

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Sul Trasporto Ottimo

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Berardo Ruffini

Presentata da:
Lucia Rota Bulò

Sessione V
Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione	3
1 Prerequisiti	13
1.1 Teoria della misura	13
1.2 Il perimetro distribuzionale	15
1.3 Spazi di Hölder	16
2 Il Trasporto Ottimo	17
2.1 I problemi di Monge e Kantorovich	17
2.1.1 Il problema Kantorovich come rilassamento del problema di Monge	21
2.2 Il Teorema Fondamentale del Trasporto Ottimo	24
2.3 Il problema duale	30
2.4 La distanza di Wasserstein	34
2.5 Il teorema di Brenier	36
2.6 L'algoritmo di Benamou-Brenier	38
3 La disuguaglianza isoperimetrica via Trasporto Ottimo	41
4 Un'applicazione del Trasporto Ottimo	43
4.1 Il modello di localizzazione parziale delle membrane cellulari	43
4.2 Un problema isoperimetrico	44
4.2.1 Alcune proprietà di W_2	45
4.2.2 Sull'esistenza dei minimizzanti	49
4.2.3 Sulla minimalità delle palle per λ piccolo	64

Abstract

La teoria del trasporto ottimo consiste nel cercare un trasferimento efficiente di massa da un'area di origine a una di destinazione. Tale problema fu analizzato per la prima volta da Gaspard Monge nel XVIII secolo e, in seguito nel XX secolo, da Leonid Kantorovich. Una notevole conseguenza dei loro studi è che questi permettono di definire una metrica nello spazio delle misure di probabilità, definite su uno spazio sufficientemente regolare (uno spazio "polacco"): la distanza di Wasserstein. Questo permette di offrire una definizione geodetica, e dunque dinamica, tra due misure. Questo concetto è formalizzato in modo rigoroso dall'algoritmo di Benamou-Brenier. In questa tesi, dopo averli opportunamente introdotti, sfrutteremo gli argomenti per analizzare un problema di ottimizzazione di forma di tipo isoperimetrico, dove il classico perimetro di un insieme risulta in competizione con un termine repulsivo definito per mezzo della distanza di Wasserstein. Tale problema è stato recentemente introdotto da Peletier e Roger per descrivere la localizzazione parziale delle membrane cellulari a doppio strato lipidico. L'analisi che riportiamo è stata prodotta da Goldman e Candau-Tilh in un recente articolo. Precisamente, si mostra che insiemi ottimi esistono sempre, e che nel regime in cui la tensione superficiale (i.e. perimetro) risulta dominante, questi si localizzano stabilmente in forme sferiche. Tale analisi richiede lo studio di strumenti avanzati che stanno all'intersezione tra la teoria classica del trasporto ottimo, la regolarità per insiemi isoperimetrici e una moderna formulazione di principi di concentrazione-compattezza.

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è introdurre la teoria del Trasporto Ottimo per poi utilizzarla per dimostrare i risultati ottenuti da Michael Goldman e Jules Candau-Tilh nell'articolo da loro pubblicato il 24 agosto 2021 dal titolo “*Existence and stability results for an isoperimetric problem with a non-local interaction of Wasserstein type*”, [6].

La teoria del trasporto ottimo consiste nel cercare un trasferimento efficiente di massa da un'area di origine a una di destinazione. Per trasferimento efficiente si intende il modo di trasportare la massa con il minor costo possibile: si tratta dunque di un problema variazionale di minimizzazione. Questo problema è stato analizzato per la prima volta dal matematico francese Gaspard Monge e presentato in “*Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*” [7] nel 1781. Concentrandoci su spazi X, Y polacchi e avendo una funzione costo $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ misurabile e non negativa, il cosiddetto problema di Monge può essere formulato nel modo seguente:

$$\inf \left\{ \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) : T_{\#}\mu = \nu \right\},$$

dove T è una mappa di trasporto da X a Y che porta la massa dall'area di origine μ all'area di destinazione ν , e con $T_{\#}\mu$ si indica il push-forward di μ attraverso T (si veda la sezione 1.1).

La formulazione di Monge presenta soprattutto il problema che in generale non ammette soluzione; anche per tale motivo questa fu rivisitata dal matematico ed economista sovietico Leonid Kantorovich negli anni '40, il quale ne ha dato una nuova, equivalente, formulazione:

$$\min \left\{ \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y) : \gamma \in \Pi(\mu, \nu) \right\}.$$

Qui $\Pi(\mu, \nu)$ è lo spazio delle misure di probabilità con marginali μ e ν , detto insieme dei piani di trasporto. Notiamo che il nuovo insieme di oggetti ammissibili non è mai vuoto e tra l'altro, quando c è semicontinua inferiormente, il minimo per il problema di Kantorovich esiste sempre.

La differenza sostanziale tra le due formulazioni risiede nel fatto che per il problema di Monge viene specificata per ogni particella in x quale sarà la sua destinazione $T(x)$, mentre nel problema di Kantorovich viene specificato quanti elementi vanno da x a y . Il problema di Kantorovich contempla anche la possibilità che la massa venga suddivisa in più destinazioni. Inoltre, da una mappa di trasporto ottima T si può ricavare un piano di trasporto ottimo $\gamma_T = (Id \times T)_{\#}\mu$ indotto dalla mappa, ma non è sempre possibile il contrario, si veda la sezione 2.1.1.

Il Teorema Fondamentale del Trasporto Ottimo lega l'ottimalità di un piano di trasporto γ ottimo con la c -ciclica monotonia del suo supporto e l'esistenza di una funzione φ c -concava tale che sul grafico del suo superdifferenziale giace il supporto del piano ottimo; la c -ciclica monotonia è una proprietà geometrica che verrà descritta, insieme con le nozioni di c -concavità, nella sezione 2.2.

Una terza formulazione del problema del trasporto ottimo è il problema duale:

$$\sup \left\{ \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y) : (\varphi, \psi) \in \Phi_C \right\}.$$

Qui la classe di funzioni ammissibili è l'insieme Φ_C delle funzioni tali che $\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$ per ogni $(x, y) \in X \times Y$. Per il teorema di dualità di Kantorovich (si veda il teorema 2.3.1), i problemi di Kantorovich e quello duale sono equivalenti; in particolare il minimo del problema di Kantorovich coincide con l'estremo superiore del problema duale. Questi risultati saranno particolarmente utili nella parte finale dell'elaborato (si veda la sezione 4.2.3). Una importante caratteristica delle tre formulazioni introdotte è che inducono una metrica su $\mathcal{P}_2(X)$ attraverso la distanza di Wasserstein:

$$\begin{aligned} W_2^2(\mu, \nu) &:= \inf_{T_{\#}\mu=\nu} \int_X |x - T(x)|^2 d\mu(x) = \\ &= \min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times X} |x - y|^2 d\gamma(x, y) = \\ &= \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_C} \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_X \psi(y) d\nu(y). \end{aligned}$$

Un altro importante risultato è il teorema di Brenier, che lega i piani di trasporto con le mappe di trasporto e i potenziali di Kantorovich (si veda la sezione 2.5). Infine menzioniamo che, con l'introduzione della variabile tempo nel problema del trasporto ottimo, è nato un nuovo approccio dinamico/euleriano: l'algoritmo di Benamou-Brenier (si veda la sezione 2.6). Questo permette di vedere il movimento di una distribuzione continua di

particelle durante il trasporto, le quali si adattano al fine di minimizzare il costo totale.

Lo scopo finale di questo elaborato è analizzare un problema di ottimizzazione di forma, ossia la ricerca della forma di un insieme che ottimizza un'energia di un funzionale definito su sottoinsiemi di \mathbb{R}^d . Il problema in questione è stato studiato da Michael Goldman e Jules Candau-Tilh nel loro articolo [6] e nasce da un modello sulla localizzazione parziale delle membrane cellulari a doppio strato lipidico proposto da Mark A. Peletier e Matthias Röger in [5]. Precisamente, consideriamo il problema di minimizzazione sotto vincolo di volume

$$\inf_{|E|=\omega_d} \varepsilon_\lambda(E) \quad (1)$$

dove ω_d indica la misura della palla unitaria in \mathbb{R}^d e per $\lambda, \alpha > 0$,

$$\varepsilon_\lambda(E) := P(E) + \lambda [W_2^2(E)]^\alpha.$$

Il termine

$$W_2(E) := \inf_{|E \cap F|=0} W_2(E, F)$$

è un termine debolmente repulsivo di interazione non-locale. Qui $W_2(E, F)$ indica la distanza di Wasserstein tra χ_E ed χ_F .

Notiamo che l'energia ε_λ è composta da un termine aggregante, il perimetro, il quale cerca di concentrare la massa di un insieme E , e da un termine repulsivo $W_2(\cdot)$, il quale in un processo di minimizzazione vuole disgregarla. Si veda la discussione nella sezione 4.2.2. Si noti in particolare che (1) è minimizzato da una palla, grazie alla disuguaglianza isoperimetrica (si veda la sezione 4.2.3). I risultati principali del Capitolo 4 sono mostrare che per ogni $\lambda \geq 0$, (1) ammette un minimo e che per λ sufficientemente piccolo, tale minimo è la palla.

Sulle dimostrazioni del Capitolo 4

Il Capitolo 4 è incentrato sullo studio del problema isoperimetrico

$$\inf_{|E|=\omega_d} \varepsilon_\lambda(E),$$

definito precedentemente; qui di seguito alcuni dettagli della dimostrazione di Jules Candau-Tilh e Michael Goldman. Nella prima sezione 4.2.1 viene analizzato il termine di interazione non-locale W_2 . Per come è definito, il problema risulta ben posto, in particolare esiste ed è unico il minimizzante. L'idea è ricorrere alla dimostrazione dell'esistenza di minimi generalizzati, ossia di insiemi $\tilde{E} = (E^i)_{i \geq 1} \in (\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$ tali che $\sum_{i \geq 1} |E^i| = \omega_d$ i quali minimizzano

l'energia generalizzata

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}) = \sum_i P(E^i) + \lambda \left[\sum_i W_2^2(E^i) \right]^\alpha.$$

Tale dimostrazione è incentrata sulla costruzione di un insieme generalizzato che minimizzi e per cui la massa non si disperda. Si definisce una classe di equivalenza per cui la distanza dei centri dei cubi che partizionano lo spazio è finita: due insiemi nella stessa classe di equivalenza hanno lo stesso volume e coincidono a meno di traslazione. Questo determina un insieme generalizzato \tilde{E} come limite di una successione di insiemi in classi di equivalenza distinte. Si vuole poi provare che tale insieme minimizza, cioè che è l'estremo inferiore dell'energia generalizzata $\tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E})$.

In seguito si elimina il vincolo di volume, al prezzo di aggiungere una penalizzazione. Precisamente, si mostra che i minimizzanti generalizzati che abbiamo costruito, per $\Lambda > 0$ abbastanza grande, sono anche minimizzanti senza vincoli sul volume per

$$\tilde{\varepsilon}_{\lambda,\Lambda}(\tilde{E}) = \sum_i P(E^i) + \lambda \left[\sum_i W_2^2(E^i) \right]^\alpha + \Lambda \left| \sum_i |E^i| - \omega_d \right|,$$

e lo si vede con un argomento di riscaldamento. Inoltre, i minimizzanti generalizzati risultano anche Λ -minimizzanti per il perimetro, ossia sono tali che per ogni $E \subset \mathbb{R}^d$ competitore

$$P(E^i) \leq P(E) + \Lambda |E^i \Delta E|, \quad i \geq 1.$$

Questo comporta stime di densità uniformi per i minimizzanti generalizzati: si ha che in ogni punto di E^i viene caricata un po' di massa, cioè non ci sono

punti che non trasportano massa. Inoltre gli E^i sono connessi e compatti. Per concludere, dalla costruzione di \tilde{E} minimizzante generalizzato fatta in precedenza e con i relativi risultati già discussi, si definisce un minimizzante E , dimostrando che è l'estremo inferiore del problema isoperimetrico originario

$$\inf_{|E|=\omega_d} \varepsilon_\lambda(E).$$

In particolare abbiamo risolto il problema del termine di interazione non-locale W_2 che nel processo di minimizzazione della massa voleva disgregarla. Nell'ultima sezione 4.2.3 si mostra che, per λ abbastanza piccolo, gli unici minimizzanti per il problema isoperimetrico sono le palle. Innanzitutto, come conseguenza della Λ -minimalità segue che E minimizzante di $\varepsilon_\lambda(E)$ è una perturbazione $C^{1,\gamma}$ della palla: si dice che è *quasi* sferico. Inoltre, si ha che l'anello $A := B_{2\frac{1}{d}} \setminus B_1$ è minimizzante di W_2 per la palla B_1 e che esiste una mappa di trasporto ottima da B_1 ad A . In questa parte notiamo il legame con la teoria del trasporto ottimo: vediamo che la mappa è ottima provando che è c -ciclicamente monotona rispetto alla funzione costo quadratica. I potenziali di Kantorovich (φ, ψ) associati sono le funzioni massimizzanti del problema duale e risultano essere localmente lipschitz-continui, radialmente simmetrici e ψ crescente, ricordando che è la c -trasformata di φ . Qui è importante anche il risultato che lega la mappa ottima T con i potenziali di Kantorovich. Grazie al teorema della dualità di Kantorovich 2.3.1 troviamo un controllo dal basso per il termine di interazione non-locale quando E è *quasi* sferico. Dal fatto che A è l'anello minimizzante di W_2 per la palla B_1 , si ha che

$$[W_2^2(B_1)]^\alpha - [W_2^2(E)]^\alpha \leq C \int_{\partial B_1} f^2,$$

dove $f : \partial B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ con $\|f\|_{C^{1,\gamma}} \leq \varepsilon$ è tale che $\partial E = \{(1 + f(x))x : x \in \partial B_1\}$. Questo, insieme a un risultato del matematico danese Bent Fuglede [8] sullo studio del problema isoperimetrico nel caso di domini *quasi* sferici in \mathbb{R}^d , portano a concludere che E minimizzante per il problema isoperimetrico $\inf_{|E|=\omega_d} \varepsilon_\lambda(E)$, quando λ è abbastanza piccolo, coincide con la palla B_1 .

Struttura della tesi

Il Capitolo 1 è molto corto e vi introduciamo solo dei prerequisiti tecnici e alcune notazioni. Il Capitolo 2 è incentrato sulla teoria del Trasporto Ottimo descritta in precedenza. Nel Capitolo 3 dimostriamo la disuguaglianza isoperimetrica sfruttando le idee del Capitolo 2. Infine, nel Capitolo 4 vediamo una applicazione del trasporto ottimo nel caso di un problema isoperimetrico basato su un modello di localizzazione parziale delle membrane cellulari.

Capitolo 1

Prerequisiti

In questo primo capitolo diamo alcune nozioni sulla teoria della misura, sul perimetro distribuzionale e infine sugli spazi di Hölder che serviranno ai fini dell'elaborato.

1.1 Teoria della misura

In questa sezione diamo qualche definizione utile a introdurre la teoria del Trasporto Ottimo.

Definizione 1.1.1. Uno spazio X si dice polacco se è uno spazio metrico completo e separabile.

Definizione 1.1.2. Si chiama σ -algebra su Ω una famiglia $\mathcal{F} \subset \Omega$ di sottoinsiemi di Ω tali che

- $\Omega \in \mathcal{F}$;
- se $A \in \mathcal{F}$ allora $A^C \in \mathcal{F}$;
- se $\{A_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{F}$ allora $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$.

Definizione 1.1.3. Definiamo una misura μ su \mathcal{F} σ -algebra su Ω come una funzione $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ tale che μ è σ -additiva, ossia

$$\mu\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i), \quad A_i \in \mathcal{F}.$$

Inoltre, diciamo che μ è assolutamente continua rispetto a una misura ν , e scriviamo $\mu \ll \nu$, se $\mu(A) = 0$ per ogni A tale che $\nu(A) = 0$.

Infine, se esiste U tale che $\mu(E) = \mu(E \cap U)$, diciamo che la misura μ è concentrata su U . Chiamiamo $\text{supp}(\mu)$ il più piccolo chiuso su cui la misura μ è concentrata.

Definizione 1.1.4. Diciamo che $(A_i)_{i \geq 1}$ converge in misura ad A in Ω , e scriviamo $A_i \xrightarrow[\mu]{i \rightarrow +\infty} A$, se

$$|(A_i \Delta A) \cap \Omega| \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0,$$

o, equivalentemente,

$$\int_{\Omega} |\chi_{A_i} - \chi_A| \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0.$$

Definizione 1.1.5. Una σ -algebra di Borel su X è la più piccola σ -algebra di sottoinsiemi di X che contengono gli aperti di X . Si definiscono insiemi di Borel gli insiemi contenuti nella σ -algebra di Borel. Inoltre, una misura di Borel è una misura definita su una σ -algebra di Borel; chiamiamo $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle misure di Borel su X .

Si chiama funzione di Borel una $T : X \rightarrow Y$, con X, Y spazi topologici, tale che $T^{-1}(E)$ è un insieme di Borel per ogni $E \subset Y$ aperto.

