text{Th}(\mathcal{M}) \subseteq \text{tp}^{\mathcal{M}}(\underline{a}).$$

Quindi ogni elemento di $\mathcal{S}_n(T)$ contiene un completamento di T . Possiamo allora partizionare

$$\mathcal{S}_n(T) = \bigsqcup_{R \supseteq T \text{ completa}} \mathcal{S}_n(R).$$

Facciamo ora un'osservazione che segue da quest'ultima definizione.

Osservazione 2.20. Sia T una teoria. Ogni n -tipo di $\mathcal{S}_n(T)$ è realizzato in almeno un modello di T .

Possiamo quindi chiederci se un certo n -tipo è realizzato in ogni modello di T , o se invece è omettibile. A tal fine diamo la seguente definizione.

Definizione 2.9. Un n -tipo $p(\underline{x})$ di T si dice *isolato* se esiste una \mathcal{L} -formula $\Phi(\underline{x})$ tale che $T \cup \{\Phi(\underline{x})\}$ è soddisfacibile, e per ogni $\theta(\underline{x}) \in p(\underline{x})$ si ha

$$T \models \forall \underline{x} (\Phi(\underline{x}) \rightarrow \theta(\underline{x})).$$

Diciamo anche che $\Phi(\underline{x})$ *isola* $p(\underline{x})$.

Osservazione 2.21. Se $p(\underline{x}) \in \mathcal{S}_n(T)$ è un n -tipo completo e isolato da $\Phi(\underline{x})$, allora

$$\theta(\underline{x}) \in p(\underline{x}) \iff T \models \forall \underline{x} (\Phi(\underline{x}) \rightarrow \theta(\underline{x})).$$

In particolare $\Phi(\underline{x}) \in p(\underline{x})$.

Se quindi un elemento a di un modello realizza un tipo isolato, significa che tutte le sue proprietà di primo ordine, nelle ipotesi della teoria T , sono completamente racchiuse in un'unica formula $\Phi(\underline{x})$. Vediamo che, se T è completa, questi sono sempre realizzati.

Proposizione 2.22. *Sia $p(\underline{x})$ un n -tipo di T isolato da $\Phi(\underline{x})$. Allora $p(\underline{x})$ è realizzato in ogni modello di $T \cup \{\exists \underline{x} \Phi(\underline{x})\}$. In particolare, se T è completa, tutti gli n -tipi isolati sono realizzati in ogni modello.*

Dimostrazione. Se \mathcal{M} è modello di $T \cup \{\exists \underline{x} \Phi(\underline{x})\}$, allora esiste $\underline{m} \in M$ tale che $\mathcal{M} \models \Phi(\underline{m})$. Ma allora, dalla definizione di tipo isolato, e poichè $\mathcal{M} \models T$,

$$\mathcal{M} \models \theta(\underline{m}) \text{ per ogni } \theta(\underline{x}) \in p(\underline{x}).$$

Ovvero \mathcal{M} realizza $p(\underline{x})$ in \underline{m} .

Se T è completa e $\exists \underline{x} \Phi(\underline{x}) \in T$, allora ogni modello di T è modello di $T \cup \{\exists \underline{x} \Phi(\underline{x})\}$, e quindi realizza $p(\underline{x})$.

Se T è completa e $\exists \underline{x} \Phi(\underline{x}) \notin T$, allora $\neg \exists \underline{x} \Phi(\underline{x}) \in T$, il che è assurdo perchè $T \cup \{\Phi(\underline{x})\}$ è soddisfacibile per definizione di n -tipo e per Osservazione 2.21. \square

Quindi gli n -tipi isolati sono realizzati in ogni modello. Possiamo ora chiederci se vale il viceversa. Considerando un n -tipo non isolato di una teoria T è vero che esiste un modello di T che lo omette? Il prossimo impegnativo teorema mostra che, se il linguaggio è numerabile, questo è il caso.

La dimostrazione richiederà la costruzione di una teoria di Henkin, come nel Teorema di Compattezza.

Teorema 2.23 (Omissione di Tipi). *Sia T una \mathcal{L} -teoria soddisfacibile, con \mathcal{L} un linguaggio numerabile, e $p(\underline{x})$ un n -tipo non isolato di T . Allora esiste un modello numerabile $\mathcal{M} \models T$ che omette $p(\underline{x})$.*

Dimostrazione. Iniziamo allargando il linguaggio \mathcal{L} a un linguaggio $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$, dove $C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ è costituito da una quantità numerabile di simboli di costante. Costruiremo una nuova \mathcal{L}' -teoria T' aggiungendo a T una successione di \mathcal{L}' -sentenze $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots\}$ in modo che T' sia soddisfacibile, completa, di Henkin, e che abbia un modello ometta $p(\underline{x})$.

Per fare questa costruzione numeriamo $\{\underline{d}_0, \underline{d}_1, \underline{d}_2, \dots\}$ tutte le n -uple di simboli di costante in C , e $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ tutte le \mathcal{L}' -sentenze. Ciò è possibile per numerabilità di \mathcal{L} , e quindi di \mathcal{L}' .

Iniziamo ora la costruzione ricorsiva delle θ_s . Le definiremo di tre in tre $\theta_{3i+1}, \theta_{3i+2}, \theta_{3i+3}$, che ci serviranno rispettivamente per avere completezza, proprietà di Henkin, e omissione di $p(\underline{x})$.

Per la soddisfacibilità ci servirà invece che, per ogni s , $\emptyset \models \theta_{s+1} \rightarrow \theta_s$ e che $T \cup \{\theta_s\}$ sia soddisfacibile.

Passo Base: definiamo θ_0 come la formula $\forall x x = x$. $T \cup \{\theta_0\}$ è soddisfacibile perchè lo è T .

Passo $3i + 1$: Consideriamo la sentenza φ_i . Se $T \cup \{\theta_{3i}, \varphi_i\}$ è soddisfacibile, allora definiamo

$$\theta_{3i+1} = \theta_{3i} \wedge \varphi_i.$$

Se così non è, poichè $T \cup \{\theta_{3i}\}$ è soddisfacibile, deve esserlo anche $T \cup \{\theta_{3i}, \neg\varphi_i\}$, e quindi definiamo

$$\theta_{3i+1} = \theta_{3i} \wedge \neg\varphi_i.$$

In entrambi i casi abbiamo $T \cup \{\theta_{3i+1}\}$ soddisfacibile, $\emptyset \models \theta_{3i+1} \rightarrow \theta_{3i}$ e inoltre

$$\emptyset \models \theta_{3i+1} \rightarrow \varphi_i \quad \text{oppure} \quad \emptyset \models \theta_{3i+1} \rightarrow \neg\varphi_i.$$

Passo $3i + 2$: Consideriamo la sentenza φ_i . Se questa non è una formula esistenziale, o se $T \cup \{\theta_{3i+1}\} \not\models \varphi_i$, allora definiamo $\theta_{3i+2} = \theta_{3i+1}$.

Se altrimenti $T \cup \{\theta_{3i+1}\} \models \varphi_i$, e φ_i è della forma $\exists x \psi(x)$, allora consideriamo il simbolo di costante $c_i \in C$, che non compare in nessuna sentenza di T e in nessuna θ_s precedente, e definisco

$$\theta_{3i+2} = \theta_{3i+1} \wedge \psi(c_i).$$

Abbiamo così che $\emptyset \models \theta_{3i+2} \rightarrow \theta_{3i+1}$, e inoltre

$$\emptyset \models \theta_{3i+2} \rightarrow \psi(c_i).$$

Mostriamo che $T \cup \{\theta_{3i+2}\}$ è soddisfacibile. Sia \mathcal{N} modello di $T \cup \{\theta_{3i+1}\}$. Allora, poichè $T \cup \{\theta_{3i+1}\} \models \varphi_i$, abbiamo $\mathcal{N} \models \exists x \psi(x)$. Se $a \in N$ è testimone di questa esistenza, allora interpretando c_i come a abbiamo un modello di $T \cup \{\theta_{3i+2}\}$.

Passo $3i + 3$: Consideriamo la n -upla $\underline{d}_i = (e_1, \dots, e_n)$ di simboli di costante in C . Sia allora $\psi(x_1, \dots, x_n)$ la formula in n variabili libere ottenuta da θ_{3i+2} sostituendo ogni istanza dei simboli di costante e_i con la variabile libera x_i , e ogni istanza dei simboli di costante $c \in C \setminus \{e_1, \dots, e_n\}$ con una variabile y_c quantificata esistenzialmente da un $\exists y_c$.
Esempio. Se θ_{3i+2} fosse la formula $\exists z e_1 z = e_2 c$, allora $\psi(x_1, x_2)$ sarebbe

$$\exists y_c \exists z x_1 z = x_2 y_c.$$

Poichè $p(\underline{x})$ non è un tipo isolato, in particolare non è isolato da $\psi(\underline{x})$. Quindi esiste una $\xi(\underline{x}) \in p(\underline{x})$ tale che

$$T \not\models \forall \underline{x} (\psi(\underline{x}) \rightarrow \xi(\underline{x})).$$

Definisco allora

$$\theta_{3i+3} = \theta_{3i+2} \wedge \neg \xi(\underline{d}_i).$$

Abbiamo così che $\emptyset \models \theta_{3i+3} \rightarrow \theta_{3i+2}$, e inoltre

$$\emptyset \models \theta_{3i+3} \rightarrow \neg \xi(\underline{d}_i).$$

Questo ci assicurerà che l'interpretazione di \underline{d}_i non sarà una realizzazione di $p(\underline{x})$.

