

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**CARATTERIZZAZIONE DELLA  
NASCITA DI STATI  
CONGESTIONATI IN UNA RETE  
STRADALE**

Relatore: **Prof. Armando Bazzani**                      Presentata da: **Enrico Lenzi**

Correlatore:  
**Dott. Lorenzo Di Meo**

Anno Accademico 2022/2023

## Abstract

Lo studio qui presentato si propone di studiare il comportamento di una rete di trasporto al variare del carico su di essa. Verrà posta particolare attenzione nell'individuare un osservabile, ossia la fluttuazione dello stato di singolo nodo, come indicatore dell'insorgere di fenomeni di congestione nell'intera rete. Per ottenere questo risultato ci siamo proposti di simulare un modello di random walk su una rete di trasporto randomica e simulare su di essa una dinamica sincrona e una dinamica asincrona. Le strade del *network* sono dotate di una capacità e una capacità di trasporto finite. Sono state implementate misure per rilevare la differenza fra gli stati di rete, così da determinare dopo quanto tempo viene raggiunto lo stato stazionario, misure sulla distribuzione di probabilità della densità dei nodi (che per brevità chiameremo  $\rho$ ), così da determinarla allo stato stazionario per vari livelli di carico, misure di flusso, così da determinare l'andamento del flusso per diversi livelli di carico, e infine misure sulla fluttuazione dello stato di singolo nodo. Dalle simulazioni abbiamo concluso che le deviazioni sullo stato di singolo nodo sono un buon indicatore dell'insorgere di fenomeni di congestione perché assumono il loro valore massimo proprio quando i nodi della rete cominciano a congestionarsi. Viene anche osservata un'analogia fra l'andamento della fluttuazione dello stato dei singoli nodi e quello della fluttuazione della distribuzione di probabilità di  $\rho$ , e ciò suggerisce che sia possibile determinare lo stato dell'intera rete solo esaminando una ristretta collezione di nodi. Sono comunque necessari ulteriori studi per confermare del tutto questa conclusione poiché i dati estrapolati dalle simulazioni risultano incompatibili coi dati reali e perché il modello simulato non prende in considerazione le dinamiche di interazione tra i veicoli presenti nella stessa strada.

# Indice

<b>1</b>	<b>Teoria dei Grafi</b>	<b>8</b>
1.1	La Matrice di Adiacenza . . . . .	9
1.2	Grado . . . . .	9
1.3	Percorsi . . . . .	11
1.4	Componenti . . . . .	12
1.5	Laplaciana di un Grafo . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Teoria e Dinamica di una rete di Trasporto</b>	<b>15</b>
2.1	Random Walk . . . . .	15
2.2	Master Equation . . . . .	15
2.3	Funzione di Flusso . . . . .	16
2.4	Studio degli Stati Stazionari . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Metodologie e Strumenti Usati</b>	<b>20</b>
3.1	Generazione del grafo . . . . .	20
3.2	Componenti nel Grafo Random . . . . .	23
3.3	Creazione della matrice di transizione . . . . .	26
3.4	Dinamica Sincrona e Asincrona . . . . .	28
3.5	Implementazione del Random Walk . . . . .	28
3.6	Misure Effettuate . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Risultati</b>	<b>32</b>
4.1	Misure Preliminari . . . . .	32
4.2	Misura delle fluttuazioni . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>43</b>

## Elenco delle figure

1	Semplice esempio di grafo adimensionale. . . . .	8
2	Matrice di adiacenza di un grafo composto da più componenti, presa dal riferimento [8] . . . . .	13
3	Soluzione grafica per l'equazione (47) presa dal riferimento [8]	25
4	Andamento delle variazioni per livello di carico uguale a 8 veicoli per nodo, con dinamica sincrona. . . . .	33
5	Distribuzione di probabilità di $\rho$ per un livello di carico pari a 5 veicoli per nodo, con dinamica asincrona. . . . .	34
6	Distribuzione di probabilità di $\rho$ per un livello di carico pari a 5 veicoli per nodo, con dinamica sincrona. . . . .	35
7	Distribuzione di probabilità di $\rho$ per un livello di carico pari a 10 veicoli per nodo, con dinamica asincrona. . . . .	35
8	Distribuzione di probabilità di $\rho$ per un livello di carico pari a 10 veicoli per nodo, con dinamica sincrona. . . . .	36
9	Distribuzione di probabilità di $\rho$ per un livello di carico pari a 15 veicoli per nodo, con dinamica asincrona. . . . .	36
10	Distribuzione di probabilità di $\rho$ per un livello di carico pari a 15 veicoli per nodo, con dinamica sincrona. . . . .	37
11	Andamento del flusso in funzione del livello di carico, con capacità delle strade fissata a 20 e dinamica asincrona. . . . .	38
12	Andamento del flusso in funzione del livello di carico, con capacità delle strade fissata a 20 e dinamica sincrona. . . . .	38
13	Andamento delle fluttuazioni in funzione del livello di carico imposto sulla rete, con dinamica asincrona. . . . .	39
14	Andamento delle fluttuazioni in funzione del livello di carico imposto sulla rete, con dinamica sincrona. . . . .	40

15	Valori delle deviazioni per carico a 5 (a) e a 15 (b), nel caso asincrono. . . . .	42
16	Valori delle deviazioni per carico a 5 (a) e a 15 (b), nel caso sincrono. . . . .	42

## Introduzione

La gestione del traffico e delle sue congestioni è una delle maggiori questioni nella pianificazione e sviluppo dei centri urbani moderni. Le difficoltà che derivano da una amministrazione negligente sono tante e varie, da questioni di natura economica a problemi riguardanti il benessere e la salute dei cittadini. L'impatto che il rallentamento del traffico ha sull'economia viene studiato con crescente preoccupazione. Ad esempio è stato stimato che le perdite economiche date dall'allungamento dei tempi di viaggio (e dello spreco relativo di carburante) in Florida, si aggirano attorno a \$78.2 miliardi solo nel 2005 [2]. Uno studio effettuato su un campione di pendolari di Bangalore ha dimostrato che la congestione del traffico influenza negativamente le rendite e performance degli individui. Le esperienze negative subite nel mezzo del traffico si riversano sul luogo di lavoro causando incidenti e tensioni che altrimenti non si verificherebbero [3]. Ci sono poi problematiche riguardanti l'inquinamento dell'aria: uno studio compiuto nella città di Pechino ha dimostrato che una congestione del traffico porta a un immediato aumento di  $NO_2$  e  $CO$  nell'aria, insieme a un aumento dilazionato delle concentrazioni di  $PM_{2.5}$  e  $PM_{10}$ , i.e. polveri sottili [9]. Infine è stato dimostrato che l'inquinamento dell'aria derivante dal rallentamento del traffico nella California centrale è associato con un aumento del rischio di contrarre il morbo di Parkinson [6].

Questo è un problema complesso, perché sono tanti i fattori in gioco. Tra questi possiamo annoverare le sempre diverse caratteristiche strutturali delle reti urbane, oltre che il fattore umano (e psicologico), che determina la scelta delle destinazioni, dei percorsi da intraprendere e del comportamento alla guida.

In questa tesi ci occuperemo di studiare il comportamento di una rete di trasporto al variare del carico, in particolare lo sviluppo di congestioni in essa. La rete in cui si muoveranno i veicoli trova le sue fondamenta teoriche nella teoria dei grafi. Sugli agenti dispersi in essa sarà imposta una dinamica di Random Walk: i veicoli si muoveranno randomicamente tra una strada e le sue circostanti secondo determinate probabilità. Nonostante la sua semplicità, questo tipo di dinamica è sicuramente una prima naturale approssimazione del caso reale. Ci sono molti esempi (una lista esaustiva richiederebbe un lavoro a sé) di Random Walk su grafo: un primo esempio può essere il moto Browniano, ossia il moto di una particella di polvere in una stanza [7]. È nota da tempo anche la connessione tra questo processo stocastico e il flusso elettrico [4]. In generale tutti i modelli della meccanica statistica possono essere visti come Random Walks sull'insieme degli stati [7]. Tornando alla rete di trasporto, le strade sono dotate di una capacità finita: quando la popolazione di una strada raggiunge la sua capacità massima, allora la strada non potrà accettare nuovi veicoli. Un osservabile che potrebbe caratterizzare l'insorgere di fenomeni di congestione è la misura delle fluttuazioni della popolazione dei singoli nodi. Questa grandezza aumenterà man mano che il carico sulla rete aumenta e il suo massimo verrà raggiunto nella regione di carico corrispondente alla metà del carico massimo consentito. In seguito diminuirà fino a raggiungere un minimo locale proprio nel punto corrispondente al carico massimo.

Nel primo capitolo verrà fornita una carrellata di utili definizioni riguardanti la teoria dei grafi. Nel secondo parleremo invece della teoria delle reti di trasporto. Nel terzo capitolo verranno trattate le metodologie implementate per poter effettuare le simulazioni e infine nel quarto verranno passati in rassegna i risultati delle misurazioni.

I codici e i grafici dedicati sono reperibili alla repository Github: [https://github.com/enricole/Congestion\\_on\\_transp\\_network](https://github.com/enricole/Congestion_on_transp_network).

# 1 Teoria dei Grafi

Una rete, anche chiamata grafo nella letteratura matematica, è fondamentalmente un insieme di vertici collegati da archi. Nel nostro caso i vertici saranno chiamati nodi e gli archi saranno connessioni (dall'inglese *links*). Denoteremo con  $n$  il numero di vertici nella rete, con  $m$  il numero di archi. Nel raro caso in cui ci fossero più collegamenti fra la stessa coppia di nodi, parleremo di multiarco (propriamente *multiedge*). Un'altra sporadica occorrenza consiste nella presenza di auto-collegamenti (dall'inglese *self-loops*), ossia archi che collegano un nodo a sé stesso. Una rete in cui non sono presenti *multiedges* o *self-loops* è detta semplice [8]. Per concludere questa preliminare carrellata di definizioni, chiamiamo grado o connettività il numero di vicini (nodi collegati a un determinato vertice). Subito sotto è mostrato un esempio di grafo.

