

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Laurea Triennale in Fisica

Le principali reazioni di fusione termonucleare negli interni stellari

Relatore:
Prof. Barbara Lanzoni

Candidato:
Nicola Mercuriali

Anno Accademico 2022/2023

*Vestiremo splendore con la determinazione di mille inverni,
faremo esplodere il consenso in cielo
e lo guarderemo piovere diamanti in tutte le direzioni.*
Raein - Nirvana

*Chiudere l'inverno per sporcarmi fino in fondo al cuore,
lungo ogni sentiero degno di essere solcato.
Cedere alle onde del destino, ora in piena,
mentre il sole in cielo inciampa su se stesso.*
La Quietè - La fine non è la fine

Sommario

La produzione di energia nell'universo è dovuta in larga parte dalle reazioni di fusione termonucleare che avvengono all'interno delle stelle. Lo studio di questi processi è dunque fondamentale per la costruzione di modelli di evoluzione stellare, che a loro volta sono fondamentali per l'interpretazione fisica delle proprietà osservative delle galassie che popolano il nostro universo. Questa tesi fornisce un quadro generale per l'analisi dei processi di bruciamento di idrogeno ed elio, che rappresentano le principali fonti energetiche delle stelle. Si è introdotto l'argomento attraverso una trattazione dei fondamenti di fisica nucleare e subnucleare necessari per la materia, descrivendo il potenziale nucleare e ricavando le espressioni per i tassi di produzione energetica per i principali tipi di reazione che avvengono nelle stelle. Si sono poi studiati gli specifici processi di fusione di idrogeno attraverso le catene protone-protone e i cicli CNO, e di elio attraverso la catena 3α , mostrando la dipendenza della produzione energetica dalla temperatura degli interni stellari. Si sono in seguito discusse brevemente le principali fasi evolutive in cui le stelle producono energia attraverso queste reazioni, o nel nucleo, in sottili strati adiacenti ad esso: la Sequenza Principale, il Ramo delle Sub-Giganti (o Herzprung Gap), il Ramo delle Giganti Rosse, il Ramo Orizzontale e il Ramo Asintotico delle Giganti.

Indice

Introduzione	1
1 Fondamenti di fisica nucleare e subnucleare	3
1.1 Energia di legame del nucleo atomico	3
1.2 Effetto tunnel quantistico	7
1.3 Sezione d'urto e tasso di produzione energetica	10
1.3.1 Reazioni non risonanti	13
1.3.2 Reazioni risonanti	20
1.4 Interazione debole nei nuclei	24
2 Bruciamento di idrogeno	28
2.1 Catena protone-protone	29
2.1.1 PP1	32
2.1.2 PP2 e PP3	35
2.2 Cicli CNO	37
2.2.1 CNO1 e CNO2	38
2.3 Evoluzione stellare in Sequenza Principale e Post - Sequenza Principale .	41
2.3.1 Bassa Sequenza Principale ed evoluzione successiva di stelle di piccola massa	43
2.3.2 Sequenza Principale Superiore ed evoluzione successiva per stelle massive	44
3 Bruciamento di elio	47
3.1 Catena 3-alfa	48
3.2 Catture alfa	52
3.3 Evoluzione stellare nel Ramo Orizzontale e nel Ramo Asintotico delle Giganti	54

Indice

Bibliografia

57

Introduzione

Le stelle sono tra gli oggetti più importanti dell'universo visibile, regolando quasi totalmente l'evoluzione chimica della materia barionica (cioè composta da *barioni*, sostanzialmente neutroni e protoni) generata nel Big Bang. Sono strutture autogravitanti di plasma in equilibrio idrostatico, composte da una miscela di gas diversi, contenenti molecole, atomi, ioni ed elettroni, assieme a radiazione. Nei loro interni avvengono reazioni di rilevanza cruciale per il cosmo, in cui i nuclei leggeri che compongono il plasma stellare si fondono in elementi più pesanti, liberando energia attraverso la conversione della differenza di massa tra prodotti e reagenti. Questa energia è poi trasportata fino alla superficie della stella e da lì radiata attraverso onde elettromagnetiche nel cosmo, rendendo le stelle la principale fonte di luce visibile nell'universo. Tali processi nucleari, chiamati *bruciamenti*, vanno inoltre ad alterare la composizione chimica delle stelle e di conseguenza del mezzo interstellare che separa i sistemi stellari nelle galassie. Infatti, attraverso l'eiezione di materiale durante certe fasi dell'evoluzione o, al termine della vita delle stelle più massive che esplodono in supernovæ, le stelle possono arricchire lo spazio di elementi più pesanti di quelli originariamente prodotti dalla nucleosintesi del Big Bang. Il mezzo interstellare a sua volta fornisce materia per la formazione di nuove generazioni di stelle con composizioni sempre diverse, in un ciclo che prosegue da miliardi di anni.

Da questo si può capire la fondamentale importanza di avere teorie accurate per modellizzare l'evoluzione stellare: la struttura e la composizione chimica dell'universo a noi noto sono determinate in larghissima parte dalle reazioni che avvengono nel nucleo stellare e da come queste portano alle varie fasi dell'evoluzione. Uno dei compiti dell'astrofisica stellare è dunque sviluppare teorie per trattare le reazioni di fusione termonucleare negli interni delle stelle. La prima proposta riguardo all'ipotesi che nelle stelle avvenissero processi di nucleosintesi fu formulata nel 1920 da Arthur Eddington [1], sulla base delle misure delle masse atomiche fatte in quell'anno. Nel 1928, George Gamow sviluppò una prima teoria quantomeccanica sulla probabilità di una reazione di fusione tra nuclei [2], che sarà fondamentale nei decenni successivi per ricavare i tassi di avvenimento dei vari processi negli interni stellari. La ricerca fu poi portata avanti, tra gli altri, da Carl Frie-

drich von Weizsäcker, Hans Bethe e Fred Hoyle, che svilupparono teorie per le reazioni nelle stelle più massive e che portano alla produzione degli elementi più pesanti. Le teorie di Hoyle furono poi estese nel 1957 nel lavoro di Burbidge, Burbidge, Fowler e Hoyle [3], che raccoglieva e rifiniva le conoscenze precedenti sulla nucleosintesi stellare e che oggi è la base per gli studi sui processi di fusione.