Mostriamo che $T \cup \{\theta_{3i+3}\}$ è soddisfacibile. Poichè $T \not\models \forall \underline{x} (\psi(\underline{x}) \rightarrow \xi(\underline{x}))$, allora esiste un modello \mathcal{N} di T e un $\underline{a} \in N^n$ tali che

$$\mathcal{N} \models \psi(\underline{a}) \wedge \neg \xi(\underline{a}).$$

Allora $\mathcal{N} \models \neg \xi(\underline{d}_i)$ interpretando $\underline{d}_i = (e_1, \dots, e_n)$ come (a_1, \dots, a_n) . Inoltre, $\mathcal{N} \models \theta_{3i+2}$ perchè $\mathcal{N} \models \psi(\underline{a})$, interpretando ogni simbolo di costante $c \in C \setminus \{e_1, \dots, e_n\}$ che compare in θ_{3i+2} come il testimone dell'esistenza $\exists y_c$. Abbiamo quindi $\mathcal{N} \models T \cup \{\theta_{3i+3}\}$.

Ciò conclude la costruzione dei θ_s . Poniamo quindi

$$T' = T \cup \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots\},$$

e verifichiamone le proprietà. Poichè, per ogni s , $T \cup \{\theta_s\}$ è soddisfacibile, e inoltre $\emptyset \models \theta_{s+1} \rightarrow \theta_s$, allora $T \cup \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_s\}$ è soddisfacibile. Dunque, per il Teorema di Compattezza 2.8, T' è soddisfacibile.

T' è completa, infatti, dal passo $3i + 1$, si ha che ogni sentenza φ_i o la sua negazione è implicata da θ_{3i+1} .

T' è di Henkin, infatti, dal passo $3i + 2$, si ha che se $T' \models \exists x \psi(x)$ allora, essendo questa una sentenza φ_i per un certo i , θ_{3i+2} implica che $T' \models \psi(c_i)$. Questo significa che $T' \models (\exists x \psi(x)) \rightarrow \psi(c_i)$.

Sia allora \mathcal{M} un modello di T' in cui ogni elemento è interpretazione di uno dei simboli di costante c_i . Questo modello esiste ed è numerabile per Osservazione 2.3.

Se per assurdo $p(\underline{x})$ fosse realizzato in \mathcal{M} da un \underline{a} , avremmo che, per un certo i , \underline{a} è interpretazione di \underline{d}_i . Ma dal passo $3i + 3$ abbiamo che \underline{d}_i non può realizzare $p(\underline{x})$, poichè $\theta_{3i+3} \models \neg \xi(\underline{d}_i)$ per una $\xi(\underline{x}) \in p(\underline{x})$. Quindi \mathcal{M} omette $p(\underline{x})$. \square

Corollario 2.24. *Se \mathcal{L} è un linguaggio numerabile, n -tipo della \mathcal{L} -teoria T è isolato se e solo se è realizzato da ogni modello di T .*

2.3.2 Modelli Primi e Atomici

Siccome è possibile omettere solo i tipi non isolati, è possibile che un modello li ometta tutti.

Definizione 2.10. Un modello \mathcal{M} di T si dice *atomico* se per ogni $\underline{a} \in M^n$, $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\underline{a})$ è un n -tipo isolato.

Un modello atomico è quindi in un certo senso ‘piccolo’, realizza solo i tipi che devono essere realizzati. Per teorie complete si può definire una seconda nozione di modello ‘piccolo’, ovvero un modello che si immerge in ogni altro modello.

Definizione 2.11. Sia T una teoria completa con solo modelli di cardinalità infinita. Un modello \mathcal{M} di T si dice *primo* se per ogni $\mathcal{N} \models T$, si ha $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

Richiediamo che T non abbia modelli di cardinalità finita. Se così non fosse, e T completa avesse un modello \mathcal{M} di cardinalità finita k , allora farebbe parte di T la formula che lo esprime

$$\exists x_1, \dots, x_k \left(\bigwedge_{i < j} x_i \neq x_j \right) \wedge (\forall y (y = x_1 \vee \dots \vee y = x_k)),$$

quindi ogni modello avrebbe cardinalità k , e non esisterebbero estensioni o sottostrutture elementari proprie, ma solo isomorfismi. In questo caso infatti ogni modello di T sarebbe isomorfo.

Siamo in grado di dimostrare che, nel caso di linguaggi numerabili, le definizioni appena date sono quasi equivalenti.

Proposizione 2.25. *Sia T una \mathcal{L} -teoria completa con solo modelli di cardinalità infinita, \mathcal{L} un linguaggio numerabile e \mathcal{M} un modello di T . Allora \mathcal{M} è un modello primo se e solo se è un modello atomico e numerabile.*

Dimostrazione. (\Rightarrow) Assumiamo \mathcal{M} primo. Per dimostrare che è atomico mostriamo che omette ogni tipo non isolato. Se $p(\underline{x}) \in \mathcal{S}_n(T)$ non isolato, allora, per il precedente Teorema di Omissione, esiste un modello $\mathcal{N} \models T$ che omette $p(\underline{x})$. Ma allora, poichè $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, anche \mathcal{M} deve omettere $p(\underline{x})$ per l'Osservazione 2.18.

Dobbiamo ora mostrare la numerabilità. Per il Teorema di Löwenheim-Skolem Discendente 2.17, essendo \mathcal{L} numerabile, esiste una sottostruttura elementare $\mathcal{B} \prec \mathcal{M}$ numerabile. Ma essendo \mathcal{M} primo, esiste un'immersione $\mathcal{M} \prec \mathcal{B}$, quindi $|M| \leq |B|$, ovvero M è numerabile.

(\Leftarrow) Sia $\mathcal{M} \models T$ atomico e numerabile, $M = \{m_0, m_1, m_2, \dots\}$, e sia $\mathcal{N} \models T$. Mostriamo $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. A tal fine definiamo la successione di formule $\Phi_i(x_0, \dots, x_i)$ come le formule che isolano i tipi $\text{tp}^{\mathcal{M}}(m_0, \dots, m_i)$. Ognuna di queste ha quindi una variabile libera in più della precedente.

Costruiamo ora per ricorsione delle funzioni $f_i : \{m_0, \dots, m_{i-1}\} \rightarrow N$ che siano ognuna espansione della precedente, e che siano *parzialmente elementari*, ovvero tali che, per ogni \mathcal{L} -formula $\varphi(x_0, \dots, x_{i-1})$,

$$\mathcal{M} \models \varphi(m_0, \dots, m_{i-1}) \iff \mathcal{N} \models \varphi(f_i(m_0), \dots, f_i(m_{i-1})).$$

- $f_0 : \emptyset \rightarrow N$ è parzialmente elementare. Infatti, essendo T completa, per ogni \mathcal{L} -sentenza φ si ha

$$\mathcal{M} \models \varphi \iff \varphi \in T \iff \mathcal{N} \models \varphi.$$

- Data $f_i : \{m_0, \dots, m_{i-1}\} \rightarrow N$ parzialmente elementare, poichè $\mathcal{M} \models \Phi_i(m_0, \dots, m_i)$, abbiamo che

$$\mathcal{M} \models \exists x \Phi_i(m_0, \dots, m_{i-1}, x),$$

e quindi

$$\mathcal{N} \models \exists x \Phi_i(f_i(m_0), \dots, f_i(m_{i-1}), x).$$

Allora sia $b \in N$ testimone di questa esistenza, ovvero

$$\mathcal{N} \models \Phi_i(f_i(m_0), \dots, f_i(m_{i-1}), b).$$

Dunque, poichè $\Phi_i(x_0, \dots, x_i)$ isola $\text{tp}^{\mathcal{M}}(m_0, \dots, m_i)$, abbiamo che

$$\text{tp}^{\mathcal{M}}(m_0, \dots, m_i) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(f_i(m_0), \dots, f_i(m_{i-1}), b).$$

Quindi definendo

$$f_{i+1}(m_k) = f_i(m_k) \text{ per } k < i \quad \text{e} \quad f_{i+1}(m_i) = b,$$

otteniamo una $f_{i+1} : \{m_0, \dots, m_i\} \rightarrow N$ parzialmente elementare.