Definizione 1.1.6. Diciamo che $(\mu_n) \subset \mathcal{P}(X)$ converge a μ nella topologia ristretta se

$$\int \varphi d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int \varphi d\mu, \quad \varphi \in C_b(X).$$

Definizione 1.1.7. Siano X, Y spazi polacchi, $T : X \rightarrow Y$ una mappa di Borel. Si definisce il push-forward di μ attraverso T la misura

$$T_{\#}\mu \in \mathcal{P}(Y)$$

definita come

$$T_{\#}\mu(E) = \mu(T^{-1}(E)), \quad E \subset Y \text{ Borel}$$

$$\int f dT_{\#}\mu = \int f \circ T d\mu, \quad f : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ di Borel.}$$

Definizione 1.1.8 (Misura senza atomi). Una misura μ si dice senza atomi se per ogni x si ha $\mu(\{x\}) = 0$.

1.2 Il perimetro distribuzionale

In questa sezione introduciamo la nozione di perimetro distribuzionale analizzando una particolare classe di funzioni BV, limitandoci alla definizione e alle proprietà principali che ci torneranno utili nel Capitolo 4. Rimandiamo il lettore interessato alla teoria dei perimetri finiti a [9].

Definizione 1.2.1 (Funzioni BV). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto, diciamo che la funzione $u \in L^1(\mathbb{R})$ ha variazione totale limitata su Ω , e scriviamo $u \in BV(\Omega)$, se

$$|Du|(\Omega) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \|g\| \leq 1 \right\} < +\infty.$$

Definizione 1.2.2 (Perimetro di E). Sia $E \subset \mathbb{R}^d$, definiamo il perimetro di E su Ω come la quantità

$$P(E, \Omega) := \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \|g\| \leq 1 \right\}. \quad (1.1)$$

Diciamo che E ha perimetro finito se

$$P(E) = P(E, \Omega) < +\infty.$$

Osservazione 1.2.3. Notiamo che il perimetro di E è la variazione di χ_E su Ω :

$$P(E) < +\infty \Leftrightarrow \exists \chi_E : P(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega) < +\infty.$$

Una utile proprietà dei perimetri è la semicontinuità inferiore.

Proposizione 1.2.4. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aperto, $(u_j) \subset BV(\Omega)$ una successione tale che $u_j \xrightarrow{L_{loc}^1} u$. Allora

$$|Du|(\Omega) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} |Du_j|(\Omega).$$

Proposizione 1.2.5. La mappa $E \mapsto P(E, \Omega)$ è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza in misura, ossia se (E_j) converge in misura a E allora

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} P(E_j, \Omega) \geq P(E, \Omega).$$

1.3 Spazi di Hölder

Definizione 1.3.1 (Spazio di Hölder). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e $0 < \gamma \leq 1$. Diciamo che $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ soddisfa la condizione di Hölder con esponente γ se esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\gamma.$$

Definiamo lo spazio di Hölder $C^{1,\gamma}(\Omega)$ come l'insieme delle $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ le cui derivate fino all'ordine 1 soddisfano la condizione di Hölder con esponente γ . Definiamo inoltre la norma $C^{1,\gamma}$ di f come:

$$\|f\|_{C^{1,\gamma}} = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma}.$$

Capitolo 2

Il Trasporto Ottimo

2.1 I problemi di Monge e Kantorovich

Il problema del Trasporto Ottimo può essere esemplificato con il trasferimento efficiente di una massa di sabbia da un'area di origine a una di destinazione, entrambe con un volume prefissato. Immaginiamo il volume unitario e rappresentiamo la massa di sabbia e le aree con misure di probabilità μ e ν su spazi misurabili X e Y rispettivamente. Se $E \subseteq X$ e $F \subseteq Y$ sono insiemi misurabili, allora

- $\mu(E)$ indica quanta sabbia si trova in E ,
- $\nu(F)$ indica quanta sabbia può essere trasportata in F .

Il trasporto della massa di sabbia da un punto x a un punto y è associato a un costo, espresso tramite una funzione c definita sul prodotto cartesiano $X \times Y$. Si assume che la funzione c sia misurabile e non negativa, non escludendo la possibilità che possa assumere valori infiniti. In questo contesto, il Trasporto Ottimo mira a trovare una distribuzione ottimale di sabbia da X a Y in modo che il costo totale sia minimizzato.

Formalizziamo ora il concetto precedentemente esposto, presentando il problema nella versione del matematico Gaspard Monge nel suo lavoro “*Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*” del 1781. In questo contesto, Monge si dedicò allo studio di un problema di natura militare, focalizzandosi sulla minimizzazione dei costi di trasporto del materiale. Questo problema specifico riguardava il trasferimento di materiale dal luogo di scavo al sito di utilizzo, con l'obiettivo di ottimizzare il processo di costruzione di fortificazioni.

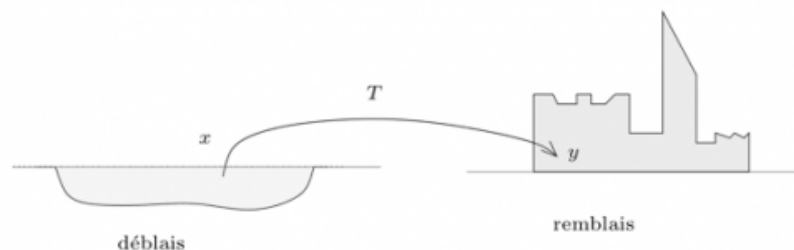


Figura 2.1: Problema di Monge

Problema di Monge.

Siano X, Y spazi polacchi, $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$. Sia $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la funzione costo di Borel. Si vuole risolvere il problema di minimizzazione

$$\inf \left\{ \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) : T_{\#}\mu = \nu \right\} \quad (2.1)$$

su tutte le mappe di trasporto $T : X \rightarrow Y$ da μ a ν .

Esaminando il problema di Monge, emergono alcuni problemi:

1. ci sono casi in cui non esistono mappe T ammissibili, per esempio se si considerano $\mu = \delta_{x_0}$ e $\nu = \frac{1}{2}(\delta_{y_0} + \delta_{y_1})$;
2. T non è sequenzialmente chiuso rispetto ad alcuna topologia debole: per esempio si può considerare la funzione

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

con

$$\mu = \mathcal{L}_{[0,1]}^1 \quad \nu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1).$$

Negli anni '40 è stata investigata una versione più ampia del problema di Monge introdotta da Leonid Kantorovich, un matematico ed economista sovietico. Kantorovich è stato insignito del Premio Nobel per l'economia nel 1975.

Problema di Kantorovich.

Siano X, Y spazi polacchi, $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$. Sia $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la funzione costo di Borel. Si vuole risolvere il problema di minimizzazione

$$\inf \left\{ \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y) : \gamma \in \Pi(\mu, \nu) \right\}. \quad (2.2)$$

Qui $\Pi(\mu, \nu)$ rappresenta l'insieme dei piani di trasporto ammissibili: per un piano $\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y)$ essere ammissibile significa, intuitivamente, che tutta la massa trasportata da un punto x coincide con $d\mu(x)$ e la massa trasportata da un punto y coincide con $d\nu(y)$. In simboli,

$$\int_Y d\gamma(x, y) = d\mu(x), \quad \int_X d\gamma(x, y) = d\nu(y)$$

ossia

$$\begin{aligned} \gamma(E \times Y) &= \mu(A), \quad E \in \mathcal{B}(X), \\ \gamma(X \times F) &= \nu(F), \quad B \in \mathcal{B}(Y). \end{aligned}$$

Dunque,

$$\Pi(\mu, \nu) = \{ \gamma \in \mathcal{P}(X \times Y) : \pi_{\#}^X \gamma = \mu, \quad \pi_{\#}^Y \gamma = \nu \}$$

dove π^X, π^Y sono le proiezioni naturali da $X \times Y$ a X e Y rispettivamente.

Osservazione 2.1.1. La distinzione fondamentale tra i due problemi risiede nel fatto che nel problema di Monge viene specificata per ogni particella in x la destinazione $T(x)$, mentre nel problema di Kantorovich si specifica per ogni coppia (x, y) quanti elementi vanno da x a y . Ciò è evidente dalla notazione $\gamma(E \times F)$, che indica la massa trasportata da E a F .

Nel problema di Kantorovich è contemplata la possibilità che da una posizione iniziale x la massa venga suddivisa e trasportata in più punti y . Il trasporto non può essere descritto da una mappa T come nel caso del problema di Monge, poiché non c'è una destinazione univoca per ogni particella.

Definizione 2.1.2. I minimizzanti del problema di Kantorovich (2.2) sono chiamati piani di trasporto ottimi tra μ e ν , scriviamo $\gamma \in \text{Opt}(\mu, \nu)$.

Sia $\gamma_T := (Id \times T)_{\#} \mu$ un piano di trasporto ottimo indotto da una mappa misurabile $T : X \rightarrow Y$, tale T viene chiamata mappa di trasporto ottima da μ a ν .

Il problema di Kantorovich (2.2) ha diversi vantaggi rispetto al problema di Monge (2.1), li vedremo formalmente in seguito:

1. $\Pi(\mu, \nu) \neq \emptyset$, in quanto contiene almeno $\mu \otimes \nu$, ossia la misura prodotto definita su $X \times Y$ tale che $(\mu \otimes \nu)(E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F)$;
2. L'insieme $\Pi(\mu, \nu)$ è convesso e compatto rispetto alla topologia ristretta in $\mathcal{P}(X \times Y)$ e $\gamma \mapsto \int c d\gamma$ è lineare;

3. Se c è semicontinua inferiormente, il minimo esiste sempre;
4. $T_{\#}\mu = \nu$ implica $\gamma_T \in \Pi(\mu, \nu)$: in questo modo il funzionale prende la forma

$$\int c(x, T(x)) d\mu(x)$$

come nel problema di Monge (2.1).

Diamo ora una definizione e introduciamo due risultati che saranno utili per dimostrare l'esistenza di un minimo per il problema di Kantorovich (2.2).

Definizione 2.1.3. Siano (X, d) uno spazio polacco e $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Diciamo che una famiglia $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ è tight se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K_\varepsilon \subset X$ compatto tale che

$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad \mu \in \mathcal{K}.$$

Lemma 2.1.4 (Ulam). *Sia (X, d) uno spazio polacco, $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\varepsilon > 0$. Allora esiste $K \subset X$ compatto tale che $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$.*

Teorema 2.1.5 (Tychonoff). *Il prodotto cartesiano di infiniti spazi compatti è uno spazio compatto.*

Teorema 2.1.6 (Prokhorov). *Sia (X, d) uno spazio polacco. Una famiglia $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ è relativamente compatta se e solo se è tight.*

Possiamo quindi enunciare il teorema per l'esistenza di un minimo per il problema di Kantorovich (2.2).

Teorema 2.1.7. *Siano X, Y spazi polacchi, $\mu \in \mathcal{P}(X)$ e $\nu \in \mathcal{P}(Y)$. Sia c la funzione costo. Allora esiste un minimo per il problema di Kantorovich (2.2).*

Dimostrazione. Vogliamo utilizzare il teorema di Weierstrass: dimostriamo la compattezza di $\Pi(\mu, \nu)$ e la semicontinuità inferiore di c .

Compattezza: sia $(\gamma_n) \subset \Pi(\mu, \nu)$ tale che $\gamma_n \rightharpoonup \gamma$, vogliamo mostrare che $\Pi(\mu, \nu)$ è chiuso rispetto alla convergenza debole.

Per farlo, prendiamo $\varphi \in C_b(X)$ e notiamo che $(x, y) \mapsto \varphi(x)$ è continua e limitata in $X \times Y$, da cui segue che

$$\begin{aligned} \int \varphi d\pi_{\#}^X \gamma &= \int \varphi(x) d\gamma(x, y) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi(x) d\gamma_n(x, y) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi d\pi_{\#}^X \gamma_n = \\ &= \int \varphi d\mu. \end{aligned}$$

Allora $\pi_{\#}^X \gamma = \mu$. Analogamente $\pi_{\#}^Y \gamma = \nu$, dunque $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$.

Per il teorema di Prokhorov 2.1.6 è sufficiente dimostrare che $\Pi(\mu, \nu)$ sia tight affinché esso sia relativamente compatto. Fissato $\varepsilon > 0$, per il lemma di Ulam 2.1.4 esistono due compatti $K_X \subset X$, $K_Y \subset Y$ tali che

$$\mu(X \setminus K_X) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \nu(Y \setminus K_Y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per il teorema di Tychonoff 2.1.5 $K_X \times K_Y \subset X \times Y$ è compatto. Allora, data $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$, si ha

$$\begin{aligned} \gamma((X \times Y) \setminus (K_X \times K_Y)) &\leq \gamma((X \setminus K_X) \times Y) + \gamma(X \times (Y \setminus K_Y)) = \\ &= \mu(X \setminus K_X) + \nu(Y \setminus K_Y) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Semicontinuità inferiore: vogliamo dimostrare che il funzionale

$$\gamma \mapsto \int c d\gamma$$

è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole.

Sia $(\gamma_n) \subset \Pi(\mu, \nu)$ tale che $\gamma_n \rightharpoonup \gamma$. Le ipotesi su c garantiscono che esista una successione (c_k) crescente di funzioni $c_k : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ continue e limitate tali che $c(x, y) = \sup_k c_k(x, y)$. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int c d\gamma_n \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int c_k d\gamma_n = \int c_k d\gamma.$$

Passando all'estremo superiore su k ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int c d\gamma_n \geq \sup_k \int c_k d\gamma = \int c d\gamma.$$

□

Lo scopo della sezione seguente sarà dimostrare che se c è continua e μ senza atomi allora l'estremo inferiore del problema di Monge (2.1) coincide con il minimo del problema di Kantorovich (2.2).

2.1.1 Il problema Kantorovich come rilassamento del problema di Monge

Vogliamo ora dimostrare che il problema di Kantorovich (2.2) è un rilassamento del problema di Monge (2.1). Diamo innanzitutto la definizione di rilassamento:

Definizione 2.1.8 (Rilassamento). Siano X uno spazio metrico e un funzionale $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ limitato dal basso. Definiamo il rilassamento di F come il funzionale $\bar{F} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ che è il massimo funzionale fra tutti i $G : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinui inferiormente tali che $G \leq F$.

Ora, fissato

$$K(\gamma) := \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y),$$

per ogni mappa T ,

$$M(T) := \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma_T(x, y) = K(\gamma_T).$$

Allora possiamo scrivere il problema di Monge (2.1) come

$$\inf \{J(\gamma) : \gamma \in \Pi(\mu, \nu)\}, \quad (2.3)$$

dove

$$J(\gamma) = \begin{cases} K(\gamma) = M(T), & \text{se } \gamma = \gamma_T, \\ +\infty, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo definito J in modo da limitare l'attenzione ai piani indotti da una mappa di trasporto: questo approccio garantisce che i problemi di Monge e Kantorovich si basino sulla stessa classe di oggetti ammissibili. In precedenza questo non era vero poiché la classe di funzioni ammissibili per il problema di Kantorovich era più estesa. Ora la distinzione principale si riscontra unicamente nel funzionale da minimizzare: J per il problema di Monge e K per il problema di Kantorovich.

Vogliamo dimostrare che

$$\inf J = \min K,$$

che è ovvio nel caso in cui $\gamma = \gamma_T$.

Introduciamo due risultati utili.

Lemma 2.1.9. *Siano μ, ν misure di probabilità su \mathbb{R}^d , μ senza atomi. Allora esiste una mappa T tale che $T_{\#}\mu = \nu$.*

Teorema 2.1.10. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ compatto e μ misura su Ω senza atomi. Allora l'insieme dei piani γ_T indotti da una mappa di trasporto è denso in $\Pi(\mu, \nu)$.*

Dimostrazione. Fissato n , costruiamo una partizione $(K_{i,n})_{i,n}$ di Ω tale che

$$\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_{i,n}, \quad \text{diam}(K_{i,n}) < \frac{1}{2n}$$

Siano $C_{i,j,n} := K_{i,n} \times K_{j,n}$, allora

$$\Omega \times \Omega = \bigcup_{i,j} C_{i,j,n}.$$

Sia $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$, costruiamo T tale che $T_{\#}\mu = \nu$ in modo che γ_T distribuisca la massa sui $C_{i,j,n}$ come γ . Definiamo

$$\text{Col}_{i,n} := K_{i,n} \times \Omega \quad \gamma_{i,n} := \gamma|_{\text{Col}_{i,n}}$$

e chiamiamo $\mu_{i,n}$ e $\nu_{i,n}$ le marginali di $\gamma_{i,n}$.