Questa tesi si concentra in particolare sulle reazioni di fusione che coinvolgono gli elementi più leggeri e abbondanti nell'universo, cioè idrogeno ed elio, in quanto le fasi evolutive in cui questi bruciamenti avvengono hanno durate complessive molto elevate, che possono superare anche l'età dell'universo, e perciò il maggior numero delle stelle osservate nel cosmo (come il Sole) si trova in questi stadi evolutivi. Nel primo capitolo si sono riassunte le conoscenze teoriche fondamentali di fisica nucleare e subnucleare per affrontare l'argomento. Sono così trattate le modalità con cui particelle subatomiche possono compiere fusione, ricavando le grandezze più importanti per studiare le reazioni termonucleari, e quali processi di rilevanza astrofisica avvengono nelle stelle. A seguire si sono analizzati i principali bruciamenti degli elementi più leggeri presenti negli interni stellari. Il secondo capitolo analizza i processi che riguardano la fusione dell'idrogeno attraverso le catene protone-protone e i cicli CNO, e discute i principali sviluppi evolutivi delle stelle in Sequenza Principale. Nel terzo capitolo si vanno poi a studiare i bruciamenti di elio per mezzo della catena 3α e delle principali successive catture alfa, trattando infine l'evoluzione stellare nella fase successiva alla Sequenza Principale.

1. Fondamenti di fisica nucleare e subnucleare

Il nucleo atomico è una densa struttura composta da un sistema di protoni e neutroni, particelle fermioniche legate tra di loro dall'interazione forte. Tali *nucleoni* hanno caratteristiche simili, a partire dall'uguale spin totale di $1/2\hbar$ (che li rende particelle obbedienti la statistica di Fermi-Dirac), e dalla massa: per il protone questa è $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg o, per l'equivalenza di Einstein tra massa ed energia a riposo, $m_p = E_p/c^2 = 938.3$ MeV/ c^2 , mentre per il neutrone è $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg = 939.6 MeV/ c^2 . La caratteristica principale che li distingue è invece la carica elettrica: il protone è positivamente carico con valore della carica elementare (pari a quella dell'elettrone) $q_p = 1 e = 1.602 \times 10^{-19}$ C, mentre il neutrone (come può suggerire il nome) è elettricamente neutro. La carica positiva dei protoni determina la loro mutua repulsione, perciò affinché possano costruire i nuclei atomici (in cui si possono trovare anche oltre un centinaio di protoni, negli elementi più pesanti) è necessaria la presenza della più forte ed attrattiva interazione nucleare, combinata con la schermatura data dai neutroni. Questa interazione forte, mediata dai bosoni *gluoni*, fornisce la cosiddetta *energia di legame* che permette di tenere assieme il nucleo atomico. Il comportamento di protoni e neutroni nei confronti di questa forza fondamentale si può considerare fondamentalmente identico. Non esistendo però ancora una teoria fondamentale a molti corpi capace di descrivere i comportamenti dei nuclei atomici unicamente attraverso l'interazione forte, per lo studio dei fenomeni complessivi del nucleo è necessario un approccio principalmente empirico.

1.1 Energia di legame del nucleo atomico

I nuclei atomici sono caratterizzati e distinti dal numero di protoni presenti Z , detto *numero atomico*, che identifica i vari elementi. Questo, assieme al numero di neutroni N , compone il *peso atomico*, o numero totale di nucleoni, $A = N + Z$. L'isotopo di un elemento si può quindi esprimere con la notazione A_ZX o solo AX . La massa totale di un nucleo $M(A, Z)$ è data, oltre che dalla somma delle masse dei singoli nucleoni, anche dall'energia di legame $E_b = A\bar{E}_b$ (dove \bar{E}_b è l'energia di legame media per singolo nucleone) che

permette di tenere assieme protoni e neutroni nella struttura nucleare: in particolare si può considerare \bar{E}_b come l'energia media necessaria per strappare un nucleone dal nucleo, ed E_b si può esprimere come la differenza in energia tra la massa totale del nucleo composto e la somma delle masse di singoli nucleoni e indica sostanzialmente la stabilità del nucleo

$$E_b = A\bar{E}_b = [Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z)]c^2.$$

Un'espressione semiempirica dell'energia di legame è data dalla formula di Bethe – Weizsäcker

$$E_b(A, Z) = a_1A - a_2A^{2/3} - a_3\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_4\frac{(A-2Z)^2}{A} - a_5\frac{\delta}{A^k} \quad (1.1)$$

dove i a_1, \dots, a_5 sono coefficienti con le dimensioni di un'energia e k è un parametro adimensionale. Ogni termine rappresenta un aspetto fisico del nucleo:

1. *Termine di volume.* Prima approssimazione del legame prodotto dall'interazione forte che descrive il volume come proporzionale ad A .
2. *Termine di superficie.* Correzione del termine precedente per tenere conto delle minori interazioni dei nucleoni sulla superficie rispetto a quelli interni: il corto raggio dell'interazione forte comporta che questi contribuiranno in misura minore all'energia di legame del nucleo. Assumendo un nucleo di forma sferica, composto da A sfere di raggio r_0 disposte in maniera estremamente compatta, il numero di nucleoni prossimo alla superficie sarà proporzionale al quadrato del raggio nucleare $R^2 = (r_0A^{1/3})^2 \propto A^{2/3}$.
3. *Termine coulombiano.* Correzione data dalla repulsione elettrostatica tra protoni: all'aumentare di Z diminuisce l'energia necessaria per separarli. Ipotizzando in prima approssimazione un nucleo di carica uniforme $Q = 4/3\pi R^3\rho = Ze$, l'energia potenziale coulombiana per strappare un singolo protone (di carica $\delta q = 4\pi R^2\rho dR$) è

$$\begin{aligned} E_C &= \int_q \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot \delta q}{r^2} dr = \int_0^R \int_R^\infty \frac{4\pi\rho^2 R^5}{3\epsilon r^2} dr dR = \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} R^5 \\ &= \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \propto \frac{(eZ)^2}{r_0A^{1/3}}. \end{aligned}$$

Poiché la repulsione elettrostatica esiste solo in presenza di più di un protone, si corregge la formula come proporzionale a $Z(Z - 1)/A^{1/3}$, che risulta quindi nullo per $Z = 0, 1$.

4. *Termine di asimmetria.* Correzione quantomeccanica dovuta al principio di esclusione di Pauli per i fermioni. Sperimentalmente si ha una maggior stabilità per nuclei con $Z \approx N \approx A/2$, in quanto una possibile asimmetria di uno dei due tipi di nucleoni porterebbe all'occupazione di livelli energetici superiori, aumentando l'energia totale. La discrepanza che sottrae energia di legame è dunque modulata da $|N - Z| = |A - 2Z|$ e il suo impatto decresce all'aumentare di A , portando all'espressione di cui sopra.
5. *Termine di accoppiamento.* Correzione quantomeccanica che tiene conto dell'accoppiamento dello spin dei nucleoni. Coppie di fermioni simili hanno funzioni d'onda che si sovrappongono, permettendo una configurazione più compatta rispetto alla presenza di un nucleone spaiato. Dunque per Z, N pari, il termine di asimmetria aggiunge energia di legame a E_b , mentre per Z, N dispari la toglie. Ciò permette di spiegare la maggiore stabilità di nuclei con numero di nucleoni pari-pari e si può modellizzare come

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{se pari-pari} \\ 0 & \text{se pari-dispari} \\ -1 & \text{se dispari-dispari} \end{cases} .$$

Il valore dell'esponente k in Eq. (1.1) modula la dipendenza da $1/A$ ed è ricavato dai dati sperimentali.