Possiamo allora concludere definendo $f : M \rightarrow N$, definita da $f(m_i) = f_i(m_i)$. Questa è l'immersione elementare cercata, essendo ogni f_i parzialmente elementare e estensione delle precedenti. \square

Capitolo 3

Teoria dei Campi Algebricamente Chiusi

In questo capitolo vedremo come gli strumenti descritti sinora possono essere usati nello studio di una teoria specifica, la teoria dei campi algebricamente chiusi (ACF), e concluderemo con alcuni risultati algebrici che si possono dimostrare grazie a questa analisi.

Iniziamo descrivendo la teoria e il suo linguaggio. Il linguaggio è il linguaggio degli anelli $\mathcal{L}_r = \{0, 1, +, -, \cdot\}$, dove 0 e 1 sono simboli di costante, + e \cdot sono simboli di funzione di arietà 2, e $-$ è simbolo di funzione di arietà 1. Tutti gli assiomi della teoria dei campi sono facilmente scrivibili come formule del primo ordine:

$$\forall x, y, z \quad ((x + y) + z = x + (y + z) \quad \wedge \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)),$$

$$\forall x, y \quad (x + y = y + x \quad \wedge \quad x \cdot y = y \cdot x),$$

$$\forall x \quad (x + 0 = x \quad \wedge \quad x \cdot 1 = x),$$

$$\forall x \quad (x + (-x) = 0),$$

$$\forall x \quad (x \neq 0 \rightarrow (\exists y \quad x \cdot y = 1)),$$

$$\forall x, y, z \quad (x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)).$$

Indichiamo T_{campi} l'insieme di tali formule.

Scriveremo spesso all'interno di formule del primo ordine il termine x^n , che funge solo da abbreviazione per il termine $\overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ volte}}$. Similmente possiamo scrivere come termine ogni numero intero usando il simbolo di costante 1 e i simboli di funzione $+$ e $-$:

È importante notare che, trattando i campi come strutture in questo linguaggio, le definizioni algebriche di isomorfismo ed estensione di campo coincidono con i concetti corrispondenti definiti nel precedente capitolo.

Una prima applicazione diretta ai campi della teoria dei modelli, nello specifico del Teorema di Compatezza, è l'esistenza per ogni campo di una chiusura algebrica, ovvero una sua estensione algebricamente chiusa.

Proposizione 3.1. *Sia \mathbb{K} un campo, allora esiste una sua estensione \mathbb{F} tale che \mathbb{F} è un campo algebricamente chiuso.*

Dimostrazione. Mostriamo che ogni campo \mathbb{K} ha un'estensione in cui tutti i polinomi di $\mathbb{K}[x]$ hanno almeno una radice. Consideriamo \mathbb{K} come una struttura nel linguaggio $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$, ottenuto aggiungendo a \mathcal{L}_r un simbolo di costante per ogni elemento di \mathbb{K} , con le rispettive interpretazioni. In questo linguaggio, avendo gli elementi di \mathbb{K} tra i simboli, posso scrivere come termine ogni polinomio di $\mathbb{K}[x]$.

Posso quindi considerare la teoria

$$\tilde{T} = T_{\text{campi}} \cup \text{Diag}(\mathbb{K}) \cup \{\exists x f(x) = 0\}_{f(x) \in \mathbb{K}[x]}.$$

Dalla Proposizione 2.14, ogni modello di questa teoria sarà un'estensione di \mathbb{K} , sarà un campo, e avrà radici di ogni polinomio a coefficienti in \mathbb{K} . Dobbiamo quindi mostrare che questa è soddisfacibile.

Dal Teorema di Compatezza, ci basta mostrare che lo ogni suo sottoinsieme finito. Sia quindi $\Gamma \subseteq \tilde{T}$ finito, allora esiste un numero finito di polinomi $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x]$ tale che $\Gamma \subseteq T_{\text{campi}} \cup \text{Diag}(\mathbb{K}) \cup \{\exists x f_i(x) = 0\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$.

Ma allora possiamo costruire una serie estensioni di \mathbb{K} in modo da aggiungere, se mancano, radici di questo polinomi:

- Se $f_1(x)$ ha una radice in \mathbb{K} , allora pongo $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}$.

- Altrimenti, sia $g(x)|f_1(x)$ un fattore irriducibile di $f_1(x)$, che potrebbe essere anche $f_1(x)$ stesso. Allora l'anello quoziente $\mathbb{K}[x]/(g)$ è un'estensione di campo di \mathbb{K} , in cui $[x]$ è una radice di $g(x)$ e quindi di $f_1(x)$. Pongo allora $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}[x]/(g)$.

Ripetendo questo procedimento n volte ottengo un campo \mathbb{K}_n che contiene una radice di ogni $f_i(x)$, e che è estensione di \mathbb{K} , per cui questo è un modello di Γ . Possiamo quindi concludere che \tilde{T} è soddisfacibile da un modello \mathbb{F}_0 , che quindi sarà estensione di campo di \mathbb{K} in cui ogni polinomio a coefficienti in \mathbb{K} ha una radice.

Ma, per lo stesso ragionamento, il campo \mathbb{F}_0 avrà un'estensione \mathbb{F}_1 in cui i suoi polinomi hanno una radice. Dunque ripetendo ricorsivamente abbiamo una successione di campi

$$\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}_0 \subseteq \mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_3 \subseteq \dots$$

Ma allora $\mathbb{F} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathbb{F}_j$ è un campo estensione di \mathbb{K} . Ogni polinomio $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, $f(x)$ ha un numero finito di coefficienti, quindi $f(x) \in \mathbb{F}_i[x]$ per un certo i , quindi, per costruzione, $f(x)$ ha una radice in $\mathbb{F}_{i+1} \subseteq \mathbb{F}$. Abbiamo così concluso che \mathbb{F} è algebricamente chiuso. \square

Per descrivere una \mathcal{L}_r -teoria per campi algebricamente chiusi non possiamo, come abbiamo fatto nella precedente dimostrazione, usare una formula per ogni polinomio, in quanto nel linguaggio dei campi \mathcal{L}_r possiamo esprimere come termini soltanto i coefficienti interi. Ma poichè i coefficienti di un polinomio sono elementi del campo, possiamo quantificarli, per cui possiamo aggiungere alla teoria dei campi la \mathcal{L}_r -sentenza

$$\forall a_0, \dots, a_n (a_n \neq 0 \rightarrow (\exists x a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0)),$$

per ogni naturale $n \geq 1$.

Indicheremo quindi la teoria dei campi algebricamente chiusi

$$\text{ACF} = T_{\text{campi}} \cup \{\forall a_0, \dots, a_n (a_n \neq 0 \rightarrow (\exists x a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0))\}_{n \geq 1}.$$

3.1 Eliminazione dei Quantificatori

Il nostro primo obiettivo è mostrare che la teoria ACF gode di una proprietà che ci faciliterà lo studio delle formule.

Definizione 3.1. Sia T una \mathcal{L} -teoria, e siano $\varphi(\underline{x})$ e $\theta(\underline{x})$ due \mathcal{L} -formule. $\varphi(\underline{x})$ e $\theta(\underline{x})$ si dicono *equivalenti modulo T* o *T -equivalenti* se

$$T \models \forall \underline{x} (\varphi(\underline{x}) \leftrightarrow \theta(\underline{x}))$$

Diciamo che T *elimina i quantificatori* se ogni \mathcal{L} -formula $\varphi(\underline{x})$ è T -equivalente a una \mathcal{L} -formula $\psi(\underline{x})$ senza quantificatori.

Osservazione 3.2. La veridicità di una formula senza quantificatori è determinata esclusivamente dalla veridicità delle formule atomiche che vi compaiono. Dunque è mantenuta da estensioni o sottostrutture anche non elementari.

Di conseguenza, se una struttura e una sua estensione sono entrambi modelli di una teoria T , allora viene mantenuta anche la veridicità di ogni formula T -equivalente a una formula senza quantificatori.

Vediamo ora che questa osservazione può diventare un criterio per verificare che una formula sia T -equivalente a una senza quantificatori.