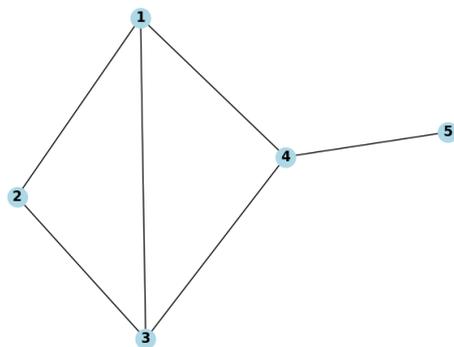


Figura 1: Semplice esempio di grafo adimensionale.

Una schematica rappresentazione di un *network* di trasporto è costruita utilizzando grafi in cui i nodi ( $i = 1, \dots, n$ ) sono le strutture di trasporto (come strade, stazioni o aeroporti) e gli archi distribuiscono il traffico tra i nodi. Su una rete di questo tipo sarà possibile applicare una dinamica

stocastica e i veicoli, altresì detti agenti oppure particelle, dispersi in essa si muoveranno secondo un *Random Walk* (vedi 2.1). L'argomento verrà trattato in dettaglio nel secondo capitolo.

## 1.1 La Matrice di Adiacenza

Consideriamo un grafo adirezionale con  $n$  vertici, etichettati in ordine crescente con  $1, \dots, n$  e  $m$  *links*, così da poterne assicurare l'unicità. Se chiamiamo l'arco che collega la coppia di nodi  $i$  e  $j$  come  $(i, j)$ , allora una prima elementare ma completa modalità di rappresentazione della rete consisterà nello stilare una lista di tutti gli archi presenti (chiamata proprio *edge list*). Benché intuitiva questo tipo di rappresentazione risulta infruttuosa per gli sviluppi matematici che verranno riportati più avanti.

Una modalità che invece avrà più fortuna è la *matrice di adiacenza*, definita come segue per un grafo semplice:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se esiste un arco tra i nodi } i \text{ e } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

Si può notare a prima vista che in un grafo semplice l'assenza di *self-loops* renda tutti gli elementi diagonali nulli, e come l'adirezionalità del grafo determini la simmetria della matrice di adiacenza associata, dal momento che l'esistenza di un collegamento tra  $i$  e  $j$  è bilaterale e comporta quindi l'esistenza di una connessione fra  $j$  e  $i$ .

## 1.2 Grado

Il grado di un vertice in un grafo è il numero di archi connessi ad esso. Denoteremo con  $k_i$  il grado del nodo  $i$ . Per un grafo adirezionale di  $n$  vertici

il grado può essere scritto in termini della matrice di adiacenza come:

$$k_i = \sum_{j=1}^m A_{ij} \quad (2)$$

Ogni connessione in un grafo adirezionale ha due estremi, se in totale ci sono  $m$  archi allora avremo  $2m$  estremi. Ma il numero di estremi è uguale anche alla somma di tutti i gradi dei nodi, quindi:

$$2m = \sum_{i=1}^n k_i, \quad (3)$$

oppure:

$$m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i = \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n A_{ij} \quad (4)$$

Definiamo ora il grado medio di un vertice come:

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \quad (5)$$

Che in combinazione con l'equazione (3) restituisce:

$$c = \frac{2m}{n} \quad (6)$$

In un grafo semplice, il numero massimo di archi è dato dal coefficiente binomiale  $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ , ossia il numero di possibili combinazioni in cui è possibile formare coppie di nodi (collegati da un *link*) da un collezione di  $n$  vertici. Possiamo quindi definire la *densità*  $\rho_k$  come la frazione di questi archi che è effettivamente presente nel grafo:

$$\rho_k = \frac{m}{\binom{n}{2}} = \frac{2m}{n(n-1)} = \frac{c}{n-1}, \quad (7)$$

in cui ci siamo serviti dell'equazione (6) per sviluppare l'identità. Questa densità assume valori compresi tra  $0 \leq \rho_k \leq 1$ . Inoltre se il grafo è sufficientemente grande possiamo approssimare la densità:

$$\rho_k = \frac{c}{n} \quad (8)$$

Una rete per cui la densità tende ad una costante per  $n \rightarrow \infty$  è detto *denso*. In un tale *network* la frazione di elementi non-nulli nella matrice di adiacenza rimane costante all'aumentare di  $n$ . Una rete in cui invece  $\rho_k \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow \infty$  è detta *sparsa*, e in particolare si può dire che un grafo sia sparso se  $c$  rimane costante all'aumentare di  $n$ . In una rete sparsa, quindi, la frazione di elementi non-nulli della matrice di adiacenza tende a zero all'aumentare di  $n$ .

Queste definizioni sono applicabili solo se il limite  $n \rightarrow \infty$  è realizzabile, ed è evidente che nella maggioranza dei casi reali ciò non sia possibile. A questo punto si può solamente fare un'ipotesi sulla densità del grafo, basandosi sulle caratteristiche del fenomeno preso in considerazione [8]. Nel caso di una rete di trasporto è logico pensare che questa sia sparsa perché in generale nuove strade saranno collegate solo alle proprie limitrofe, mentre nuove ferrovie o aeroporti muoveranno la maggior parte del loro flusso verso le infrastrutture più collegate (i.e. nodi con un grado elevato). Per ottenere un grafo sparso è stata messa in campo una strategia precisa, che verrà discussa nel capitolo 3.

Per concludere, ci si potrebbe imbattere in grafi i cui nodi hanno tutti lo stesso grado. Nella teoria dei grafi questi vengono detti *regolari* e un grafo in cui tutti i vertici hanno grado  $k$  viene chiamato *k-regular*. Ad esempio un reticolo (una rete in cui ogni vertice ha grado 4) sarà un grafo *4-regular*.

### 1.3 Percorsi

Un percorso (dall'inglese *path*) in una rete è una qualsiasi sequenza di vertici tale che ogni coppia consecutiva di vertici nella sequenza è connessa da un arco nel grafo. Semplicemente, un percorso sarà un itinerario all'interno del *network* che passa da un vertice ad un altro attraverso gli archi della rete

stessa.

In generale un *path* può intersecare sé stesso e passare più volte sugli stessi archi. La lunghezza di un percorso in una rete è il numero di archi attraversati da esso. Definiamo poi per completezza il percorso *geodesico* come il percorso tra due nodi tale che non esista un percorso più breve.

## 1.4 Componenti

Quando non è possibile trovare alcun itinerario tra una data coppia di vertici, la rete è detta *disconnessa*. Sarà invece *connessa* se esiste sempre un percorso da un qualsiasi nodo ad ogni altro.

Tecnicamente una componente è un sottoinsieme di vertici di un *network* tale che esiste almeno un itinerario da ogni vertice della componente a ogni altro. Secondo questa definizione è quindi scontato che una rete *connessa* possieda necessariamente una sola componente. Un vertice isolato è considerato una componente di taglia uno.

La matrice di adiacenza di un *network* con più di una componente può essere scritta come una matrice diagonale a blocchi, il che significa che gli elementi non-nulli sono confinati a blocchi quadrati presso la diagonale, come mostrato nella figura sotto:

È importante comunque specificare che questo tipo di rappresentazione è realizzabile solo se i nodi di una stessa componente sono indicizzati da righe e colonne adiacenti. Una denominazione che non ottiene questo risultato produrrà una matrice di adiacenza la cui apparenza non è quella mostrata poco sopra, anche se la struttura in sé delle rete non è influenzata dall'indicizzazione.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0}} & 0 & \dots \\ 0 & \boxed{\phantom{0}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Figura 2: Matrice di adiacenza di un grafo composto da più componenti, presa dal riferimento [8]

## 1.5 Laplaciana di un Grafo

La laplaciana è una matrice strettamente connessa con la matrice di adiacenza, che può dire molto sulla struttura di una rete e sulla dinamica agente su di essa.

Assumiamo che una certa quantità si muova tra gli archi di un grafo e che ce ne sia un ammontare  $\psi_i$  all'interno del vertice  $i$ . Assumiamo poi che questa grandezza si muova dal nodo  $j$  al nodo  $i$  con una frequenza  $C(\psi_j - \psi_i)$  costante e chiamata *costante di diffusione*. In altre parole, in un piccolo intervallo temporale il flusso che scorre da  $j$  a  $i$  sarà  $C(\psi_j - \psi_i)dt$ . Otteniamo quindi la variazione di  $\psi_i$  nel tempo:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = C \sum_j A_{ij}(\psi_j - \psi_i) \quad (9)$$

La matrice di adiacenza in questa espressione assicura che gli unici termini che appaiono nella somma sono quelli che corrispondono alle coppie di vertici che sono effettivamente connessi da un *link*. Procedendo con la trattazione,

si può scrivere:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = C \sum_j A_{ij} \psi_j - C \psi_i \sum_j A_{ij} = C \sum_j A_{ij} \psi_j - C \psi_i k_i = C \sum_j (A_{ij} - \delta_{ij} k_i) \psi_j, \quad (10)$$

dove  $k_i$  è il grado del vertice  $i$ ,  $k_i = \sum_j A_{ij}$ . L'equazione (10) Può essere riscritta in forma matriciale come:

$$\frac{d\psi}{dt} = C(\mathbf{A} - \mathbf{D})\psi, \quad (11)$$

dove  $\psi$  è il vettore le cui componenti sono i valori  $\psi_i$ ,  $\mathbf{A}$  è la matrice di adiacenza e  $\mathbf{D}$  è una matrice diagonale che presenta i gradi dei nodi sulla diagonale. É fruttuoso definire una nuova matrice, la *matrice Laplaciana*:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}, \quad (12)$$

cosicché l'equazione (10) prende la forma:

$$\frac{d\psi}{dt} + C\mathbf{L}\psi = 0, \quad (13)$$

che è la stessa dell'ordinaria equazione di diffusione per un gas, con l'unica differenza che l'operatore Laplaciano  $\nabla^2$  viene qui sostituito dalla matrice  $\mathbf{L}$ . Possiamo inoltre scrivere esplicitamente gli elementi della matrice Laplaciana:

$$L_{ij} = \begin{cases} k_i & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ sono collegati e } i \neq j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (14)$$

O alternativamente:

$$L_{ij} = \delta_{ij} k_i - A_{ij} \quad (15)$$

## 2 Teoria e Dinamica di una rete di Trasporto

In questo capitolo daremo una breve definizione di *Random Walk* e svilupperemo l'effettiva trattazione. Ci occuperemo di trattare un problema di *Random Walk* su una rete di trasporto. Il grafo su cui faremo le nostre simulazioni è semplice e composto da  $n = 500$  nodi, nominati dalla sequenza  $\{1, \dots, 500\}$ , la cui connettività è compresa tra 2 e 5. La rete verrà generata randomicamente (per la metodologia vedi 3.1).