Per il lemma 2.1.9, per ogni i esiste una mappa $T_{i,n}$ tale che

$$(T_{i,n})_{\#}\mu_{i,n} = \nu_{i,n}.$$

Prendendo $\mu = \sum_i \mu_{i,n}$ e $\nu = \sum_i \nu_{i,n}$, costruiamo T incollando le $T_{i,n}$ su tutti gli insiemi disgiunti $K_{i,n}$ di Ω . Allora T è tale che

$$T_{\#}\mu = \nu.$$

Si avrà inoltre

$$\begin{aligned} \gamma_{T_{i,n}}(C_{i,j,n}) &= \mu_{i,n}(\{x : x \in K_{i,n}, T_{i,n}(x) \in K_{j,n}\}) = \\ &= \mu_{i,n}(\{x : T_{i,n}(x) \in K_{j,n}\}) = \\ &= \nu_{i,n}(K_{j,n}) = \\ &= \gamma(K_{i,n} \times K_{j,n}). \end{aligned}$$

□

Possiamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 2.1.11. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ compatto, c continua e μ senza atomi, allora K è il rilassamento di J .*

In particolare,

$$\inf J = \min K.$$

Dimostrazione. K è continuo rispetto alla topologia debole, ossia

$$\gamma_n \rightharpoonup \gamma \Rightarrow K(\gamma_n) \rightarrow K(\gamma)$$

Allora è anche semicontinuo inferiormente e vale $K \leq J$. Quindi, dalla definizione di rilassamento, si ha

$$K \leq \bar{J}.$$

Per provare la disuguaglianza inversa dobbiamo costruire per ogni γ una successione T_n tale che

$$\gamma_{T_n} \rightharpoonup \gamma \text{ e } J(\gamma_{T_n}) \rightarrow K(\gamma).$$

Lo possiamo fare per il teorema 2.1.10. Segue direttamente che

$$\inf \bar{J} \leq \inf J \leq K$$

e dunque abbiamo dimostrato la tesi. □

2.2 Il Teorema Fondamentale del Trasporto Ottimo

In questa sezione enunciamo un importante teorema della teoria del Trasporto Ottimo. Sia c la funzione costo: è a valori reali ed è una funzione di Borel. Il risultato lega le nozioni di c -concavità con l'ottimalità di un piano di trasporto e dà una regolarità al supporto dello stesso. Diamo le seguenti definizioni.

Definizione 2.2.1 (c -ciclica monotonia). Diciamo che un insieme $\Gamma \subset X \times Y$ è c -ciclicamente monotono se per $(x_i, y_i) \in \Gamma$, $1 \leq i \leq N$, vale

$$\sum_{i=1}^N c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^N c(x_i, y_{\sigma(i)}), \quad \sigma \text{ permutazione di } \{1, \dots, N\}.$$

Osservazione 2.2.2. La c -ciclica monotonia, nel contesto del problema del Trasporto Ottimo, implica che ogni coppia di punti (x, y) è organizzata in modo tale che il trasporto avvenga nel modo più economico possibile. In altre parole, la disposizione della massa segue una regolarità che rispecchia la struttura dei costi associati a ciascun trasporto.

Definizione 2.2.3 (*c*-trasformata). Sia $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ una funzione qualsiasi. La sua c_+ -trasformata è la funzione $\psi^{c+} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ definita come

$$\psi^{c+}(x) := \inf_{y \in Y} (c(x, y) - \psi(y)).$$

Similmente, sia $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, la sua c_+ -trasformata è la funzione $\varphi^{c+} : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ definita come

$$\varphi^{c+}(y) := \inf_{x \in X} (c(x, y) - \varphi(x)).$$

Analogamente si definiscono le c_- -trasformate e risulta

$$\psi^{c-}(x) = -(-\psi)^{c+}(x) \quad \text{e} \quad \varphi^{c-}(y) = -(-\varphi)^{c+}(y).$$

Definizione 2.2.4 (*c*-concavità e *c*-convessità). Diciamo che una funzione $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è *c*-concava se esiste $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tale che $\varphi = \psi^{c+}$. Similmente, $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è *c*-concava se esiste $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tale che $\psi = \varphi^{c+}$.

Una funzione φ è *c*-convessa se e solo se $-\varphi$ è *c*-concava.

Osservazione 2.2.5. Ogni risultato valido per funzioni *c*-concave può essere rinunciato per funzioni *c*-convesse.

Definizione 2.2.6 (*c*-superdifferenziale e *c*-subdifferenziale). Sia una funzione $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *c*-concava. Si definisce il *c*-superdifferenziale di φ l'insieme

$$\partial^{c+}\varphi := \{(x, y) \in X \times Y : \varphi(x) + \varphi^{c+}(y) = c(x, y)\}. \quad (2.4)$$

Il *c*-superdifferenziale di φ in $x \in X$ è l'insieme

$$\partial^{c+}\varphi(x) = \{y \in Y : (x, y) \in \partial^{c+}\varphi\}.$$

Si indica

$$\text{graph}(\partial^{c+}\varphi) := \{(x, y) : y \in \partial^{c+}\varphi(x)\}$$

il grafico del *c*-superdifferenziale di φ . Analogamente si definisce il *c*-subdifferenziale di φ e risulta

$$\partial^{c-}\varphi = \partial^{c+}(-\varphi).$$

Osservazione 2.2.7. È equivalente caratterizzare il *c*-superdifferenziale nel seguente modo:

$$\begin{aligned} y \in \partial^{c+}\varphi(x) &\Leftrightarrow \varphi(x) = c(x, y) - \varphi^{c+}(y), \\ &\Leftrightarrow \varphi(z) \leq c(z, y) - \varphi^{c+}(y), \quad z \in X, \\ &\Leftrightarrow \varphi(z) - c(z, y) \leq \varphi(x) - c(x, y), \quad z \in X. \end{aligned}$$

Il c -superdifferenziale di una funzione c -concava è sempre un insieme c -ciclicamente monotono: per ogni permutazione σ degli indici

$$\begin{aligned} \sum_i c(x_i, y_i) &= \sum_i \varphi(x_i) + \varphi^{c+}(y_i) = \\ &= \sum_i \varphi(x_i) + \varphi^{c+}(y_{\sigma(i)}) \leq \\ &\leq \sum_i c(x_i, y_{\sigma(i)}). \end{aligned}$$

Teorema 2.2.8 (Rockafellar). *Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, allora Γ è c -ciclicamente monotono se e solo se esiste una funzione $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convessa e semicontinua inferiormente tale che $\Gamma \subset \text{graph}(\partial^{c+}\varphi)$.*

Il risultato chiave di questa sezione evidenzia come la c -ciclica monotonia del supporto di un piano di trasporto sia una condizione cruciale per l'ottimalità dello stesso. La dimostrazione di tale affermazione si sviluppa per assurdo, basandosi sull'idea che l'assenza di c -ciclica monotonia nel supporto implicherebbe una distribuzione della massa meno efficiente. Pertanto, sarebbe possibile individuare un piano di trasporto alternativo con un costo inferiore, e questo genera l'assurdo.

Teorema 2.2.9 (Teorema Fondamentale del Trasporto Ottimo). *Siano X, Y spazi polacchi, $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ e $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione costo continua e limitata dal basso tale che*

$$c(x, y) \leq a(x) + b(y), \quad a \in L^1(d\mu), b \in L^1(d\nu). \quad (2.5)$$

Sia $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$. Allora sono equivalenti le seguenti:

- (i) $\gamma \in \text{Opt}(\mu, \nu)$,
- (ii) $\text{supp}(\gamma)$ è c -ciclicamente monotono,
- (iii) esiste una funzione φ c -concava tale che

$$\max\{\varphi, 0\} \in L^1(d\mu) \quad \text{e} \quad \text{supp}(\gamma) \subset \text{graph}(\partial^{c+}\varphi).$$

Dimostrazione. La condizione (2.5) implica che, per $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$,

$$\begin{aligned} \int c(x, y) d\gamma(x, y) &\leq \int (a(x) + b(y)) d\gamma(x, y) = \\ &= \int a(x) d\mu(x) + \int b(y) d\nu(y) < +\infty. \end{aligned}$$

Dunque

$$c \in L^1(d\gamma).$$

(i) \Rightarrow (ii) :

Supponiamo per assurdo che $\text{supp}(\gamma)$ non sia c -ciclicamente monotono, ossia che esistano $k \in \mathbb{N}$, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, k} \subset \text{supp}(\gamma)$ e una permutazione σ di $\{1, \dots, k\}$ tali che

$$\sum_{i=1}^k c(x_i, y_i) > \sum_{i=1}^k c(x_i, y_{\sigma(i)}).$$

Poiché c è continua, esistono U_i intorno di x_i e V_i intorno di y_i tali che, per ogni i ,

$$\sum_{i=1}^k (c(x_i, y_{\sigma(i)}) - c(x_i, y_i)) < 0, \quad (x_i, y_i) \in U_i \times V_i. \quad (2.6)$$

Poiché $(x_i, y_i) \in \text{supp}(\gamma)$ si ha che $\gamma(U_i \times V_i) > 0$. Allora esiste ε_0 tale che

$$\frac{1}{k} \min_i \gamma(U_i \times V_i) > \varepsilon_0. \quad (2.7)$$

Definiamo

$$\gamma_i := \frac{\gamma|_{U_i \times V_i}}{\gamma(U_i \times V_i)} \quad (2.8)$$

e chiamiamo μ_i e ν_i le sue marginali.

Vogliamo costruire una variazione di γ

$$\tilde{\gamma} := \gamma + \eta$$

in modo che in γ non si realizzi il minimo. Presa $\tilde{\gamma}_i \in \Pi(\mu_i, \nu_{\sigma(i)})$, definiamo

$$\eta := -\varepsilon_0 \sum_{i=1}^k \gamma_i + \varepsilon_0 \sum_{i=1}^k \tilde{\gamma}_i \quad (2.9)$$

e dimostriamo che $\tilde{\gamma}$ minimizza il funzionale, ossia

$$\int c d\tilde{\gamma} < \int c d\gamma.$$

In questo modo, si incorre in una contraddizione con l'ipotesi che γ sia ottima, derivante dall'aver supposto che $\text{supp}(\gamma)$ non fosse c -ciclicamente monotono. Innanzitutto mostriamo che $\tilde{\gamma}$ è non negativa: per farlo basta provare che

$$\gamma - \varepsilon_0 \sum \gamma_i \geq 0.$$

Da (2.8), usando (2.7), deduciamo che

$$\varepsilon_0 \gamma_i = \frac{\varepsilon_0}{\gamma(U_i \times V_i)} \gamma|_{U_i \times V_i} \leq \frac{1}{k} \gamma|_{U_i \times V_i}$$

perciò

$$\gamma \geq k\varepsilon_0 \gamma_i,$$

e dunque

$$\gamma - \varepsilon_0 \sum \gamma_i \geq k\varepsilon_0 \gamma_i - \varepsilon_0 \sum \gamma_i \geq 0.$$

Inoltre $\tilde{\gamma} \in \Pi(\mu, \nu)$ poiché η ha marginali nulle, infatti:

$$\begin{aligned} \pi_{\#}^X \tilde{\gamma} &= \pi_{\#}^X \gamma - \varepsilon_0 \sum \pi_{\#}^X \gamma_i + \varepsilon_0 \sum \pi_{\#}^X \tilde{\gamma}_i = \\ &= \mu - \varepsilon_0 \sum \mu_i + \varepsilon_0 \sum \mu_i = \mu \\ \pi_{\#}^Y \tilde{\gamma} &= \pi_{\#}^Y \gamma - \varepsilon_0 \sum \pi_{\#}^Y \gamma_i + \varepsilon_0 \sum \pi_{\#}^Y \tilde{\gamma}_i = \\ &= \nu - \varepsilon_0 \sum \nu_i + \varepsilon_0 \sum \nu_{\sigma(i)} = \nu. \end{aligned}$$

Rimane solo da mostrare che

$$\int c d\tilde{\gamma} < \int c d\gamma,$$

o, equivalentemente,

$$\int c d\eta < 0.$$

Dalla definizione di η (2.9), usando (2.6), segue che

$$\begin{aligned} \int c d\eta &= \int c d\left(-\varepsilon_0 \sum \gamma_i + \varepsilon_0 \sum \tilde{\gamma}_i\right) = \\ &= -\varepsilon_0 \sum \int c d\gamma_i + \varepsilon_0 \sum \int c d\tilde{\gamma}_i = \\ &= \varepsilon_0 \sum \left(\int c d\tilde{\gamma}_i - \int c d\gamma_i\right) < 0. \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (iii) :

Fissiamo $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma := \text{supp}(\gamma)$ con $\Gamma \subset X \times Y$ c -ciclicamente monotono. Vogliamo trovare φ c -concava tale che

$$\Gamma \subset \text{graph}(\partial^{c+}\varphi).$$

Per $(x_i, y_i) \in \Gamma$, $i = 1, \dots, N$, vale

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &\leq c(x, y_1) - \varphi^{c^+}(y_1) \leq \\
&\leq c(x, y_1) - c(x_1, y_1) + c(x_1, y_2) - \varphi^{c^+}(y_2) \leq \\
&\leq (c(x, y_1) - c(x_1, y_1)) + (c(x_1, y_2) - c(x_2, y_2)) + \varphi(x_2) \leq \\
&\leq \dots \leq \\
&\leq (c(x, y_1) - c(x_1, y_1)) + (c(x_1, y_2) - c(x_2, y_2)) + \dots + \\
&\quad + (c(x_n, \bar{y}) - c(\bar{x}, \bar{y})) + \varphi(\bar{x}).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Siccome le $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, N}$ variano tra le N -uple in Γ e N varia in \mathbb{N} , allora viene naturale definire φ come l'estremo inferiore di tutta la (2.10):

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &:= \inf \{ (c(x, y_1) - c(x_1, y_1)) + (c(x_1, y_2) - c(x_2, y_2)) + \dots + \\
&\quad + (c(x_n, \bar{y}) - c(\bar{x}, \bar{y})) \}
\end{aligned}$$

per $N \geq 1$ intorni e $(x_i, y_i) \in \Gamma$, $i = 1, \dots, N$.

In particolare, per $N = 1$ e $(x_i, y_i) = (\bar{x}, \bar{y})$ si ha che

$$\varphi(\bar{x}) \leq 0.$$

Per la c -ciclica monotonia di Γ abbiamo invece

$$\varphi(\bar{x}) \geq 0,$$

dunque segue direttamente che

$$\varphi(\bar{x}) = 0.$$

Scegliendo sempre $N = 1$ e $(x_1, y_1) = (\bar{x}, \bar{y})$ e usando l'ipotesi (2.5) si ha

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &\leq c(x, \bar{y}) - c(\bar{x}, \bar{y}) < \\
&< a(x) + b(\bar{y}) - c(\bar{x}, \bar{y})
\end{aligned}$$

e poichè $a \in L^1(d\mu)$, $b \in L^1(d\nu)$ e $c \in L^1(d\gamma)$, allora $\max\{\varphi, 0\} \in L^1(d\mu)$.

Rimane solo da provare che $\Gamma \subset \text{graph}(\partial^{c^+}\varphi)$:

scegliamo $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Gamma$ e sia $(x_1, y_1) = (\tilde{x}, \tilde{y})$, allora dalla definizione di φ si ha

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &\leq c(x, \tilde{y}) - c(\tilde{x}, \tilde{y}) + \inf (c(\tilde{x}, y_2) - c(x_2, y_2)) + \dots + \\
&\quad + (c(x_N, \bar{y}) - c(\bar{x}, \bar{y})) = \\
&= c(x, \tilde{y}) - c(\tilde{x}, \tilde{y}) + \varphi(\tilde{x}).
\end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\varphi(x) - c(x, \tilde{y}) \leq \varphi(\tilde{x}) - c(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad x \in X$$

che, per l'osservazione 2.2.7, è la definizione equivalente di superdifferenziale, allora

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \text{graph}(\partial^{c^+} \varphi).$$

(iii) \Rightarrow (i) :

Vogliamo dimostrare che $\gamma \in \text{Opt}(\mu, \nu)$: preso $\tilde{\gamma} \in \Pi(\mu, \nu)$ un piano di trasporto, si ha

$$\int c d\gamma \leq \int c d\tilde{\gamma}.$$

Ricordiamo che

$$\varphi(x) + \varphi^{c^+}(y) = c(x, y), \quad (x, y) \in \text{supp}(\gamma)$$

$$\varphi(x) + \varphi^{c^+}(y) \leq c(x, y), \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Allora

$$\begin{aligned} \int c(x, y) d\gamma(x, y) &= \int (\varphi(x) + \varphi^{c^+}(y)) d\gamma(x, y) = \\ &= \int \varphi(x) d\mu(x) + \int \varphi^{c^+}(y) d\nu(y) = \\ &= \int (\varphi(x) + \varphi^{c^+}(y)) d\tilde{\gamma}(x, y) \leq \\ &\leq \int c(x, y) d\tilde{\gamma}(x, y). \end{aligned}$$

□

2.3 Il problema duale

I problemi di minimizzazione del tipo di Kantorovich (2.2) con ipotesi di convessità possono essere espressi con una formulazione duale, corrispondente in questo caso a un problema di massimizzazione. Vogliamo dare quest'altra formulazione perché poi ci tornerà utile nell'ultima parte della tesi per dimostrare che la palla è l'unico minimizzante per il problema isoperimetrico se λ è sufficientemente piccolo.

Se non diversamente specificato, X e Y sono spazi polacchi.

Problema Duale.

Siano $\mu \in \mathcal{P}(X)$ e $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, si vuole massimizzare:

$$\sup \left\{ \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y) \right\} \quad (2.11)$$

su

$$\Phi_C := \{(\varphi, \psi) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu) : \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y), (x, y) \in X \times Y\}.$$

Il problema del trasporto di Kantorovich (2.2) e il duale (2.11) sono legati dal teorema seguente.

