

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Cenni al modello del Big Bang, inflazione e materia oscura

Tesi di Laurea

Presentata da:
Simone Pucci

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Anno Accademico 2023-2024

Abstract

Il presente lavoro intende offrire una panoramica sulla cosmologia osservativa seguendo il filo rosso della materia oscura e dell'inflazione: partendo da un'introduzione che discute criticamente l'importanza delle curve di rotazione nella rilevazione di materia oscura -ingrediente fondamentale per gli attuali modelli cosmologici-, si passa ad una rassegna delle principali fasi evolutive dell'universo secondo il modello del Big Bang. Sulla base di queste opportune premesse teoriche, nel terzo capitolo si esplora infine il ruolo della CMB nel panorama cosmologico recente: la teoria che ne spiega le anisotropie costituisce infatti un caso di studio interessante che non solo getta nuova luce sulle fasi del Big Bang, ma fornisce ulteriori evidenze per la presenza di materia oscura nell'universo.

Disclaimer: Quando le immagini non presentano alcun riferimento bibliografico si intende che sono state prodotte dal sottoscritto.

Indice

1	Materia Oscura	1
1.1	Curva di rotazione nelle galassie a spirale	1
1.2	Proprietà della materia oscura	5
2	Big Bang	6
2.1	Fasi dell'espansione	6
2.2	Modelli cosmologici-cenni	9
2.2.1	Modelli di Friedman	10
2.2.2	Modello Λ CDM	10
2.3	Inflazione	11
3	CMB	11
3.1	Omogeneità	11
3.2	Anisotropie	12
3.2.1	Anisotropia di dipolo (variazione su scala angolare di π) . . .	12
3.2.2	Anisotropia di quadrupolo (variazione su scala angolare di $\pi/2$) .	12
3.3	Calcolo delle anisotropie su larga scala	14
	Appendice	i
	A Fluttuazioni della CMB e parametri cosmologici	i
	Bibliografia	iii

1 Materia Oscura

In una galassia a spirale si può graficare la velocità degli oggetti in funzione della loro distanza dal centro: si parla allora di curva di rotazione.

1.1 Curva di rotazione nelle galassie a spirale

Riportiamo qui alcune problematiche che sorgono da una trattazione ingenua dell'argomento.

1. La rotazione delle stelle in una galassia è differenziale -e non rigida come in un giradischi-, pertanto già dopo un periodo oggetti che si trovavano allineati presentano un ritardo che genera la cosiddetta *spirale di Archimede*.

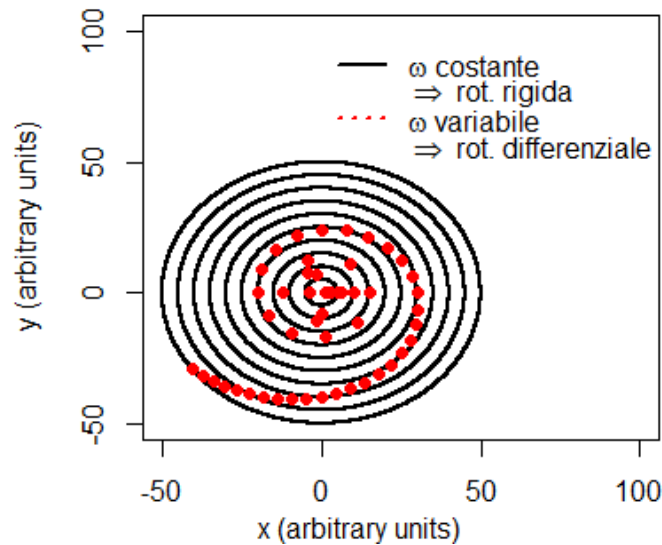


Figura 1.1: simulazione numerica delle due rotazioni

Ciò rappresenta un problema: ricordando che la Via Lattea ha all'incirca 13,6 miliardi di anni e che il periodo orbitale del Sole è di 250 milioni di anni, si otterrebbero almeno 40 avvolgimenti di spirale, risultato eccessivo rispetto a quanto si osserva. I bracci di spirale non possono dunque essere generati dalla rotazione stellare.

2. Anche in assenza di oggetti, la curva di rotazione è da considerarsi una proprietà del campo gravitazionale; per esempio, nel caso del Sistema Solare vale

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{GM_{\odot}}{R} \\ F &= ma \\ \frac{GmM_{\odot}}{R^2} &= m \frac{v_c^2(R)}{R} \\ v_c(R) &= \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R}} \propto R^{-1/2}\end{aligned}$$

cioè si otterrebbe una decrescita kepleriana.

Ma per il campo gravitazionale della galassia la massa può essere considerata puntiforme soltanto a grande distanza, quando la componente stellare ormai si è esaurita; pertanto - evidenziando la dipendenza della massa dalla distanza - riscriviamo

$$v_c(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}$$

dove $M(R)$ per un sistema a simmetria sferica risulta

$$M(R) = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr$$

Valutiamo allora due casi particolari:

- per $\rho(r) = cost$

$$M(R) = 4\pi\rho \int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$v_c(R) = \sqrt{\frac{G\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R}} \propto R$$

si otterrebbe una salita lineare;

- per $\rho(r) = \frac{1}{r^2}$

$$M(R) = 4\pi \int_0^R dr = 4\pi R$$

$$v_c(R) = \sqrt{\frac{G4\pi R}{R}} = cost$$

si otterrebbe una curva piatta.

3. La galassia non presenta però simmetria sferica, ma trattasi di un disco.
Non possono quindi valere i due teoremi di Newton:

- **primo teorema di Newton**

dentro ad un guscio sferico il campo gravitazionale totale è nullo, mentre la gravità è presente localmente;

- **secondo teorema di Newton**

fuori da un sistema a simmetria sferica la forza esercitata su un corpo a distanza R dipende dalla sola massa interna.

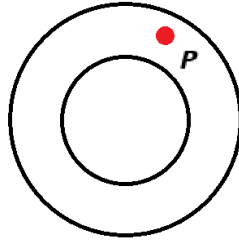


Figura 1.2: *il punto P*
 -per il primo teorema non risente del guscio esterno,
 -per il secondo teorema risente del guscio interno

Riassumiamo ora le problematicità incontrate:

1. le stelle nella galassia non presentano rotazione rigida, ma differenziale;
2. le stelle nella galassia non si comportano come i pianeti nel Sistema Solare;
3. la galassia non ha struttura sferica ma a disco.