### 2.1 Random Walk

Il processo di *Random Walk* è un processo randomico che descrive un percorso composto da una successione di passi aleatori. Nella sua versione più elementare consiste in un camminatore (propriamente *walker*) posizionato su una linea unidimensionale. Questo può muoversi con probabilità  $p$  a destra e con probabilità  $1 - p$  sinistra a passi di uguale lunghezza [5]. La semplicità del modello rende la trattazione statistica più che agevole, nonostante ciò questa non verrà riportata perché fuori dallo scopo di questa tesi.

Declinato nel nostro grafo, il *walker* (o meglio il veicolo) si trova in un determinato nodo e ad ogni iterazione può muoversi secondo determinate probabilità (dette di transizione) in uno dei nodi adiacenti.

### 2.2 Master Equation

Nella rete di trasporto, ogni nodo  $i$  è caratterizzato da uno stato interno  $n_i$ , ossia il numero di particelle trasportate. Il flusso medio  $\Phi_{ij}$  uscente dal nodo  $j$  e entrante nel nodo  $i$  dipenderà dallo stato dei vertici coinvolti:

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(n_i, n_j) \tag{16}$$

Data una matrice *Origin-Destination* (OD), ossia una matrice che rappresenta i flussi di trasporto in una rete dati i punti di partenza e arrivo, e una dinamica microscopica per i veicoli è possibile calcolare i flussi. La dinamica media soddisfa la *master equation*:

$$\dot{n}_i = \sum_j [\Phi_{ij}(n_i, n_j) - \Phi_{ji}(n_j, n_i)] + s_i, \quad (17)$$

che è sostanzialmente un'equazione di flusso entrante in  $i$  e in cui  $s_i$  rappresenta il contributo delle sorgenti o dei pozzi del sistema. Per definizione  $\Phi_{ij}(n_i, n_j) \geq 0$  e  $\Phi_{ij}(n_i, 0) = 0 \forall n_i$ . I flussi  $\Phi_{ij}$  sulla rete di trasporto dipendono dalla scelta, da parte dei singoli veicoli, di differenti percorsi sul *network* e dalla richiesta di mobilità della OD.

Diciamo che una rete possiede una capacità di trasporto finita se per ogni nodo esiste una  $n_i^{max}$  tale che:

$$\Phi_{ij}(n_i, n_j) = 0 \quad \text{se} \quad n_i > n_i^{max}, \quad (18)$$

e definiamo il carico massimale della rete come:

$$N^{max} = \sum_i n_i^{max} \quad (19)$$

Inoltre se per ogni nodo  $j$  esiste  $\phi_j^{max}$  tale che:

$$\Phi_{ij}(n_i, n_j) \leq \phi_j^{max} \quad \forall n_i, n_j \quad (20)$$

diciamo che il *network* di trasporto ha una capacità di flusso massimale:

$$\Phi^{max} = \sum_j \phi_j^{max} \quad (21)$$

## 2.3 Funzione di Flusso

La natura del sistema preso in esame suggerisce l'esistenza di una fondamentale relazione tra i singoli flussi che scorrono tra i nodi e la densità di veicoli

di ogni strada. Questa relazione dipenderà dalla velocità di cammino libero  $v_j$ , dalla capacità e dalla lunghezza delle strade. Assumiamo quindi che il flusso uscente dal vertice  $j$  ad entrante in  $i$  possano essere scritti come:

$$\Phi_{ij}(n_i, n_j) = c(n_i/l_i)\pi_{ij}v_j\nu(n_j/l_j) \quad (22)$$

in cui  $n_i/l_i$  è la densità dell' $i$ -esimo nodo. Il coefficiente  $\pi_{ij}$  è la frazione di flusso uscente da  $j$  e entrante in  $i$  e corrisponde alle probabilità di transizione di cui parlavamo nella sezione dedicata al *Random Walk*. Si può definire una matrice, detta *matrice di transizione* che ha come elementi le probabilità di transizione  $\pi_{ij}$ .  $\nu(n_j/l_j)$ , chiamata *funzione di trasporto*, simula la dipendenza del flusso uscente dalla densità  $n_j/l_j$ .  $c(n_i/l_i)$ , chiamata *funzione di congestione*, corrisponde alla riduzione del flusso in arrivo nel nodo  $i$  quando la sua densità  $n_i/l_i$  si avvicina al proprio valore massimo  $\rho_{max}$ . Chiamiamo una rete di trasporto *omogenea*, se le due funzioni appena definite sono uguali per tutti i nodi.

Se assumiamo che la velocità di cammino libero vada come  $l$ , ossia  $v_j \propto l_j$ , e che la funzione di trasporto sia una funzione lineare decrescente della densità, cioè  $\nu(n_j/l_j) \propto l_j^{-1}$ , allora possiamo introdurre la *funzione di flusso*:

$$\phi(n_j) = v_j\nu(n_j/l_j), \quad (23)$$

che non dipende da  $l$ , e quindi è la stessa per tutti i nodi. Possiamo quindi ridefinire la (22):

$$\Phi_{ij}(n_i, n_j) = c(n_i/l_i)\pi_{ij}\phi(n_j) \quad (24)$$

In situazioni fisiche, la funzione di congestione può essere approssimata ad una funzione gradino che riduce improvvisamente il flusso quando il nodo raggiunge la densità massimale  $\rho_{max}$ . Di conseguenza avrà la forma:

$$c(\rho) = \Theta(\rho_{max} - \rho), \quad (25)$$

É quindi possibile ridefinire la capacità massima di trasporto(chiamata in precedenza carico massimale):

$$N_{max} = \rho_{max} \sum_i^n l_i \quad (26)$$

## 2.4 Studio degli Stati Stazionari

Annulare l'equazione (17) ci permette di studiare l'esistenza di stati stazionari, che quindi dipende dalla soluzione dell'equazione:

$$\sum_j [c(n_i/l_i)\pi_{ij}\phi(n_j) - c(n_j/l_j)\pi_{ji}\phi(n_i)] = 0, \quad (27)$$

dove abbiamo annullato anche il contributo di pozzi e sorgenti  $s_i$ .

Dobbiamo comunque tenere conto della capacità finita dei nodi e per questo sarà necessario imporre il vincolo  $\sum_i n_i = N \leq N^{max}$ .  $N$  rappresenta il carico sulla rete, e verrà fatto variare così da poter osservare l'andamento del flusso.

La condizione di equilibrio stazionario è raggiunta se  $\phi(n_j) = \phi_j$  è autovettore destro e  $c(n_i/l_i) = c_i$  è autovettore sinistro della matrice di transizione  $\pi_{ij}$ , corrispondenti allo stesso autovalore  $\lambda$ :

$$\sum_j^n \pi_{ij}\phi_j = \lambda\phi_i, \quad (28)$$

e

$$\lambda c_i = \sum_j^n c_j\pi_{ji} \quad (29)$$

In una situazione non congestionata possiamo affermare che valga  $c(n_i/l_i) = 1$  per tutte le strade e vediamo che l'eq. (27) diventa:

$$\sum_j^n [\pi_{ij} - \delta_{ij}d_i]\phi(n_j) = 0 \quad \text{con} \quad d_i = \sum_j^n \pi_{ji}, \quad (30)$$

in cui  $d_i$  rappresenta il grado del nodo  $i$ -esimo. Notiamo subito che in questo caso  $\phi$  è l'autovettore corrispondente all'autovalore nullo della matrice Laplaciana:

$$L_{ij} = \delta_{ij}d_i - \pi_{ij} \quad (31)$$

$\phi_j$  rappresenta il flusso uscente da  $j$  all'equilibrio ed è possibile ottenere la famiglia di valori  $n_j^s$ . Per ogni nodo dovremo risolvere l'equazione  $\phi(n_j^s) = \Phi^e p_j$  dove  $\Phi^e$  è il flusso totale sul network, e  $p_j$  non è altro che la frazione del flusso totale presente nella strada  $j$ -esima, soggetto alla condizione:

$$\sum_j^n p_j = 1 \quad (32)$$

Dato il numero totale di particelle (già chiamato carico totale sulla rete) è possibile trovare una famiglia di soluzioni  $n_j^s(\Phi^e)$  imponendo la condizione:

$$\sum_j^n n_j^s(\Phi^e) = N \quad (33)$$

In un *network* omogeneo, il flusso massimale  $\phi_{max}$  è lo stesso per tutte le strade e  $\pi_{ij}$  soddisfa la condizione di bilancio:

$$\sum_j^n \pi_{ij} = \sum_j^n \pi_{ji}, \quad (34)$$

e gli autovettori destro e sinistro della matrice Laplaciana sono uguali a  $p_j = const.$  È importante sottolineare che la condizione (34) non è una condizione di bilancio dettagliato (i.e. che il flusso netto su ogni singolo nodo sia nullo) a meno che la matrice di transizione non sia simmetrica.