Teorema 2.3.1 (Dualità di Kantorovich). *Siano $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funzione costo semicontinua inferiormente. Siano $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$, $(\varphi, \psi) \in \Phi_C$. Siano*

$$K(\gamma) := \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y),$$

$$I(\varphi, \psi) := \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y).$$

Allora

$$\min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} K(\gamma) = \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_C} I(\varphi, \psi). \quad (2.12)$$

Osservazione 2.3.2 (“Il problema del trasportatore”: l’interpretazione di Caffarelli). Immaginiamo di dover trasferire una massa di carbone dalle miniere alle industrie, ci vengono presentate due alternative di trasporto:

1. pagare un prezzo $c(x, y)$ per ogni tonnellata di carbone trasportata da x a y ;
2. pagare $\varphi(x)$ per prelevare una tonnellata di carbone dalla posizione x e $\psi(y)$ per rilasciarla in y .

È da notare che, con la seconda opzione, non ci preoccupiamo più di cosa viene trasportato dove. L’opzione 2 risulta sempre conveniente in quanto i prezzi sono fissati in modo che valga $\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$ per ogni coppia (x, y) .

Il teorema della dualità di Kantorovich può essere pensato così: se chi ha proposto l’opzione 2 è sufficientemente astuto, riuscirà a farsi pagare quanto avresti pagato minimizzando i costi dell’opzione 1. In termini matematici, l’estremo superiore dell’opzione (2) coincide con il minimo dell’opzione (1).

Osservazione 2.3.3. Vale

$$\sup_{\Phi_C \cap C_b} I(\varphi, \psi) \leq \sup_{\Phi_C \cap L^1} I(\varphi, \psi) \leq \min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} K(\gamma).$$

Per questo, se $\sup_{\Phi_C \cap C_b} I = \min_{\Pi(\mu, \nu)} K$ allora,

$$\sup_{\Phi_C \cap L^1} I = \sup_{\Phi_C \cap C_b} I.$$

Enunciamo un risultato preliminare che useremo nella dimostrazione del teorema di dualità di Kantorovich 2.3.1.

Teorema 2.3.4 (Principio di Minimax). *Siano $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^d$ insiemi compatti, $F : K_1 \times K_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

- $F(\cdot, y) : K_1 \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa;
- $F(x, \cdot) : K_2 \rightarrow \mathbb{R}$ è concava,

allora

$$\min_{x \in K_1} \max_{y \in K_2} F(x, y) = \max_{y \in K_2} \min_{x \in K_1} F(x, y).$$

Dimostrazione teorema 2.3.1. Osserviamo che

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} K(\gamma) = \inf_{\gamma \in \mathcal{M}_+(X \times Y)} \left(K(\gamma) + \begin{cases} 0, & \gamma \in \Pi(\mu, \nu) \\ +\infty, & \text{altrimenti,} \end{cases} \right)$$

dove per $\mathcal{M}_+(X \times Y)$ si intende l'insieme delle misure di Borel su $X \times Y$ non negative.

Indichiamo

$$\chi(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma \in \Pi(\mu, \nu), \\ +\infty, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Siccome i vincoli in $\Pi(\mu, \nu)$ sono lineari, possiamo pensare a $\chi(\gamma)$ come la soluzione di un problema di massimizzazione con funzionali lineari:

$$\chi(\gamma) = \sup_{(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \int_{X \times Y} (\varphi + \psi) d\gamma \right\}.$$

Vale che:

- se $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$, allora $\chi(\gamma) = 0$;
- se $\gamma \notin \Pi(\mu, \nu)$, allora esistono $(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)$ tali che

$$\int \varphi(x) d\mu(x) + \int \psi(y) d\nu(y) - \int (\varphi(x) + \psi(y)) d\gamma(x, y) \neq 0.$$

Moltiplicando (φ, ψ) per numeri reali adatti, otteniamo $\chi(\gamma) = +\infty$.

Quindi

$$\begin{aligned}
\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} K(\gamma) &= \inf_{\gamma \in \mathcal{M}_+(X \times Y)} \sup_{(\varphi, \psi)} \left\{ \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y) + \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \right. \\
&\quad \left. + \int_Y \psi(y) d\nu(y) - \int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) d\gamma(x, y) \right\} = \\
&= \inf_{\gamma \in \mathcal{M}_+(X \times Y)} \sup_{(\varphi, \psi)} F(\gamma, \varphi, \psi) = \\
&= \sup_{(\varphi, \psi)} \inf_{\mathcal{M}_+(X \times Y)} F(\gamma, \varphi, \psi),
\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato il Principio di Minimax 2.3.4 poiché $\gamma \mapsto F(\gamma, \varphi, \psi)$ è convessa e $(\varphi, \psi) \mapsto F(\gamma, \varphi, \psi)$ è concava e lineare.

Allora

$$\begin{aligned}
\inf_{\Pi(\mu, \nu)} K(\gamma) &= \sup_{(\varphi, \psi)} \inf_{\mathcal{M}_+(X \times Y)} F(\gamma, \varphi, \psi) = \\
&= \sup_{(\varphi, \psi)} \left\{ \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y) + \right. \\
&\quad \left. - \sup_{\mathcal{M}_+(X \times Y)} \int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y) - c(x, y)) d\gamma(x, y) \right\}. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Ora, sia $\zeta(x, y) := \varphi(x) + \psi(y) - c(x, y)$,

- se $\zeta(x, y) > 0$ per qualche $(x, y) \in X \times Y$, si sceglie $\gamma = \lambda \delta_{(x, y)}$ con $\lambda \rightarrow +\infty$ affinché si ottenga $\sup_{\mathcal{M}_+} \int \zeta d\gamma = +\infty$;
- se $\zeta(x, y) \leq 0$ per ogni $(x, y) \in X \times Y$, allora $\sup_{\mathcal{M}_+} \int \zeta d\gamma = 0$.

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\sup_{\mathcal{M}_+(X \times Y)} \int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y) - c(x, y)) d\gamma(x, y) = \begin{cases} 0, & (\varphi, \psi) \in \Phi_C \\ +\infty, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

perciò, da (2.13), possiamo concludere

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} K(\gamma) = \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_C} I(\varphi, \psi).$$

□

Osservazione 2.3.5. Notiamo che la coppia di funzioni che massimizza il problema duale è della forma (φ, φ^{c+}) con φ funzione c -concava. Si può infatti provare che questa è una coppia ammissibile per il problema duale poiché

$$\varphi(x) + \varphi^{c+}(y) = c(x, y) \quad \text{e} \quad (\varphi, \varphi^{c+}) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu).$$

Definizione 2.3.6 (Potenziale di Kantorovich). Sia φ c -concava tale che la coppia (φ, φ^{c+}) è massimizzante per il problema duale (2.11). Chiamiamo (φ, ψ) con $\psi = \varphi^{c+}$ i potenziali di Kantorovich per μ e ν .

2.4 La distanza di Wasserstein

In questa sezione introduciamo la distanza di Wasserstein e dimostriamo che è una metrica su $\mathcal{P}_2(X)$, che definiamo. Consideriamo la funzione costo

$$c(x, y) = d(x, y)^2 = |x - y|^2, \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Definizione 2.4.1.

$$\mathcal{P}_2(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) : \int_X |x - x_0|^2 d\mu(x) < +\infty, x_0 \in X \right\}.$$

Definizione 2.4.2. Sia X spazio polacco. Siano $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(X)$, T mappa di trasporto ottima tale che $T_{\#}\mu = \nu$, $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$ e $(\varphi, \psi) \in \Phi_C$. Definiamo la distanza di Wasserstein $W_2 : \mathcal{P}_2(X) \times \mathcal{P}_2(X) \rightarrow \mathbb{R}^+$ come

$$\begin{aligned} W_2^2(\mu, \nu) &:= \inf_{T_{\#}\mu = \nu} \int_X |T(x) - x|^2 d\mu(x) = & (2.14) \\ &= \min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times X} |x - y|^2 d\gamma(x, y) = \\ &= \sup_{(\varphi, \psi) \in \Phi_C} \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_X \psi(y) d\nu(y). \end{aligned}$$

Osservazione 2.4.3. Il fatto che $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(X)$ assicura che

$$W_2(\mu, \nu) < +\infty.$$

Teorema 2.4.4. W_2 è una metrica su $\mathcal{P}_2(X)$.

Dimostrazione. W_2 è simmetrica, non negativa e finita su $\mathcal{P}_2(X)$. Dimostriamo che è una metrica su questo spazio:

- è immediato osservare che $W_2(\mu, \mu) = 0$;

- $W_2(\mu, \nu) = 0$ implica che $\mu = \nu$. Infatti, sia γ piano di trasporto ottimo, poiché $W_2(\mu, \nu) = 0$ si ha che γ è concentrato sulla diagonale $\{x = y\}$ e dunque per $\varphi, \psi \in C_b(X)$

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi(x) d\gamma(x, y) = \int \psi(y) d\gamma(x, y) = \int \psi d\nu,$$

allora $\mu = \nu$.

- disuguaglianza triangolare: mostriamo che, per ogni μ, ν e ρ ,

$$W_2(\mu, \nu) \leq W_2(\mu, \rho) + W_2(\rho, \nu).$$

Sia T una mappa di trasporto tra μ e ρ e S la mappa tra ρ e ν , allora $S \circ T$ manda μ in ν poiché

$$(S \circ T)_\# \mu = S_\#(T_\# \mu) = S_\# \rho = \nu.$$

Allora

$$\begin{aligned} W_2(\mu, \nu) &\leq \left(\int |S(T(x)) - x|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|S \circ T - Id\|_{L^2(d\mu)} \leq \\ &\leq \|S \circ T - T\|_{L^2(d\mu)} + \|T - Id\|_{L^2(d\mu)} \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \|S \circ T - T\|_{L^2(d\mu)} &= \left(\int |S(T(x)) - T(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\int |S(y) - y|^2 d\rho(y) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= W_2(\rho, \nu) \end{aligned}$$

e

$$\|T - Id\|_{L^2(d\mu)} = W_2(\mu, \rho).$$

Segue direttamente che

$$W_2(\mu, \nu) \leq W_2(\mu, \rho) + W_2(\rho, \nu).$$

□

2.5 Il teorema di Brenier

Vediamo ora un risultato importante che lega i piani di trasporto con le mappe di trasporto e i potenziali di Kantorovich. Diamo qualche definizione ed enunciamo alcuni risultati utili a tale scopo.

Definizione 2.5.1 (Trasformata di Legendre). Sia $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la sua trasformata di Legendre è una funzione $f^* : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f^*(y) := \inf_{x \in \mathbb{R}^d} (x \cdot y - f(x)).$$

Osservazione 2.5.2. Una funzione $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa e semicontinua inferiormente se e solo se esiste una funzione $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f = g^*$.

Definizione 2.5.3 (Differenziale di una funzione convessa). Sia $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Il suo differenziale è l'insieme

$$\partial f(x) := \{p \in \mathbb{R}^d : f(y) \geq f(x) + p(y - x), y \in \mathbb{R}^d\}.$$

Se x è contenuto nella parte interna dell'insieme $\{f < +\infty\}$, allora il differenziale di f è sempre non vuoto.

Inoltre,

$$y \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow f(x) + f^*(y) = x \cdot y. \quad (2.15)$$

Proposizione 2.5.4. Siano $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $u_f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che

$$u_f(x) := \frac{|x|^2}{2} - \frac{f(x)}{2}.$$

Allora $u_{f^c} = u_f^*$.

Inoltre, una funzione φ è c -concava se e solo se $x \mapsto \frac{|x|^2}{2} - \frac{\varphi(x)}{2}$ è convessa e semicontinua inferiormente.

Osservazione 2.5.5. La dimostrazione della proposizione 2.5.4 è una facile applicazione della definizione di trasformata di Legendre alla funzione u_f .

Teorema 2.5.6 (Rademacher). Sia $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitz-continua. Allora l'insieme dei punti di non differenziabilità di f ha misura nulla.

Teorema 2.5.7. Siano μ, ν misure di probabilità su $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ compatto, μ assolutamente continua e $\partial\Omega$ di misura trascurabile. Allora esiste un piano di trasporto ottimo γ per una funzione costo $c(x, y) = h(x - y)$ con h strettamente convessa. Inoltre, γ è unico ed è della forma

$$\gamma = (Id \times T)_{\#} \mu.$$

Infine, esiste un potenziale di Kantorovich φ tale che

$$T(x) = x - (\nabla h)^{-1}(\nabla \varphi(x)).$$

Dimostrazione. Per il teorema 2.1.7 sappiamo che esiste γ piano di trasporto ottimo tra μ e ν . Per il teorema della dualità di Kantorovich 2.3.1 inoltre esiste φ potenziale di Kantorovich.

Sia $(x, y) \in \text{supp}(\gamma)$ per cui $x \notin \partial\Omega$ e esiste $\nabla\varphi(x)$, allora vale

$$y = x - (\nabla h)^{-1}(\nabla\varphi(x)).$$

Poiché c è lipschitz-continua su $\Omega \times \Omega$, anche φ lo è. Allora per il teorema di Rademacher 2.5.6 l'insieme dei punti di non differenziabilità di φ ha misura nulla. Dunque ogni piano di trasporto ottimo è indotto da una mappa T che associa $x \mapsto x - (\nabla h)^{-1}(\nabla\varphi(x))$ ed è univocamente determinato. \square

Un caso particolare del teorema 2.5.7 è il teorema di Brenier, quando $c(x, y) = h(x - y) = |x - y|^2$.

Teorema 2.5.8 (Brenier). *Siano μ, ν due misure di probabilità su \mathbb{R}^d . Supponiamo che μ sia assolutamente continua. Allora esiste ed è unica una mappa $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tale che $T_{\#}\mu = \nu$ e*

$$T(x) = \nabla u(x),$$

dove $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione convessa.

Dimostrazione. Per i teoremi 2.1.7 e 2.2.9, esiste un piano di trasporto ottimo $\gamma \in \text{Opt}(\mu, \nu)$ e f una funzione c -concava tale che $\text{supp}(\gamma) \subset \text{graph}(\partial^{c+}f)$. Per la definizione di c -superdifferenziale di una funzione c -concava (2.4) sappiamo che per $(x, y) \in \text{supp}(\gamma)$

$$(x, y) \in \partial^{c+}f \Leftrightarrow f(x) + f^{c+}(y) = |x - y|^2. \quad (2.16)$$

Definiamo

$$u(x) := \frac{|x|^2}{2} - \frac{f(x)}{2}.$$

Per la proposizione 2.5.4, u è convessa e semicontinua inferiormente. Inoltre, poiché μ è assolutamente continua, si ha che u è lipschitz-continua. Allora per il teorema di Rademacher 2.5.6 l'insieme dei punti di non differenziabilità di u ha misura nulla.

Infine,

$$\begin{aligned} f^{c+}(y) &= \inf_x \{|x - y|^2 - f(x)\} = \\ &= \inf_x \{|x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y - |x|^2 + 2u(x)\} = \\ &= |y|^2 - 2 \sup_x \{x \cdot y - u(x)\} = \\ &= |y|^2 - 2u^*(y). \end{aligned}$$

Allora la (2.16) diventa

$$u(x) + u^*(y) = x \cdot y,$$

che, per la (2.15), è equivalente a

$$y \in \partial u(x).$$

Segue dal teorema di Rademacher 2.5.6 che $\partial u = \{\nabla u\}$ μ -quasi ovunque. Allora

$$y \in \{\nabla u(x)\} =: T(x).$$

Tale mappa T è unica: lo si dimostra facilmente assumendo per assurdo che ne esista un'altra che minimizza il problema di Monge (2.1). \square

2.6 L'algoritmo di Benamou-Brenier

Vediamo ora in modo non dettagliato un metodo di risoluzione efficiente per il problema del Trasporto Ottimo proposto da Jean-David Benamou e Yann Brenier. L'algoritmo di Benamou-Brenier, conosciuto anche come "algoritmo dei fluidi", è un modo dinamico utilizzato per risolvere problemi di trasporto ottimo come quelli presentati nelle sezioni precedenti.

L'idea di Benamou-Brenier è quella di trattare il problema del trasporto ottimo di massa da un punto di vista dinamico/euleriano: ossia come il movimento di una distribuzione continua di particelle attraverso il dominio, le quali si adattano per minimizzare il costo totale.

Fissiamo un intervallo $[0, 1]$ e, per $0 \leq t \leq 1$, consideriamo

- una funzione densità $\mu_t \geq 0$;
- un campo di velocità $v_t(x) \in \mathbb{R}^d$ che descrive il moto di un fluido.

Sia l'equazione di continuità, o equazione del trasporto,

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(\mu_t v_t) = 0, \quad t \in [0, 1], x \in \mathbb{R}^d.$$

Osservazione 2.6.1. Per $\partial_t \mu_t$ si intende la derivata prima (qualora essa esista) rispetto al tempo di μ_t , ossia

$$\partial_t \mu_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(\mu_{t+h}, \mu_t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W_2(\mu_{t+h}, \mu_t)}{h},$$

dove W_2 è la distanza di Wasserstein definita in (2.14).

Definiamo l'insieme delle funzioni ammissibili

$$\mathcal{A} := \{\mu_t : \partial_t \mu_t + \operatorname{div}(\mu_t v_t) = 0\}.$$

Siano μ, ν le misure di probabilità del problema di Kantorovich (2.2), allora le μ_t soddisfano le condizioni iniziale e finale

$$\mu_0 = \mu, \quad \mu_1 = \nu.$$

Vale il seguente fatto.