Negli anni Settanta gli astronomi Vera Rubin e Kent Ford osservarono che la curva di rotazione delle stelle in una galassia non presenta una decrescita kepleriana ed erroneamente conclusero che questo implicasse l'esistenza di una extra-quantità di materia.

Il loro ragionamento risente di un errore concettuale: la curva di rotazione teorica

- **calcolata da Rubin e Ford**

- è quella di una distribuzione a simmetria sferica
- con crescita lineare nelle regioni interne, considerate avere densità costante
- con decrescita kepleriana nelle regioni esterne, considerate avere contributo in massa sempre meno significativo

- **calcolata correttamente**

- è quella di un disco esponenziale
- con crescita lineare nel bulge
- con appiattimento nel disco
- con decrescita tendente alla kepleriana a grande distanza dal centro

Già il Sole, non sorprendentemente, si trova nella parte stellare piatta della curva di rotazione, come si può ricavare dalla trattazione delle costanti di Oort per la nostra galassia.

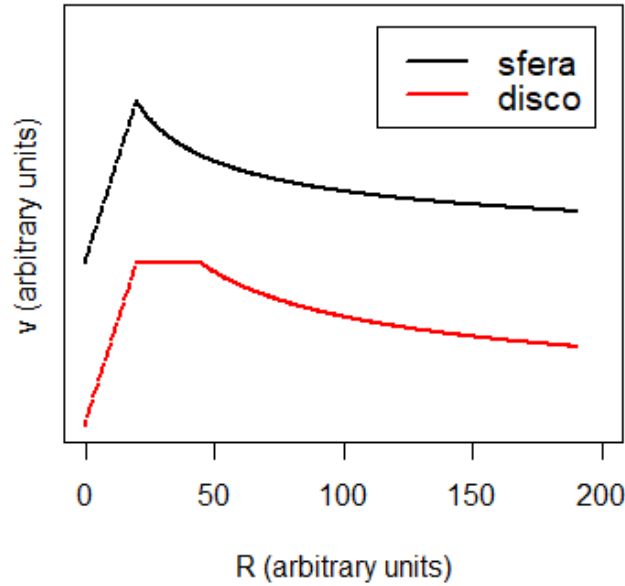


Figura 1.3: andamento qualitativo delle due curve teoriche

E' invece davvero significativo il fatto che in quegli anni si riuscì ad estendere a curva di rotazione oltre il limite stellare: tramite osservazioni che sfruttano la naturale precisione della riga a 21 cm è possibile rilevare la distribuzione di gas freddo (HI) nelle galassie a spirale e ottenerne così una rappresentazione cinematica.

Ciò che ci si attenderebbe in queste regioni, molto distanti dal centro galattico, è davvero una decrescita kepleriana: il campo gravitazionale può essere infatti espresso tramite espansione in multipoli per un oggetto di forma qualsiasi a grande distanza; troncando al primo ordine si ottiene il valore classico di $-\frac{GM}{R^2}$.

Poiché si rileva invece un appiattimento nella curva di rotazione, le possibilità sono:

- o esiste una certa quantità di materia che non si rileva tramite radiazione elettromagnetica (materia oscura);
- o la legge di gravitazione è sbagliata e la forza non va come $\frac{1}{R^2}$.

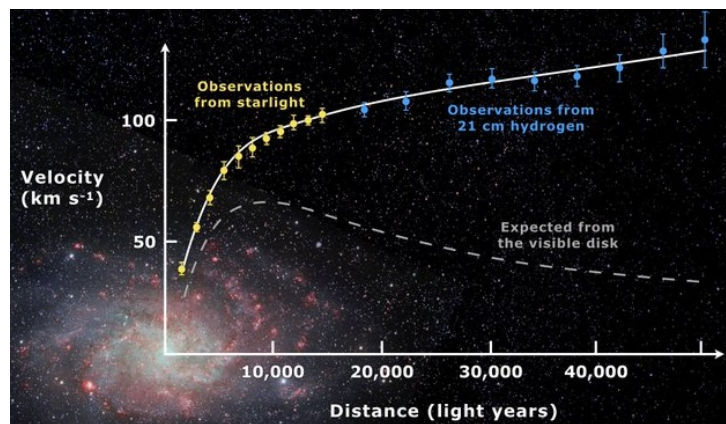


Figura 1.4: Curva di rotazione di M33 divisa nelle due componenti stellare e gassosa - da "Corbelli, E.; Salucci, P., *The extended rotation curve and the dark matter halo of M33*"

1.2 Proprietà della materia oscura

Supponiamo che esista la materia oscura: se la dinamica newtoniana è vera allora

$$\frac{v_{HI}^2(R)}{R} = \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial R}$$

con $\Phi_{tot} = \Phi_{BULGE}(R) + \Phi_{DISK}(R) + \Phi_{HALO}(R) + \Phi_{HI}(R)$.

La discrepanza che si rileva tra le curve di rotazione teorica e osservativa si può attribuire a Φ_{tot} , cui deve mancare un contributo di Φ_{DM} , che inserito nell'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi_{DM} = 4\pi G \rho_{DM}$$

fornisce un valore di densità ρ_{DM} per la materia oscura. Proprio in virtù della discrepanza tra le stime di densità basate su studi dinamici e su proprietà stellari, già Zwicky negli anni '30 aveva ipotizzato l'esistenza di una grande quantità di massa non rivelabile otticamente. La materia oscura deve essere infatti costituita da particelle elementari tali da:

- non interagire con la radiazione elettromagnetica ($\sigma_{em} = 0$);
- non interagire con la forza forte atomica;
- possedere una velocità non solo inferiore a quella della luce, ma inferiore alla velocità di fuga del disco galattico.

Esperimenti indipendenti mettono in evidenza proprietà coincidenti per la materia oscura e per la sua esistenza, andando a salvaguardare così le leggi della fisica:

- criterio di stabilità per i dischi di spirale di Ostriker-Peebles;
- lenti gravitazionali (discrepanza in massa);
- dispersione delle velocità nelle galassie ellittiche;
- modelli cosmologici inflazionari (cfr. infra sez. 2.2);
- anisotropie nella temperatura della CMB (cfr. infra sez. 3.2.2).