La (34) implica  $\sum_j^n L_{ij} = 0$  e viceversa. La soluzione stazionaria non determinerà lo stato dei singoli nodi visto che il flusso che intercorre tra di essi è costante su tutta la rete. In termini più fisici ciò significa che la dinamica agente su una strada non influenza lo stato della strada stessa. La condizione di bilancio (34) sarà soddisfatta se esiste una matrice stocastica  $\hat{\pi}_{ij}$ , tale

che la somma lungo le sue colonne dia 1 i.e.  $\sum_j \hat{\pi}_{ji} = 1$ , con autovettore  $p_j$  associato tale che si possa definire:

$$\pi_{ij} = \hat{\pi}_{ij} p_j \quad (35)$$

É quindi soddisfatta la condizione di bilancio:

$$\sum_j^n \hat{\pi}_{ij} p_j = p_i = \sum_j^n \hat{\pi}_{ji} p_i \quad (36)$$

Rispettare la (36) implica che la master equation (17) abbia una soluzione all'equilibrio e nella rete scorra un flusso costante  $\phi_0$ .

### 3 Metodologie e Strumenti Usati

In questo capitolo verranno discusse tutte le strategie implementate per poter effettivamente simulare la dinamica e fare misurazioni su di essa.

Il linguaggio di programmazione utilizzato è *c++*, un linguaggio le cui caratteristiche fondamentali consistono in una programmazione di basso livello, funzionale e orientata agli oggetti. Le sue proprietà rendono *c++* un linguaggio estremamente efficiente e versatile, nonché modulare.

#### 3.1 Generazione del grafo

Il metodo utilizzato per la costruzione della rete di trasporto, ossia il grafo su cui le particelle faranno il loro *Random Walk*, è in sostanza una versione leggermente modificata dell'acclamato modello *Erdos-Rényi* (E-R). Sarà corretto e funzionale trattare innanzitutto questo importante metodo e successivamente parlare della versione che abbiamo utilizzato noi.

Il modello E-R nella sua versione originale prevederebbe la costruzione di un grafo  $G_{N,E}$  partendo da un insieme di  $N$  vertici che vengono congiunti da  $E$  *links* i cui estremi sono scelti randomicamente tra gli  $N$  nodi. La versione che però abbiamo preso in considerazione noi è un'alternativa che consiste nel costruire un grafo  $G_{N,p}$ , a partire da un set di  $N$  diversi vertici, in cui ognuno degli  $N(N-1)/2$  possibili archi è presente con una probabilità di connessione  $p$  e assente con una probabilità  $1-p$  [1]. Quindi costruendo un grafo  $G_{N,p}$ , la probabilità di ottenerne uno  $G_{N,E}$  (con  $N$  nodi e  $E$  archi) è data da:

$$P(G_{N,E}) = p^E (1-p)^{E_{tot}-E}, \quad \text{con} \quad E_{tot} = \frac{1}{2}N(N-1) \quad (37)$$

Dato che ogni arco può essere presente o assente, l'ensemble dei grafi  $G_{N,p}$  contiene  $2^{\frac{N(N-1)}{2}}$  elementi. Detto ciò possiamo finalmente dire qualcosa di più riguardo alla probabilità di connessione  $p$ . Il valore di aspettazione del numero di *links* generati col grafo sarà:

$$\langle E \rangle = \frac{N(N-1)}{2}p, \quad (38)$$

e dal momento che ogni arco contribuisce al grado di due vertici, otteniamo:

$$\langle k \rangle = \frac{2\langle E \rangle}{N} = (N-1)p \approx Np \quad \text{per } N \rightarrow \infty \quad (39)$$

È quindi possibile trovare una prima possibile espressione per  $p$ , ossia  $p = \frac{\langle k \rangle}{N-1}$ , che corrisponde proprio alla frazione dei vicini effettivi rispetto al numero totale di vicini possibili. Vogliamo ora ottenere la distribuzione di probabilità per il grado  $k$ . In un grafo dotato di *probabilità di connessione*  $p$ , la probabilità di creare un vertice di grado  $k$  sarà la probabilità che questo sia connesso a  $k$  altri vertici e non connesso ai  $N-1-k$  nodi rimasti. Visto che i processi di creazione di *link* sono eventi indipendenti tra loro, questa

probabilità sarà data dalla distribuzione binomiale:

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}, \quad (40)$$

che per  $N \rightarrow \infty$  è approssimabile alla distribuzione di Poisson [1]:

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (41)$$

Per generare il grafo ci siamo serviti di un modello simile a quello appena descritto ma con un vincolo aggiunto: i vertici del nostro grafo devono infatti avere il proprio grado compreso tra un valore minimo ( $L_{min}$ ) e un massimo ( $L_{max}$ ).

$$L_{min} \leq k_i \leq L_{max} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (42)$$

La motivazione di questa restrizione risiede nel voler ottenere un grafo sparso, che più possa rassomigliare le proprietà statistiche di una rete di trasporto. Per implementare tutto ciò generiamo un set di possibili vicini per ogni  $i$ -esimo nodo ( $i = 1, \dots, N$ ). Ne scegliamo un numero compreso tra  $L_{min}$  e  $L_{max}$  secondo la probabilità di connessione  $p$ , assicurandoci che ogni vicino estratto non sia già stato collegato al nodo  $i$ . Ciò è stato possibile per merito di una funzione che generasse volta per volta l'insieme dei possibili vicini disponibili, ossia l'insieme dei nodi  $j$  tali che:

$$k_j < L_{max} \quad e \quad A(i, j) = 0, \quad \text{con} \quad j \neq i \quad (43)$$

La condizione sul grado del vertice  $j$  indica che il nodo scelto possa accettare un nuovo *link*, mentre la condizione sulla matrice di adiacenza assicura che tra  $i$  e  $j$  ancora non ci sia già alcuna connessione. Come già detto, questa procedura è ripetuta per ogni  $i$ -esimo nodo e per ognuno viene rigenerato un set di possibili vertici collegabili ad  $i$ . La *probabilità di connessione*  $p$  viene ridefinita ogni volta che una nuova collezione di possibili vicini viene

determinata:

$$p = \frac{0.9}{N_v} \quad (44)$$

Nell'ultima espressione  $N_v$  è il numero di possibili vicini disponibili in quell'esatto momento dell'esecuzione e 0.9 è un parametro scelto euristicamente a seguito di studi preliminari. Questo parametro è stato selezionato ad-hoc per far sì che la distribuzione di probabilità del grado  $P(k)$  rassimili la distribuzione Poissoniana riportata poco sopra, limite per  $N \rightarrow \infty$  della  $P(k)$  del modello E-R.

Questa procedura consente di generare velocemente grafi randomici con una connettività vincolata ad un intervallo prestabilito e facilmente controllabile.

### 3.2 Componenti nel Grafo Random

La generazione di un grafo random può occasionalmente portare un'insidia che, benché a prima vista possa sembrare marginale, richiede un'attenta manipolazione. Infatti capita che la rete prodotta non sia connessa ma invece presenti più componenti (o isole): una detta *componente gigante*, la cui taglia è proporzionale al numero di vertici di cui è composto il grafo, e alcune altre che contengono solo una manciata di nodi. Questo fatto rappresenta un problema per la nostra rete di trasporto. Infatti per poter osservare un effetto probabilistico come la variazione di flusso nel sistema è necessario che il *network* sia connesso. In caso contrario, l'effetto delle congestioni sull'ammontare di veicoli che circolano nella rete sarà influenzato dalle caratteristiche strutturali del grafo, in particolare da piccole isole in cui i veicoli sono destinati a rimanere per tutta la durata della simulazione. Inanzitutto parliamo di come l'esistenza di una componente gigante sia possibile solo per valori del grado medio  $c > 1$ , successivamente parleremo della strategia

adottata per rendere connesso il grafo.

Dato un grafo  $G_{N,p}$  con  $n \rightarrow \infty$ , assumiamo che questo sia dotato di una componente gigante. Chiamiamo  $u$  la probabilità che scegliendo randomicamente un nodo  $i$  questo non appartenga all'isola, o in altri termini la frazione di nodi fuori da essa. Come già detto, la maggioranza dei nodi (nominati come  $j = 1, \dots, N \quad j \neq i$ ) sarà contenuta dalla componente gigante. Si può dire che  $i$  non apparterrà a questa se non ne è parte direttamente, né tramite alcun altro nodo. Ciò significa che per ogni altro vertice  $j$   $i$  non è connesso a  $j$  da alcun arco (A) oppure  $i$  è connesso a  $j$  ma  $j$  stesso non è parte della componente gigante (B). La probabilità della casistica (A) sarà data da  $1 - p$ , ossia la probabilità di non avere alcun *link* tra  $i$  e  $j$ , la probabilità della seconda eventualità (B) invece sarà  $pu$ , dove  $p$  è la probabilità di avere un arco tra  $i$  e  $j$  e  $u$  è stata definita poche righe sopra. Possiamo quindi scrivere un'espressione per  $u$  (la dimostrazione è fornita all'interno della referenza [8]):

$$u = (1 - p + pu)^{n-1} \quad (45)$$

Considerare il logaritmo di questa equazione ci permette di trovare un'espressione più fruttuosa per  $u$ :

$$u = e^{-c(1-u)}, \quad (46)$$

e chiamando  $S = 1 - u$  la frazione di vertici appartenenti al gigante otteniamo:

$$S = 1 - e^{-cS} \quad (47)$$

Trovare una soluzione per la (47) non è facile affatto, ma si può fare graficamente cercando l'intersezione fra questa curva e  $y = S$ , come mostrato nella figura sottostante.

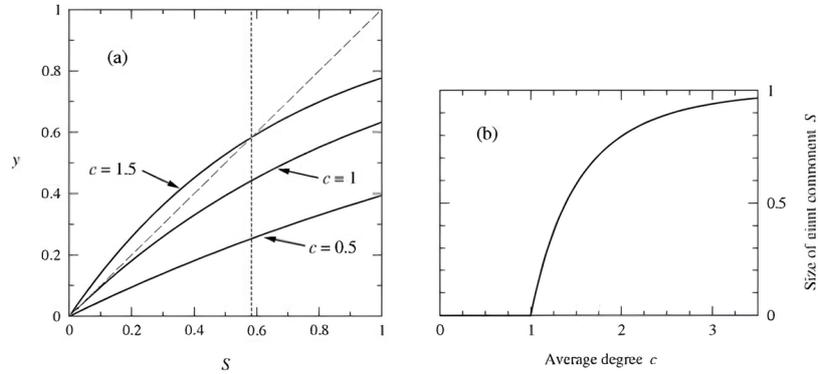


Figura 3: Soluzione grafica per l'equazione (47) presa dal riferimento [8]

Vediamo che può esistere una componente gigante solo per  $c > 1$  che è proprio il nostro caso. Infatti per  $c \leq 1$  l'unica soluzione dell'equazione (47) è  $S = 0$  che implica l'assenza di una componente gigante all'interno del grafo [8].