I valori delle costanti a_i e del parametro k nell'Eq. (1.1) stimati da diversi autori sono espressi in Tab. 1.1. La principale limitazione del modello è data dal fatto che questo non tiene conto della struttura interna a *shell* dei nuclei, ignorando le correzioni date da ulteriori effetti quantomeccanici che regolano il comportamento dei fermioni nelle strutture nucleari, fornendo quindi una descrizione meno accurata per nuclei più leggeri.

Questa espressione permette di compiere un primo *fit* dell'andamento dell'energia media per nucleone \bar{E}_b al variare del peso atomico A , mostrando la tendenza peculiare presentata in Fig. 1: per i nuclei più leggeri \bar{E}_b cresce rapidamente, con un picco per

	Fermi	Green	Benzaid
a_1	14.04	15.76	14.93
a_2	13.04	17.81	15.06
a_3	0.58	0.71	0.66
a_4	19.32	23.70	21.61
k	3/4	3/4	1/2
a_5	33.50	33.6	10.17

TABELLA 1.1: Valori di a_i (in MeV) e k per la formula di Bethe–Weizsäcker stimati da Fermi e Green (come riportato da Arnett [4]), e Benzaid et al. [5].

l'elio ${}^4\text{He}$ di 7.07 MeV, fino a raggiungere un massimo di 8.79 MeV in $A = 56$, corrispondente al ferro; e successivamente cala gentilmente per gli elementi pesanti, arrivando a 7.57 MeV per ${}^{238}\text{U}$. Si può notare che l'energia di legame media risulta attorno a 8 MeV. Necessitando di maggiore energia per potersi scindere, i nuclei di ferro sono quindi i più stabili, e gli elementi più leggeri libereranno energia (che li rendeva meno stabili) attraverso la fusione in nuclei più pesanti, mentre quelli più pesanti libereranno energia attraverso scissione in nuclei più leggeri.

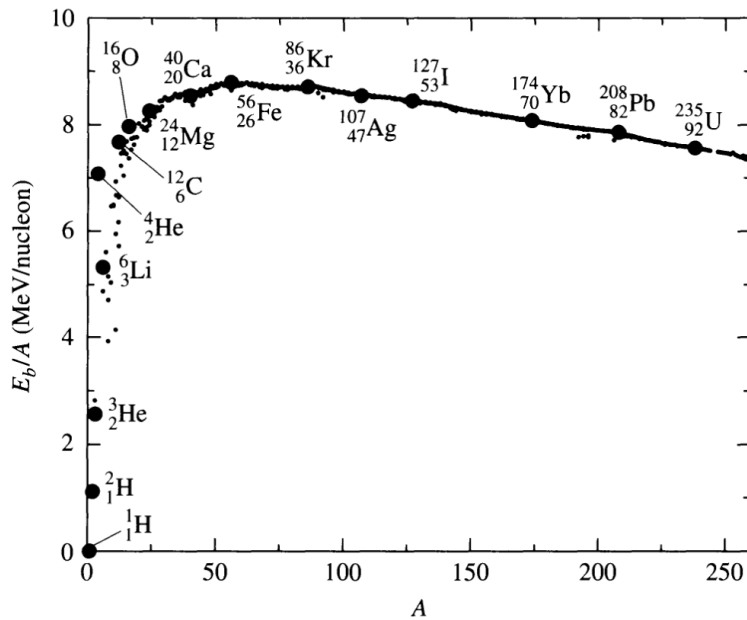


FIGURA 1: Andamento dell'energia di legame per nucleone in funzione della massa atomica A .

È in particolare grazie alla reazione esotermica di fusione di nuclei leggeri che le stelle sono in grado di generare sufficiente energia per contrarstare la contrazione gravitazionale dovuta alla loro massa. Nei capitoli 2.1, 2.2 e 3.1 si mostreranno gli specifici processi che portano al bruciamento di idrogeno ed elio in nuclei più pesanti fino alla produzione del ferro, spiegando (in parte) la presenza e l'abbondanza dei nuclei con massa atomica $A < 56$. Gli elementi più pesanti invece, avendo minore stabilità, non possono essere prodotti da reazioni di fusione nucleare, ma necessitano di processi di cattura neutronica.

1.2 Effetto tunnel quantistico

Affinché sia possibile il processo di fusione nucleare, è necessario che i nuclei carichi positivamente superino la repulsione coulombiana, avvicinandosi a sufficienza per permettere all'interazione forte attrattiva di entrare in azione e legarli. Si studia così la barriera elettrostatica e la relativa buca di potenziale data dalla forza nucleare.

Le proprietà del nucleo atomico (nel suo stato fondamentale) possono essere approximate in prima istanza attraverso un doppio gas di fermioni in condizione di massima degenerazione, cioè in cui protoni e neutroni, riempiendo i livelli energetici da quello minore a quello massimo (detto *di Fermi*), possono muoversi liberamente nel volume nucleare subendo solo (oltre ovviamente alle condizioni del principio di Pauli) le forze di contenimento dell'interazione forte, modellizzabile come un potenziale sferico $V_n(r)$ dipendente dalla distanza dal centro del nucleo r . Il nucleo atomico risulta quindi descrivibile energeticamente come una buca di potenziale di profondità W , che contiene i nucleoni entro un raggio R .

Inanzitutto si può stimare il raggio R di un nucleo con peso atomico A partendo dall'assunzione che questo sia composto da A sfere di raggio r_0 , in una configurazione ben compatta (cioè ignorando gli spazi vuoti tra i nucleoni): il volume complessivo risulterebbe dunque $V = (4\pi/3)R^3 = (4\pi/3)r_0^3A$, dando $R = r_0 A^{1/3}$. Il valore di r_0 si può calcolare come la lunghezza d'onda di Compton associata al nucleone $\lambda_C = h/(mc)$, dove h è la costante di Planck e c la velocità della luce nel vuoto, fornendo un valore medio di $r_0 = 1.3 \times 10^{-15}$ m. Per valutare la profondità del potenziale nucleare W si può studiare il comportamento dei nucleoni alla temperatura di 0 K. In questo caso particolare si ottiene un gas di fermioni degeneri, in cui le particelle occupano tutti gli stati energetici disponibili nella buca di potenziale nucleare a partire dal più basso E_0 fino al maggiormente