Sulla sua composizione sono state avanzate diverse ipotesi: in primo luogo si può operare la seguente distinzione:

- **CDM - Cold Dark Matter**
si tratta di materia non relativistica rilevabile solo tramite i suoi effetti gravitazionali; tra i candidati come possibili costituenti ricordiamo:
 1. le WIMPs – Weakly Interacting Massive Particles, particelle non barioniche massicce che interagiscono con la materia ordinaria (barionica) solo tramite le forze debole e gravitazionale; un esempio sarebbe il neutralino, ipotetica particella elettricamente neutra prevista dalla teoria della supersimmetria;
 2. le WISPs – Weakly Interacting Slender Particles, controparte leggera delle WIMPs e di cui l'esponente principale sarebbe l'ipotetico assione;

3. i MACHOs – Massive Compact Halo Objects, oggetti barionici massicci e compatti dell’alone galattico, che potrebbero essere oggetti condensati come i buchi neri, le stelle di neutroni e le nane bianche, oppure stelle molto deboli o oggetti non luminosi come pianeti. La presenza di MACHOs è stata verificata, tuttavia il loro numero risulta molto inferiore rispetto a quello che ci si aspetterebbe per giustificare le osservazioni.

- **HDM - Hot Dark Matter**

si tratta della forma ipotetica di materia oscura relativistica. Un esempio di possibili costituenti sono i neutrini, che hanno una massa molto piccola, non prendono parte alle interazioni elettromagnetiche e a quelle dovute alla forza forte, e sono presenti in maniera consistente nell’universo. Tuttavia la HDM può al più costituire solo una piccola frazione di materia oscura (eccederebbe i vincoli sulla velocità di fuga).

2 Big Bang

Il modello del Big Bang descrive l’espansione ed il raffreddamento dell’universo; l’attuale approccio alla sua cronologia prevede una macro-suddivisione in due parti: una fase primordiale al di là della *superficie di last scattering*, comunemente modellizzata attraverso il paradigma dell’inflazione ed una fase più recente durante la quale le strutture visibili su larga scala si sono sviluppate, descritta dal modello fenomenologico Λ CDM.

2.1 Fasi dell’espansione

Possiamo studiare gli eventi più rilevanti in diversi istanti, stabilendo una relazione funzionale approssimata tra temperatura (T) ed età dell’universo (t_U)

$$t_U = \left(\frac{10^{10}}{T}\right)^2$$

- **Epoca di Planck**

$$t_U = 10^{-43} \text{ s}$$

Per convenzione si sceglie di far partire da qui la storia dell’universo, istante in cui la forza gravitazionale si trova separata da forza elettromagnetica e forza nucleare forte e debole, dal momento che non esiste una teoria che unifichi tutte e quattro.

- **Epoca della separazione delle forze (1)**

$$t_U = 10^{-35} \text{ s}$$

In questa fase si assiste alla separazione della forza forte dalle altre e alla comparsa di particelle e antiparticelle elementari: esse vengono continuamente prodotte dalla radiazione e poi si annichiscono, tornando ad essere energia.

- **Epoca della separazione delle forze (2)**

$$t_U = 10^{-10} \text{ s}$$

In questa fase si assiste alla separazione della forza debole da quella elettromagnetica.

- **Epoca delle particelle**

$$t_U = 10^{-6} \text{ s}$$

In linea di principio i fenomeni di formazione di coppia dovrebbero portare ad un bilanciamento esatto delle particelle e delle antiparticelle, ma proprio la violazione di questa simmetria genera una sovrabbondanza delle prime: da questo istante quindi le anti-particelle diventano molto rare (compaiono in alcune reazioni e vengono immediatamente annichilite dalla corrispondente particella).

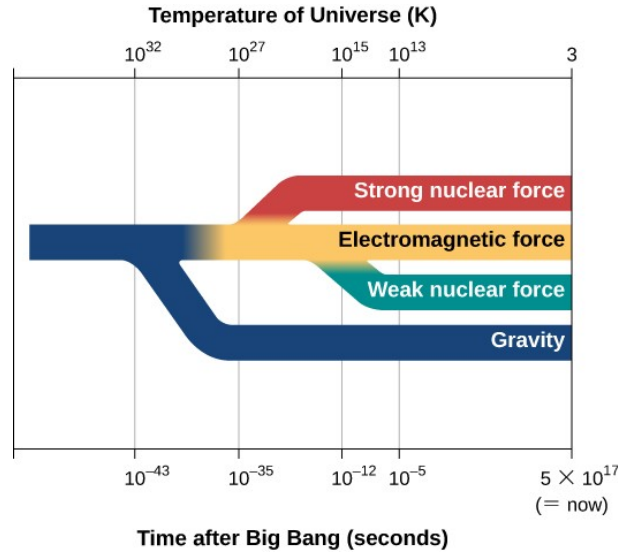


Figura 2.1: *Separazione delle forze in funzione del tempo - illustrazione di Lumen Learning*

In questa fase, inoltre, l'energia termica delle particelle sta calando rapidamente e la forza forte comincia a prendere il sopravvento: essa organizza quark e anti-quark in tripletti per formare protoni, neutroni e le corrispondenti anti-particelle.

- **Epoca di equilibrio materia-radiazione** $t_U = 10^{-4}$ s
 Il plasma è così caldo e denso che i neutrini non possono sfuggire e si trovano quindi ad interagire con la materia, controllandone le abbondanze tramite una serie di reazioni regolate dalla forza debole. In questo regime il rapporto neutroni-protoni è stabilito dalla statistica di Boltzmann:

$$\left[\frac{n}{p} \right] \propto e^{-\frac{\Delta mc^2}{kT}}$$

dove $\Delta mc^2 = (m_n - m_p)c^2 \approx 1.29$ MeV.

- **Epoca del congelamento dei neutroni** $t_U = 0.7$ s
 Con l'avanzare del tempo la temperatura si abbassa e così il numero di neutroni; quando l'età dell'universo (t_U) diventa uguale al tempo caratteristico delle interazioni deboli (t_{weak}) che mantenevano in equilibrio i neutrini con protoni e neutroni si assiste a due fenomeni:

1. i neutrini sfuggono via perché per loro l'universo è divenuto otticamente sottile (si parla quindi equivalentemente dell'epoca dell'ultimo scattering dei neutrini con la materia);
2. i neutroni rimangono "congelati" nel loro rapporto rispetto ai protoni, andando a costituire l'abbondanza iniziale disponibile per la nucleosintesi; è infatti grazie alla presenza di neutroni liberi che si può aggirare il collo di bottiglia della catena PP: la formazione del deuterio.