I vincoli imposti sulla generazione del nostro grafo hanno la diretta conseguenza che il grado medio sia  $c > 1$ , e quindi la rete potrebbe presentare delle componenti distinte. Sarà quindi necessario trovare un modo di connettere il grafo, subito dopo che questi sia stato generato. Innanzitutto è stato creato un metodo per individuare e separare le diverse (ed eventuali) componenti del *network*. Si tratta di un metodo ricorsivo, detto *Depth-First Search*, che esplora la rete a partire da un nodo randomico e contrassegna i nodi già visitati, così che quando poi tutta la componente sia stata esplorata i nodi contenuti in essa saranno raggruppati. A questo punto entra in azione un'ulteriore funzione che collega i nodi delle isole più piccole con quelli della componente gigante, secondo una probabilità molto simile a quella (44) già definita nella sezione precedente. È questa la metodologia che ci consente di rendere sempre connessa la rete.

### 3.3 Creazione della matrice di transizione

Nel processo di costruzione della dinamica, la matrice di transizione riveste un ruolo fondamentale. Sulle sue colonne infatti sono elencate le probabilità che governano il *Random Walk* infuso in ogni nodo. Per maneggiare l'oggetto della matrice ci siamo serviti della libreria c++ *Eigen* e di due notazioni: quella matriciale e la notazione LIL (*List of List*). Quest'ultima notazione risulta molto efficiente quando la matrice da rappresentare è sparsa. Il numero di elementi non-nulli sarà molto inferiore rispetto alla dimensione della matrice stessa, e quindi risulta più conveniente fare una lista di questi per ogni riga o colonna, piuttosto che rappresentare la matrice intera.

Inizialmente generiamo la matrice di transizione secondo la sua definizione e usando la notazione matriciale:

$$T_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_i^n A_{ij}} \quad (48)$$

Otterremo quindi una matrice in cui la somma lungo le colonne restituisce sempre 1, perché a prescindere dall'eventuale congestione del nodo di arrivo, il flusso uscente da un vertice deve essere sempre non-negativo (sarà nullo nell'unico caso in cui il nodo di partenza è vuoto). È necessario però fare un'ultima operazione sulla matrice, prima di convertirla alla notazione LIL. Infatti, per come sono impostate ora le probabilità di transizione, è possibile che nel sistema emergano degli attrattori proprio dalle caratteristiche strutturali del grafo. Un *attrattore* è un vertice che nel tempo tenderà a vedere diretto su di sé il traffico di veicoli, introducendo un bias sull'andamento del flusso. La rete non risulterebbe quindi bilanciata. La soluzione che abbiamo implementato consiste innanzitutto nel considerare l'autovettore corrispondente al massimo autovalore della matrice di transizione, chiamato  $p$ . Divide-

remo tutti gli elementi del vettore per il valore del suo massimo coefficiente. In seguito poi moltiplicheremo il  $j$ -esimo elemento dell'autovettore,  $p_j$ , per la  $j$ -esima colonna della matrice, in una operazione del tutto corrispondente alla (35):

$$\pi_{ij} = \hat{\pi}_{ij} p_j \quad (49)$$

$\hat{\pi}_{ij}$  sarà quindi l'elemento della matrice di transizione originale,  $\pi_{ij}$  quello della matrice trasformata e  $p_j$  l'elemento  $j$ -esimo dell'autovettore.

Questa moltiplicazione trasforma la matrice di transizione e sommando sugli elementi della  $i$ -esima riga o colonna, otterremo sempre il  $i$ -esimo coefficiente dell'autovettore, come riportato nella (36). Ciò significa che il flusso entrante e il flusso uscente da un qualsiasi nodo del grafo saranno di egual portata e si bilanceranno l'un l'altro. La condizione di bilancio (34) risulterà quindi rispettata. Importante è denotare che a seguito di questa trasformazione sommare sulle colonne della matrice non darà 1, a meno che la colonna non sia corrispondente al massimo coefficiente dell'autovettore. Combinata con quella vista alla sezione (3.2), l'operazione appena descritta ci garantisce che il *Random Walk* diffuso nel *network* non sia influenzato da caratteristiche strutturali dello stesso, perché previene la possibile esistenza di attrattori nella rete.

L'ultima fase di questo processo consiste nel convertire questa matrice dalla notazione matriciale alla notazione LIL. In questo modo saranno snellite le tempistiche di computazione ogniqualvolta venga presa in causa la matrice di transizione, e cioè ogni volta che i veicoli fanno il loro *Random Walk* sulla rete.

### 3.4 Dinamica Sincrona e Asincrona

Nella nostra simulazione sono state implementati due distinti tipi di dinamica. Inanzitutto diamo una definizione di *iterazione*: un'iterazione è una sequenza di operazioni destinate ad essere applicate ripetutamente. Una dinamica sincrona prevede che nella stessa iterazione venga concessa a tutti nodi la possibilità di muovere i veicoli che li popolano. Questo modo di far procedere il Random Walk permette che la popolazione di un nodo possa superare la soglia data dalla capacità finita, infatti nella stessa iterazione un nodo potrebbe ricevere un ammontare di veicoli tali da superare la capacità, e il vincolo imposto da essa non avrebbe effetto perché riferito all'iterazione precedente.

Una dinamica asincrona invece prevede che in una iterazione un solo vertice possa muovere i suoi veicoli. Questo verrà estratto randomicamente e su di lui verrà messo in atto il Random Walk. Questa tipo di dinamica non porta all'eventualità descritta precedentemente, però richiede un numero di iterazioni più elevato per eguagliare la quantità di flusso mossa nel caso sincrono, ossia il numero di iterazioni sincrone moltiplicato per l'ammontare di nodi che compongono la rete.

### 3.5 Implementazione del Random Walk

La metodologia che stiamo per andare a trattare è essenziale per la riuscita di tutta l'analisi, dal momento che è incaricata di simulare il Random Walk fra i nodi. Questa funzione sfrutta la tecnica delle somme parziali, una tecnica molto diffusa nell'ambito della simulazione di processi probabilistici.

Quando viene scelto un nodo su cui mettere in atto il *Random Walk*, vengono presi in considerazione i suoi vicini e le corrispondenti probabilità di transizione. Viene generato un numero reale randomico compreso tra  $[0.0, 1.0]$ . Viene poi chiamato un metodo che crea degli intervalli i cui estremi sono proprio le somme parziali dei valori delle probabilità di transizione. Diciamo ad esempio che per un vertice qualsiasi il vettore di probabilità si presenta come:  $(0, a, b, c, d)$ . È importante denotare come  $a + b + c + d \leq 1$ , dal momento che la matrice di transizione è stata trasformata per prevenire l'esistenza di attrattori. Allora gli intervalli generati saranno:

- $[0.0, a]$  corrispondente al primo vicino;
- $[a, a + b]$  corrispondente al secondo vicino;
- $[a + b, a + b + c]$  corrispondente al terzo vicino;
- $[a + b + c, a + b + c + d]$  corrispondente al quarto vicino;

Per esempio, il terzo intervallo dell'elenco ha come estremi le somme parziali dei primi tre e dei primi quattro coefficienti del vettore delle probabilità (si è tenuto conto anche dell'elemento 0.0). Il numero generato randomicamente potrebbe cadere in uno di questi intervalli e determinare la scelta del nodo di arrivo. Nel caso in cui ciò non accada semplicemente non si muoverà alcun veicolo. Notiamo come un'elevata probabilità di transizione corrisponde ad un largo intervallo, e quindi ad un'alta probabilità che il numero randomico finisca dentro di esso.

È importante però aggiungere che lo scambio di agenti fra due nodi non è garantito dalla sola scelta del nodo di arrivo. Il nostro metodo infatti tiene conto anche degli effetti di congestione. Se il nodo di arrivo è intasato, cioè ha raggiunto la sua capacità massima, allora la transizione sarà neutralizzata

e per quella iterazione il nodo di partenza non vedrà alcun movimento.

Parliamo poi di un altro tipo di vincolo sulla dinamica, la *capacità di trasporto*, che abbrevieremo in *CT*. Le strade potranno muovere più di una particella ad ogni iterazione e questa grandezza impone un limite superiore a quanti veicoli possono essere mossi nello stesso turno. Finché la popolazione del nodo è inferiore alla *CT*, allora questo sarà libero di far partire tutti i veicoli (fino a eventualmente svuotarsi). Dal momento però che la soglia di trasporto è superata, la strada su cui è applicato il Random Walk non potrà muovere tutte le particelle che la popolano, ma solo un ammontare pari alla *CT*.

In conclusione, parliamo della relazione tra questa metodologia e i due tipi di dinamica descritti nella sezione precedente. In un'iterazione sincrona questo metodo verrà chiamato un numero di volte pari al numero di vertici presenti nel *network*, nel caso asincrono invece verrà chiamato una volta ad iterazione.

### **3.6 Misure Effettuate**

Le operazioni di misura sono quelle che ci consentono di raccogliere dati utili dalla simulazione e osservare gli andamenti delle grandezze prese in esame. Quella principale sarà la misura delle deviazioni dello stato di singolo nodo. Prima di poter procedere con questa misura però, è stato effettuato uno studio preliminare sulla distribuzione di probabilità dello stato della popolazione dei nodi del *network*. Questo perché le misure sulle fluttuazioni devono avvenire quando il sistema si trova in uno stato stazionario. Per brevità d'ora in poi chiameremo la densità di veicoli nei nodi  $\rho$ . Parliamo ora delle metodologie impiegate per realizzare le misure.