energetico, detto *livello di Fermi* E_F e caratterizzato da una quantità di moto p_F (detta momento di Fermi). Il volume disponibile ai fermioni nello spazio delle fasi è $(4\pi/3)p_F^3 V$, dove $V = (4\pi/3)r_0^3 A$ è il volume del nucleo, che se diviso per $(2\pi\hbar)^3$ (volume del singolo livello energetico nello spazio) permette di ottenere il numero di celle in cui possono disporsi coppie di protoni e coppie di neutroni. Dunque, assumendo un uguale numero di protoni e neutroni nel nucleo $Z = N = A/2$, si ottiene la relazione

$$4 \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{p_F}{2\pi\hbar} \right)^3 V = A$$

che fornisce l'espressione e il valore del momento di Fermi

$$p_F = \hbar \sqrt[3]{\frac{3\pi^2 A}{2V}} = \frac{\hbar \sqrt[3]{9\pi}}{2r_0} \approx 228 \text{ MeV}/c$$

da cui si può ricavare il valore della relativa energia di Fermi come $E_F = p_F^2/2m \approx 28 \text{ MeV}$. Se per ogni nucleone sono necessari in media 8 MeV di energia per strapparne dal nucleo, si può assumere che la profondità del potenziale nucleare sia $W \approx (28 + 8) \text{ MeV} \approx 36 \text{ MeV}$. Dunque si può assumere che l'interazione nucleare fornisca un potenziale sferico nel nucleo con una buca di profondità $W \approx 40 \text{ MeV}$ e raggio massimo di azione $R \approx A^{1/3} \times 10^{-15} \text{ m}$, oltre il quale non è possibile costruire stati legati.

La repulsione coulombiana sopracitata tra i nuclei carichi ha l'effetto di aumentare la barriera di potenziale, producendo l'andamento mostrato in Fig. 2: per una particella carica (di carica $Z_1 e$) che tenta di entrare o uscire dal nucleo (di carica $Z_2 e$), per tenere conto di questo effetto, è necessario sommare alla profondità appena trovata W l'energia potenziale elettrostatica generata:

$$V_C(Z_1, Z_2; r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}. \quad (1.2)$$

La fusione che permette di generare energia nelle stelle è dunque possibile solo se i nuclei riescono a superare tale barriera coulombiana. Assumendo un comportamento puramente classico delle particelle, cioè considerando che l'energia richiesta per superare la barriera provenga solamente dall'energia termica del gas di nuclei (e che questi si muovano a velocità non relativistiche), è possibile determinare la temperatura necessaria per la fusione. Poiché le particelle si muovono in maniera isotropa, è conveniente considerare la

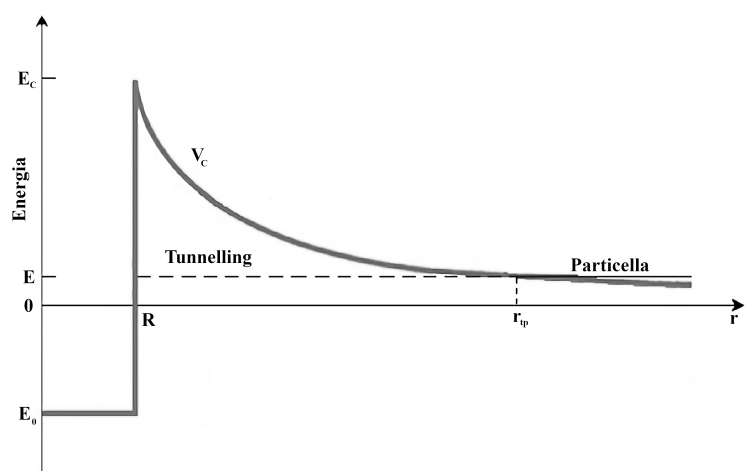


FIGURA 2: Andamento schematico del potenziale nucleare in funzione della distanza. Per $r < R$ il potenziale è attrattivo per l'interazione forte, mentre per $r > R$ risulta repulsivo per l'interazione coulombiana. Il valore r_{tp} indica il punto di inversione classica.

velocità relativa v tra due nuclei e la loro massa ridotta μ . Eguagliando l'energia cinetica per grado di libertà al valore dell'energia potenziale della barriera in Eq. (1.2) si ottiene (k_B è la costante di Boltzmann)

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{3}{2}k_B T_{\text{classica}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R}$$

$$T_{\text{classica}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{6\pi\epsilon_0 k_B R}. \quad (1.3)$$

Considerando per esempio la collisione tra due nuclei di idrogeno (singoli protoni, $Z_1 = Z_2 = 1$) per cui il raggio nucleare è $R = r_0 \approx 10^{-15}$ m, si ottiene una temperatura $T_{\text{classica}} \approx 1.32 \times 10^{10}$ K, che però risulta di gran lunga superiore alle migliori stime della temperatura del nucleo solare, dove avviene questa fusione, $T_{\text{core}} = 1.57 \times 10^7$ K. Anche tenendo in considerazione il fatto che la distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann con cui si descrive il gas permette ad un numero significativo di particelle di avere velocità superiori alla media, la fisica classica non è capace di spiegare il superamento della barriera coulombiana da parte di un sufficiente numero di nuclei per produrre la luminosità osservata del Sole e delle stelle in Sequenza Principale.

La risoluzione di questo problema sta nella natura quantomeccanica delle particelle considerate: è noto che, per il principio di indeterminazione di Heisenberg, non è possi-

bile conoscere sia la posizione che la quantità di moto di una particella quantistica con infinita precisione, ma le relative incertezze sono legate dalla relazione $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$. È quindi possibile che, in un urto con energia cinetica insufficiente a superare la barriera, l'incertezza sulla posizione di un protone che collide con un altro sia così grande che questo si può trovare anche all'interno della buca di potenziale determinata dall'interazione forte dell'altro. Questo processo puramente quantistico è noto come *effetto tunnel*, ed è possibile stimare la temperatura necessaria per ottenere l'energia cinetica richiesta: ricordando che le particelle quantistiche possono essere modellizzate anche come onde di lunghezza data dalle relazioni di De Broglie $\lambda = h/p$, si può scrivere l'energia cinetica in termini di quantità di moto, ed eguagliandola, come fatto precedentemente, all'energia potenziale della barriera si ottiene

$$\frac{1}{2}\mu\bar{v}^2 = \frac{p^2}{2\mu} = \frac{(h/\lambda)^2}{2\mu} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\lambda}.$$

Risolvendo dunque per λ e andando a sostituire $R = \lambda$ nell'Eq. (1.3) si ricava così la temperatura necessaria per permettere questo comportamento quantistico:

$$T_{\text{quantistica}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4 \mu}{12\pi^2 \epsilon_0^2 h^2 k_B} \quad (1.4)$$

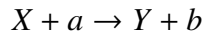
che, per un urto tra due protoni ($Z_1 = Z_2 = 1$, $\mu = m_p/2$), risulta $T_{pp} \approx 1.96 \times 10^7$ K, in linea con le stime della temperatura del nucleo solare. Il comportamento fondamentale di una stella è dunque dovuto a processi di natura prettamente quantistica.