Proposizione 2.6.2.

$$W_2^2(\mu, \nu) = \inf \left\{ \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |v_t(x)|^2 d\mu_t(x) dt : \mu_t \in \mathcal{A}, \mu_0 = \mu, \mu_1 = \nu \right\}.$$

Osservazione 2.6.3. Nell'algoritmo dei fluidi la ricerca del trasporto ottimo per un costo $c(x, y) = |x - y|^2$ diventa la ricerca di una curva geodetica a velocità costante. Per curva geodetica si intende la curva più breve che congiunge due punti di uno spazio: nel nostro caso μ e ν .

Il problema proposto da Benamou-Brenier costituisce un caso più specifico rispetto ai problemi di Monge e Kantorovich, poiché in questi ultimi non compariva la dimensione temporale. L'introduzione della variabile tempo genera un problema di minimizzazione spazio-tempo più semplice. La nuova formulazione, basata sulla meccanica dei continui, prevede una densità μ_t che interpola il tempo tra le misure di probabilità μ e ν , insieme a un campo di velocità v_t che si sposta da μ a ν . Questo approccio si rivela particolarmente efficace in molteplici applicazioni pratiche, specialmente nel contesto della visione artificiale.

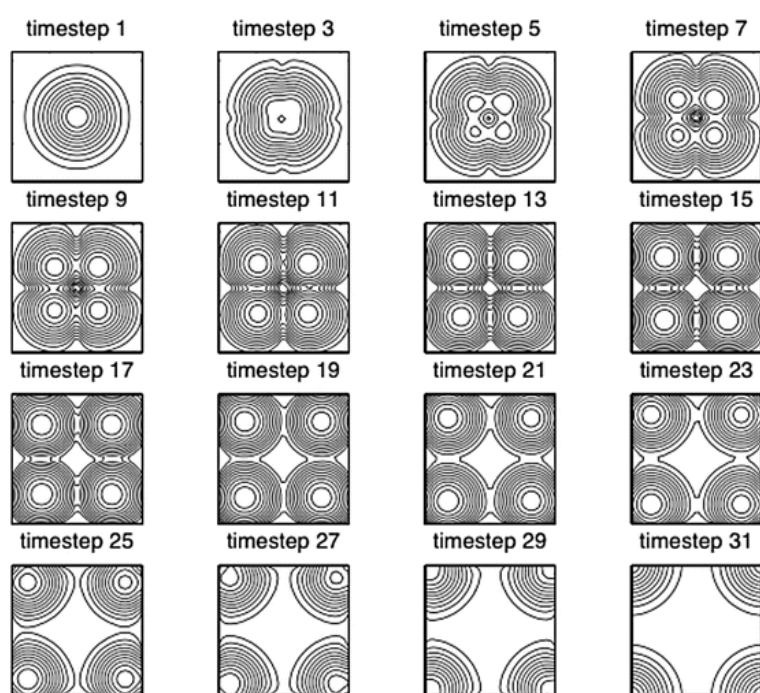


Figura 2.2: Algoritmo di Benamou-Brenier su un toro 2D

Capitolo 3

La disuguaglianza isoperimetrica via Trasporto Ottimo

In questo capitolo introduciamo la disuguaglianza isoperimetrica: tra tutti gli insiemi di volume fissato, la palla è quello di perimetro minore. Utilizzeremo questo fatto per dimostrare diversi risultati nel Capitolo 4.

Teorema 3.0.1 (Disuguaglianza isoperimetrica). *Sia un insieme $E \subset \mathbb{R}^d$ tale che $|E| < +\infty$. Allora*

$$P(E) \geq P(B) = d\omega_d^{\frac{1}{d}} |E|^{\frac{d-1}{d}}, \quad (3.1)$$

dove B è una palla di \mathbb{R}^d tale che $|E| = |B|$ e ω_d è il volume di una palla unitaria su \mathbb{R}^d .

Osservazione 3.0.2. Tale risultato può essere dimostrato in diversi modi, presentiamo quello dato dalla teoria del Trasporto Ottimo discussa nel Capitolo 2.

Dimostrazione. Consideriamo

$$\mu := \frac{1}{|E|} \mathcal{L}^d|_E, \quad \nu := \frac{1}{|B|} \mathcal{L}^d|_B.$$

Sia $T : E \rightarrow B$ la mappa di trasporto ottima tra E e B associata al costo quadratico $c(x, y) = |x - y|^2$.

Con la formula del cambio di variabili si ha

$$\frac{1}{|E|} = \det(\nabla T(x)) \frac{1}{|B|}. \quad (3.2)$$

Per il teorema di Brenier 2.5.8, esiste una funzione u tale che $T = \nabla u$, con u convessa. Allora

3. La disuguaglianza isoperimetrica via Trasporto Ottimo

- ∇T è una matrice semidefinita positiva, dunque ha autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ non negativi;
- ∇T è una matrice simmetrica perché le derivate seconde miste sono uguali, allora è diagonalizzabile: esiste D diagonale con gli stessi autovalori di ∇T per cui

$$\det(\nabla T) = \det(D) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_d.$$

Inoltre, per la disuguaglianza della media aritmetica-geometrica, si ha

$$(\det(\nabla T(x)))^{\frac{1}{d}} \leq \frac{\operatorname{div}(T)}{d}.$$

Dunque, per $x \in E$, la (3.2) diventa

$$\frac{1}{|E|^{\frac{1}{d}}} = \frac{(\det(\nabla T(x)))^{\frac{1}{d}}}{|B|^{\frac{1}{d}}} \leq \frac{\operatorname{div}(T)}{d|B|^{\frac{1}{d}}}.$$

Integrando su E si trova, usando il teorema della divergenza,

$$\begin{aligned} |E|^{\frac{d-1}{d}} &\leq \frac{1}{d|B|^{\frac{1}{d}}} \int_E \operatorname{div} T(x) \, dx = \\ &= \frac{1}{d|B|^{\frac{1}{d}}} \int_{\partial E} \langle T(x), \nu(x) \rangle \, d\mathcal{H}^{d-1}(x), \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove $\nu : \partial E \rightarrow \mathbb{R}^d$ è il versore normale alla superficie.

Notiamo che $T(x) \in B$ per ogni $x \in E$, perciò $\|T(x)\| \leq 1$. Ne segue che $\langle T(x), \nu(x) \rangle \leq 1$, e ricordando la definizione di perimetro di E otteniamo

$$|E|^{\frac{d-1}{d}} \leq \frac{1}{d|B|^{\frac{1}{d}}} P(E).$$

Concludiamo

$$P(E) \geq d\omega_d^{\frac{1}{d}} |E|^{\frac{d-1}{d}}.$$

□

Capitolo 4

Un'applicazione del Trasporto Ottimo

4.1 Il modello di localizzazione parziale delle membrane cellulari

Il 24 agosto 2021 Michael Goldman e Jules Candau-Tilh hanno pubblicato un articolo dal titolo *"Existence and stability results for an isoperimetric problem with a non-local interaction of Wasserstein type"*, [6]. Il problema variazionale trattato in tale articolo si basa su un modello proposto in [5].

Il modello in questione è incentrato sul fenomeno di localizzazione parziale nell'ambito delle membrane cellulari, dove per localizzazione parziale si intende l'auto-aggregazione di massa in strutture che sono sottili in una direzione e estese nelle altre.

Le membrane cellulari, costituite da un doppio strato lipidico, sono una struttura piana che si forma dall'aggregazione delle molecole lipidiche, le quali non formano legami covalenti le une con le altre. Ciascuna di esse è costituita da una testa idrofilica e due code idrofobiche. La struttura piana si forma per il

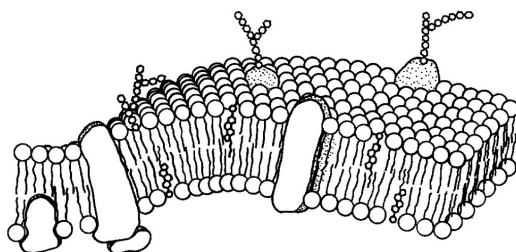


Figura 4.1: Membrana cellulare a doppio strato di lipidi

4.2 Un problema isoperimetrico 4. Un'applicazione del Trasporto Ottimo

solo effetto idrofobico delle code, infatti esse tendono a disporsi le une contro le altre a formare una regione priva di acqua, separata dall'acqua dalle teste idrofiliche, come in figura 4.1.

Per studiare le caratteristiche della membrana è stato introdotto un funzionale energia

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u, v) := \begin{cases} \varepsilon \int |\nabla u| + \frac{W_1(u, v)}{\varepsilon^2}, & (u, v) \in \mathcal{K}_\varepsilon \\ +\infty, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove

- u, v sono le densità di teste e code;
- $\mathcal{K}_\varepsilon := \{(u, v) \in BV \times L^1(\mathbb{R}^2; \{0, \varepsilon^{-1}\}) : \int u = \int v = M, uv = 0 \text{ q.o.}\}$;
- $\int |\nabla u|$ è l'energia che nasce dall'effetto idrofobico delle code;
- $W_1(u, v)$ viene dal legame covalente testa-code;
- ε indica la sottigliezza della struttura.

Si vuole studiare il funzionale nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$, in modo da focalizzarsi su curve di \mathbb{R}^2 più "ingrassate" per poi assottigliarle. In realtà, nell'articolo [5], viene studiato un funzionale riscaldato più semplice

$$\mathcal{G}_\varepsilon := \frac{\mathcal{F}_\varepsilon - 2M}{\varepsilon^2}.$$

Se \mathcal{G}_ε è limitato, allora si ha la localizzazione parziale e dunque la stabilità della struttura. Inoltre vengono giustificati i comportamenti di struttura simil-solido della membrana come l'allungamento e la non rottura. Viene giustificata anche la resistenza alla flessione, data dalla Γ -convergenza al funzionale elastico

$$\mathcal{W}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_\gamma k^2 d\mathcal{H}^1$$

dove k indica la curvatura di γ .

4.2 Un problema isoperimetrico

Sul modello esposto nella sezione 4.1 si sono basati Michael Goldman e Jules Candau-Tilh per i loro studi. Essi hanno considerato un caso generale, noi ci concentriamo sul particolare con $p = 2$, avendo definito la distanza di

Wasserstein W_2 in (2.14) relativa alla funzione costo quadratica. Hanno introdotto un termine debolmente repulsivo: l'energia non-locale

$$W_2(E) := \inf_{|E \cap F|=0} W_2(E, F) \quad (4.1)$$

dove si identificano E ed F con χ_E e χ_F .

Lo scopo dell'articolo [6] è dimostrare l'esistenza di minimizzanti per un problema isoperimetrico del tipo

$$\inf_{|E|=\omega_d} \varepsilon_\lambda(E) \quad (4.2)$$

con

$$\varepsilon_\lambda(E) := P(E) + \lambda [W_2^2(E)]^\alpha, \quad \lambda, \alpha > 0$$

dove ω_d è il volume di una palla unitaria su \mathbb{R}^d e $P(E)$ indica il perimetro di E come definito in (1.1).

4.2.1 Alcune proprietà di W_2

Enunciamo e dimostriamo alcune proprietà del termine di interazione non-locale W_2 che ci saranno utili in seguito per dimostrare l'esistenza di minimizzanti per il problema isoperimetrico (4.2) e che, per λ sufficientemente piccolo, essi sono le palle.

Con il primo risultato vediamo che il problema (4.1) risulta ben posto. Per dimostrarlo ci serve una proposizione preliminare.

Proposizione 4.2.1. *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^d$ convesso, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che $f \geq 0$ e $\int_\Omega f \geq 1$. Allora, per ogni $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$, esiste ρ unica soluzione per il problema variazionale*

$$\min_{\rho \in \mathcal{K}_\rho} W_2^2(\rho, \mu),$$

dove $\mathcal{K}_\rho := \{\rho \in L^1_+(\Omega) : \int_\Omega \rho dx = 1, \rho \leq f\}$.

Proposizione 4.2.2. *Esiste $C = C(d) > 0$ tale che, per ogni $E \subset \mathbb{R}^d$, si ha*

$$W_2(E) \leq C |E|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{d}}. \quad (4.3)$$

Inoltre, se $|E| < +\infty$, esiste ed è unico F minimizzante per il problema (4.1).

Sia γ un piano di trasporto ottimo per $W_2(E, F)$, allora

$$|x - y| \leq C |E|^{\frac{1}{d}}, \quad \text{per } \gamma\text{-quasi ogni } (x, y). \quad (4.4)$$

4.2 Un problema isoperimetrico 4. Un'applicazione del Trasporto Ottimo

Dimostrazione. Dimostriamo che il costo è sempre controllato e che esiste ed è unico il minimizzante per il problema (4.1).

Assumiamo $|E| < \infty$, poiché altrimenti la conclusione sarebbe ovvia. Riscaldando il problema possiamo supporre $|E| = 1$, dunque basta dimostrare

$$W_2(E) \leq C.$$

Sia $(Q_i)_{i \geq 1}$ una partizione di \mathbb{R}^d in cubi di lato 2^{-i} . Vogliamo costruire una partizione $(E_i)_{i \geq 1}$ di E in modo che ogni E_i sia trasportato con un costo controllato. Definiamo

$$E_i := E \cap Q_i,$$

allora, per ogni i ,

$$|E_i| = |E \cap Q_i| = |E| + |Q_i| - |E \cup Q_i| \leq \frac{|Q_i|}{2}.$$

Possiamo quindi trovare $F_i \subset Q_i$ tale che

$$|E_i \cap F_i| = 0, \quad |F_i| = |E_i| \leq \frac{|Q_i|}{2}.$$

Dunque esiste T_i una mappa di trasporto ottima tra E_i e F_i e

$$\sup_{E_i} |T_i(x) - x| \leq C. \tag{4.5}$$

Consideriamo $F = \bigcup_{i \geq 1} F_i$ e T la mappa tale che $T|_{Q_i} = T_i$, allora

$$T_{\#}E = F.$$

Dalla definizione di T e per la (4.5), risulta

$$\begin{aligned} W_2(E) &= \inf_{|E \cap F|=0} W_2(E, F) \leq W_2(E, F) = \\ &= \left(\int_E |T(x) - x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i \geq 1} \int_{E_i} |T_i(x) - x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C \left(\sum_{i \geq 1} |E_i| \right)^{\frac{1}{2}} = C. \end{aligned}$$

Dimostriamo che esiste ed è unico F minimizzante per (4.1). Usiamo la proposizione 4.2.1 con $f = \chi_{EC}$ e $\Omega = \mathbb{R}^d$. Allora esiste ed è unica μ soluzione di

$$\min_{\mu \in \mathcal{K}_\mu} W_2(E, \mu)$$

con $E \subset \mathbb{R}^d$ e $\mathcal{K}_\mu = \{\mu \in L^1_+(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} \mu = 1, \mu \leq \chi_{E^c}\}$.
Dunque possiamo dire che esiste ed è unica μ tale che

$$W_2(E) = \inf_{\mu} \{W_2(E, \mu) : \mu \leq \chi_{E^c}\} =: \tilde{W}_2(E), \quad (4.6)$$

e χ_F è l'unico minimizzante di $\tilde{W}_2(E)$. □

Inoltre l'energia non-locale W_2 è super-additiva, additiva per insiemi sufficientemente distanti, semicontinua inferiormente e lipschitz-continua rispetto alla convergenza L^1 .

Proposizione 4.2.3. (i) *Siano E, E' tali che $E \cap E' = \emptyset$, allora*

$$W_2^2(E \cup E') \geq W_2^2(E) + W_2^2(E'). \quad (4.7)$$

Quindi, se $E \subset E'$, allora $W_2(E) \leq W_2(E')$.

(ii) *Se esiste $C > 0$ per cui $\text{dist}(E, E') \geq C \max\{|E|^{\frac{1}{d}}, |E'|^{\frac{1}{d}}\}$, allora*

$$W_2^2(E \cup E') = W_2^2(E) + W_2^2(E'). \quad (4.8)$$

(iii) *Sia $(E_n) \subset \mathbb{R}^d$ tale che $E_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1_{loc}} E$, allora*

$$W_2(E) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} W_2(E_n). \quad (4.9)$$

Proposizione 4.2.4. *Esiste $C = C(d) > 0$ tale che per ogni $E, E' \subset \mathbb{R}^d$ si ha*

$$|W_2^2(E) - W_2^2(E')| \leq C \left(|E|^{\frac{2}{d}} + |E'|^{\frac{2}{d}} \right) |E \Delta E'|. \quad (4.10)$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} & \left| \left[\sum_i W_2^2(E^i) \right]^\alpha - \left[\sum_i W_2^2((E')^i) \right]^\alpha \right| \leq \\ & \leq C \max \left\{ \left[\sum_i W_2^2(E^i) \right]^{\alpha-1}, \left[\sum_i W_2^2((E')^i) \right]^{\alpha-1} \right\} \\ & \cdot \left| \sum_i W_2^2(E^i) - \sum_i W_2^2((E')^i) \right|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2 Un problema isoperimetrico 4. Un'applicazione del Trasporto Ottimo

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente segue che, se $|E| < +\infty$, prendendo $R > 0$ in modo che $E \cap B_R \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{L^1} E$, e siccome $W_2(E \cap B_R) \leq W_2(E)$, si ha

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} W_2(E \cap B_R) = W_2(E).$$

Allora possiamo assumere E e E' limitati, e per simmetria dei loro ruoli basta dimostrare che

$$W_2^2(E') - W_2^2(E) \leq C |E'|^{\frac{2}{d}} |E' \setminus E|. \quad (4.12)$$

Riscalando, assumiamo $|E'| = 1$.