Lo studio preliminare consiste nel calcolare lo scarto quadratico fra le

distribuzioni di probabilità di  $\rho$ , a intervalli regolari di 10 iterazioni (sulle 100 ). Queste differenze verranno determinate per distribuzioni mediate, ossia distribuzioni frutto della media di più stati di rete. Faremo evolvere il sistema e questo si rilasserà, quindi ciò che ci aspettiamo è che lo scarto si riduca sensibilmente dopo un certo numero di iterazioni.

La misura sulla distribuzione di probabilità viene effettuata tramite un semplice conteggio. Vogliamo misurare come si distribuisce la densità di veicoli (proprio  $\rho$ ) nei nodi e quindi, considerati tutti i possibili stati della popolazione all'interno un vertice, sarà misurato il numero di nodi che si trovano proprio in ognuno di quegli stati. Verrà quindi graficata una distribuzione della popolazione dei nodi.

La misura del flusso viene implementata sempre tramite un conteggio che tiene traccia delle particelle mosse ad ogni iterazione. Questa quantità verrà poi mediata sul numero di iterazioni sincrone e scritta su un *data file*. Avremo quindi un flusso medio di particelle per ogni livello di carico.

La misura delle fluttuazioni della popolazione dei singoli nodi viene effettuata calcolando lo scarto quadratico medio sulla popolazione dei singoli nodi. Dato un livello di carico, la rete verrà fatta evolvere fino a che non raggiunge lo stato stazionario. Per ogni nodo verrà calcolata la sua popolazione media e in seguito la deviazione dei valori di popolazione dei nodi rispetto al valore centrale. Queste quantità verranno impiegate in un calcolo finale per ottenere un valore della deviazione mediato su tutti i nodi. Avremo quindi un valore di fluttuazione per ogni livello di carico. Per verificare la validità di questa misura abbiamo infine graficato su degli istogrammi i valori delle deviazioni utilizzati per ottenere le fluttuazioni medie. La validità verrebbe confermata dal momento che i valori delle deviazioni si distribuiscono attorno al valore medio secondo una distribuzione unimodale.

Queste misurazioni verranno riportate su *files* di formato *.csv*.

## 4 Risultati

In questo capitolo mostreremo i risultati delle misurazioni. Una lista comprensiva di tutti i risultati è reperibile all'interno della repository citata nell'introduzione. La rete su cui abbiamo effettuato le simulazioni è composta da 500 nodi e la connettività di questi è compresa tra 2 e 5. I nodi possiedono una capacità finita pari a 20 ed è fissata una capacità di trasporto lineare con soglia di 5 particelle per unità temporale. Per ogni livello di carico il sistema verrà fatto evolvere per 100 iterazioni nel caso sincrono, 50,000 iterazioni nel caso asincrono.

### 4.1 Misure Preliminari

Lo studio di queste variazioni ci ha portato a concludere che il sistema si rilassa (i.e. raggiunge lo stato stazionario) sopra le 60 iterazioni sincrone, come mostrato nella figura sottostante.

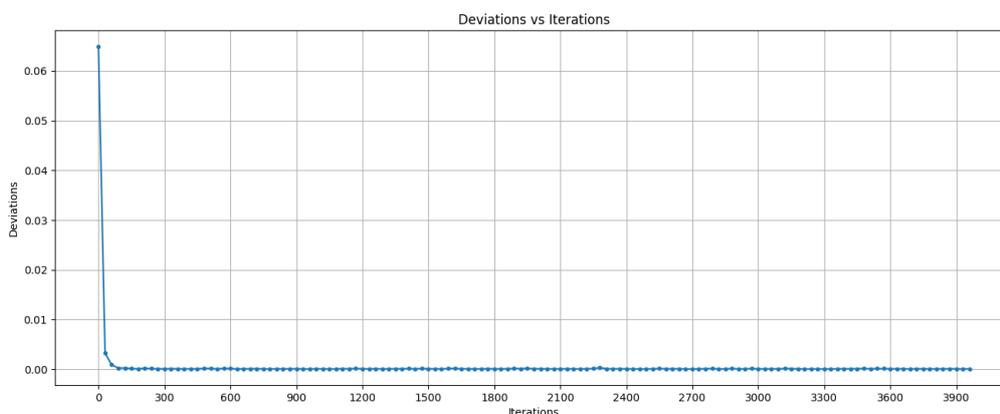


Figura 4: Andamento delle variazioni per livello di carico uguale a 8 veicoli per nodo, con dinamica sincrona.

L'intervallo tra due punti consecutivi corrisponde a 30 iterazioni sincrone. Gli andamenti per altri livelli di carico sono leggermente diversi ma ci portano comunque alle conclusioni fatte all'inizio di questa sezione.

Passiamo ora in rassegna le distribuzioni di probabilità a regime stazionario. Benché le misurazioni effettuate per determinare queste distribuzioni non siano essenziali, ci danno comunque una riconferma della correttezza della dinamica. Si può notare come le distribuzioni per basso e alto carico abbiano un andamento simil-esponenziale e abbiano media corrispondente proprio al livello di carico imposto sulla rete, esattamente come ci si aspetta. Parliamo ora della differenza tra i due tipi di dinamica. Lo stato di rete verrà aggiornato ad ogni iterazione, sia questa sincrona o asincrona, però nel caso sincrono si muoveranno al più 500 nodi, nel caso asincrono al più se ne muoverà uno. Questa differenza fa sì che nel caso sincrono i nodi vuoti (pieni) subiscono una diminuzione (aumento) del flusso uscente mentre il flusso entrante rimane costante. Quindi il nodo vuoto (pieno) vede applicata su di

sé una forza che lo spinge via dallo stato zero (congestionato). Questo fatto si manifesta in una sotto-rappresentazione degli stati vuoti e congestionati, e di un conseguente aumento delle frequenze per gli stati subito adiacenti, che sono più piccati rispetto al caso asincrono. Questa differenza avrà un effetto anche sugli andamenti del flusso e delle deviazioni, come vedremo in seguito.

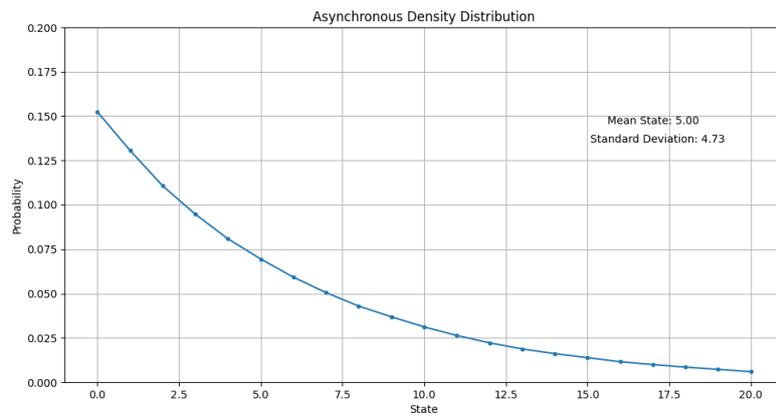


Figura 5: Distribuzione di probabilità di  $\rho$  per un livello di carico pari a 5 veicoli per nodo, con dinamica asincrona.

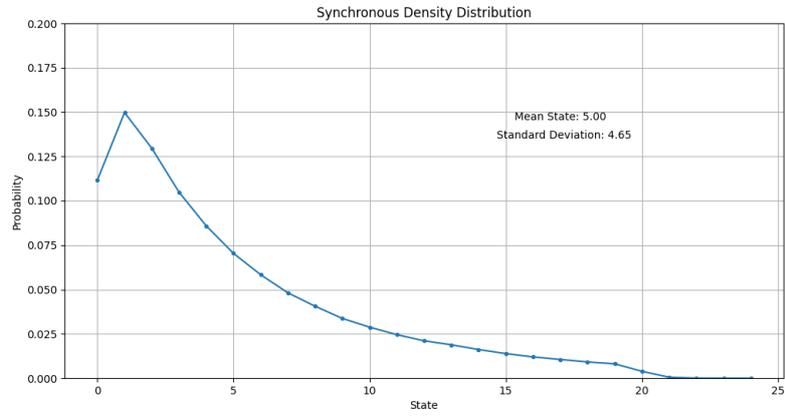


Figura 6: Distribuzione di probabilità di  $\rho$  per un livello di carico pari a 5 veicoli per nodo, con dinamica sincrona.

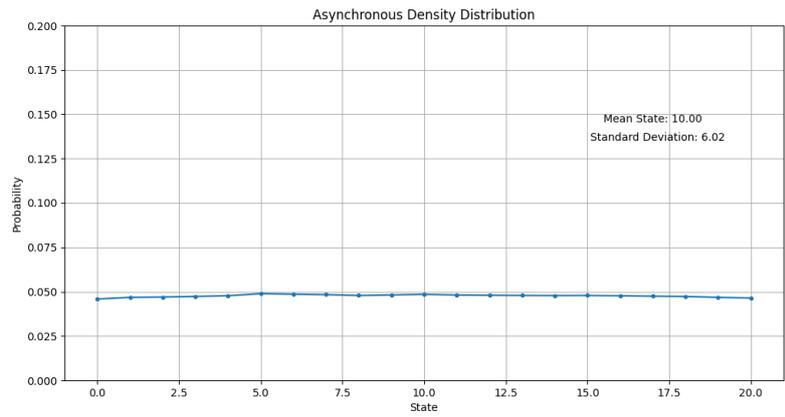


Figura 7: Distribuzione di probabilità di  $\rho$  per un livello di carico pari a 10 veicoli per nodo, con dinamica asincrona.