1.3 Sezione d'urto e tasso di produzione energetica

Come appena visto, una reazione di fusione tra due nuclei di carica Z_1 e Z_2 può avvenire solo se l'energia cinetica fornita nell'urto è superiore del picco della barriera di potenziale coulombiana, proporzionale a $Z_1 Z_2$ MeV. In maniera specifica, si possono andare a studiare la probabilità di avvenimento di una reazione e il tasso di energia prodotta per costruire modelli su ciò che accade negli interni stellari.

In generale, presi i nuclei X , Y e le particelle (anche esse eventualmente nuclei) a , b ,

una reazione di urto di X con a che porta alla produzione di Y e b può essere scritta come



o nella forma condensata $X(a, b)Y$. Tale processo si può pensare che avvenga attraverso la formazione di un prodotto intermedio C , detto *nucleo composito*, che può poi decadere in una ampia varietà di prodotti finali (tra cui è compreso anche lo scattering delle particelle originarie (X, a) senza alcuna trasformazione) di cui quello sopra considerato (Y, b) è solo una possibilità. Tali modalità di decadimento sono dette *canali di uscita* della reazione e ciascuna è determinata dalla propria probabilità di decadimento Γ_i : la somma di tali probabilità per tutti i canali di uscita fornisce il tasso di decadimento complessivo Γ del nucleo composito. È rilevante notare che le reazioni $X + a \rightarrow C$ e $C \rightarrow Y + b$ avvengono in maniera indipendente l'una dall'altra e sono governate solo dalla loro probabilità di reazione ricavata dalle leggi della meccanica quantistica.

Fornendo maggiore energia a (X, a) la probabilità di reazione e formazione di C aumenterà, in quanto sarà più facile superare la barriera di potenziale. Tale progressivo aumento è in generale uniforme, per assottigliamento della barriera coulombiana, tranne in vicinanza dei livelli energetici del nucleo composito: per energie $E > 0$ gli stati in cui è possibile posizionare i fermioni del nucleo C , visualizzabili in Fig. 2 come bande orizzontali all'interno della buca, risultano *metastabili*, cioè vi è una probabilità non nulla che particelle qui locate attraversino la barriera per tunnelling ed escano dal nucleo. Allo stesso tempo, però, la probabilità di una particella di legarsi al nucleo per energie vicino a quelle dei livelli metastabili è fortemente facilitata: tale fenomeno di *risonanza* permette dunque di aumentare significativamente la sezione d'urto e quindi il tasso di reazione.

Le reazioni negli interni stellari considerate in questo testo, per temperature di $T_{\text{core}} = 10^7 - 10^9$ K e dunque per energie nell'intervallo $1 \text{ keV} < k_B T < 100 \text{ keV}$, sono per la maggior parte non risonanti, mentre il fenomeno diventa rilevante nel bruciamento di nuclei più pesanti dell'elio. Il caso della sezione d'urto per reazioni risonanti sarà esposto solo brevemente nel paragrafo 1.3.2.

Al fine di modellizzare le reazioni termonucleari per comprendere il comportamento delle stelle è necessario studiare l'energia totale liberata nel plasma stellare per unità di volume. Tale grandezza è dipendente da due principali fattori:

- Energia rilasciata dalla reazione nucleare, detta *Q-value*. Può essere definita ope-

rativamente come l'energia rilasciata dal canale di uscita della reazione nel limite che l'energia cinetica del moto relativo nel canale d'entrata sia trascurabile: per una reazione $X(a, b)Y$

$$Q = (\Delta M_i - \Delta M_f)c^2 = [(\Delta M_X + \Delta M_a) - (\Delta M_Y + \Delta M_b)]c^2 \quad (1.5)$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto e i ΔM sono gli *eccessi di massa* dei componenti. Questi sono definiti come la differenza tra la massa effettiva di un nucleo e il suo numero di massa in Dalton (o unità di massa atomica): rappresentano quindi l'espressione dell'energia di legame relativa a quella dell'isotopo del carbonio con numero di massa $A = 12$, che definisce il Dalton ($1 \text{ Da} = 1/12 M(^{12}\text{C})$).

Per valori di $Q > 0$ la reazione è esotermica, mentre per $Q < 0$ necessita che le sia fornita energia per avvenire. Nel caso di fusione di nuclei leggeri si avranno quindi Q positivi.

- Tasso di reazione, indicato con r . Esprime il numero di reazioni N_R per unità di volume e di tempo, ed è proporzionale a sua volta al prodotto tra la distribuzione di velocità delle particelle nel plasma e la *sezione d'urto* nucleare. Quest'ultima, indicata con σ , è una misura della probabilità di occorrenza della reazione nucleare per paio di particelle considerate, ma può essere pensata approssimativamente come la superficie all'interno della quale si verificano fenomeni di interazione tra i corpi (infatti si misura in barn, unità di misura di superficie, $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$), e risulta dipendente dalla velocità relativa del sistema "bersaglio"- "proiettile".

Considerando questo sistema semplificato di particelle bersaglio colpite da particelle proiettile, e detti N_b e N_p i rispettivi numeri di particelle, si può scrivere il tasso di reazione come il prodotto tra la probabilità complessiva di reazione dei bersagli e il flusso di particelle proiettile:

$$r = \frac{N_R}{V t} = (\sigma N_b) \left(\frac{N_p}{A t} \right) \frac{1}{V} = \sigma \frac{N_b}{V} \frac{N_p}{A t} = \sigma \frac{N_b}{V} v \frac{N_p}{V}$$

dove V è l'unità di volume e v la velocità relativa tra le particelle.

1.3.1 Reazioni non risonanti

Da quanto appena descritto, si può esprimere il tasso di reazione, per collisioni tra particelle di tipo 1 e 2, come

$$r_{12} = n_1 n_2 \sigma_{12}(v) v$$

dove $n_i = N_i/V$ sono le densità numeriche (cioè il numero di particelle di tipo i per unità di volume) dei nuclei, $\sigma_{12}(v)$ la sezione d'urto e v la velocità relativa tra i corpi.

Come noto, gli interni stellari sono composti da un plasma di atomi completamente ionizzati, date le elevate temperature. Nel caso di equilibrio idrostatico, ciò permette di descrivere i nuclei liberi come un gas non degenere in moto non relativistico (mentre per gli elettroni liberi quest'ultima assunzione può non essere valida data la massa estremamente inferiore), le cui velocità sono descritte dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann, che esprime la probabilità che la velocità relativa tra due particelle sia nell'intervallo tra v e $v + dv$

$$\mathcal{P}(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{mv^2}{2k_B T} \right] 4\pi v^2 dv$$

o, usando la relazione $v = \sqrt{2E/m}$ (da cui $dv = dE / \sqrt{2Em}$), che l'energia dell'urto sia compresa tra E ed $E + dE$

$$\mathcal{P}(E) dE = 2 \sqrt{\frac{E}{\pi}} (k_B T)^{-3/2} \exp \left[-\frac{E}{k_B T} \right] dE$$

con condizione di normalizzazione

$$\int_0^\infty \mathcal{P}(v) dv = \int_0^\infty \mathcal{P}(E) dE = 1.$$

La distribuzione di velocità $\mathcal{P}(v) dv$ ha massimo nel punto $v = \sqrt{2k_B T/m}$ corrispondente all'energia $E_{\max} = k_B T$, mentre la distribuzione delle energie $\mathcal{P}(E) dE$ ha massimo nel punto $E_{\max} = k_B T/2$.