Dopo quest'epoca il numero di neutroni decresce tramite decadimento β^- - che avviene su un tempo di 885.7 s - secondo la legge

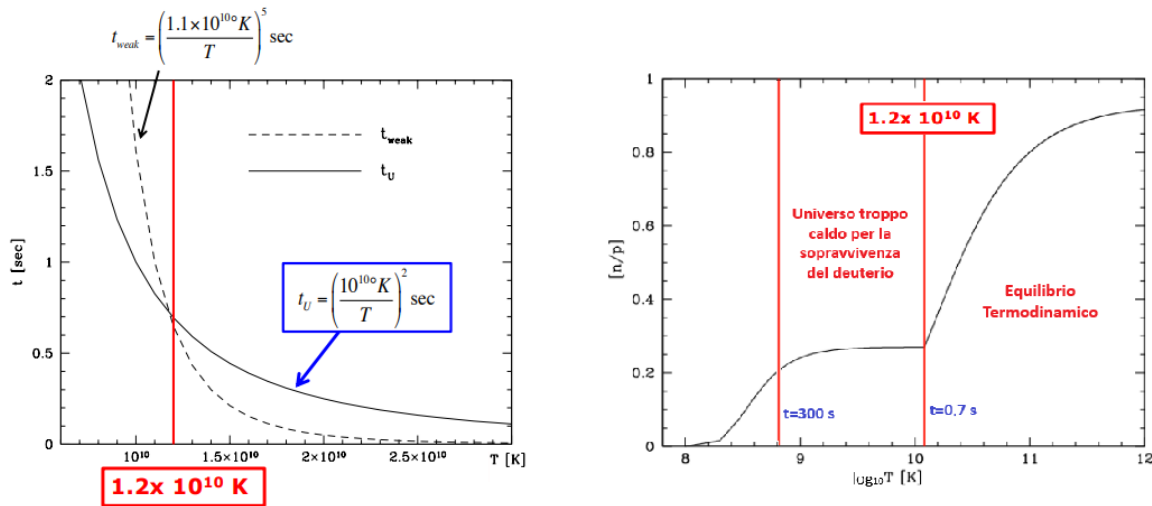
$$\left[\frac{n}{p} \right] = 0.27 e^{-\frac{t_U}{885.7}}$$

L'universo è però ancora troppo caldo (10^{10} K) per la stabilità del deuterio, avente un'energia di legame bassa $E = 2.23$ MeV; ci sono infatti ancora troppi fotoni in grado di frantumare l'eventuale deuterio in formazione nelle sue componenti.

• **Epoca del deuterio**

$t_U = 300$ s

Soltanto quando la temperatura sarà scesa a sufficienza ($6 \cdot 10^8$ K) si potrà avere deuterio (2H) stabile; a questo punto però parte dei neutroni è già decaduta.



(a) t_U e t_{weak} in funzione di T

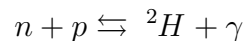
(b) $\left[\frac{n}{p}\right]$ in funzione di T

Figura 2.2: grafici da “Ferraro, F. R., Astrofisica Stellare”

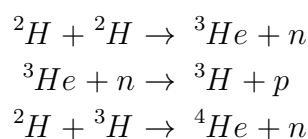
Valutiamo il rapporto $\left[\frac{n}{p}\right]$ per temperature successive

$T = 10^{12}$ K \Rightarrow	$\left[\frac{n}{p}\right] = 0.99$	epoca di equilibrio materia-radiazione
$T = 10^{10}$ K \Rightarrow	$\left[\frac{n}{p}\right] = 0.27$	epoca del congelamento
$T = 10^8$ K \Rightarrow	$\left[\frac{n}{p}\right] = 0.19$	epoca del deuterio

La produzione del deuterio avviene secondo la reazione



Cui seguono le reazioni dell'elio



Si cominciano dunque a formare abbastanza 2H , 3H ed 3He da produrre 4He ad un ritmo confrontabile con l'espansione dell'universo.

Praticamente tutti i neutroni disponibili vengono quindi incapsulati in nuclei di He , la cui abbondanza risulta

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{He}{p+n+He} \right] &= \left[\frac{(N_n/2)m_{He}}{N_p m_p + N_n m_n + (N_n/2)m_{He}} \right] \\
 &\approx \left[\frac{(N_n/2)4m_p}{N_p m_p + N_n m_p + (N_n/2)4m_p} \right] \\
 &= \frac{2N_n}{N_p + N_n + 2N_n} \\
 &= \frac{2N_n/N_p}{1 + 3N_n/N_p} \approx 0.24
 \end{aligned}$$

Per procedere con la combustione di 4He e formare altri elementi bisognerebbe superare la barriera degli elementi instabili con $A=5$ e $A=8$, che decadrebbero nuovamente in 4He ; si può ottenere dunque al più un po' di Li e di Be , ma al netto quello che emerge da questo processo è un universo privo di elementi pesanti, corrispondente alla composizione delle ipotetiche stelle di popolazione III:

$$\begin{aligned}
 X &= 0.76 \\
 Y &= 0.24 \\
 Z &= 0.00
 \end{aligned}$$

- **Epoca della radiazione** 3 min \leq t \leq 30'000 anni
L'universo continua ad espandersi sotto l'azione della radiazione, la cui densità di energia è dominante rispetto a quella della materia.
- **Epoca della materia** 30'000 anni \leq t \leq 380'000 anni
L'energia della materia diviene dominante.
- **Epoca del disaccoppiamento (o dell'ultimo scattering)** t = 380'000 anni
Per un redshift cosmologico $z \approx 1000$, si raggiunge la temperatura di 3000 K e la materia (prima plasma ionizzato) si ricombina in H ed He, diventando neutra. L'universo diventa solo allora trasparente alla radiazione (non è infatti possibile rilevare i fotoni emessi in precedenza a causa di una frequenza di plasma elevata). Materia e radiazione evolvono da qui in poi in maniera separata, con la prima che si raffredda più rapidamente della seconda (cfr. infra sez. 3.2.2).

2.2 Modelli cosmologici-cenni

Ai fini dell'introduzione di modelli cosmologici è bene fornire una panoramica sui parametri che li governano. Nel seguito verranno esplorate due alternative per questi modelli.