Proposizione 3.3. *Sia \mathcal{L} un linguaggio con almeno un simbolo di costante, T una \mathcal{L} -teoria e $\varphi(\underline{x})$ una \mathcal{L} -formula. Sono allora equivalenti:*

- i) $\varphi(\underline{x})$ è T -equivalente a una \mathcal{L} -formula $\psi(\underline{x})$ senza quantificatori.*
- ii) Per ogni $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ con una sottostruttura comune $\mathcal{S} \models T$, e per ogni $\underline{a} \in S^n$, si ha $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{a})$ se e solo se $\mathcal{N} \models \varphi(\underline{a})$.*

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii)

Essendo $\varphi(\underline{x})$ T -equivalente a $\psi(\underline{x})$ senza quantificatori, e \mathcal{M}, \mathcal{N} e \mathcal{S} modelli di T , basta mostrare la tesi per $\psi(\underline{x})$. Ma, dall'Osservazione 3.2, $\psi(\underline{x})$ mantiene soddisfacibilità per sottostrutture e estensioni, e quindi per ogni $\underline{a} \in S^n$ si ha

$$\mathcal{M} \models \psi(\underline{a}) \iff \mathcal{S} \models \psi(\underline{a}) \iff \mathcal{N} \models \psi(\underline{a}).$$

(ii) \Rightarrow (i)

Sia c un simbolo di costante di \mathcal{L} , dividiamo in 3 casi:

- Se $T \models \forall \underline{x} \varphi(\underline{x})$, allora $T \models \forall \underline{x} (\varphi(\underline{x}) \leftrightarrow c = c)$, ovvero $\varphi(\underline{x})$ è T -equivalente a $c = c$.
- Analogamente, se $T \models \forall \underline{x} \neg\varphi(\underline{x})$ allora $\varphi(\underline{x})$ è T -equivalente a $c \neq c$.

Consideriamo quindi il rimanente caso, in cui $T \cup \{\exists \underline{x} \varphi(\underline{x})\}$ e $T \cup \{\exists \underline{x} \neg\varphi(\underline{x})\}$ sono entrambe soddisfacibili.

Sia $\Gamma(\underline{x})$ l'insieme delle formule, senza quantificatori e in variabili libere x_1, \dots, x_n , implicate da $\varphi(\underline{x})$, ovvero

$$\Gamma(\underline{x}) = \{\psi(\underline{x}) \text{ senza quantificatori} \mid T \models \forall \underline{x} (\varphi(\underline{x}) \rightarrow \psi(\underline{x}))\}.$$

Aggiungendo poi a \mathcal{L} nuovi simboli di costante d_1, \dots, d_n , consideriamo l'insieme di formule $\Gamma(\underline{d})$, ottenuto sostituendo d_1, \dots, d_n alle variabili libere delle formule di $\Gamma(\underline{x})$.

Claim: $T \cup \Gamma(\underline{d}) \models \varphi(\underline{d})$.

Assumiamo per assurdo che $T \cup \Gamma(\underline{d}) \cup \{\neg\varphi(\underline{d})\}$ sia soddisfacibile da un modello \mathcal{M} . Prendiamo allora in considerazione la più piccola sottostruttura \mathcal{S} di \mathcal{M} contenente $d_1^{\mathcal{M}}, \dots, d_n^{\mathcal{M}}$, ovvero la chiusura di $\{d_1^{\mathcal{M}}, \dots, d_n^{\mathcal{M}}\}$ per simboli di funzione e di costante. Osserviamo che \mathcal{S} è non vuota anche nel caso $n = 0$, poichè \mathcal{L} ha almeno un simbolo di costante c , e quindi la sua interpretazione in \mathcal{M} deve appartenere a \mathcal{S} .

Osserviamo poi che, poichè \mathcal{S} è chiusura di $\{d_1^{\mathcal{M}}, \dots, d_n^{\mathcal{M}}\}$ per simboli di funzione e costante, posso indicare ogni elemento di \mathcal{S} come un termine calcolato in $d_1^{\mathcal{M}}, \dots, d_n^{\mathcal{M}}$. In particolare posso vedere ogni formula atomica in $\text{Diag}(\mathcal{S})$ come formula unicamente in d_1, \dots, d_n .

Inoltre, dato che \mathcal{S} è una sottostruttura di \mathcal{M} , e le formule di $\Gamma(\underline{x})$ sono senza quantificatori, abbiamo $\mathcal{S} \models \Gamma(\underline{d})$ come conseguenza dell'Osservazione 3.2.

Voglio ora mostrare che la teoria $\Sigma = T \cup \text{Diag}(\mathcal{S}) \cup \{\varphi(\underline{d})\}$ è soddisfacibile.

Se non lo fosse, allora per il Teorema di Compattezza esisterebbero $\theta_1(\underline{d}), \dots, \theta_m(\underline{d}) \in \text{Diag}(\mathcal{S})$ per cui $T \cup \{\theta_1(\underline{d}), \dots, \theta_m(\underline{d})\} \cup \{\varphi(\underline{d})\}$ non è soddisfacibile.

Ma allora, dato che le formule in T non contengono i simboli d_1, \dots, d_n ,

$$T \models \forall \underline{x} \left(\bigwedge_{j=1}^m \theta_j(\underline{x}) \rightarrow \neg\varphi(\underline{x}) \right),$$

e quindi

$$T \models \forall \underline{x} (\varphi(\underline{x}) \rightarrow \bigvee_{j=1}^m \neg \theta_j(\underline{x})).$$

Ma questa è la proprietà con cui abbiamo costruito l'insieme $\Gamma(\underline{x})$, dunque $\bigvee_{j=1}^m \neg \theta_j(\underline{d})$ appartiene a $\Gamma(\underline{d})$, e quindi $\mathcal{S} \models \bigvee_{j=1}^m \neg \theta_j(\underline{d})$. Questa è una contraddizione perchè ogni $\theta_j(\underline{d})$ appartiene a $\text{Diag}(\mathcal{S})$.

Concludiamo allora che $\Sigma = T \cup \text{Diag}(\mathcal{S}) \cup \{\varphi(\underline{d})\}$ è soddisfacibile. Se \mathcal{N} è un suo modello, allora \mathcal{S} è sia sottostruttura di \mathcal{N} , che di \mathcal{M} . Ma $\mathcal{M} \models \neg \varphi(\underline{d})$ e $\mathcal{N} \models \varphi(\underline{d})$, ciò è assurdo perchè va contro l'ipotesi (ii).

Possiamo allora affermare $T \cup \Gamma(\underline{d}) \models \varphi(\underline{d})$. Usando il Corollario 2.10 del Teorema di Compatezza, abbiamo che esistono $\psi_1(\underline{d}), \dots, \psi_r(\underline{d}) \in \Gamma(\underline{d})$ tali che

$$T \cup \{\psi_1(\underline{d}), \dots, \psi_r(\underline{d})\} \models \varphi(\underline{d}).$$

Quindi, sempre perchè d_1, \dots, d_n non compaiono in T ,

$$T \models \forall \underline{x} (\bigwedge_{j=1}^r \psi_j(\underline{x}) \rightarrow \varphi(\underline{x})).$$

Ma $\bigwedge_{j=1}^r \psi_j(\underline{x})$ appartiene a $\Gamma(\underline{d})$, essendo congiunzione di $\psi_j(\underline{x}) \in \Gamma(\underline{d})$, dunque concludiamo

$$T \models \forall \underline{x} (\bigwedge_{j=1}^r \psi_j(\underline{x}) \leftrightarrow \varphi(\underline{x})).$$

Ovvero $\varphi(\underline{x})$ è T -equivalente a $\bigwedge_{j=1}^r \psi_j(\underline{x})$, che è senza quantificatori. \square

Ora abbiamo un criterio per determinare se una formula è T -equivalente a una senza quantificatori. Il prossimo lemma afferma che per dimostrare che ciò valga per tutte le formule, basta verificarlo per formule esistenziali.

Lemma 3.4. *Sia T una \mathcal{L} -teoria in cui, per ogni formula senza quantificatori $\theta(\underline{x}, y)$, la formula $\exists y \theta(\underline{x}, y)$ è T -equivalente a una formula senza quantificatori $\psi(\underline{x})$. Allora T elimina i quantificatori.*

Dimostrazione. Sia $\varphi(\underline{x})$ una formula qualunque. Mostriamo per induzione sulla sua complessità di $\varphi(\underline{x})$ che questa è T -equivalente a una formula senza quantificatori.

Passo Base: Se $\varphi(\underline{x})$ è atomica, allora è già senza quantificatori.

Passo Induttivo:

- (\neg) : Sia $\varphi(\underline{x}) = \neg\theta(\underline{x})$, per ipotesi induttiva

$$T \models \forall \underline{x} (\theta(\underline{x}) \leftrightarrow \psi(\underline{x})),$$

per una $\psi(\underline{x})$ senza quantificatori. Ma allora

$$T \models \forall \underline{x} (\neg\theta(\underline{x}) \leftrightarrow \neg\psi(\underline{x})),$$

ovvero $\neg\theta(\underline{x})$ è T -equivalente a $\neg\psi(\underline{x})$, che è senza quantificatori.