Si può dunque scrivere l'espressione del tasso di reazione in maniera più generale considerando il fattore

$$\langle \sigma v \rangle_{12} = \int_0^\infty v \sigma_{12}(v) \mathcal{P}(v) dv = \int_0^\infty v \sigma_{12}(E) \mathcal{P}(E) dE \quad (1.6)$$

che rappresenta il valore medio del tasso di reazione per coppia di particelle, ottenendo quindi

$$r_{12} = \frac{n_1 n_2}{1 + \delta_{12}} \langle \sigma v \rangle_{12} \quad (1.7)$$

dove il termine al denominatore $1 + \delta_{12}$ è necessario per evitare il doppio conteggio di particelle uguali: nel caso la collisione fosse tra nuclei identici $\delta_{12} = 1$, mentre se sono diversi $\delta_{12} = 0$.

Si ricava l'espressione del tasso di reazione per coppia di particelle sostituendo in Eq. (1.6) l'espressione della distribuzione maxwelliana $\mathcal{P}(E) dE$ e $v = \sqrt{2E/\mu}$, dove $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ è la massa ridotta dei due corpi, ottenendo

$$\langle \sigma v \rangle_{12} = \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty E \sigma_{12}(E) e^{-E/(k_B T)} dE. \quad (1.8)$$

Trovato ciò, il problema si riduce dunque solo al calcolo dell'espressione della sezione d'urto σ_{12} . Questa, intesa come probabilità di reazione, si può considerare come proporzionale al prodotto tra la probabilità di superamento della barriera coulombiana e la probabilità che l'interazione avvenga (detta *sticking factor*)

$$\sigma_{12} \propto P_{\text{tunnel}} P_{\text{sticking}}.$$

La prima, come probabilità di penetrazione di un potenziale di larghezza finita per effetto tunnel, ha un'espressione esatta molto complicata. Nel caso qui considerato in cui la larghezza della barriera all'altezza delle energie cinetiche considerate è molto più lunga del tasso di decadimento dell'onda della particella (cioè $E \ll V(r)$), però, si può usare un'approssimazione

$$P_{\text{tunnel}} \propto \exp \left[-2 \int_{r_A}^{r_B} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} [V(r) - E]} dr \right]$$

dove $\hbar = h/2\pi$ è la costante di Planck ridotta e $V(r) \propto (Z_1 Z_2 e^2)/r$ è il potenziale coulombiano dall'Eq (1.2), e l'integrazione è compiuta tra i *punti di inversione classica*: questi sono le distanze dalla buca di potenziale in cui la barriera coulombiana eguaglia l'energia

cinetica classica del moto relativo $V(r) = E$, come mostrato in Fig. 2

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = \frac{1}{2} \mu v^2 \quad \Rightarrow \quad r_{\text{turning point}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v^2}.$$

La condizione $E \ll V(r)$ è quindi esprimibile come $r_0 \ll r_{\text{tp}}$, cioè il raggio del nucleone è molto inferiore al punto di inversione classica. In tale ipotesi, l'esponente può essere ulteriormente semplificato, fornendo

$$\begin{aligned} P_{\text{tunnel}} &= \exp \left[-2\pi \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \right) \right] = \exp [-2\pi\eta] \\ &= \exp \left[-\sqrt{2}\pi \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{E}} \right] = \exp \left[-\frac{b}{\sqrt{E}} \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

dove $v = \sqrt{2E/\mu}$ è la velocità relativa tra i nuclei in collisione.

Lo stickig factor può essere considerato come la sezione d'urto geometrica della particella, cioè l'area all'interno della quale può avvenire l'interazione, e può essere calcolato in prima approssimazione dall'espressione classica della sezione d'urto: usando l'espressione nota del raggio nucleare $R = r_0 A^{1/3}$

$$\sigma_{\text{classica}} = \pi(R_1 + R_2)^2 = \pi r_0^2 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})^2.$$

Per la dualità onda-particella dei corpi quantistici, le dimensioni di un nucleone sono dell'ordine della lunghezza d'onda di De Broglie ridotta $r_0 \approx \lambda = \lambda/2\pi$ (con $\lambda = k^{-1}$ inverso del numero d'onda), per cui la probabilità di interazione risulta proporzionale a

$$P_{\text{sticking}} \propto \pi \lambda^2 = \pi \left(\frac{h}{\mu v} \right)^2 = \frac{\pi h^2}{2\mu} \frac{2}{\mu v^2} \propto \frac{1}{E} \quad (1.10)$$

Dove si è usata la relazione non relativistica $E = 1/2\mu v^2$.

Combinando assieme le Eq. (1.9) e (1.10) si può dunque ricavare l'espressione della sezione d'urto complessiva tra nuclei in collisione, ottenendo

$$\sigma_{12} = \frac{S(E)}{E} e^{-2\pi\eta} \quad (1.11)$$

dove $S(E)$ è una funzione dipendente dall'energia che contiene le informazioni sulle

caratteristiche nucleari intrinseche del problema. Questa, nell'ipotesi di reazione non-risonante, è una funzione che varia lentamente all'aumentare dell'energia e in ulteriore approssimazione può essere considerata semplicemente costante. Poiché, come detto in precedenza, non esiste una teoria completa dei nuclei atomici, i valori della funzione $S(E)$ devono essere ricavati sperimentalmente o in maniera semiempirica.