- **Def. costante cosmologica:** simbolo Λ_c
venne introdotta da Einstein per poter ottenere un modello statico di universo.
- **Def. parametro di curvatura:** simbolo k_g
in funzione del suo valore si può identificare una diversa geometria dell'universo.

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{k_g = -1}_{\text{iperbolica}} & \underbrace{k_g = 0}_{\text{euclidea}} & \underbrace{k_g = 1}_{\text{ellittica}}
 \end{array}$$

2.2.1 Modelli di Friedman

I modelli che si derivano ponendo $\Lambda_c = 0$ sono noti come modelli di Friedman.

- **Def. costante di Hubble:** **simbolo** H
 descrive la velocità dell'espansione dell'universo in funzione del tempo cosmico;
 al tempo presente, ovvero per $t = t_0$, essa viene indicata con $H_0 = 72 \pm 8$ km/s/Mpc.
- **Def. parametro di decelerazione:** **simbolo** q
 descrive l'accelerazione dell'espansione dell'universo in funzione del tempo cosmico;
 al tempo presente, ovvero per $t = t_0$, essa viene indicata con q_0 ed il suo valore
 presenta vincoli diversi in funzione di k_g :

$$\underbrace{q_0 < \frac{1}{2}}_{k_g=-1} \quad \underbrace{q_0 = \frac{1}{2}}_{k_g=0} \quad \underbrace{q_0 > \frac{1}{2}}_{k_g=1}$$

- **Def. densità critica:** **simbolo** ρ_{cr}
 dalle equazioni di Friedman, per $\Lambda_c = 0$, $k_g = 0$ si può ricavare il valore

$$\rho_{cr} = 1.8 \cdot 10^{-29} \frac{g}{cm^3}$$

- **Def. parametro di densità:** **simbolo** Ω_0
 la densità presente dell'universo, ρ_0 , può essere pesata sulla densità critica per
 valutare nuovamente la geometria dell'universo

$$\frac{\rho_0}{\rho_{cr}} = \Omega_0 = 2q_0$$

$$\underbrace{\Omega_0 < 1}_{\text{aperto}} \quad \underbrace{\Omega_0 = 1}_{\text{piatto}} \quad \underbrace{\Omega_0 > 1}_{\text{chiuso}}$$

2.2.2 Modello Λ CDM

I modelli con $\Lambda_c \neq 0$ ripensano il parametro di densità come la somma di due quantità:

- una legata alla materia (sia luminosa che oscura) $\Omega_{m,0}$
- una legata alla non nullità della costante cosmologica Ω_Λ

Le osservazioni sembrano indicare una geometria dell'universo euclidea, infatti

$$\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_\Lambda \approx 1.0 \pm 0.2$$

In particolare si possono identificare tre diverse componenti che contribuiscono a ρ_0 :

- 5% materia barionica (protoni, elettroni, atomi, molecole) - essa correla con la luminosità delle galassie e consta perlopiù di H ed He;
- 25% materia oscura - le ipotesi sulla sua natura sono state trattate in precedenza (cfr. supra sez. 1.2); questo modello considera, in particolare, la sola CDM;
- 70% energia oscura (non costituita da particelle) - l'ipotesi più plausibile è che questa energia sia l'effetto della $\Lambda_c \neq 0$ e la responsabile dell'inflazione (cfr. infra).

2.3 Inflazione

I modelli di universo derivati dalla relatività generale - sia con $\Lambda_c = 0$ che con $\Lambda_c \neq 0$ - presentano alcuni problemi di base non spiegati. Riportiamo qui i più significativi.

1. **Problema dell'orizzonte:** assunto che l'universo iniziale sia omogeneo e isotropo (come confermato dalla CMB -cfr. infra sez. 3.1), ciò che vediamo oggi è un numero molto grande di regioni separate che sono causalmente disconnesse, ossia che non hanno avuto abbastanza tempo per comunicare fra di loro a causa di una distanza reciproca superiore a quella che ha potuto percorrere la luce in 13.8 miliardi di anni. Non se ne può quindi giustificare l'uniformità.
2. **Problema della piattezza:** nonostante un universo con $\Omega_0 \approx 1$ sia instabile, ciò che si misura è proprio $\rho_0 \approx \rho_{cr}$ (come visto, per esempio, nel modello Λ CDM).

Onde evitare questi problemi Guth propose nel 1981 il modello dell'inflazione: esso assume che fra l'epoca di Planck e quella di separazione della forza forte da quella elettro-debole, l'universo si sia espanso esponenzialmente dell'ordine di un fattore 10^{30} o più.

Ciò ha due conseguenze importanti.

1. A seguito dell'inflazione regioni piccolissime, causalmente connesse a quell'epoca, si sarebbero dilatate a dimensioni enormi, confrontabili ciascuna con quelle attuali. Ciò risolve il problema dell'orizzonte.
2. Anche se l'universo avesse avuto una geometria non piatta, un'espansione siffatta avrebbe cancellato ogni segno di curvatura preesistente portandoci a $k_g = 0$. Ciò risolve il problema della piattezza.

3 CMB

Fintanto che materia e radiazione si trovavano in equilibrio termodinamico quest'ultima doveva avere uno spettro di corpo nero. Quando nel 1965 i ricercatori dei Bell Laboratories Penzias e Wilson scoprirono accidentalmente una radiazione di fondo di intensità costante, spazialmente isotropa e a bassa temperatura (2.726 ± 0.005 K), fu presto chiaro che si trattava della radiazione testimone dell'epoca del disaccoppiamento (cfr. supra sez. 2.1) teorizzata da Gamow vent'anni prima, la *Cosmic Microwave Background Radiation* (CMB).

3.1 Omogeneità

Alla luce della precedente descrizione dell'universo primordiale, l'omogeneità della CMB necessita l'introduzione di un modello inflazionario. Supponiamo infatti di osservare il cielo in due direzioni opposte: la radiazione che riceviamo deve essersi originata in luoghi molto distanti tra di loro, eppure risulta la stessa sebbene questi due punti non siano mai entrati causalmente in contatto.