- (\wedge) : Sia $\varphi(\underline{x}) = \theta_1(\underline{x}) \wedge \theta_2(\underline{x})$, e siano $\psi_1(\underline{x})$ e $\psi_2(\underline{x})$ formule senza quantificatori rispettivamente equivalenti a $\theta_1(\underline{x})$ e $\theta_2(\underline{x})$. Allora

$$T \models \forall \underline{x} (\theta_1(\underline{x}) \wedge \theta_2(\underline{x}) \leftrightarrow \psi_1(\underline{x}) \wedge \psi_2(\underline{x})),$$

dove $\psi_1(\underline{x}) \wedge \psi_2(\underline{x})$ è senza quantificatori

- (\exists) : Sia $\varphi(\underline{x}) = \exists y \theta(\underline{x}, y)$, dove $\theta(\underline{x}, y)$ è T -equivalente a una formula senza quantificatori. Ma allora, per ipotesi, anche $\exists y \theta(\underline{x}, y)$ è T -equivalente a una formula senza quantificatori $\psi(\underline{x})$.

Quindi ogni formula è T -equivalente a una senza quantificatori, ovvero T elimina i quantificatori. \square

Ora che abbiamo un criterio per provare l'eliminazione dei quantificatori di una teoria, proviamo ad applicarlo ad ACF. Come sono fatte le formule senza quantificatori in questa teoria?

Osservazione 3.5. Ogni \mathcal{L}_r -formula atomica è ACF-equivalente a una formula della forma $p(x_1, \dots, x_n) = 0$ dove, p è un polinomio a coefficienti interi.

Questo perchè ogni termine è ottenuto da variabili x_1, \dots, x_n e dai simboli di costante 1 e 0 usando i simboli di funzione $+$, \cdot e $-$, quindi ogni termine è un polinomio intero. Inoltre, la formula $t_1(\underline{x}) = t_2(\underline{x})$ è equivalente alla formula $t_1(\underline{x}) - t_2(\underline{x}) = 0$, che è della forma cercata.

Quindi, una generica formula senza quantificatori in n variabili, è equivalente, grazie alla Proposizione 1.2, a una della forma

$$\bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^l f_{i,j}(\underline{x}) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k g_{i,j}(\underline{x}) \neq 0 \right),$$

dove $f_{i,j}(\underline{x})$ e $g_{i,j}(\underline{x})$ sono tutti polinomi interi.

Teorema 3.6. *ACF elimina i quantificatori.*

Dimostrazione. Per il Lemma 3.4, è sufficiente mostrare che possiamo eliminare i quantificatori alle formule della forma $\exists y \varphi(\underline{x}, y)$, dove $\varphi(\underline{x}, y)$ è senza quantificatori. A tal fine usiamo la Proposizione 3.3 su queste formule.

Sia quindi $\mathbb{K} \models \text{ACF}$ un campo algebricamente chiuso, e \mathbb{L}, \mathbb{F} altri due campi algebricamente chiusi estensioni di \mathbb{K} . Dobbiamo mostrare che, per ogni $\underline{a} \in \mathbb{K}^n$, si ha

$$\mathbb{L} \models \exists y \varphi(\underline{a}, y) \iff \mathbb{F} \models \exists y \varphi(\underline{a}, y).$$

Essendo \mathbb{L} e \mathbb{F} arbitrari, basta dimostrare un'implicazione, la seconda sarà analoga.

Assumiamo quindi che $\mathbb{L} \models \exists y \varphi(\underline{a}, y)$, e mostriamo che questa formula è soddisfatta anche da \mathbb{F} . Poichè $\varphi(\underline{x}, y)$ è senza quantificatori, per l'Osservazione 3.5, posso assumerla della forma

$$\bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^l f_{i,j}(\underline{x}, y) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k g_{i,j}(\underline{x}, y) \neq 0 \right).$$

Ponendo $\tilde{f}_{i,j}(y) = f_{i,j}(\underline{a}, y)$ e $\tilde{g}_{i,j}(y) = g_{i,j}(\underline{a}, y)$, posso pensare questi come polinomi in unica variabile y a coefficienti in \mathbb{K} , ottenuti sostituendo $\underline{a} \in \mathbb{K}^n$ alle variabili \underline{x} . Quindi $\mathbb{L} \models \exists y \varphi(\underline{a}, y)$ significa che esiste un $b \in \mathbb{L}$ tale che

$$\mathbb{L} \models \bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^l \tilde{f}_{i,j}(b) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k \tilde{g}_{i,j}(b) \neq 0 \right),$$

ovvero, per un certo i ,

$$\mathbb{L} \models \bigwedge_{j=1}^l \tilde{f}_{i,j}(b) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k \tilde{g}_{i,j}(b) \neq 0.$$

Dividiamo ora in casi:

- Se uno qualunque dei polinomi $\tilde{f}_{i,j}(y) \in \mathbb{K}[y]$ avesse grado maggiore o uguale a 1, allora un tale b sarebbe in \mathbb{K} . Questo perchè b è radice di tale polinomio a coefficienti in \mathbb{K} , e \mathbb{K} è algebricamente chiuso. Ma allora essendo \mathbb{L} estensione di \mathbb{K} ,

$$\mathbb{K} \models \bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^l \tilde{f}_{i,j}(b) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k \tilde{g}_{i,j}(b) \neq 0 \right),$$

e quindi, poichè \mathbb{F} è estensione di \mathbb{K} e questa formula è senza quantificatori, vale

$$\mathbb{F} \models \bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^l \tilde{f}_{i,j}(b) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k \tilde{g}_{i,j}(b) \neq 0 \right),$$

e dunque

$$\mathbb{F} \models \exists y \bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^l f_{i,j}(\underline{a}, y) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k g_{i,j}(\underline{a}, y) \neq 0 \right),$$

ovvero $\mathbb{F} \models \exists y \varphi(\underline{a}, y)$.

- Se invece tutti gli $\tilde{f}_{i,j}(y)$ sono di grado 0, allora sono termini equivalenti a elementi di \mathbb{K} , e non dipendono dalla valutazione di y . Dunque, poichè $\tilde{f}_{i,j} = 0$ è soddisfatta da \mathbb{L} , questa è soddisfatta anche dalla sottostruttura \mathbb{K} , e di conseguenza da \mathbb{F} . Resta allora da trovare in \mathbb{F} un elemento che soddisfi

$$\bigwedge_{j=1}^k \tilde{g}_{i,j}(y) \neq 0.$$

Ma ogni $\tilde{g}_{i,j}(y)$ è un polinomio a coefficienti in \mathbb{K} , e ha quindi un numero finito di radici in \mathbb{F} . Inoltre, ogni campo algebricamente chiuso ha cardinalità infinita, dunque se $d \in \mathbb{F}$ è un qualunque elemento che non è radice di nessun $\tilde{g}_{i,j}(y)$, allora

$$\mathbb{F} \models \bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^l \tilde{f}_{i,j} = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k \tilde{g}_{i,j}(d) \neq 0 \right),$$

ovvero $\mathbb{F} \models \varphi(\underline{a}, d)$, da cui $\mathbb{F} \models \exists y \varphi(\underline{a}, y)$.

Ciò conclude la dimostrazione. □

Vediamo un corollario che ci sarà utile nel dimostrare più avanti il Teorema degli Zeri di Hilbert.

Corollario 3.7 (Model-Completezza). *Sia \mathcal{M} un modello di ACF, e sia $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$ una sua estensione ancora modello di ACF. Allora questa estensione è elementare.*

Dimostrazione. Essendo \mathcal{N} estensione di \mathcal{M} , per l'Osservazione 3.2 tutte le formule ACF-equivalenti a una formula senza quantificatori mantengono la loro veridicità.

Ma, per eliminazione dei quantificatori, queste tutte le formule. Quindi è mantenuta la veridicità di ogni \mathcal{L}_r -formula, ovvero l'estensione è elementare. \square

Avevamo visto nell'Esempio 3 che questo non vale per teorie qualunque.

3.2 Completezza e Modelli Primi

Possiamo osservare che la teoria ACF è sicuramente non completa, infatti esistono campi algebricamente chiusi di ogni possibile caratteristica, come conseguenza della Proposizione 3.1 sui campi base \mathbb{F}_p . Possiamo quindi estendere ACF con una formula θ_p :

$$\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{p \text{ volte}} = 0,$$

con p primo.

Abbiamo così la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica p

$$\text{ACF}_p = \text{ACF} \cup \{\theta_p\},$$

e possiamo invece costruire la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica 0 come

$$\text{ACF}_0 = \text{ACF} \cup \{\neg\theta_p\}_{p \text{ primo}}.$$

Per il resto della sezione p sarà 0 o un numero primo.

Osservazione 3.8. Ogni campo di caratteristica p ha come sottocampo il campo base \mathbb{F}_p (dove poniamo $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$), che sarà il sottocampo generato da 1. Perciò ogni modello \mathcal{M} di ACF_p avrà \mathbb{F}_p come sottostruttura comune, infatti $\mathbb{F}_p \subseteq \mathcal{M}$ contiene 1 e 0, ed è chiuso per i simboli di funzione $+$, \cdot e $-$.

Questa osservazione, insieme all'eliminazione dei quantificatori dimostrata nella sezione precedente, è sufficiente per dimostrare che ACF_p è una teoria completa per ogni p .