Sostituendo l'Eq. (1.11) nell'Eq. (1.8) si ottiene così l'espressione del tasso di reazione per paio di particelle:

$$\langle \sigma v \rangle_{12} = \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty S(E) \exp \left[-\frac{E}{k_B T} - \frac{b}{\sqrt{E}} \right] dE. \quad (1.12)$$

Data la quasi costanza del fattore $S(E) = S_0$, questo può essere rimosso dall'integrale, lasciando l'integrando solo come prodotto di due esponenziali: il primo rapidamente decrescente ($e^{-E/k_B T}$, dovuto alla distribuzione maxwelliana che descrive l'agitazione termica), e il secondo lentamente crescente ($e^{-b/\sqrt{E}}$, dovuto alla probabilità di penetrazione della barriera coulombiana) all'aumentare di E

$$I = \int_0^\infty \exp \left[-\frac{E}{k_B T} - \frac{b}{\sqrt{E}} \right] dE = \int_0^\infty e^{q(E)} dE.$$

Ciò porta ad avere una funzione integranda complessiva con un forte picco per un valore $E = E_0$, l'energia più efficiente per le reazioni non-risonanti, ricavabile come la derivata prima per l'energia dell'esponente dell'integrando

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} q(E) \Big|_{E=E_0} &= \frac{d}{dE} \left(-\frac{E}{k_B T} - \sqrt{2\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{E}} \right) \Big|_{E=E_0} = \frac{\sqrt{2\pi} Z_1 Z_2 e^2}{2} \frac{\sqrt{\mu}}{E_0^{3/2}} - \frac{1}{k_B T} = 0 \\ E_0 &= \left(\frac{b k_B T}{2} \right)^{2/3} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi e^2 k_B}{\hbar} \right)^2 (Z_1 Z_2)^2 \mu T^2 \right]^{1/3}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

detto *picco di Gamow* e mostrato in Fig. 3. Questo risulta molto maggiore al massimo della distribuzione maxwelliana $E_{\max} = k_B T$, spostamento dovuto al termine coulombiano. Di conseguenza, il maggior contributo al tasso di reazione proviene da un intervallo di energie piuttosto limitato e nella coda alta della distribuzione maxwelliana, in maniera dipendente dalle cariche e dalle masse dei nuclei considerati e dalla temperatura del plasma stellare. In particolare il *Gamow peak* aumenta e l'area sottesa dalla curva della funzione

integranda diminuisce all'aumentare della carica dei corpi in collisione: ciò significa che, in un plasma di diversa composizione a temperatura fissata, le reazioni con la barriera coulombiana minore avvengono più frequentemente e contribuiranno maggiormente alla produzione energetica rispetto a quelle che coinvolgono nuclei più pesanti, le quali si consumeranno meno rapidamente e forniranno meno energia termonucleare.

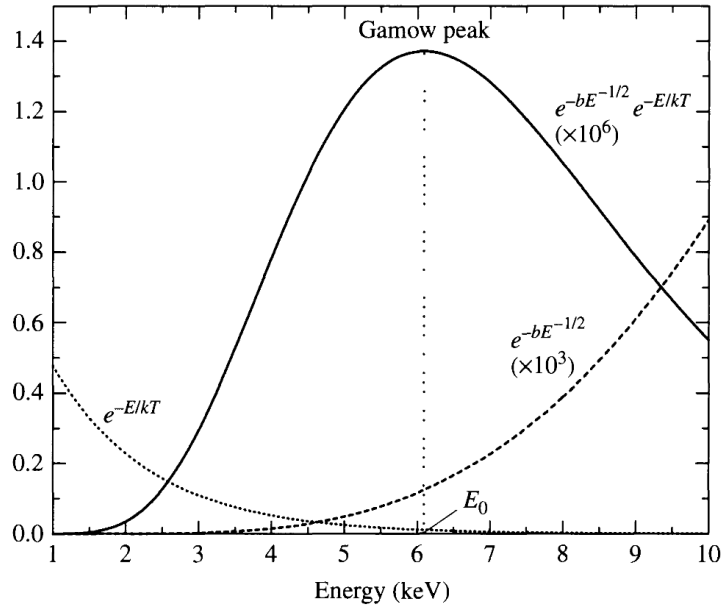


FIGURA 3: Probabilità dell'avvenimento di una reazione di fusione nucleare in funzione dell'energia. Il picco di Gamow E_0 sorge dai contributi della coda superiore della distribuzione di Maxwell-Boltzmann $e^{-E/kT}$ e del termine di tunneling $e^{-bE^{-1/2}}$. Il termine di tunneling e l'andamento della probabilità complessiva sono moltiplicati rispettivamente per 10^3 e 10^6 per facilitare la lettura.

Al fine di trovare un'espressione più facilmente maneggiabile del tasso di reazione per coppia di particelle, si può approssimare la funzione del picco di Gamow con una funzione gaussiana avente stesso massimo per $E = E_0$ e stessa curvatura attorno al picco. Studiando la funzione integranda $e^{q(E)}$ e utilizzando l'Eq. (1.13) si ricava

$$e^{q(E)} = \exp \left[-\frac{E}{k_B T} - \sqrt{2\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{E}} \right] = \exp \left[-\frac{E}{k_B T} - \frac{2E_0^{2/3}}{\sqrt{E} k_B T} \right] \quad (1.14)$$

che può essere manipolato per ottenere la forma gaussiana

$$e^{q(E)} \approx \exp\left[-\frac{3E_0}{k_B T}\right] \exp\left[-\left(\frac{E - E_0}{\Delta/2}\right)^2\right]. \quad (1.15)$$

In particolare l'ampiezza della curva Δ si ricava dall'imposizione che le derivate seconde degli esponenziali delle Eq. (1.14) e (1.15) siano uguali al picco $E = E_0$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dE^2} \left(\frac{E}{k_B T} + \frac{2E_0^{2/3}}{\sqrt{E}k_B T} \right) \Big|_{E=E_0} &= \frac{d^2}{dE^2} \left(\frac{E - E_0}{\Delta/2} \right)^2 \Big|_{E=E_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} \frac{1}{E_0 k_B T} = \frac{2}{(\Delta/2)^2} \\ \Delta &= 4 \sqrt{\frac{E_0 k_B T}{3}} = \left[\frac{2048}{27} \left(\frac{\pi e^2}{\hbar} \right)^2 k_B^5 (Z_1 Z_2)^2 \mu T^5 \right]^{1/3}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Attraverso tale modellizzazione si ha dunque che le reazioni di fusione avvengono prevalentemente nell'intervallo $E_0 \pm \Delta/2$, e si può notare come l'ampiezza aumenti al crescere di temperatura e carica dei nuclei considerati, fornendo intervalli più ampi.