Valutiamo ora l'abbassamento della temperatura della CMB

$$\begin{array}{ll} T_0 \approx 3000 \text{ K} \Rightarrow \lambda_0 \approx 10^{-4} \text{ cm} & \text{epoca del disaccoppiamento} \\ \underline{T \approx 3 \text{ K} \Rightarrow \lambda \approx 10^{-1} \text{ cm}} & \text{tempo presente} \end{array}$$

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = z \approx 10^3$$

Si ricava quindi un valore di redshift cosmologico compatibile con quello esposto in precedenza (cfr. supra sez. 2.1). Il raffreddamento della CMB è infatti causato proprio dall'espansione dell'universo, che ha progressivamente allontanato tra loro le creste delle onde della radiazione, portando all'attuale valore di λ nelle microonde.

3.2 Anisotropie

La CMB è caratterizzata da una serie di anisotropie, il cui studio fornisce importanti informazioni riguardanti:

- la maniera con cui le strutture nell'universo si sono sviluppate portando alla distribuzione fortemente anisotropa di galassie che osserviamo oggi;
- i valori dei principali parametri cosmologici;
- la distribuzione di materia oscura nell'universo primordiale.

3.2.1 Anisotropia di dipolo (variazione su scala angolare di π)

Si possono individuare anisotropie estrinseche prevalenti, dipendenti dalle coordinate angolari della regione di cielo osservata

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \Phi) = \frac{T(\theta, \Phi) - T_0}{T_0}$$

un esempio è l'anisotropia di dipolo

$$T(\theta) = T_0 \left(1 + \frac{\Delta T_D}{T_0} \cos\theta \right)$$

causata dal moto di un osservatore con velocità v attraverso il sistema di riferimento solidale con la CMB (quello cioè in cui essa risulta isotropa).

Essa può essere impiegata per lo studio del parametro di densità Ω_0 .

3.2.2 Anisotropia di quadrupolo (variazione su scala angolare di $\pi/2$)

Ulteriori anisotropie sono quelle che vanno dal quadrupolo fino a pochi arcosecondi.

- Effetto Sachs-Wolfe

Ciò che è avvenuto prima del disaccoppiamento fa sì che la superficie di last scattering da cui ci arrivano i fotoni presenti delle increspature.

A tali increspature associamo delle buche di potenziale di materia oscura: se un fotone cade all'interno di una buca questa diventa più profonda a causa del redshift gravitazionale; lo stesso fotone ne esce allora con lunghezza d'onda minore, simulando una provenienza da regioni più fredde.

Questo fenomeno risente inoltre di due correzioni, dovute a:

- effetto Rees-Sciama, associato a potenziali variabili nel tempo;
- onde gravitazionali, associate a perturbazioni nella metrica.

- Effetto Doppler

Se il materiale sulla superficie di last scattering si stava muovendo in direzione opposta o meno all'osservatore, si assisterà rispettivamente a redshift o blueshift.

- Effetto Sunyaev-Zel'dovich

Una distribuzione non omogenea di materiale tra la superficie di last scattering e l'osservatore (per esempio elettroni energetici presenti nel plasma caldo intergalattico) può indurre anisotropie per comptonizzazione dei fotoni della CMB.

Definiamo ora orizzonte di una particella P la superficie che racchiude l'insieme delle particelle che possono aver interagito con P, dal tempo $t = 0$ al tempo t . P non può quindi essere entrata in contatto con regioni esterne all'orizzonte, viceversa l'orizzonte costituisce il limite oltre il quale non siamo in grado di osservare.

La dimensione angolare θ_h dell'orizzonte alla superficie di last scattering vale meno di un grado; per questo motivo si possono dividere le anisotropie in due macro categorie in funzione dell'estensione angolare dell'osservazione:

- su piccola scala $\rightarrow \theta < \theta_h$ (fluttuazioni)
tracciano l'evoluzione temporale delle increspature (cfr. infra Appendice A);
- su larga scala $\rightarrow \theta > \theta_h$ (anisotropie propriamente dette)
tracciano la distribuzione delle increspature primordiali, perché non c'è stato tempo per la materia di raccogliersi nelle buche di potenziale.

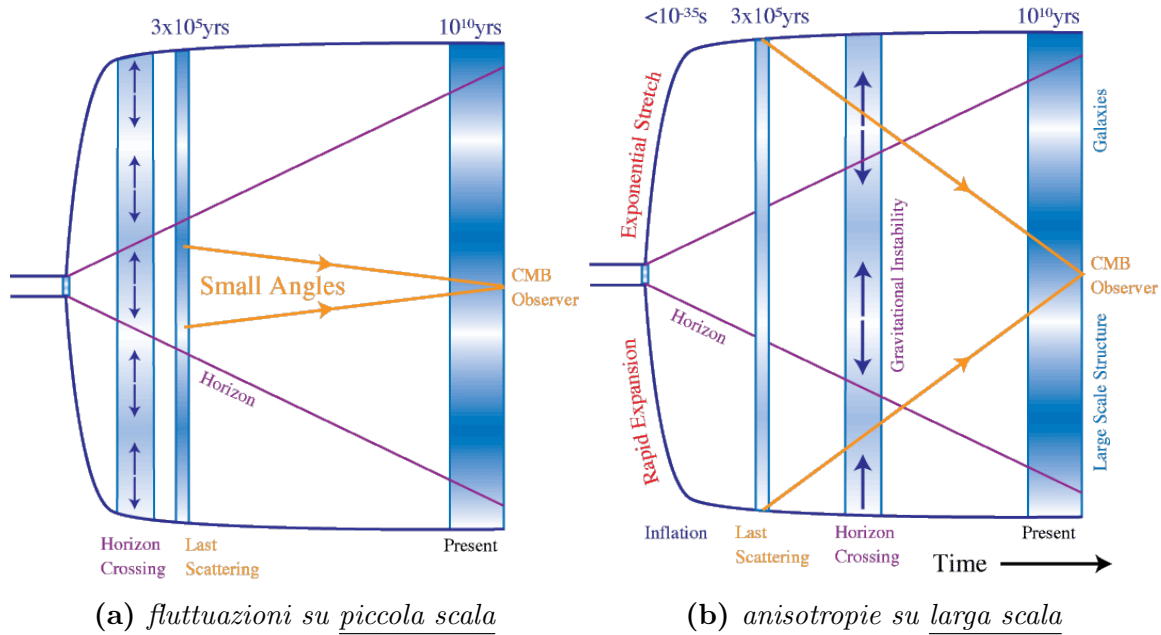


Figura 3.1: le bande verticali rappresentano un'istantanea delle increspature di densità (le regioni scure hanno più materia, quelle chiare meno) - illustrazioni da "Hu, W., Wayne Hu's Tutorials"

Il satellite COBE (1989-1994) ha rilevato per primo queste anisotropie, producendo una mappa delle variazioni di temperatura dell'ordine di $\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5}$. Le caratteristiche di questo segnale sono consistenti con quanto previsto dall'effetto Sachs-Wolfe.