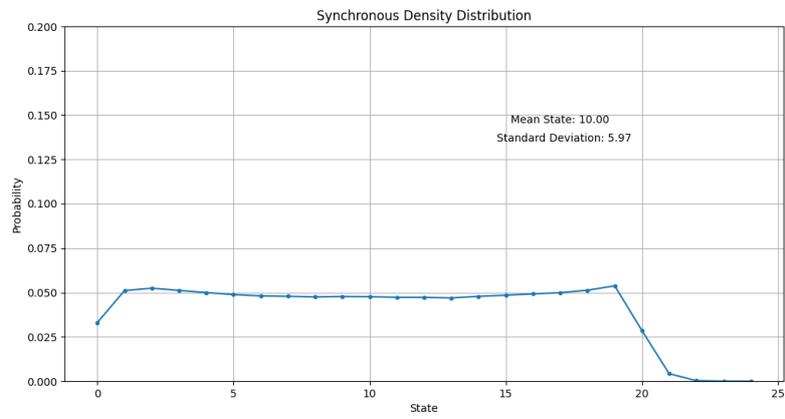


Figura 8: Distribuzione di probabilità di  $\rho$  per un livello di carico pari a 10 veicoli per nodo, con dinamica sincrona.

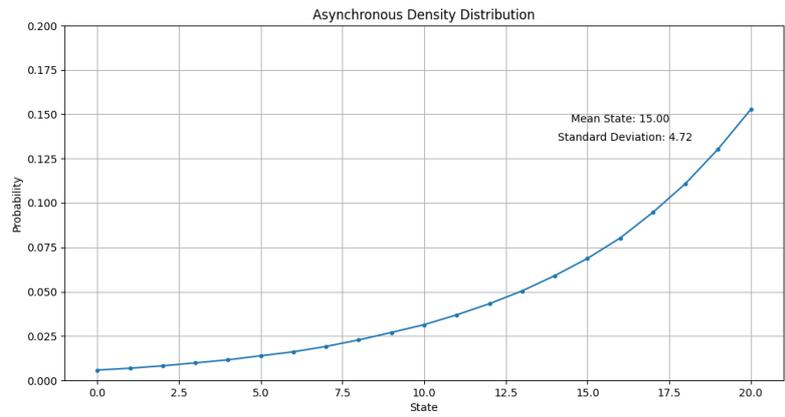


Figura 9: Distribuzione di probabilità di  $\rho$  per un livello di carico pari a 15 veicoli per nodo, con dinamica asincrona.

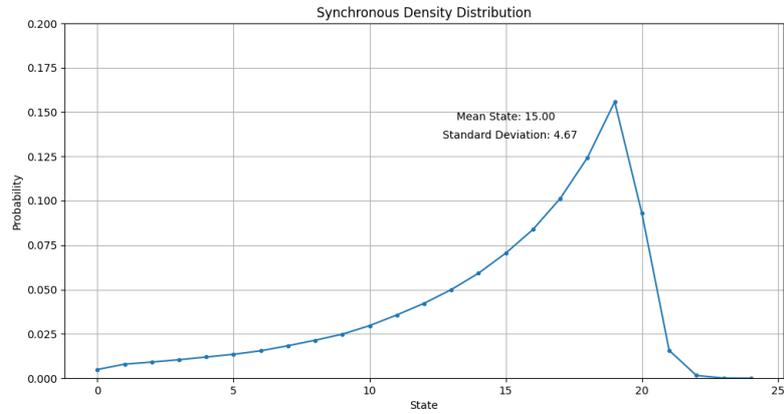


Figura 10: Distribuzione di probabilità di  $\rho$  per un livello di carico pari a 15 veicoli per nodo, con dinamica sincrona.

Per concludere, un'altra conferma della validità del modello è data dalla misura del flusso, il cui andamento indica l'insorgere di fenomeni di congestione. Come ci aspettiamo, il flusso aumenta fino a che il livello di carico è inferiore alla metà della densità totale permessa, raggiunge il suo massimo proprio in questa regione e poi diminuisce all'aumentare del numero dei veicoli. Come già detto, la complessità aggiunta della dinamica sincrona ha un effetto sull'andamento del flusso, che sarà asimmetrico rispetto al punto di metà carico.

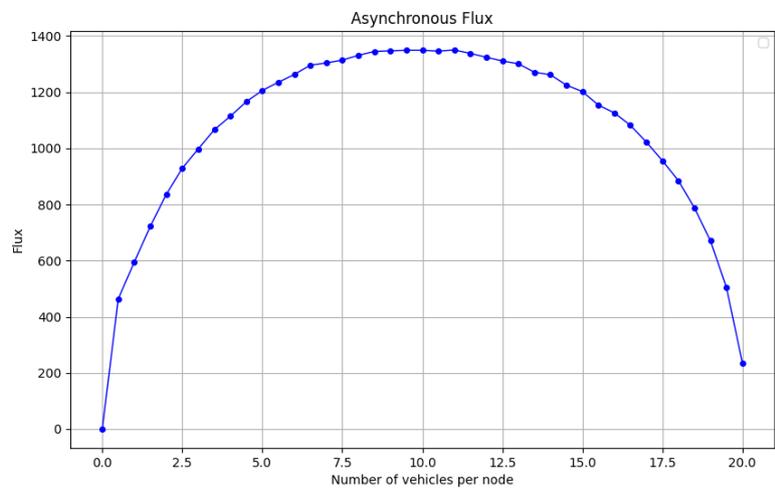


Figura 11: Andamento del flusso in funzione del livello di carico, con capacità delle strade fissata a 20 e dinamica asincrona.

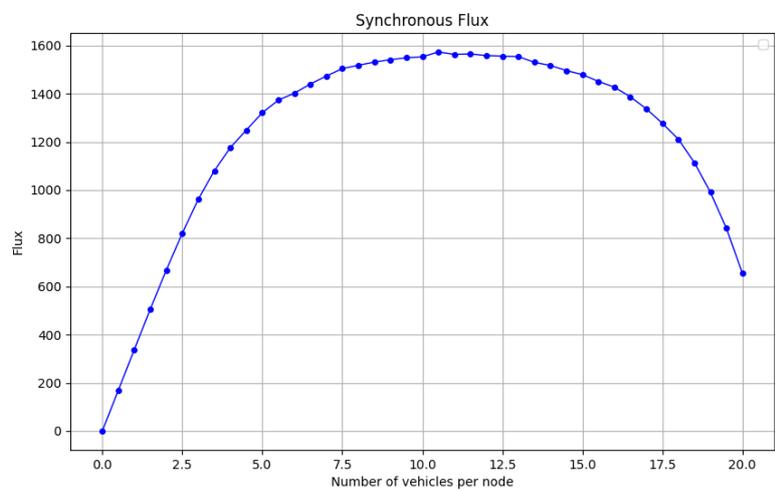


Figura 12: Andamento del flusso in funzione del livello di carico, con capacità delle strade fissata a 20 e dinamica sincrona.

## 4.2 Misura delle fluttuazioni

Mostriamo ora i risultati della misura delle fluttuazioni.

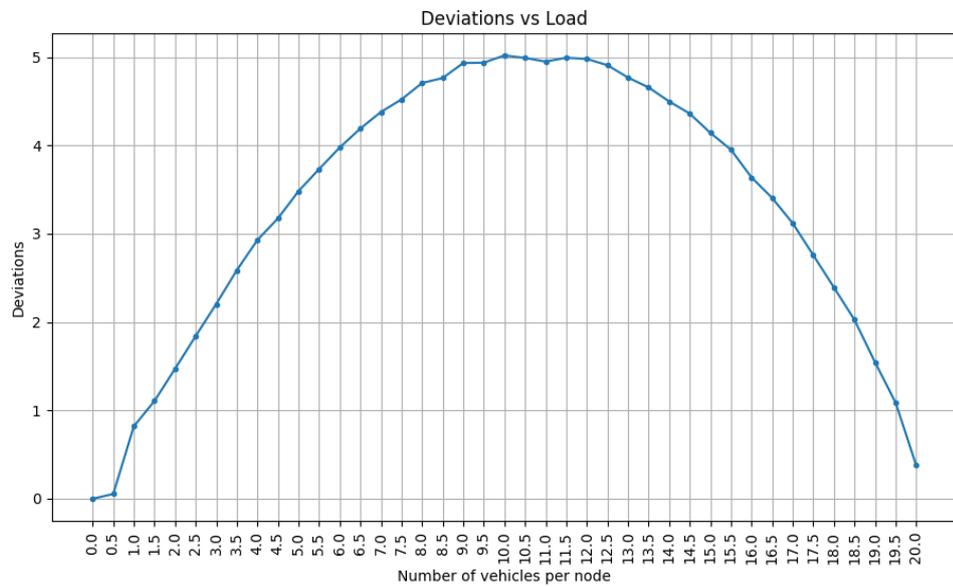


Figura 13: Andamento delle fluttuazioni in funzione del livello di carico imposto sulla rete, con dinamica asincrona.

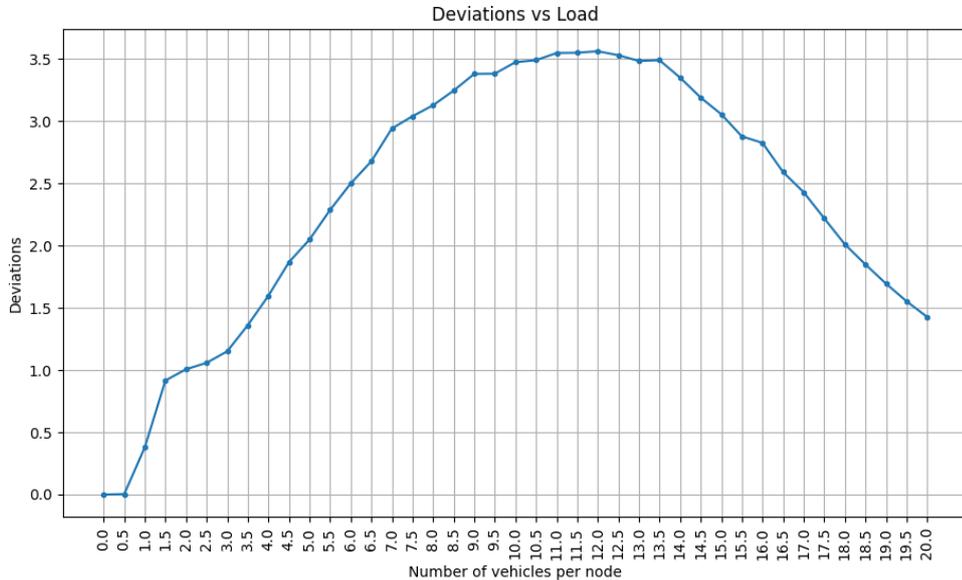


Figura 14: Andamento delle fluttuazioni in funzione del livello di carico imposto sulla rete, con dinamica sincrona.