Sia F tale che $|E \cap F| = 0$ l'unico minimizzante per (4.1). Esiste una mappa T_E ottima che manda E in F . Chiamiamo $T_F = T_E^{-1}$, allora T_F è una mappa ottima che manda F in E .

Definiamo ora

$$\tilde{F} := F \setminus E', \quad F^- := T_E(E') \cap F$$

e scomponiamo E' in

$$E' = \left(E' \cap T_F(\tilde{F}) \right) \cup \left(E' \setminus T_F(\tilde{F}) \right).$$

Allora $T_E \left(E' \cap T_F(\tilde{F}) \right) = F^-$.

Prendiamo ora $(Q_i)_{i \geq 1}$ una partizione di \mathbb{R}^d in cubi di lato $3^{\frac{1}{d}}$. Si ha

$$\begin{aligned} \left| E - T_F(\tilde{F}) \right| &= |E'| - \left| E' \cap (T_F(\tilde{F})) \right| = \\ &= |E'| - \left| T_E(E' \cap T_F(\tilde{F})) \right| = \\ &= |E'| - |F^-| \leq \\ &\leq |Q_i| - |E' \cap Q_i| - |F^- \cap Q_i|. \end{aligned}$$

Allora esiste $F_i \subset Q_i \cap (E' \cup F^-)^c$ tale che

$$|F_i| = \left| (E' \setminus T_F(\tilde{F})) \cap Q_i \right|,$$

ed esiste T_i ottima che manda $(E' \setminus T_F(\tilde{F})) \cap Q_i$ in F_i .

Definendo

$$F^+ := \bigcup_{i \geq 1} F_i, \quad T^+|_{Q_i} := T_i$$

si ha che

$$\sup_{E' \setminus T_F(\tilde{F})} |T^+ - x| \leq C.$$

Allora, definendo

$$T := \begin{cases} T_E & E' \cap T_F(\tilde{F}) \\ T^+ & E' \setminus T_F(\tilde{F}), \end{cases}$$

concludiamo

$$\begin{aligned} W_2^2(E') - W_2^2(E) &\leq \int_{E' \cap T_F(\tilde{F})} |T_E - x|^2 + \int_{E' \setminus T_F(\tilde{F})} |T^+ - x|^2 + \\ &\quad - \int_E |T_E - x|^2 \leq \\ &\leq \int_{E' \setminus T_F(\tilde{F})} |T^+ - x|^2 \leq \\ &\leq C |E' \setminus T_F(\tilde{F})| \leq \\ &\leq C (|E' \setminus E| + |E \setminus T_F(\tilde{F})|) = \\ &= C (|E' \setminus E| + |E| - |F \setminus E'|) \leq \\ &\leq C (|E' \setminus E| + |E' \cap F|) \leq \\ &\leq C |E' \setminus E|. \end{aligned}$$

□

4.2.2 Sull'esistenza dei minimizzanti

L'obiettivo di questa sezione sarà dimostrare l'esistenza di minimizzanti per il problema isoperimetrico (4.2). Per farlo, utilizziamo i minimizzanti generalizzati, prima definendoli e poi dimostrandone l'esistenza.

Definizione 4.2.5. Si definisce insieme generalizzato un \tilde{E} tale che

$$\tilde{E} = (E^i)_{i \geq 1}, \quad \sum_{i \geq 1} |E^i| = \omega_d.$$

Si dice che \tilde{E} è un minimizzante generalizzato se vale

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}) = \inf \left\{ \tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}') : \sum_{i \geq 1} |(E')^i| = \omega_d \right\}, \quad (4.13)$$

dove è definita l'energia generalizzata

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}) := \sum_{i \geq 1} P(E^i) + \lambda \left[\sum_{i \geq 1} W_2^2(E^i) \right]^\alpha, \quad \lambda, \alpha > 0.$$

Definizione 4.2.6 (Successione uniformemente tight). Una $(u_k) \subset \mathbb{R}^d$ si dice successione uniformemente tight se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K \subset \mathbb{R}^d$ compatto tale che

$$\sup_k |u_k|(\mathbb{R}^d \setminus K) < \varepsilon.$$

Proposizione 4.2.7. Per ogni $d \geq 2, \alpha > 0, \lambda > 0$, esistono minimizzanti generalizzati e vale che

$$\inf \{ \varepsilon_\lambda(E) : |E| = \omega_d \} = \inf \left\{ \tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}) : \sum_i |E^i| = \omega_d \right\}. \quad (4.14)$$

Dimostrazione. Supponiamo che esistano minimizzanti generalizzati per il problema (4.13), dimostriamo che vale (4.14). Sia \tilde{E} un minimizzante generalizzato, allora

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}) = \inf \tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}).$$

Dunque

$$\begin{aligned} \inf \tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}) &= \inf \left\{ \sum_i P(E^i) + \lambda \left[\sum_i W_2^2(E^i) \right]^\alpha \right\} = \\ &= \sum_i P(E^i) + \lambda \left[\sum_i W_2^2(E^i) \right]^\alpha = \\ &= P(\tilde{E}) + \lambda \left[W_2^2(\tilde{E}) \right]^\alpha = \\ &= \inf_{|E|=\omega_d} \varepsilon_\lambda(E). \end{aligned}$$

Dimostriamo l'esistenza: sia $(E_n)_{n \geq 1}$ una successione minimizzante, ossia tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_\lambda(E_n) = \inf \left\{ \tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}) : \sum_i |E^i| = \omega_d \right\}. \quad (4.15)$$

Prendendo B_1 come competitore otteniamo che $\varepsilon_\lambda(E_n)$ è limitata, infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_\lambda(E_n) &= \inf \tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}) = \inf \varepsilon_\lambda(E) \leq \\ &\leq \varepsilon_\lambda(B_1) = P(B_1) + \lambda \left[W_2^2(B_1) \right]^\alpha \leq \\ &\leq C + C\lambda = C(1 + \lambda). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Per ogni n , sia $(Q_{n,i})_{i \geq 1}$ una partizione di \mathbb{R}^d in cubi di lato 2. Il lato dei cubi deve essere abbastanza grande affinché la massa copra meno della metà

del cubo, se no staremmo aggiungendo una parte che prima non c'era.

Definiamo

$$m_{n,i} := |E_n \cap Q_{n,i}|,$$

allora $(m_{n,i})$ è una successione decrescente poiché (E_n) minimizza. Mostriamo che la serie delle potenze concave è controllata, in questo modo la massa non finirà per disperdersi. Per la disuguaglianza isoperimetrica (3.1),

$$\begin{aligned} \sum_i m_{n,i}^{\frac{d-1}{d}} &\leq C \sum_i P(E_n, Q_{n,i}) = \\ &= CP(E_n) \leq \\ &\leq C(1 + \lambda). \end{aligned}$$

Inoltre vale che

$$\sum_i m_{n,i} = \sum_i |E_n \cap Q_{n,i}| = |E_n| = \omega_d.$$

Quindi, poiché per ogni $I \geq 1$ e $i \geq I$ vale

$$m_i \leq m_I \leq \frac{\omega_d}{I},$$

segue che

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq I} m_{n,i} &= \sum_{i \geq I} m_{n,i}^{\frac{1}{d}} \cdot m_{n,i}^{\frac{d-1}{d}} \leq \\ &\leq CI^{-\frac{1}{d}} \sum_{i \geq I} m_{n,i}^{\frac{d-1}{d}} \leq \\ &\leq C(1 + \lambda)I^{-\frac{1}{d}}, \end{aligned}$$

quindi la serie converge. La successione $(m_{n,i})$ è uniformemente tight: ciò significa che non importa quanto lontano ci si sposti lungo la successione, esisterà sempre un compatto che contiene la maggior parte della massa. Allora, a meno di estrarre una sottosuccessione,

$$m_{n,i} \rightarrow m_i, \quad \sum_i m_i = \omega_d.$$

Ora vogliamo costruire \tilde{E} che sia un minimizzante generalizzato. Considerando solo i cubi che contengono massa, prendiamo $z_{n,i} \in Q_{n,i}$ i centri dei cubi per ogni n . Possiamo assumere

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |z_{n,i} - z_{n,j}| = c_{ij}^n \in (0, +\infty], \quad i \neq j, \quad (4.17)$$

$$E_n - z_{n,i} \xrightarrow{L^1_{loc}} E^i. \quad (4.18)$$

4.2 Un problema isoperimetrico 4. Un'applicazione del Trasporto Ottimo

Definiamo la relazione d'equivalenza

$$i \sim j \Leftrightarrow c_{ij}^n < +\infty,$$

e chiamiamo $[i] = \{j : c_{ij}^n < +\infty\}$ le relative classi di equivalenza.

Se $i \sim j$, dalla (4.18) segue che gli insiemi E^i e E^j coincidono a meno di traslazione, infatti $c_{i,j}^n < +\infty$ e si ha:

$$\begin{aligned} E^i &= \lim_n (E_n - z_{n,i}) = \\ &= \lim_n (E_n - z_{n,j} + z_{n,j} - z_{n,i}) = \\ &= \lim_n (E_n - z_{n,j}) + \lim_n (z_{n,j} - z_{n,i}) = \\ &= E^j + c_{i,j}^n. \end{aligned}$$

Inoltre per ogni $j \in [i]$, E^j ha sempre lo stesso volume:

$$\begin{aligned} |E^j| &= \lim_n |E_n - z_{n,j}| = \\ &= \lim_n \sum_{j \in [i]} |E_n \cap Q_{n,j}| = \\ &= \sum_{j \in [i]} \lim_n m_{n,j} = \\ &= \sum_{j \in [i]} m_j =: m_{[i]}. \end{aligned}$$

Allora possiamo assumere che in ogni classe di equivalenza ci sia un unico elemento E^i , poiché abbiamo dimostrato che hanno tutti lo stesso volume e coincidono a meno di traslazione.

Abbiamo così costruito un insieme generalizzato $\tilde{E} = (E^i)_{i \geq 1}$ tale che

$$\sum_{i \geq 1} |E^i| = \sum_{i \geq 1} m_{[i]} = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \in [i]} m_j = \sum_{i \geq 1} m_i = \omega_d.$$

Rimane solo da dimostrare che \tilde{E} minimizza, ossia che vale:

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_\lambda(E_n). \quad (4.19)$$

Siano $I \in \mathbb{N}$, $z_{n,1}, \dots, z_{n,I}$ finiti sono i centri dei cubi $Q_{n,1}, \dots, Q_{n,I}$ tali che valgono (4.17) e (4.18).

Consideriamo le palle $B_{2R}(z_{n,i})$ per ogni i , con $R > 0$ tale che, per n abbastanza grande,

$$\min_{i \neq j} |z_{n,i} - z_{n,j}| \geq 4R;$$

in questo modo le palle hanno al più intersezione di misura nulla. Utilizziamo la formula di Coarea per dimostrare che esiste $R_n \in (R, 2R)$, per ogni n , tale che

$$\sum_{i=1}^I \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_{R_n}(z_{n,i}) \cap E_n) \leq \frac{C}{R}. \quad (4.20)$$

Questo fatto si ottiene definendo

$$d_i(x) := \sum_{i=1}^I |x - z_{n,i}| \cdot \chi_{B_{2R}(z_{n,i})}$$

dove $\|\nabla d_i(x)\| = 1$ perché $d_i(x)$ è somma di funzioni 1-Lip. Riscaldiamo per semplicità il problema al caso $|E_n| = 1$, allora

$$\begin{aligned} 1 = |E_n| &= \int_{E_n} 1 \, dx \geq \\ &\geq \int_{E_n \cap (\cup_i B_i)} \|\nabla d_i(x)\| \, dx = \\ &= \sum_{i=1}^I \int_{E_n \cap B_i} \|\nabla d_i(x)\| \, dx \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^I \int_R^{2R} f_{n,i}(R) \, dx, \end{aligned}$$

dove abbiamo definito

$$f_{n,i}(R) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_R(z_{n,i}) \cap E_n).$$

Se fosse $f_{n,i}(R) > \frac{2}{\#I \cdot R}$ allora

$$\int_R^{2R} f_{n,i}(R) \, dx > \frac{2R - R}{\#I \cdot R} = \frac{1}{\#I}$$

che è assurdo poiché abbiamo ottenuto

$$1 \geq \sum_{i=1}^I \int_R^{2R} f_{n,i}(R) \, dx > \sum_{i=1}^I \frac{1}{\#I} = 1.$$

Allora esisterà $R_n \in (R, 2R)$ tale che

$$f_{n,i}(R_n) \leq \frac{2}{\#I \cdot R},$$

e dunque vale

$$\sum_{i=1}^I f_{n,i}(R) = \sum_{i=1}^I \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_R(z_{n,i}) \cap E_n) \leq \frac{C}{R}.$$

che è proprio la (4.20).

Definendo

$$E^{i,R_n} := (B_{R_n}(z_{n,i}) \cap E_n) - z_{n,i},$$

dalla (4.20) appena provata segue che

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I P(E^{i,R_n}) &= \sum_{i=1}^I P((B_{R_n}(z_{n,i}) \cap E_n) - z_{n,i}) \leq \\ &\leq P(E_n) + \sum_{i=1}^I \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_{R_n}(z_{n,i}) \cap E_n) \leq \\ &\leq P(E_n) + \frac{C}{R}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

e, per la super-additività di W_2 ,

$$\sum_{i=1}^I W_2^2(E^{i,R_n}) = \sum_{i=1}^I W_2^2((B_{R_n}(z_{n,i}) \cap E_n) - z_{n,i}) \leq W_2^2(E_n). \quad (4.22)$$

Dalla (4.21), a meno di estrarre una sottosuccessione, abbiamo che

$$E^{i,R_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^1} E^{i,R}.$$

Questo è vero poiché gli E^{i,R_n} sono equilimitati con perimetri equilimitati e dunque hanno diametri limitati.

Vale anche

$$E^{i,R} \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{L^1} E^i,$$

da cui segue

$$P(E^i) \leq \liminf_{R \rightarrow +\infty} P(E^{i,R}).$$

Per la proposizione 1.2.4 sulla semicontinuità inferiore dei perimetri e per la semicontinuità inferiore di W_2 (4.9), per (4.21) e (4.22), otteniamo

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I P(E^{i,R}) + \lambda \left[\sum_{i=1}^I W_2^2(E^{i,R}) \right]^\alpha \leq \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^I P(E^{i,R_n}) + \lambda \left[\sum_{i=1}^I W_2^2(E^{i,R_n}) \right]^\alpha \leq \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) + \lambda [W_2^2(E_n)]^\alpha + \frac{C}{R}. \end{aligned}$$

Concludiamo mandando $R \rightarrow +\infty$ e poi $I \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}) &= \sum_i P(E^i) + \lambda \left[\sum_i W_2^2(E^i) \right]^\alpha \leq \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (P(E_n) + \lambda [W_2^2(E_n)]^\alpha) = \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_\lambda(E_n). \end{aligned}$$

□

Grazie alla disuguaglianza isoperimetrica (3.1) vale la seguente.