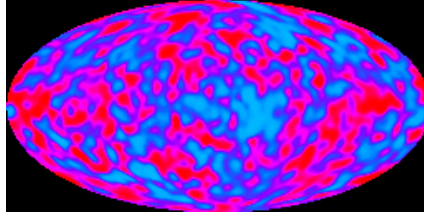


Figura 3.2: *mappa biennale delle anisotropie rilevate da COBE, ottenuta previa sottrazione delle emissioni galattica e di dipolo - credits: NASA*

3.3 Calcolo delle anisotropie su larga scala

Supponiamo che l'universo si espanda in maniera adiabatica nelle sue fasi iniziali: possiamo allora scrivere le equazioni di Poisson

$$TV^{\gamma-1} = cost \quad (3.1)$$

$$PV^{\gamma} = cost \quad (3.2)$$

in un universo in espansione si ha che $V \propto (1+z)^{-3}$, dove z è il redshift cosmologico. Ricordando che l'indice adiabatico γ vale $\frac{4}{3}$ nel caso della radiazione e $\frac{5}{3}$ per la materia - nel caso monoatomico -, calcoliamo le due temperature T_{rad} e T_m :

$$TV^{\gamma-1} = cost \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma = \frac{4}{3} & T_{rad} \propto V^{-1/3} \propto (1+z) \\ \gamma = \frac{5}{3} & T_m \propto V^{-2/3} \propto (1+z)^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

allo stesso modo possiamo calcolare la densità di materia, considerando l'equazione di stato politropica $P \propto \rho^{\gamma}$:

$$PV^{\gamma} = cost \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P \propto V^{-\gamma} \\ \rho^{\gamma} \propto V^{-\gamma} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{5}{3} \quad \rho_m \propto V^{-1} \propto (1+z)^3 \quad (3.4)$$

Mettendo a confronto la (3.3) e la (3.4) possiamo dedurre

$$\begin{aligned} T_{rad}^3 &\propto \rho_m \\ T_{rad} &\propto \rho_m^{1/3} \\ dT_{rad} &\propto \frac{1}{3}(\rho^{-2/3} d\rho)_m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dT}{T}\right)_{rad} = \frac{1}{3} \left(\frac{d\rho}{\rho}\right)_m \quad (3.5)$$

analogamente si ricava dalla (3.4) l'ampiezza delle fluttuazioni di densità in funzione di z

$$\begin{aligned} \rho_m &\propto (1+z)^3 \\ d\rho_m &\propto 3(1+z)^2 dz \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\rho}{\rho}\right)_m = 3 \frac{dz}{1+z} \quad (3.6)$$

Considerando tutta la materia come barionica si può dimostrare che vale

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{m,z} = \frac{1500}{1+z} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{m,z=1000} \quad (3.7)$$

La struttura delle galassie che osserviamo indica che oggi le variazioni di densità sono

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{m,z=0} &= \frac{1500}{1+0} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{m,z=1000} \approx 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{m,z=1000} \approx 10^{-3} \end{aligned}$$

da cui, inserendo tale valore nella (3.5)

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{rad,z=1000} = \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{m,z=1000} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \approx 3 \cdot 10^{-4} \quad (3.8)$$

Gli upper limits osservativi e le misure di COBE (10^{-5}) sono però incompatibili con tale previsione. La soluzione di questo problema è semplice se cade l'assunzione di materia completamente barionica nel rapporto variazionale della densità (equazione (3.7)).

Assumendo l'esistenza di una componente di materia oscura, poiché questa non interagisce con la materia ordinaria e con i fotoni (se non gravitazionalmente), a $t_U = 3 \cdot 10^4$ anni (cfr. supra sez. 2.1) essa poteva iniziare il processo di frammentazione e collasso formando le prime strutture oscure (buche di potenziale): dopo l'epoca del disaccoppiamento la materia barionica si sarà accumulata molto più rapidamente in queste buche, seguendo un'evoluzione temporale della densità diversa dalla (3.7).

$$\underbrace{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{rad,z=1000} \approx 3 \cdot 10^{-5}}_{\text{misure di COBE}} \Rightarrow \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{m,z=1000} \approx 10^{-4} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{m,z=0} \approx 1}_{\text{misure galattiche}} \neq (3.7)$$

La teoria che spiega l'origine delle anisotropie è basata sullo scenario dell'inflazione:

- l'espansione adiabatica dell'universo, fino all'epoca del disaccoppiamento dilatò le fluttuazioni quantomeccaniche a scale di ordine astrofisico;
- queste fluttuazioni divennero perturbazioni di densità alla fine dell'inflazione;
- fino ad allora, per effetto della diffusione Thomson, barioni e fotoni si comportavano come un unico fluido in cui la massa era quella dei protoni e la pressione quella della radiazione; esso era attratto dalle perturbazioni primordiali, le quali tendevano a comprimerlo nelle buche di potenziale corrispondenti a regioni ad alta densità; a ciò si opponeva la pressione di radiazione, generando oscillazioni acustiche;
- dopo il disaccoppiamento alla superficie di last scattering i fotoni iniziarono a propagarsi imperturbati, trasportando l'informazione delle disomogeneità di origine;
- ciò, unitamente al redshift gravitazionale coinvolto nell'effetto Sachs-Wolfe, genera le anisotropie di temperatura della CMB che rileviamo oggi.

Appendice

A Fluttuazioni della CMB e parametri cosmologici

Missioni più recenti come WMAP (2001) e Planck (2009) hanno fornito misure sempre più precise delle fluttuazioni su piccola scala nella temperatura della CMB.