Proposizione 3.9. ACF_p è una teoria completa.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \text{ACF}_p$, e sia φ una \mathcal{L}_r -sentenza. Mostriamo che $\mathcal{M} \models \varphi$ se e solo se $\mathcal{N} \models \varphi$.

Per eliminazione dei quantificatori, φ è ACF-equivalente a una ψ senza quantificatori. Per la precedente osservazione, abbiamo che $\mathbb{F}_p \subseteq \mathcal{M}$ è una sottostruttura, e dunque, per l'Osservazione 3.2, $\mathbb{F}_p \models \psi$. Tramite lo stesso ragionamento, si ha che $\mathcal{N} \models \psi$, e quindi poichè ψ è ACF-equivalente a φ , si ha $\mathcal{N} \models \varphi$.

Identicamente vale il viceversa, dunque ogni modello di ACF_p soddisfa le stesse \mathcal{L}_r -sentenze, ovvero la teoria è completa. \square

Ora, poichè la teoria è completa, e essendo ogni campo algebricamente chiuso di cardinalità infinita, è ben posta la definizione di modello primo di ACF_p , ovvero un campo algebricamente chiuso di caratteristica p che si immerge elementarmente in ogni altro campo con queste caratteristiche.

Dimostrare l'esistenza di un modello primo ci permette dunque di definire la chiusura algebrica di \mathbb{F}_p come tale modello, il più piccolo campo algebricamente chiuso contenente \mathbb{F}_p .

A tal fine vogliamo studiare i tipi della teoria, in particolare gli 1-tipi.

Osserviamo che essendo i termini del linguaggio \mathcal{L}_r in una variabile libera polinomi interi, una volta fissata la caratteristica p è ben definito classificarli come riducibili o irriducibili, pensandoli come polinomi nel campo base \mathbb{F}_p .

Quindi ogni formula atomica $f(x) = 0$ sarà ACF_p -equivalente alla formula

$$(f_1(x) = 0) \vee (f_2(x) = 0) \vee \dots \vee (f_m(x) = 0),$$

dove $f(x) = f_1(x) \cdot \dots \cdot f_m(x)$ è la scomposizione in polinomi irriducibili di $f(x)$ come polinomio a coefficienti in \mathbb{F}_p . Tramite la Proposizione 1.2, ciò ci permette, per eliminazione dei quantificatori, di scrivere una generica formula in una variabile libera $\varphi(x)$ come ACF_p -equivalente a

$$\bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^l f_{i,j}(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k g_{i,j}(x) \neq 0 \right),$$

dove ogni $f_{i,j}(x)$ e $g_{i,j}(x)$ è un polinomio irriducibile.

Proposizione 3.10. *Sia $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ un polinomio irriducibile, allora la formula atomica $f(x) = 0$ isola un 1-tipo completo della teoria ACF_p .*

Dimostrazione. Sia \mathbb{K} un modello di ACF_p , e $a \in \mathbb{K}$ tale che $f(a) = 0$. Dire che $f(x) = 0$ isola il tipo $\text{tp}^{\mathbb{K}}(a)$ significa che ogni formula $\varphi(x) \in \text{tp}^{\mathbb{K}}(a)$ è implicata da $f(x) = 0$.

Sia quindi \mathbb{L} un altro modello di ACF_p , e $b \in \mathbb{L}$ tale che $f(b) = 0$. Mostriamo che $\mathbb{L} \models \varphi(b)$ per ogni $\varphi(x) \in \text{tp}^{\mathbb{K}}(a)$. Per quanto discusso prima, $\varphi(x)$ è ACF_p -equivalente a una formula della forma

$$\bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^l f_{i,j}(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k g_{i,j}(x) \neq 0 \right),$$

dove tutti i polinomi sono irriducibili.

Siccome questa è soddisfatta da a in \mathbb{K} , per un certo i abbiamo che

$$\mathbb{K} \models \bigwedge_{j=1}^l f_{i,j}(a) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k g_{i,j}(a) \neq 0.$$

Ma allora, poichè, come da Teorema 1.3, un elemento può essere radice di un solo polinomio irriducibile, ogni $f_{i,j}(x)$ deve essere $f(x)$, mentre ogni $g_{i,j}(x)$ deve essere diverso da $f(x)$. Dunque anche $b \in \mathbb{L}$ soddisfa questa formula, in quanto anch'esso radice di $f(x)$, e quindi $\mathbb{L} \models \varphi(b)$.

Concludiamo quindi che $\text{tp}^{\mathbb{K}}(a) = \text{tp}^{\mathbb{L}}(b)$, e questo è isolato da $f(x) = 0$. \square

Quindi l'1-tipo di ogni elemento algebrico rispetto al campo base è unicamente determinato dal polinomio irriducibile di cui è radice, ovvero dal suo polinomio minimo. Come sono fatti i rimanenti tipi?

Proposizione 3.11. *Esiste un unico 1-tipo completo $\pi(x)$ di ACF_p tale che*

$$\{h(x) \neq 0 \mid h(x) \in \mathbb{F}_p[x] \text{ irriducibile}\} \subseteq \pi(x).$$

Questo 1-tipo non è isolato.

Dimostrazione. Iniziamo mostrando che $\{h(x) \neq 0 \mid h(x) \in \mathbb{F}_p[x] \text{ irriducibile}\}$ è un 1-tipo. Un suo qualunque sottoinsieme finito $\{h_1(x) \neq 0, \dots, h_m(x) \neq 0\}$ è realizzato in $\mathbb{K} \models \text{ACF}_p$ da un qualunque elemento che non sia radice di nessun $h_i(x)$. Un tale

elemento esiste sempre essendo \mathbb{K} di cardinalità infinita e le radici di ogni $h_i(x)$ in numero finito.

Quindi per il Teorema di Compattezza 2.8, abbiamo che

$$\{h(x) \neq 0 \mid h(x) \in \mathbb{F}_p[x] \text{ irriducibile}\} \cup \text{ACF}_p$$

è soddisfacibile, e quindi è verificata la definizione di 1-tipo.

Assumiamo ora per assurdo che questo abbia due completamenti soddisfacibili differenti $\pi_1(x)$ e $\pi_2(x)$, sia quindi $\psi(x) \in \pi_1(x)$ tale che $\neg\psi(x) \in \pi_2(x)$. Come prima, possiamo assumere $\psi(x)$ della forma

$$\bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^l f_{i,j}(x) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^k g_{i,j}(x) \neq 0 \right),$$

dove $f_{i,j}(x)$ e $g_{i,j}(x)$ sono polinomi irriducibili.

Ma poichè $\pi_1(x)$ è soddisfacibile, devono esserlo contemporaneamente $\psi(x)$ e tutte le $h(x) \neq 0$ per h irriducibile. Quindi non può essere soddisfatto nessun $f_{i,j}(x) = 0$, ovvero $\psi(x)$ è equivalente a

$$\bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^k g_{i,j}(x) \neq 0 \right),$$

che è sicuramente anche in $\pi_2(x)$ dato che anche questo contiene tutte le formule di $\pi(x) = \{h(x) \neq 0 \mid h(x) \in \mathbb{F}_p[x] \text{ irriducibile}\}$.

Infine, se $\pi(x)$ fosse isolato, allora esisterebbe una formula $\varphi(x)$ soddisfacibile in ACF_p tale che

$$\text{ACF}_p \models \forall x (\varphi(x) \rightarrow h(x) \neq 0),$$

per ogni $h(x)$ irriducibile. Quindi, per il ragionamento precedente, $\varphi(x)$ deve essere della forma

$$\bigvee_{i=1}^r \left(\bigwedge_{j=1}^k g_{i,j}(x) \neq 0 \right).$$

Ma allora, preso un polinomio $h(x)$ irriducibile e diverso da ogni $g_{i,j}(x)$, e a in un modello \mathbb{K} di ACF_p , tale che $h(a) = 0$, abbiamo che

$$\mathbb{K} \models \varphi(a),$$

ma

$$\mathbb{K} \not\models (h(a) \neq 0),$$

il che crea una contraddizione perchè abbiamo assunto che $\pi(x)$ è isolato da $\varphi(x)$. Dunque $\pi(x)$ non può essere isolato da nessuna formula. \square

Visto che ACF_p ha un unico 1-tipo non isolato, per il Teorema di Omissione 2.23 esiste un modello \mathbb{K}_p che lo omette, e quindi in cui ogni 1-tipo realizzato è isolato. Dunque, dalle proposizioni precedenti, ogni elemento di questo \mathbb{K}_p è algebrico rispetto al campo base \mathbb{F}_p .

Vogliamo ora dimostrare che questo è un modello primo della teoria ACF_p . A tal fine useremo la Proposizione 2.25, dobbiamo dunque mostrare che \mathbb{K}_p è numerabile e atomico.