Proposizione 4.2.8. *Per ogni $d \geq 2, \alpha > 0$, esiste $C = C(d, \alpha) > 0$ tale che per ogni $\lambda > 0$*

$$\frac{1}{C}(1 + \lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}} \leq \inf_{|E|=\omega_d} \varepsilon_\lambda(E) \leq C(1 + \lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}}. \quad (4.23)$$

Inoltre, se $\tilde{E} = (E^i)_{i \geq 1}$ è un minimizzante generalizzato, allora

$$\frac{1}{C}(1 + \lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}} \leq \sum_{i \geq 1} P(E^i) \leq C(1 + \lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}}, \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{C}(1 + \lambda)^{-\frac{2}{1+2\alpha}} \leq \sum_{i \geq 1} W_2^2(E^i) \leq C(1 + \lambda)^{-\frac{2}{1+2\alpha}}. \quad (4.25)$$

Consideriamo ora il problema isoperimetrico (4.2) nel caso di un insieme generalizzato senza vincoli sul volume, ossia tale che

$$\sum_{i \geq 1} |E^i| \neq \omega_d.$$

Introduciamo, per $\Lambda > 0$,

$$\tilde{\varepsilon}_{\lambda, \Lambda}(\tilde{E}) := \sum_{i \geq 1} P(E^i) + \lambda \left[\sum_{i \geq 1} W_2^2(E^i) \right]^\alpha + \Lambda \left| \sum_{i \geq 1} |E^i| - \omega_d \right|. \quad (4.26)$$

4.2 Un problema isoperimetrico **4. Un'applicazione del Trasporto Ottimo**

Proposizione 4.2.9. *Per ogni $d \geq 2$, $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, esiste una costante $C = C(d, \alpha) > 0$ tale che se $\Lambda \geq C(1 + \lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}}$, allora ogni minimizzante generalizzato per $\tilde{\varepsilon}_\lambda$ è anche minimizzante senza vincoli sul volume per $\tilde{\varepsilon}_{\lambda, \Lambda}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista \tilde{E} tale che

$$\tilde{\varepsilon}_{\lambda, \Lambda}(\tilde{E}) < \inf_{|E'|=\omega_d} \tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}').$$

Allora, poiché vale la (4.23), sicuramente

$$\Lambda \left| \sum_{i \geq 1} |E^i| - \omega_d \right| \leq C(1 + \lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}}. \quad (4.27)$$

Vogliamo riscalarlo il problema per ottenere un insieme generalizzato il cui volume sia di nuovo ω_d . Per farlo, prendiamo come fattore di scala

$$t := \left(\frac{\omega_d}{\sum_{i \geq 1} |E^i|} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

In questo modo, $t\tilde{E} = (tE^i)_{i \geq 1}$ è un insieme generalizzato per cui vale

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} |tE^i| &= t^d \sum_{i \geq 1} |E^i| = \\ &= \left(\frac{\omega_d}{\sum_{i \geq 1} |E^i|} \right) \cdot \sum_{i \geq 1} |E^i| = \\ &= \omega_d. \end{aligned}$$

Prendiamo per semplicità $i = 1$, allora

$$t = \left(\frac{\omega_d}{|E|} \right)^{\frac{1}{d}} \neq 1.$$

Possiamo scrivere

$$|E| = \omega_d + \delta, \quad \delta \neq 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} t &= \frac{\omega_d^{\frac{1}{d}}}{(\omega_d + \delta)^{\frac{1}{d}}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{\omega_d}\right)^{\frac{1}{d}}} \sim \\ &\sim 1 - \frac{1}{d} \cdot \frac{\delta}{\omega_d} + o(\delta) =: 1 + \varepsilon, \end{aligned}$$

dove per $\Lambda \rightarrow +\infty$ si ha che $\delta \rightarrow 0$ e dunque $\varepsilon \rightarrow 0$.
Questo vale per gli ε tali che

$$|\varepsilon| \leq C\Lambda^{-1}(1+\lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}},$$

poiché dalla definizione di t e dalla (4.27) segue che

$$\begin{aligned} \omega_d \Lambda \left| \frac{|E|}{\omega_d} - 1 \right| &= \omega_d \Lambda \left| \frac{1}{t^d} - 1 \right| \leq C(1+\lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}} \\ \omega_d \Lambda \left| \frac{1}{(1+\varepsilon)^d} - 1 \right| &\leq C(1+\lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}} \end{aligned}$$

e con lo sviluppo di Taylor si conclude che

$$|\varepsilon| \leq \frac{2C}{\omega_d \Lambda d} (1+\lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}} \leq C\Lambda^{-1}(1+\lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}}.$$

Allora, utilizzando alcune proprietà di invarianza di scala per i perimetri e per W_2 , si ha che

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\lambda, \Lambda}(\tilde{E}) &< \tilde{\varepsilon}_{\lambda}(t\tilde{E}) = \\ &= \sum_{i \geq 1} P(tE^i) + \lambda \left[\sum_{i \geq 1} W_2^2(tE^i) \right]^\alpha = \\ &= t^{d-1} \sum_{i \geq 1} P(E^i) + \lambda \left[t^{d+2} \sum_{i \geq 1} W_2^2(E^i) \right]^\alpha = \\ &= t^{d-1} \sum_{i \geq 1} P(E^i) + \lambda t^{(d+2)\alpha} \left[\sum_{i \geq 1} W_2^2(E^i) \right]^\alpha = \\ &= (1+\varepsilon)^{d-1} \sum_{i \geq 1} P(E^i) + \lambda (1+\varepsilon)^{(d+2)\alpha} \left[\sum_{i \geq 1} W_2^2(E^i) \right]^\alpha \end{aligned}$$

Allora otteniamo che

$$\begin{aligned} \Lambda \varepsilon &\leq C(1+\lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}} \leq \\ &\leq C\varepsilon \left(\sum_{i \geq 1} P(E^i) + \lambda \left[\sum_{i \geq 1} W_2^2(E^i) \right]^\alpha \right) \leq \\ &\leq C\varepsilon(1+\lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}}, \end{aligned}$$

e dunque, poiché $\varepsilon \neq 0$,

$$\Lambda \leq C(1+\lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}}.$$

Abbiamo trovato così un assurdo, poiché stiamo mandando $\Lambda \rightarrow +\infty$. \square

4.2 Un problema isoperimetrico 4. Un'applicazione del Trasporto Ottimo

Vogliamo dimostrare che i minimizzanti generalizzati per $\tilde{\varepsilon}_\lambda$ sono anche Λ -minimizzanti per il perimetro.

Definizione 4.2.10 (Λ -minimizzanti per il perimetro). Diciamo che \tilde{E} è un Λ -minimizzante per il perimetro se per ogni $E \subset \mathbb{R}^d$

$$P(E^i) \leq P(E) + \Lambda |E^i \Delta E|, \quad i \geq 1.$$

Dalla proposizione 4.2.9 segue il prossimo risultato.

Proposizione 4.2.11. Per ogni $d \geq 2$, $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, esiste una costante $C = C(d, \alpha) > 0$ tale che se $\Lambda \geq C(1 + \lambda)^{\frac{3}{1+2\alpha}}$, allora ogni minimizzante generalizzato per $\tilde{\varepsilon}_\lambda$ è un Λ -minimizzante per il perimetro.

Dimostrazione. Preso $\Lambda_0 = C(1 + \lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}}$, sappiamo che ogni minimizzante generalizzato per $\tilde{\varepsilon}_\lambda$ è un minimizzante senza vincoli sul volume per $\tilde{\varepsilon}_{\lambda, \Lambda_0}$. Proviamo la tesi per $i = 1$:

$$P(E^1) \leq P(E) + \Lambda |E^1 \Delta E|.$$

Usiamo $E \times (E_i)_{i \geq 2}$ come competitore per $\tilde{\varepsilon}_{\lambda, \Lambda_0}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \geq 1} P(E^i) + \lambda \left[\sum_{i \geq 1} W_2^2(E^i) \right]^\alpha + \Lambda_0 \left| \sum_{i \geq 1} |E^i| - \omega_d \right| \leq \quad (4.28) \\ & \leq P(E) + \sum_{i \geq 2} P(E^i) + \lambda \left[W_2^2(E) + \sum_{i \geq 2} W_2^2(E^i) \right]^\alpha + \Lambda_0 \left| |E| + \sum_{i \geq 2} |E^i| - \omega_d \right|. \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned} & \left| |E| + \sum_{i \geq 2} |E^i| - \omega_d \right| - \left| |E^1| + \sum_{i \geq 2} |E^i| - \omega_d \right| \leq ||E| - |E^1|| = \\ & = ||E \setminus E^1| - |E^1 \setminus E|| = \\ & = |E \setminus E^1| + |E^1 \setminus E| = \\ & = |E^1 \Delta E|, \end{aligned}$$

semplificando $\sum_{i \geq 2} P(E^i)$ in (4.28), troviamo che

$$\begin{aligned} P(E^1) \leq P(E) + \lambda \left(\left[W_2^2(E) + \sum_{i \geq 2} W_2^2(E^i) \right]^\alpha - \left[\sum_{i \geq 1} W_2^2(E^i) \right]^\alpha \right) + \\ + \Lambda_0 |E^1 \Delta E|. \quad (4.29) \end{aligned}$$

Se fosse $W_2^2(E) \leq W_2^2(E^1)$ potremmo concludere direttamente, allora supponiamo $W_2^2(E) \geq W_2^2(E^1)$.

Dalla (4.23) sappiamo che

$$P(E^1) \leq C(1 + \lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}},$$

allora

$$\begin{aligned} |E^1 \Delta E| &\leq C\Lambda_0^{-1}(1 + \lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}} \leq \\ &\leq C(1 + \lambda)^{-\frac{2}{1+2\alpha}} \end{aligned}$$

e

$$|E^1| \leq C.$$

Per la (4.10) vale anche

$$\begin{aligned} W_2^2(E) - W_2^2(E^1) &\leq C \left(|E|^{\frac{2}{\alpha}} + |E^1|^{\frac{2}{\alpha}} \right) |E^1 \Delta E| \leq \\ &\leq C(1 + \lambda)^{-\frac{2}{1+2\alpha}}, \end{aligned}$$

e dunque segue dalla (4.25)

$$\begin{aligned} W_2^2(E) &\leq W_2^2(E^1) + C(1 + \lambda)^{-\frac{2}{1+2\alpha}} \leq \\ &\leq C(1 + \lambda)^{-\frac{2}{1+2\alpha}}. \end{aligned}$$

Per la (4.29) e usando la (4.11), definendo $a := W_2^2(E) + \sum_{i \geq 2} W_2^2(E^i)$ e

$b := \sum_{i \geq 1} W_2^2(E^i)$ per comodità, concludiamo

$$\begin{aligned} P(E^1) &\leq P(E) + \lambda \left(\left[W_2^2(E) + \sum_{i \geq 2} W_2^2(E^i) \right]^\alpha - \left[\sum_{i \geq 1} W_2^2(E^i) \right]^\alpha \right) + \\ &\quad + \Lambda_0 |E^1 \Delta E| \leq \\ &\leq P(E) + \lambda \max \{ a^{\alpha-1}, b^{\alpha-1} \} |a - b| + \Lambda_0 |E^1 \Delta E| = \\ &= P(E) + \lambda \max \{ a^{\alpha-1}, b^{\alpha-1} \} |W_2^2(E) - W_2^2(E^1)| + \Lambda_0 |E^1 \Delta E| \leq \\ &\leq P(E) + C \left(\lambda(1 + \lambda)^{-\frac{2(\alpha-1)}{1+2\alpha}} + (1 + \lambda)^{\frac{1}{1+2\alpha}} \right) |E^1 \Delta E| \leq \\ &\leq P(E) + C(1 + \lambda)^{\frac{3}{1+2\alpha}} |E^1 \Delta E|. \end{aligned}$$

□

4.2 Un problema isoperimetrico 4. Un'applicazione del Trasporto Ottimo

Dunque otteniamo le seguenti stime di densità uniformi per i minimizzanti generalizzati.

Proposizione 4.2.12. *Per ogni $d \geq 2, \alpha > 0, \lambda > 0, \Lambda > 0$, esiste una costante $C = C(d, \alpha) > 0$ tale che se $r < C(1 + \lambda)^{-\frac{3}{1+2\alpha}}$, allora ogni minimizzante generalizzato $\tilde{E} = (E^i)_{i \geq 1}$ per $\tilde{\varepsilon}_\lambda$ soddisfa*

$$|E^i \cap B_r(x)| \geq \frac{\omega_d}{4^d} r^d, \quad i \geq 1, x \in E^i. \quad (4.30)$$

Allora

$$\tilde{E} = (E^i)_{i=1}^I$$

dove gli E^i sono connessi e compatti per ogni i e $\mathcal{H}^{d-1}(\partial E^i) = P(E^i)$. Inoltre, esiste $C = C(d, \alpha) > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^I \text{diam}(E^i) \leq C(1 + \lambda)^{\frac{3(d-1)}{1+2\alpha}}, \quad (4.31)$$

$$\inf_i \text{diam}(E^i) \geq C(1 + \lambda)^{-\frac{3}{1+2\alpha}}. \quad (4.32)$$

e dunque $I \leq C(1 + \lambda)^{\frac{3d}{1+2\alpha}}$.

Osservazione 4.2.13. Sia $E \subset \mathbb{R}^d$ un Λ -minimizzante per il perimetro, allora vale che

$$P(E) \leq P(F) + \Lambda |E \Delta F|, \quad (4.33)$$

se $E \Delta F \subset\subset B_r(x)$, $r > 0$ tale che $\Lambda r < 1$. Vale la disuguaglianza isoperimetrica debole per i Λ -minimizzanti del perimetro:

$$\left(1 - \frac{\Lambda r}{d}\right) P(E, B_r(x)) \leq \left(1 + \frac{\Lambda r}{d}\right) P(F, B_r(x)). \quad (4.34)$$

Infatti, per la (4.33) e per la disuguaglianza isoperimetrica (3.1):

$$\begin{aligned} P(E, B_r(x)) - P(F, B_r(x)) &\leq \Lambda |E \Delta F| \leq \\ &\leq \Lambda |E \Delta F|^{\frac{1}{d}} |E \Delta F|^{\frac{d-1}{d}} \leq \\ &\leq \Lambda (\omega_d r^d)^{\frac{1}{d}} \cdot \frac{P(E \Delta F)}{\omega_d^{\frac{1}{d}} d} = \\ &= \frac{\Lambda r}{d} P(E \Delta F, B_r(x)) \leq \\ &\leq \frac{\Lambda r}{d} (P(E, B_r(x)) + P(F, B_r(x))). \end{aligned}$$

Dimostrazione proposizione 4.2.12. Per provare la prima parte della proposizione sulle stime di densità ci avvaliamo delle proposizioni 4.2.11 e della definizione di Λ -minimizzanti per il perimetro, insieme all'osservazione 4.2.13. Definiamo, per $r > 0$ tale che $\Lambda r < 1$,

$$m(r) := |E^i \cap B_r(x)|, \quad (4.35)$$

allora sicuramente

$$0 < m(r) < |B_r(x)| = \omega_d r^d,$$

e abbiamo

$$m'(r) = \mathcal{H}^{d-1}(E^i \cap \partial B_r(x)).$$

Dalla (4.34), preso $F = E^i \setminus B_r(x)$ e $s > r$, e poi mandando $s \rightarrow r^+$, troviamo

$$\left(1 - \frac{\Lambda r}{d}\right) P(E^i, B_r(x)) \leq \left(1 + \frac{\Lambda r}{d}\right) \mathcal{H}^{d-1}(E^i \cap \partial B_r(x)).$$

Sommando a entrambi i membri il termine $(1 - \frac{\Lambda r}{d}) \mathcal{H}^{d-1}(E^i \cap \partial B_r(x))$ e usando la disuguaglianza isoperimetrica (3.1) otteniamo

$$\begin{aligned} 2\mathcal{H}^{d-1}(E^i \cap \partial B_r(x)) &\geq \left(1 - \frac{\Lambda r}{d}\right) (P(E^i, B_r(x)) + \mathcal{H}^{d-1}(E^i \cap \partial B_r(x))) = \\ &= \left(1 - \frac{\Lambda r}{d}\right) P(E^i \cap B_r(x)) \geq \\ &\geq \frac{d\omega_d^{\frac{1}{d}} |E^i \cap B_r(x)|^{\frac{d-1}{d}}}{2}. \end{aligned}$$

Dunque dalla definizione di $m(r)$ (4.35), si ha

$$2m'(r) \geq \frac{d\omega_d^{\frac{1}{d}} m(r)^{\frac{d-1}{d}}}{2},$$

ossia

$$\frac{m'(r)}{m(r)^{\frac{d-1}{d}}} \geq \frac{d\omega_d^{\frac{1}{d}}}{4}.$$

Integrando tra 0 e r quest'ultima disuguaglianza, con $\frac{d-1}{d}$ potenza concava,

$$\int_0^r \frac{m'(t)}{m(t)^{\frac{d-1}{d}}} dt \geq \frac{d\omega_d^{\frac{1}{d}}}{4} \int_0^r 1 dt = r \frac{d\omega_d^{\frac{1}{d}}}{4},$$

dove

$$\int_0^r \frac{m'(t)}{m(t)^{\frac{d-1}{d}}} dt = \int_{m(0)}^{m(r)} \frac{d\bar{m}}{\bar{m}^{\frac{d-1}{d}}} = m(r)^{\frac{d-1}{d}}.$$

Possiamo concludere che

$$m(r) \geq \frac{\omega_d r^d}{4^d}.$$

Dimostriamo ora che gli E^i sono connessi e compatti. Possiamo identificare

$$E^i = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \liminf_{r \rightarrow 0} |E^i \cap B_r(x)| > 0 \right\},$$

gli E^i risultano chiusi poiché vale (4.30) e

$$\begin{aligned} P(E^i) &= |D\chi_{E^i}|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega \cap E^i} \operatorname{div}(g) : g \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^d), \|g\| \leq 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega \cap \partial E^i} \langle g, \nu \rangle d\mathcal{H}^{d-1} \right\} = \mathcal{H}^{d-1}(\partial E^i). \end{aligned}$$

Inoltre, possiamo assumere che siano connessi. Infatti, supponendo che E^1 abbia due componenti connesse $E^{1,1}$ e $E^{1,2}$ abbastanza lontane, allora per la superadditività di W_2 (4.7)

$$W_2^2(E^1) = W_2^2(E^{1,1} \cup E^{1,2}) > W_2^2(E^{1,1}) + W_2^2(E^{1,2})$$

e

$$P(E^1) = P(E^{1,1}) + P(E^{1,2}).$$

Dunque starei perdendo massa e quindi l'insieme generalizzato \tilde{E} non sarebbe più minimizzante.

Supponiamo che gli E^i non siano compatti. La connessione implica la connessione per archi, allora se gli E^i non fossero compatti dovrebbe esistere una curva infinita di punti di E^i , per ogni i . Sia $x \in E^i$, per le stime di densità vale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} C r^d \leq \sum_{i=1}^{\infty} |E^i \cap B_r(x)| \leq |\tilde{E}|$$

allora risulterebbe $|\tilde{E}| = +\infty$, che è assurdo. \square

Ora abbiamo tutto il necessario per concludere.