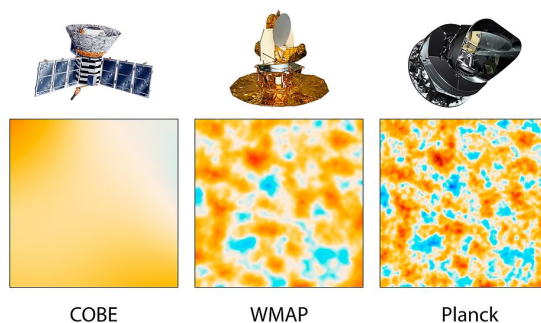


Figura A.1: *Confronto delle fluttuazioni misurate dalle tre missioni - l'immagine di COBE corrisponderebbe ad uno zoom di fig.3.2 - credits: NASA/JPL-Caltech/ESA*

Tali fluttuazioni non sarebbero altro che una manifestazione delle oscillazioni acustiche previste dalla teoria. Queste oscillazioni possono essere considerate come onde stazionarie (hanno fatto un numero intero di mezze oscillazioni) e rappresentate in uno spettro di potenza come quello in figura A.2:

- su grande scala (regione sinistra) corrispondono ad uno spettro piatto.
- su piccola scala (regione destra) corrispondono ad uno spettro smorzato.

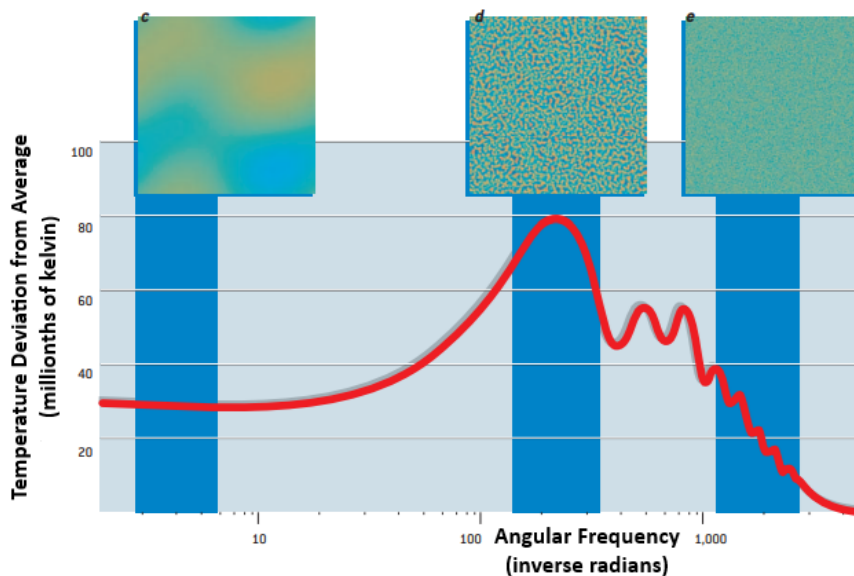


Figura A.2: *mappe di temperatura ottenute a diverse scale angolari rappresentate lungo lo spettro di potenza - illustrazione da “Hu, W.; White, M., The Cosmic Symphony”*

I dettagli dello spettro dipendono dai parametri cosmologici:

- Ω_Λ determina la posizione dei picchi;
- Ω_m determina l'altezza dei picchi.

θ_h corrisponde a

$$l_h \approx 200 \Omega_0^{1/2}$$

dove l_h individua la posizione del primo picco sull'asse orizzontale; come si può vedere dalla figura, $l_h \approx 200$ e ciò comporta che:

$$\Omega_0 \approx 1$$

ossia l'universo è molto prossimo ad una geometria euclidea.

Confrontando lo spettro osservativo con una serie di modelli in cui si variano i parametri si può ricavare il valore di questi ultimi tramite un processo di minimizzazione degli scarti.

Restano comunque delle degenerazioni fra parametri (combinazioni di due parametri che danno lo stesso risultato): per esempio, volendo dividere Ω_m nelle due componenti di materia oscura (Ω_c) e barionica (Ω_b), esse presentano un andamento concorrenziale nell'abbassare ed alzare rispettivamente i picchi.

Per ottenere un miglioramento dei risultati, si possono aggiungere altri tipi di informazioni, quali valori cosmologici mutuati da studi indipendenti.

Di seguito riportiamo i valori misurati dalla final release di Planck (2018) per alcuni dei parametri cosmologici principali.

parametro	valore
$\Omega_b h^2$	0.0224 ± 0.0001
$\Omega_c h^2$	0.120 ± 0.001
Ω_m	0.315 ± 0.007
Ω_Λ	0.685 ± 0.007
z_{ls}	1089.8 ± 0.2
θ_h (deg)	0.5964 ± 0.0003
H_0 (km/s/Mpc)	67.4 ± 0.5

Tabella A.1: adattata da “Planck Collaboration, *Planck 2018 results* ”

- $h = \frac{H_0}{100 \text{ km/s/Mpc}}$ è in tal caso la costante di Hubble ridotta che permette di scrivere i cosiddetti “parametri fisici di densità” $\Omega_x h^2$;
- z_{ls} individua il redshift alla superficie di last scattering.

Bibliografia

- (1) Coles, P.; Lucchin, F., *Cosmology The Origin and Evolution of Cosmic Structure*; Chichester : John Wiley Sons, Ltd: 2002, pp. 100–104, 374–377.
- (2) Casadio, R., *Elements of General Relativity*; dispense del docente: 2024, pp. 154–157.
- (3) Ciotti, L., *Astrofisica Extragalattica*; appunti personali: 2024.
- (4) Fanti, C.; Fanti, R., *Una finestra sull’Universo “Invisibile”*; dispense dei docenti: 2012; cap. 28.
- (5) Ferraro, F. R., *Astrofisica Stellare*; dispense del docente: 2023; cap. 5.
- (6) Planck-Collaboration, *Planck 2018 results*; Astronomy & Astrophysics: 2021; vol. 652, <https://doi.org/10.1051/0004\bibrangedash6361/201833910e>.
- (7) Hu, W., *Wayne Hu’s Tutorials*, 1996, <http://background.uchicago.edu/~whu/beginners/introduction.html>.
- (8) Hu, W.; Sugiyama, N.; Silk, J., *The physics of microwave background anisotropies*; Nature: 1997; vol. 386, pp. 37–43, <https://doi.org/10.1038/386037a0>.
- (9) Hu, W.; White, M., *The Cosmic Symphony*; Scientific American Magazine: 2004; vol. 290, pp. 44–53, <https://doi.org/10.1038/scientificamerican0204\bibrangedash44>.
- (10) Rubin, V. C., *Dark Matter in the Universe*; Highlights of Astronomy: 1986; vol. 7, pp. 27–38, <https://doi.org/10.1017/S1539299600006134>.