Osservazione 3.12. \mathbb{K}_p è numerabile. Infatti, ci sono una quantità numerabile di polinomi irriducibili in $\mathbb{F}_p[x]$, e ognuno di questi può avere solo un numero finito di radici in \mathbb{K}_p . Dunque, poichè ogni elemento di \mathbb{K}_p è radice di un polinomio irriducibile, posso scrivere

$$\mathbb{K}_p = \bigcup_{f(x) \text{ irriducibile}} \{a \in \mathbb{K}_p \mid f(a) = 0\},$$

quindi \mathbb{K}_p è unione numerabile di insiemi finiti.

Per mostrare che è atomico dobbiamo mostrare che ogni n -tipo realizzato in \mathbb{K}_p è isolato. Al momento ciò lo abbiamo mostrato solo per gli 1-tipi.

Lemma 3.13. *Sia $\underline{a} \in \mathbb{K}_p^n$, allora $\text{tp}^{\mathbb{K}}(\underline{a})$ è un n -tipo isolato.*

Dimostrazione. Dimosteremo il caso $n = 2$, la dimostrazione negli altri casi è completamente analoga. Consideriamo quindi $a, b \in \mathbb{K}_p$.

Dal Corollario 2.24, $\text{tp}^{\mathbb{K}}(a, b)$ è isolato se e solo se è realizzato in ogni modello di ACF_p . Assumiamo quindi per assurdo che esista $\mathbb{L} \models \text{ACF}_p$ che omette $\text{tp}^{\mathbb{K}}(a, b)$.

Siano allora $f(x)$ e $g(x)$ rispettivamente polinomi minimi di a e b , che esistono per definizione di \mathbb{K}_p . Siano poi $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ le radici di $f(x)$ in \mathbb{L} , e β_1, \dots, β_r le radici di $g(x)$.

Siccome \mathbb{L} non realizza $\text{tp}^{\mathbb{K}}(a, b)$, abbiamo in particolare che questo tipo non è realizzato da nessuna coppia di questi elementi (α_i, β_j) , ovvero per ogni i, j esiste una formula $\varphi_{i,j}(x, y) \in \text{tp}^{\mathbb{K}}(a, b)$ tale che

$$\mathbb{L} \not\models \varphi_{i,j}(\alpha_i, \beta_j).$$

Ma allora possiamo considerare la formula $\Phi(x, y)$ congiunzione di tutte queste, che sono in numero finito

$$\bigwedge_{i=1}^k \left(\bigwedge_{j=1}^r \varphi_{i,j}(x, y) \right).$$

Per costruzione abbiamo quindi che nessuna delle radici di $p(x)$ e $q(x)$ in \mathbb{L} soddisfa questa formula, ovvero

$$\mathbb{L} \models \forall x, y (p(x) = 0 \wedge q(y) = 0 \rightarrow \neg\Phi(x, y)).$$

Questa però è una sentenza, quindi per completezza di ACF_p deve valere

$$\mathbb{K}_p \models \forall x, y (p(x) = 0 \wedge q(y) = 0) \rightarrow \neg\Phi(x, y),$$

in particolare

$$\mathbb{K}_p \models \neg\Phi(a, b),$$

il che è un assurdo perchè $\Phi(x, y)$ è congiunzione di formule in $\text{tp}^{\mathbb{K}}(a, b)$. \square

Abbiamo così mostrato che \mathbb{K}_p è atomico, quindi è modello primo di ACF_p , e dunque \mathbb{K}_p , che ora denoteremo $\overline{\mathbb{F}}_p$, è la chiusura algebrica di \mathbb{F}_p .

3.3 Principio di Lefschetz e Teorema di Ax-Grothendieck

Nella precedente sezione abbiamo mostrato la completezza delle teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica fissata.

Un corollario sorprendente di questo risultato è il Principio di Lefschetz, che crea un collegamento tra i campi algebricamente chiusi di caratteristica 0 e quelli di caratteristica finita.

Teorema 3.14 (Principio di Lefschetz). *Sia φ una \mathcal{L}_r -sentenza, allora sono equivalenti:*

- i) $\text{ACF}_0 \models \varphi$.
- ii) Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\text{ACF}_p \models \varphi$ per ogni $p > m$ primo.
- iii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $p > n$ primo tale che $\text{ACF}_p \models \varphi$.

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii)

Ricordiamo che $\text{ACF}_0 = \text{ACF} \cup \{\neg\theta_p\}_{p \text{ primo}}$. Quindi, se $\text{ACF}_0 \models \varphi$, allora per il Teorema di Compattezza 2.8, esiste un sottoinsieme finito $\Gamma \subseteq \text{ACF}_0$ tale che $\Gamma \models \varphi$.

Essendo Γ finito, $\Gamma \subseteq \text{ACF} \cup \{\neg\theta_{p_1}, \dots, \neg\theta_{p_r}\}$ per un numero finito di p_i . Dunque, per p maggiori di p_r , si ha che $\text{ACF}_p \models \neg\theta_{p_i}$ per ogni i , e quindi $\text{ACF}_p \models \varphi$.

(ii) \Rightarrow (iii)

Per ogni n basta scegliere un qualunque p primo maggiore di $\max\{m, n\}$. Essendo $p > m$, abbiamo da ipotesi che $\text{ACF}_p \models \varphi$.

(iii) \Rightarrow (i)

Assumiamo per assurdo che $\text{ACF}_0 \not\models \varphi$. Dunque, per completezza di ACF_0 , abbiamo che $\text{ACF}_0 \models \neg\varphi$. Ma allora, usando le precedenti implicazioni, $\text{ACF}_p \models \neg\varphi$ per ogni p maggiore di un certo m in \mathbb{N} , il che va contro l'ipotesi. \square

Quindi per mostrare che i campi algebricamente chiusi di caratteristica 0 soddisfino una certa formula, è sufficiente mostrare che questa sia soddisfatta da campi algebricamente chiusi di caratteristica finita arbitrariamente grande.

Un'applicazione di questo risultato è il seguente teorema sulle funzioni polinomiali.

Teorema 3.15 (Teorema di Ax-Grothendieck). *Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso, e $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ una funzione polinomiale, ovvero $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x}))$ tale che ogni componente $f_i(\underline{x})$ sia un polinomio in n variabili. Se f è iniettiva, allora è anche suriettiva.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare questo risultato usando il Principio di Lefschetz. Mostriamo quindi che questo enunciato è esprimibile come un insieme di \mathcal{L}_r -sentenze e che è soddisfatto per \mathbb{K} di caratteristica finita.

Iniziamo costruendo le sentenze. Poichè all'interno di una formula non possiamo quantificare sul grado dei polinomi, supporremo che il grado di ogni polinomio $f_i(\underline{x})$ componente f sia minore o uguale di un certo d in \mathbb{N} . Il risultato generale seguirà per arbitrarietà di d .

In questo modo possiamo esprimere un polinomio generico $f_i(x_1, \dots, x_n)$ di grado minore o uguale a d come un \mathcal{L}_r -termine,

$$\sum_{j_1 + \dots + j_n \leq d} a_{j_1, \dots, j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n},$$

quantificando sui coefficienti a_{i_1, \dots, i_n} , in quanto questi sono elementi di \mathbb{K} e sono in numero finito.

In questo modo possiamo usare polinomi generici f_1, \dots, f_n in formule del primo ordine, che avranno come variabili libere i loro coefficienti, che indicheremo con una tupla $\underline{\mathbf{a}}$. Possiamo allora esprimere l'iniettività di f con la formula $\xi(\underline{\mathbf{a}})$:

$$\forall \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} ((f_1(\underline{\mathbf{x}}) = f_1(\underline{\mathbf{y}}) \wedge \dots \wedge f_n(\underline{\mathbf{x}}) = f_n(\underline{\mathbf{y}})) \rightarrow \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}}).$$

Invece la suriettività di f si può esprimere con la formula $\varphi(\underline{\mathbf{a}})$:

$$\forall \underline{\mathbf{z}} \exists \underline{\mathbf{w}} (f_1(\underline{\mathbf{w}}) = z_1 \wedge \dots \wedge f_n(\underline{\mathbf{w}}) = z_n).$$

Possiamo quindi scrivere l'enunciato del teorema, per f con componenti di grado minore o uguale a d , come la \mathcal{L}_r -sentenza:

$$\forall \underline{\mathbf{a}} (\xi(\underline{\mathbf{a}}) \rightarrow \varphi(\underline{\mathbf{a}})).$$

Resta ora da applicare il Principio di Lefschetz. Mostriamo che questo enunciato è verificato per \mathbb{K} di caratteristica finita p . Poichè ACF_p è completa, ci basta verificarlo per un modello. Possiamo quindi assumere $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{F}}_p$.