Teorema 4.2.14. *Per ogni $d \geq 2, \alpha > 0, \lambda > 0$, esistono minimizzanti per il problema isoperimetrico (4.2).*

Inoltre, esiste $C > 0$ tale che se $E = \bigcup_{i=1}^I E^i$ è un minimizzante per $\tilde{\varepsilon}_\lambda$ dove E^i sono componenti connesse di E , allora

$$\sum_{i=1}^I \text{diam}(E^i) \leq C(1 + \lambda)^{\frac{3(d-1)}{1+2\alpha}},$$

$$\inf_i \text{diam}(E^i) \geq C(1 + \lambda)^{-\frac{3}{1+2\alpha}}.$$

Dunque $I \leq C(1 + \lambda)^{\frac{3d}{1+2\alpha}}$.

Dimostrazione. Per la proposizione 4.2.7 vale

$$\inf_{|E|=\omega_d} \varepsilon_\lambda(E) = \sum_i P(E^i) + \lambda \left[\sum_i W_2^2(E^i) \right]^\alpha. \quad (4.36)$$

Dalla proposizione 4.2.12 con $R = C(1 + \lambda)^{\frac{3(d-1)}{1+2\alpha}}$, $C > 0$, segue

$$\tilde{E} := (E^i)_{i=1}^I, \quad \sum_i \text{diam}(E^i) \leq CR$$

con gli E^i connessi e compatti.

Definendo

$$E := \bigcup_{i=1}^I (E^i + Rie_1)$$

dove (e_1, \dots, e_d) è la base canonica di \mathbb{R}^d , dall'additività di W_2 per insiemi sufficientemente distanti (4.8) segue

$$W_2^2(E) = \sum_{i=1}^I W_2^2(E^i)$$

e inoltre

$$P(E) = \sum_{i=1}^I P(E^i).$$

Dunque, dalla (4.36),

$$\begin{aligned} \inf \tilde{\varepsilon}_\lambda(\tilde{E}) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^I P(E^i) + \lambda \left[\sum_{i=1}^I W_2^2(E^i) \right]^\alpha \right\} = \\ &= \inf \{ P(E) + \lambda [W_2^2(E)]^\alpha \} \\ &= \inf_{|E|=\omega_d} \varepsilon_\lambda(E). \end{aligned}$$

□

4.2.3 Sulla minimalità delle palle per λ piccolo

In questa ultima sezione vediamo che, per λ sufficientemente piccolo, gli unici minimizzanti del problema isoperimetrico (4.2) sono le palle. Qui noteremo un legame del problema isoperimetrico con la teoria del trasporto ottimo descritta nel Capitolo 2, in particolare useremo la formulazione duale e i potenziali di Kantorovich.

Enunciamo una proposizione secondo cui ogni minimizzante, a meno di traslazioni, è una $C^{1,\gamma}$ perturbazione della palla B_1 , ma non dimostriamo tale regolarità.

Definizione 4.2.15. Diciamo che $E \subset \mathbb{R}^d$ è una $C^{1,\gamma}$ perturbazione della palla B_1 , o che E è *quasi sferico*, se il suo baricentro è in 0 ed esiste una funzione $f : \partial B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ con $\|f\|_{C^{1,\gamma}} \leq \varepsilon$ tale che

$$\partial E = \{(1 + f(x))x : x \in \partial B_1\}.$$

Proposizione 4.2.16. Per ogni $d \geq 2, \alpha > 0, \gamma \in (0, \frac{1}{2}), \varepsilon > 0$, esiste $\lambda_0 = \lambda_0(d, \alpha, \gamma, \varepsilon)$ tale che per ogni $\lambda \leq \lambda_0$, a meno di traslazioni, ogni minimizzante del problema isoperimetrico (4.2) è quasi sferico.

Osservazione 4.2.17. Il matematico danese Bent Fuglede nello studio del problema isoperimetrico in [8] ha dimostrato che per insiemi E quasi sferici esiste $C = C(d) > 0$ tale che

$$\int_{\partial B_1} f^2 \leq C(P(E) - P(B_1)). \quad (4.37)$$

Enunciamo due lemmi che ci saranno utili per trovare un controllo per l'energia non locale.

Lemma 4.2.18. Sia $A := B_{2^{\frac{1}{d}}} \setminus B_1$ un anello di volume ω_d intorno alla palla B_1 . Allora A è minimizzante di W_2 per B_1 .

Inoltre,

$$T(x) = \left(1 + |x|^d\right)^{\frac{1}{d}} \cdot \frac{x}{|x|} \quad (4.38)$$

è una mappa di trasporto ottima da B_1 ad A . I corrispondenti potenziali di Kantorovich (φ, ψ) sono localmente lipschitz-continui, radialmente simmetrici e ψ è crescente.

Dimostrazione. Per la proposizione 4.2.2, esiste ed è unico F minimizzante del problema (4.1) per B_1 :

$$W_2(B_1) = \inf_{|F \cap B_1|=0} W_2(B_1, F).$$

Sia R una rotazione qualsiasi di \mathbb{R}^d , vale che

$$W_2(B_1, F) = W_2(R(B_1), R(F)) = W_2(B_1, R(F)).$$

Allora $R(F)$ è un minimizzante di (4.1), e poiché il minimizzante è unico

$$F = R(F),$$

ossia F è radialmente simmetrico. Tra gli insiemi radialmente simmetrici, il minimizzante è l'anello $A = B_{2^{\frac{1}{d}}} \setminus B_1$.

Dimostriamo ora che T definita in (4.38) è una mappa ottima di trasporto tra B_1 e A , e che i potenziali di Kantorovich (φ, ψ) associati sono radialmente simmetrici e ψ è crescente.

La mappa T definita in (4.38) è radialmente simmetrica ed è tale che

$$T(x) = \left(1 + |x|^d\right)^{\frac{1}{d}} \cdot \frac{x}{|x|} = f(|x|) \cdot \frac{x}{|x|}.$$

Inoltre, $\det(\nabla T) = 1$ e $f(0) = 1$. Presa $f(r) = (1 + r^d)^{\frac{1}{d}}$, essa è monotona su \mathbb{R}^+ :

$$r_1 < r_2 \Rightarrow f(r_1) < f(r_2),$$

allora f è c -ciclicamente monotona su \mathbb{R}^+ . Siano x_1, \dots, x_N tali che $x_0 = x_N$, per la c -ciclica monotonia di f anche T è c -ciclicamente monotona rispetto al costo quadratico $c(x, y) = |x - y|^2$. Infatti,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |T(x_i) - x_i|^2 &= \sum_{i=1}^N \left| f(|x_i|) \frac{x_i}{|x_i|} - x_i \right|^2 = \sum_{i=1}^N |f(|x_i|) - |x_i||^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N |f(|x_{i-1}|) - |x_i||^2 = \sum_{i=1}^N \left| f(|x_{i-1}|) \frac{x_{i-1}}{|x_{i-1}|} - x_i \right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N |T(x_{i-1}) - x_i|^2. \end{aligned}$$

Dunque T è una mappa ottima per il trasporto da B_1 ad A .

Dal teorema 2.5.7, per $c(x, y) = h(x - y) = |x - y|^2$, il potenziale di Kantorovich φ è tale che:

$$T(x) = x - (\nabla h)^{-1}(\nabla \varphi(x)).$$

Da qui,

$$\begin{aligned}\nabla\varphi(x) &= \nabla|x - T(x)|^2 = \\ &= 2|x - T(x)| \cdot \left(-\frac{x}{|x|}\right) = \\ &= -2|T(x) - x| \cdot \frac{x}{|x|} = \\ &= \varphi'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|},\end{aligned}$$

per cui φ è radialmente simmetrica e decrescente. Risulta anche ψ radialmente simmetrica poiché φ e ψ sono c -trasformate l'una dell'altra essendo i potenziali di Kantorovich per il trasporto da B_1 ad A , ossia vale

$$\psi(y) = \inf_x (|x - y|^2 - \varphi(x)). \quad (4.39)$$

In un modo analogo a quello usato per dimostrare che φ è decrescente, si prova che ψ è crescente su B_1^C . Vale di più, ψ è crescente su tutto \mathbb{R}^d .

Vediamo cosa succede all'interno della palla B_1 : troveremo che l'estremo inferiore in (4.39) si ottiene per $x = 0$ se $y \in B_1$. Infatti,

- se $y \in \partial B_1$, $T^{-1}(y) = 0$ per cui

$$\varphi(0) + \psi(y) = |y|^2.$$

Poiché φ è decrescente, x ottimo è tale che $|x| \leq |y|$.

- se $y \in B_1$, definiamo $\bar{y} := \frac{y}{|y|} \in \partial B_1$. Usiamo x come competitore per \bar{y} in (4.39):

$$\begin{aligned}\psi(\bar{y}) &= 1 - \varphi(0) \leq \\ &\leq |\bar{y} - x|^2 - \varphi(x) \leq \\ &\leq (1 - |x|)^2 - \varphi(x),\end{aligned}$$

da cui

$$1 - (1 - |x|)^2 \leq \varphi(0) - \varphi(x). \quad (4.40)$$

Usando $x = 0$ come competitore per y in (4.39):

$$\begin{aligned}\psi(y) &= (|y| - |x|)^2 - \varphi(x) \leq \\ &\leq |0 - y|^2 - \varphi(0) = \\ &= |y|^2 - \varphi(0),\end{aligned}$$

da cui

$$\varphi(0) - \varphi(x) \leq |y|^2 - (|y| - |x|)^2. \quad (4.41)$$

Allora, da (4.40) e (4.41), troviamo

$$1 - (1 - |x|)^2 \leq |y|^2 - (|y| - |x|)^2,$$

che è vera solo per $x = 0$, con $t \mapsto t^2 - (t - |x|)^2$ crescente in $[|x|, +\infty)$.

□

Lemma 4.2.19. *Siano ψ radialmente simmetrica e crescente, $E \subset B_{\frac{1}{2^d}}$ con $|E| = \omega_d$. Allora*

$$\inf_F \left\{ \int_F \psi : |F \cap E| = 0, |F| = \omega_d \right\} = \int_{B_{\frac{1}{2^d}} \setminus E} \psi. \quad (4.42)$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa su un semplice argomento geometrico. Sia E tale che $|E| = |B_r|$, poiché la funzione ψ è radialmente crescente allora

$$\inf_{B_r \setminus E} \psi \geq \psi(r) \geq \sup_{E \setminus B_r} \psi.$$

Siccome $|E \setminus B_r| = |B_r \setminus E|$, si ha

$$\int_E \psi - \int_{B_r} \psi = \int_{E \setminus B_r} \psi - \int_{B_r \setminus E} \psi \geq 0,$$

ovvero

$$\int_E \psi \geq \int_{B_r} \psi. \quad (4.43)$$

Inoltre, per ogni F tale che $|E \cap F| = 0$ e $|F| = |E| = \omega_d$, segue che

$$|E \cup F| = |E| + |F| = 2\omega_d = \left| B_{\frac{1}{2^d}} \right|,$$

allora possiamo concludere

$$\begin{aligned} \int_F \psi &= \int_{E \cup F} \psi - \int_E \psi \geq \\ &\geq \int_{B_{\frac{1}{2^d}}} \psi - \int_E \psi = \\ &= \int_{B_{\frac{1}{2^d}} \setminus E} \psi. \end{aligned}$$

□

4.2 Un problema isoperimetrico 4. Un'applicazione del Trasporto Ottimo

Proposizione 4.2.20. *Per ogni $d \geq 2, \alpha > 0$, esiste $C = C(d, \alpha) > 0$ tale che per ogni $E \subset \mathbb{R}^d$ quasi sferico*

$$[W_2^2(B_1)]^\alpha - [W_2^2(E)]^\alpha \leq C \int_{\partial B_1} f^2. \quad (4.44)$$

Dimostrazione. Supponiamo $W_2^2(B_1) \geq W_2^2(E)$. Se fosse $W_2^2(B_1) \leq W_2^2(E)$, poiché la palla minimizza anche il perimetro, non avremmo nulla da dimostrare.

Dalla (4.11) segue che ci basta provare la (4.44) per $\alpha = 1$:

$$W_2^2(B_1) - W_2^2(E) \leq C \int_{\partial B_1} f^2. \quad (4.45)$$

Siano (φ, ψ) i potenziali di Kantorovich associati a $W_2(B_1, A)$, dove l'anello $A = B_{\frac{1}{2}} \setminus B_1$ è minimizzante per il lemma 4.2.18. Sappiamo inoltre che ψ è radialmente simmetrica e crescente.

Siccome per ipotesi E è quasi sferico, possiamo assumere

$$E \subset B_{\frac{1}{2}}.$$

Per ogni F competitore per $W_2(E)$, per il teorema della dualità di Kantorovich 2.3.1:

$$W_2^2(E, F) \geq \int_E \varphi + \int_F \psi.$$

Prendendo l'estremo inferiore su F , con $|E \cap F| = 0$ e $|F| = \omega_d$, per definizione dell'energia non-locale e per la (4.42), otteniamo

$$\begin{aligned} W_2^2(E) &\geq \int_E \varphi + \inf_F \left\{ \int_F \psi : |F \cap E| = 0, |F| = \omega_d \right\} \geq \\ &\geq \int_E \varphi + \int_{B_{\frac{1}{2}} \setminus E} \psi. \end{aligned}$$

Dunque, poiché $\varphi - \psi$ è decrescente e preso $c = \varphi(1) - \psi(1)$ il valore di $\varphi - \psi$ sul bordo della palla B_1 , usando il fatto che φ e ψ sono localmente lipschitz-continue e un teorema di decomposizione degli integrali, possiamo

concludere

$$\begin{aligned}
W_2^2(B_1) - W_2^2(E) &\leq \int_{B_1} \varphi + \int_A \psi - \int_E \varphi - \int_{B_{\frac{1}{2^d}} \setminus E} \psi = \\
&= \int_{B_1 \setminus E} \varphi + \int_{A \cap E} \psi - \int_{E \setminus B_1} \varphi - \int_{(B_{\frac{1}{2^d}} \setminus E) \setminus B_1} \psi = \\
&= \int_{B_1 \setminus E} (\varphi - \psi) - \int_{E \setminus B_1} (\varphi - \psi) = \\
&= \int_{B_1 \setminus E} [(\varphi - \psi) - c] - \int_{E \setminus B_1} [(\varphi - \psi) - c] = \\
&= \int_{B_1 \setminus E} |(\varphi - \psi) - c| + \int_{E \setminus B_1} |(\varphi - \psi) - c| = \\
&= \int_{B_1 \Delta E} |(\varphi - \psi) - c| \leq C \int_{B_1 \Delta E} |1 - |x|| \leq \\
&\leq C \int_{\partial B_1} \int_0^{f(x)} t \, dt \, d\mathcal{H}^{d-1}(x) \leq \\
&\leq C \int_{\partial B_1} f^2.
\end{aligned}$$

□

Possiamo ora dimostrare il risultato conclusivo.

Teorema 4.2.21. *Per ogni $d \geq 2, \alpha > 0, \lambda > 0$, esiste $\lambda_0 > 0$ tale che, per ogni $\lambda \leq \lambda_0$, gli unici minimizzanti per il problema isoperimetrico (4.2) sono le palle.*

Dimostrazione. Per la proposizione 4.2.16, se λ è sufficientemente piccolo, ogni minimizzante E del problema isoperimetrico (4.2) è *quasi* sferico. Allora, in seguito all'osservazione 4.2.17, usando B_1 come competitore per ε_λ e per la proposizione 4.2.20, troviamo

$$\int_{\partial B_1} f^2 \leq C (P(E) - P(B_1)) \leq C \lambda ([W_2^2(B_1)]^\alpha - [W_2^2(E)]^\alpha) \leq C \lambda \int_{\partial B_1} f^2.$$

Quindi, per λ sufficientemente piccolo, $f = 0$ e dunque $\partial E \equiv \partial B_1$. Concludiamo

$$E \equiv B_1,$$

cioè gli unici minimizzanti per il problema isoperimetrico (4.2) con λ piccolo sono le palle. □

4.2 Un problema isoperimetrico 4. Un'applicazione del Trasporto Ottimo

Bibliografia

- [1] Villani, C., *Topics in Optimal Transportation*, American Mathematical Society, Providence, RI, 58 (2003), xvii+370 pp.
- [2] Santambrogio, F., *Optimal transport for applied mathematicians*, Birkhäuser/Springer, Cham, 87 (2015), xxvii+353 pp.
- [3] Ambrosio, L.; Gigli, N., *A user's guide to optimal transport*, Springer, Heidelberg, 2062 (2013), 1–155 pp.
- [4] Benamou, J.; Brenier, Y., *A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Numerische Mathematik, 84 (2000), 375–393 pp.
- [5] Peletier, M. A.; Röger, M., *Partial localization, lipid bilayers, and the elastic functional*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 193 (2009), 475–537 pp.
- [6] Candau-Tilh, J.; Goldman, M., *Existence and stability results for an isoperimetric problem with a non-local interaction of Wasserstein type*, ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations, 28 (2022), Paper No. 37, 20 pp.
- [7] Monge, G., *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, (1781).
- [8] Fuglede, B., *Stability in the isoperimetric problem for convex or nearly spherical domains in \mathbb{R}^n* , Transactions of the American Mathematical Society, 314 (1989), 619–638 pp.
- [9] Maggi, F., *Sets of finite perimeter and geometric variational problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 135 (2012), xx+454 pp.