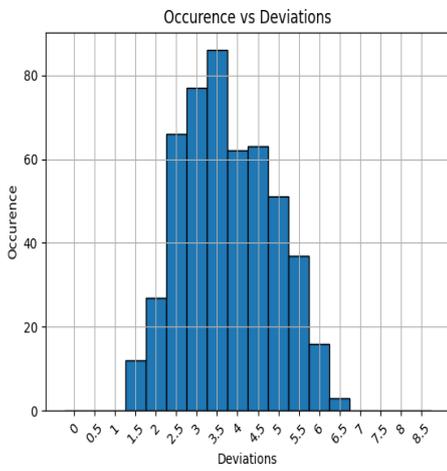
Inanzitutto è possibile notare una differenza fra l'andamento asincrono e quello sincrono. Il primo è perfettamente simmetrico rispetto al punto di metà carico. Il secondo invece, in ragione della complessità aggiunta data dalla dinamica sincrona, vede il proprio massimo spostato in avanti di un poco.

Queste deviazioni raggiungono il loro massimo valore proprio in corrispondenza della metà del carico totale permesso, ossia quando la rete comincia a congestionarsi. Ciò ci permette di inferire che questa grandezza sia un buon indicatore dello sviluppo di fenomeni di congestione.

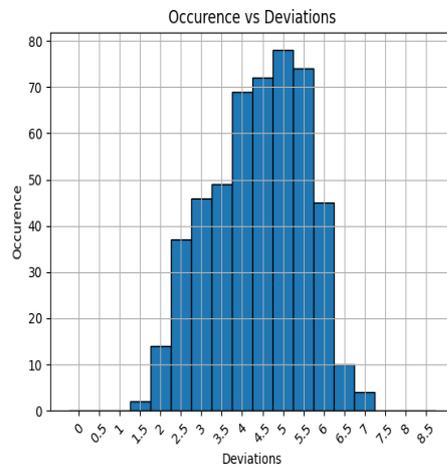
La distribuzione di probabilità della densità nel caso di carico intermedio (figura 8), ossia 10 veicoli per nodo, è la distribuzione con deviazione standard più elevata. Questo fatto di per sé è banale e facilmente verificabile. Notiamo però che le fluttuazioni per singolo nodo mostrate poco sopra seguono un

andamento concorde con quanto rilevato per le distribuzioni di  $\rho$ . Ciò è interessante perché le deviazioni per singolo nodo sono grandezze locali, calcolate sulla singola strada, mentre le distribuzioni di probabilità mostrate nella sezione (4.1) sono grandezze mediate su interi stati di rete. L'analogia tra gli andamenti delle due deviazioni potrebbe portare alla conclusione che basti esaminare solo lo stato di una ristretta porzione di strade, per determinare l'insorgere di congestioni su tutta la rete. Lo studio realizzato in questa tesi porta comunque con sé dei limiti ed è necessario approfondire la questione.

Di seguito è mostrata una conferma della affidabilità delle misure effettuate. Infatti i punti mostrati nelle figure 13 e 14 sono frutto della media delle fluttuazioni di tutti i nodi, dato un livello di carico. Questi valori saranno attendibili se la distribuzione delle deviazioni (che contribuiscono al calcolo del valore medio) è almeno unimodale (ossia presenta un solo punto di massimo), esattamente come mostrato di seguito.

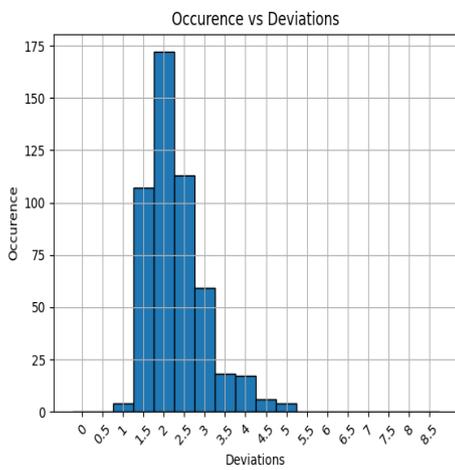


(a)

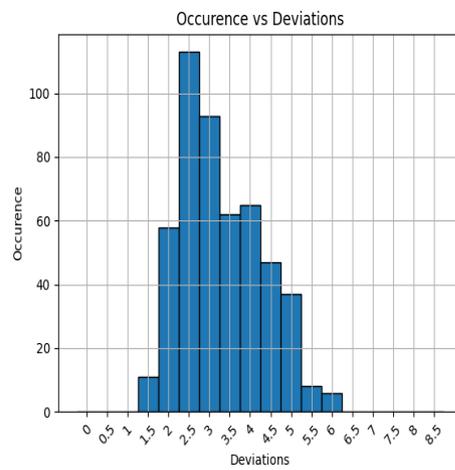


(b)

Figura 15: Valori delle deviazioni per carico a 5 (a) e a 15 (b), nel caso asincrono.



(a)



(b)

Figura 16: Valori delle deviazioni per carico a 5 (a) e a 15 (b), nel caso sincrono.

In conclusione, non è possibile comparare il modello con reti di traffico

reali perché le misure mostrate in questa sezione si riferiscono alla popolazione delle strade, mentre i dati reali in nostro possesso riguardano flussi di traffico. Questi dati di flusso inoltre sono influenzati dai semafori che introducono fluttuazioni casuali e non possono dirsi del tutto esaustivi. Un altro aspetto da considerare è che in questa simulazione i nodi fanno uscire la stessa quantità di veicoli a prescindere dal loro stato. Un possibile difetto è quindi l'assenza di una caratterizzazione dell'interazione fra i veicoli presenti nella stessa strada: un nodo congestionato nella realtà tenderà a far uscire più lentamente i veicoli che contiene perché questi corrono in esso ad una velocità inferiore rispetto a quella che avrebbero in una situazione di flusso libero.

## 5 Conclusioni

Questo studio consiste in un modello di random walk su una rete di trasporto randomica (con determinati vincoli sulla connettività) su cui sono applicate una dinamica sincrona e una asincrona. Inoltre i nodi che compongono la rete sono dotati di una capacità e una capacità di trasporto finite. Dalle simulazioni effettuate è stato possibile inferire che le deviazioni sullo stato di singolo nodo sono un buon indicatore dell'insorgere di fenomeni di congestione perché raggiungono la loro massima magnitudine proprio nel momento in cui la rete si congestiona. Inoltre è stato verificato che hanno un andamento analogo alle deviazioni delle distribuzioni di probabilità della densità  $\rho$ . Questo osservabile può quindi essere uno strumento per individuare l'insorgere di fenomeni di congestione solamente esaminando una porzione delle strade, ma sono necessari ulteriori studi per poter effettivamente verificare questa ipotesi.

Purtroppo però le nostre misure sono incompatibili con i dati reali, le prime riguardano la popolazione dei nodi, i secondi sono riferiti al flusso. Questo fatto non ci permette di confrontare il modello con reti di traffico reali.

Il modello porta dentro di sé una limitazione riferita all'interazione tra veicoli contenuti nella stessa strada. Nella nostra simulazione i nodi congestionati vedono uscire i veicoli alla stessa velocità con cui uscirebbero da un nodo non congestionato e ciò non è realistico. Una possibile miglioria per studi futuri potrebbe proprio essere l'implementazione di una dinamica che tenga conto dell'interazione tra i veicoli, nonché magari sviluppare una dinamica più complessa rispetto al Random Walk, che possa tenere conto dell'elevata complessità delle dinamiche di traffico.

## Riferimenti bibliografici

- [1] A. Vespignani A. Barrat M. Barthélémy. *Dynamical Processes On Complex Networks*. Cambridge University Press, 2008. ISBN: 978-0-511-45558-2.
- [2] Blanco et al. «The economic cost of traffic congestion in Florida.» In: *Research Gate* (2010-08-01). URL: [https://www.researchgate.net/publication/319109701\\_The\\_economic\\_cost\\_of\\_traffic\\_congestion\\_in\\_Florida](https://www.researchgate.net/publication/319109701_The_economic_cost_of_traffic_congestion_in_Florida).
- [3] Maria Celine Liya, Santhosh Kareepadath Rajan e Arun Kenath. «Psychological experiences and travel Adversities: A Mixed-Method study of the regular commuters in traffic congestion». In: *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour* 101 (2024), pp. 130–

141. ISSN: 1369-8478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trf.2024.01.006>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1369847824000123>.
- [4] Peter G. Doyle e J. Laurie Snell. «Random Walks and Electrical Networks». In: 1984. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:124158983>.
- [5] Malcolm P. Kennett. *Essential Statistical Physics*. Cambridge University Press, 2020, p. 7. DOI: [10.1017/9781108691116](https://doi.org/10.1017/9781108691116).
- [6] Dayoon Kwon et al. «Traffic-related air pollution and Parkinson's disease in central California». In: *Environmental Research* 240 (2024), p. 117434. ISSN: 0013-9351. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.envres.2023.117434>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013935123022387>.
- [7] L. LOVASZ et al. «Random Walks on Graphs: A Survey». In: 1993. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:10655982>.
- [8] M.E.J. Newman. *Networks, An Introduction*. Oxford University Press, 2010. ISBN: N 978-0-19-920665-0.
- [9] Fan Xia et al. «Heterogeneous impacts of local traffic congestion on local air pollution within a city: Utilizing taxi trajectory data». In: *Journal of Environmental Economics and Management* 122 (2023), p. 102896. ISSN: 0095-0696. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jeem.2023.102896>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095069623001146>.