Sia $f : \overline{\mathbb{F}}_p^n \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^n$ polinomiale e iniettiva, e sia $\underline{\mathbf{z}}$ in $\overline{\mathbb{F}}_p^n$. Per trovare un $\underline{\mathbf{x}}$ di $\overline{\mathbb{F}}_p^n$ tale che $f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{z}}$, consideriamo il sottocampo $\mathbb{L} = \mathbb{F}_p[z_1, \dots, z_n, \underline{\mathbf{a}}]$ ottenuto estendendo \mathbb{F}_p con le componenti di $\underline{\mathbf{z}}$ e con tutti i coefficienti dei polinomi f_1, \dots, f_n .

Poichè sia i coefficienti, che gli z_i appartengono a $\overline{\mathbb{F}}_p$, questi sono tutti elementi algebrici su \mathbb{F}_p , e quindi \mathbb{L} è un'estensione di grado finito di \mathbb{F}_p . Ma essendo \mathbb{F}_p un campo finito, per Teorema 1.4, anche \mathbb{L} è un campo finito.

Consideriamo ora la restrizione di f a \mathbb{L}^n , questa ha sicuramente immagine contenuta in \mathbb{L}^n , in quanto ogni campo è chiuso per funzioni polinomiali, e \mathbb{L} contiene i coefficienti di ognuno dei polinomi.

Ma essendo f iniettiva e \mathbb{L} finito, questa restrizione deve essere suriettiva. In particolare $z \in \mathbb{L}^n$, quindi esiste \underline{x} in $\mathbb{L}^n \subseteq \overline{\mathbb{F}_p}^n$ tale che $f(\underline{x}) = z$.

Ciò conclude la dimostrazione per campi di caratteristica finita p . Per il Principio di Lefschetz, il risultato segue anche per campi di caratteristica 0. \square

3.4 Teorema degli Zeri di Hilbert

Concludiamo vedendo un altro risultato algebrico nella cui dimostrazione si fa uso dei precedenti risultati sulla teoria ACF, ovvero il Teorema degli Zeri di Hilbert.

Per enunciare il teorema ci serve definire il radicale di un ideale.

Definizione 3.2. Sia A un anello commutativo, e I un suo ideale. Il *radicale* di I è l'ideale

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^n \in I \text{ per un certo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Se $I = \sqrt{I}$ diciamo che I è un *ideale radicale*.

Ricordiamo poi che dato un campo \mathbb{K} , e S un sottoinsieme dell'anello dei polinomi in n variabili $\mathbb{K}[\underline{x}]$, il luogo di zeri di S è l'insieme

$$V(S) = \{\underline{a} \in \mathbb{K}^n \mid f(\underline{a}) = 0 \text{ per ogni } f(\underline{x}) \in S\}.$$

Osservazione 3.16. Per ogni ideale I si ha $V(I) = V(\sqrt{I})$.

L'inclusione $V(\sqrt{I}) \subseteq V(I)$ è immediata da $I \subseteq \sqrt{I}$. Sia poi \underline{a} un elemento di $V(I)$ e $f(\underline{x})$ un polinomio di \sqrt{I} . Abbiamo che $f(\underline{x})^r \in I$ per un certo r , dunque $f(\underline{a})^r = 0$, e quindi, essendo $\mathbb{K}[\underline{x}]$ un dominio di integrità, $f(\underline{a}) = 0$.

Possiamo ora enunciare il teorema.

Teorema 3.17 (Teorema degli Zeri). *Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso, e siano $I, J \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}]$ due ideali radicali tali che $I \subset J$. Allora $V(J) \subset V(I)$ è un'inclusione propria.*

Dimostrazione. $V(J) \subseteq V(I)$ segue immediatamente da $I \subset J$, dobbiamo mostrare che questa inclusione è propria. Prendiamo quindi un $f \in J \setminus I$. Per il Lemma 1.8, esiste un

ideale $P \supseteq I$ tale che $f \notin P$ e P è primo, ovvero per ogni $a, b \in \mathbb{K}[x]$

$$a \cdot b \in P \iff a \in P \quad \text{oppure} \quad b \in P.$$

Possiamo allora considerare il quoziente $\mathbb{K}[\underline{x}]/P$, che sarà un dominio d'integrità per l'Osservazione 1.7, dunque possiamo considerare il suo campo di frazioni. Chiamiamo allora \mathbb{L} la chiusura algebrica del campo di frazioni di $\mathbb{K}[\underline{x}]/P$, e $\pi : \mathbb{K}[\underline{x}] \rightarrow \mathbb{L}$ la proiezione al quoziente seguita dall'immersione in \mathbb{L} .

Per il Lemma 1.6, I è finitamente generato, siano quindi $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ i suoi generatori. Ponendo poi $\tilde{x}_i = \pi(x_i) \in \mathbb{L}$, e quindi $\tilde{\underline{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{L}^n$, osserviamo che per ogni $g(\underline{x}) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ abbiamo

$$g(\tilde{\underline{x}}) = 0 \iff \pi(g) = 0 \iff g \in P,$$

in particolare, poichè $h_1, \dots, h_m \in P$ e $f \notin P$,

$$\mathbb{L} \models h_1(\tilde{\underline{x}}) = 0 \wedge \dots \wedge h_m(\tilde{\underline{x}}) = 0 \wedge f(\tilde{\underline{x}}) \neq 0,$$

e quindi

$$\mathbb{L} \models \exists \underline{y} (h_1(\underline{y}) = 0 \wedge \dots \wedge h_m(\underline{y}) = 0 \wedge f(\underline{y}) \neq 0).$$

Questa è una formula che ha come variabili i coefficienti dei polinomi f e h_i , che in questo caso sono tutti elementi di \mathbb{K} . Quindi, osservando che

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}[\underline{x}] \xrightarrow{\pi} \mathbb{L}$$

è un'immersione di campi algebricamente chiusi, per il Corollario 3.7, abbiamo che è un'immersione elementare $\mathbb{K} \prec \mathbb{L}$, e dunque

$$\mathbb{K} \models \exists \underline{y} (h_1(\underline{y}) = 0 \wedge \dots \wedge h_m(\underline{y}) = 0 \wedge f(\underline{y}) \neq 0).$$

Sia allora $\underline{a} \in \mathbb{K}^n$ testimone di questa esistenza, abbiamo che $\underline{a} \in V(I)$ in quanto $h_i(\underline{a}) = 0$ per ogni i , e $\underline{a} \notin V(J)$ in quanto $f(\underline{a}) \neq 0$ e $f \in J$. Concludiamo quindi che l'inclusione $V(J) \subset V(I)$ è propria. \square

Corollario 3.18. *Ogni ideale proprio $I \subset \mathbb{K}[\underline{x}]$ ha uno zero comune, ovvero $V(I) \neq \emptyset$. In particolare, gli ideali massimali sono della forma $I = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ per $\underline{a} \in \mathbb{K}^n$.*

Dimostrazione. Iniziamo osservando che il radicale di un ideale proprio I è ancora un ideale proprio. Altrimenti, se $\sqrt{I} = \mathbb{K}[\underline{x}]$, allora avremmo $1 \in \sqrt{I}$, e quindi $1 \in I$. Osserviamo inoltre che $\mathbb{K}[\underline{x}]$ stesso è un ideale radicale.

Quindi abbiamo $\sqrt{I} \subset \mathbb{K}[\underline{x}]$ inclusione di ideali radicali, e dunque, per il precedente teorema, $V(\sqrt{I}) \supset V(\mathbb{K}[\underline{x}]) = \emptyset$, ovvero $V(\sqrt{I}) \neq \emptyset$.

Ma dall'Osservazione 3.16, abbiamo che $V(\sqrt{I}) = V(I)$.

Per la seconda parte, sia I massimale e sia \underline{a} un elemento di $V(I)$. Questo significa che I è incluso nell'ideale proprio $\{f(\underline{x}) \in \mathbb{K}[\underline{x}] \mid f(\underline{a}) = 0\}$, e quindi ci deve essere uguale.

Sia ora $J = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$, e $\pi : \mathbb{K}[\underline{x}] \rightarrow \mathbb{K}[\underline{x}]/J$ la proiezione al quoziente. Poichè $\pi(x_i) = \pi(a_i)$, se $f(\underline{a}) = 0$ allora $\pi(f(\underline{x})) = 0$, ovvero $I \subseteq J$. La massimalità di I ci permette di concludere. \square

Bibliografia

- [1] A. Berarducci. *Teoria dei Modelli*. <https://people.dm.unipi.it/berardu/Didattica/2019TM/TM2019/TM2019.pdf>, 2020. Appunti, Università di Pisa.
- [2] A. Deloro. *Basic Model Theory of Algebraically Closed Fields*. <https://webusers.imj-prg.fr/~adrien.deloro/teaching-archive/Moskva-ACF.pdf>, 2013. Appunti, Moscow Higher School of Economics.
- [3] J. Kirby. *An Invitation to Model Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2019.
- [4] D. Marker. *Model theory: An Introduction*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [5] D. Marker, M. Messmer, and A. Pillay. *Model theory of fields*, volume 5 of *Lecture Notes in Logic*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.