È quindi possibile, per reazioni non-risonanti, sostituire in prima approssimazione la funzione del picco di Gamow con una gaussiana nell'Eq. (1.12) del tasso di reazione per coppia di particelle:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle_{12} &= \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} (k_B T)^{-3/2} S_0 \int_0^\infty \exp\left[-\frac{E}{k_B T} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right] dE \\ &= \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} (k_B T)^{-3/2} S_0 e^{-3E_0/(k_B T)} \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{E - E_0}{\Delta/2}\right)^2\right] dE. \end{aligned}$$

Per semplificare la risoluzione è possibile estendere l'integrale fino a $-\infty$ in quanto l'apporto dato dalla coda bassa della curva è quasi nullo, ottenendo però così il valore noto dell'integrale della gaussiana $\sqrt{\pi} \Delta/2$ e ricavando

$$\langle \sigma v \rangle_{12} = \left(\frac{2}{\mu} \right)^{1/2} \frac{\Delta}{(k_B T)^{3/2}} S_0 e^{-3E_0/(k_B T)}. \quad (1.17)$$

Ora si può definire il termine

$$\tau \equiv \frac{3E_0}{k_B T} = \left[\frac{27}{2} \left(\frac{\pi e^2}{\hbar} \right)^2 (Z_1 Z_2)^2 \mu (k_B T)^{-1} \right]^{1/3} \quad (1.18)$$

per sostituirlo nell'Eq. (1.17). Utilizzando anche le Eq. (1.13) e (1.16) si ottiene

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle_{12} &= \left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/2} \frac{\Delta}{(k_B T)^{3/2}} S_0 e^{-\tau} (\tau^2 \tau^{-2}) = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} \frac{\hbar}{3\pi e^2} \frac{S_0}{\mu Z_1 Z_2} \tau^2 e^{-\tau} \\ &= C T^{-2/3} e^{-\tau}\end{aligned}\quad (1.19)$$

in cui nell'ultimo passaggio si sono usate le Eq. (1.18) e (1.13) per esplicitare la dipendenza dalla temperatura.

È quindi possibile trovare l'espressione del tasso di reazione complessivo combinando le Eq. (1.7) e (1.19). In particolare, r_{12} si può esprimere attraverso quantità ricavabili teoricamente o misurabili sperimentalmente, come la densità di massa del plasma stellare ρ e la frazione di massa X degli isotopi considerati nella collisione: partendo dalla densità numerica n si ottiene

$$n = \rho \frac{N_A}{M_m} = \rho \frac{N_A}{A_r \cdot M_u} = \rho N_A \frac{X}{A \cdot M_u},$$

dove $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ è la costante di Avogadro e $M_m = A_r \cdot M_u$ la massa molare, pari al prodotto tra peso atomico relativo A_r dell'elemento di cui si sta considerando l'isotopo e costante di massa molare $M_u \approx 1 \text{ g/mol}$. A sua volta il peso atomico relativo per una singola specie isotopica è pari al rapporto tra massa atomica dell'isotopo A e frazione di massa dell'isotopo X su tutta la massa del plasma. Esplicitato ciò per entrambe le densità numeriche n_1 e n_2 (e ignorando le costanti di massa molare), l'Eq. (1.7) risulta

$$r_{12} = \rho^2 N_A^2 \frac{X_1 X_2}{A_1 A_2} \frac{\langle\sigma v\rangle_{12}}{1 - \delta_{12}}. \quad (1.20)$$

A questo punto è possibile ricavare il tasso di produzione energetica per unità di massa come il rapporto tra il prodotto di tasso di reazione r_{12} e l'energia rilasciata per reazione Q (Q -value, Eq. (1.5)), e la densità di massa del plasma stellare:

$$\epsilon = \frac{r_{12} \cdot Q}{\rho} = \rho N_A^2 \frac{X_1 X_2}{A_1 A_2} \frac{\langle\sigma v\rangle_{12}}{1 - \delta_{12}} \cdot Q. \quad (1.21)$$

Una delle caratteristiche più importanti che determina il tasso di produzione energetica è la temperatura dell'interno stellare in cui avvengono le reazioni di fusione. È quindi molto utile esprimere ϵ , e cioè dunque $\langle\sigma v\rangle$ dove è contenuta la dipendenza, come funzione esplicita della temperatura: per fare ciò si considera il tasso di reazione per coppia

di particelle attorno ad un punto di energia $T = T_0$ come una funzione di potenze

$$\langle \sigma v \rangle_T = \langle \sigma v \rangle_{T_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^\nu \quad (1.22)$$

il cui esponente ν si può ricavare come

$$\begin{aligned} \ln \langle \sigma v \rangle_T &= \ln \langle \sigma v \rangle_{T_0} + \nu (\ln T - \ln T_0) \\ \nu &= \frac{\partial \ln \langle \sigma v \rangle_T}{\partial \ln T}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

In particolare dall'Eq. (1.23) si può ricavare l'espressione della dipendenza dalla temperatura conoscendo le Eq. (1.19) e (1.18), che forniscono

$$\begin{aligned} \ln \langle \sigma v \rangle_T &= \ln C - \frac{2}{3} \ln T - \tau \\ \nu = \frac{\partial \ln \langle \sigma v \rangle_T}{\partial \ln T} &= -\frac{2}{3} - \frac{\partial \tau}{\partial \ln T} = -\frac{2}{3} - \tau \frac{\partial \ln (C' T^{-1/3})}{\partial \ln T} = \frac{\tau}{3} - \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Al fine di calcolare il tasso di produzione energetica per una data reazione termonucleare non-risonante è dunque necessario trovare il picco di Gamow ad una data temperatura e il rispettivo valore di τ .

1.3.2 Reazioni risonanti

Come visto in precedenza, le reazioni di fusione nucleare possono avvenire attraverso la formazione di un nucleo composito intermedio, il quale poi decade nei prodotti effettivi della reazione. In certi casi particolari, l'energia delle particelle incidenti si trova all'interno dell'intervallo di energie di uno stato *metastabile*, o eccitato, del nucleo composito. Dal punto di vista quantomeccanico ciò significa che la fase della funzione d'onda complessiva delle particelle in fusione risulta compatibile con quella dello stato eccitato del nucleo prodotto, portando ad una facilitazione del processo di reazione. Queste energie che permettono la formazione di stati metastabili sono dette *di risonanza*, e portano ad un sostanziale aumento della sezione d'urto e del tasso di reazione.

Il caso più rilevante di risonanza per gli studi astrofisici è quello di *risonanze limitate* (*narrow resonances*) e isolate, in cui le energie di formazione degli stati eccitati del nu-

cleo composito sono circoscritte in un intervallo poco esteso attorno all'energia E_r , per cui si ha il picco massimo, e non vi sono sovrapposizioni tra le ampiezze di risonanze diverse. Per questa condizione, dunque, uno stato eccitato possiede due grandezze rilevanti, le quali sono necessarie per il calcolo della sezione d'urto. Dapprima si ha l'energia di risonanza E_r , per cui la sezione d'urto ha un massimo, il cui valore è approssimabile a quello dell'energia media della banda dello stato metastabile. Si ha poi l'ampiezza della risonanza, espressa con Γ , che indica la probabilità complessiva di avvenimento della reazione attraverso la risonanza e risulta pari alla somma delle probabilità dei singoli canali di uscita della reazione. Il suo valore è dipendente dalla costante di tempo τ (*mean lifetime*) del nucleo composito come $\Gamma = \hbar/\tau$: più velocemente questo decade, maggiore è la probabilità che una reazione di fusione abbia energia interna alla banda di risonanza, mentre stati più stabili con τ elevati hanno ampiezze molto piccole e dunque minor probabilità di avvenire attraverso risonanza. Il caso di risonanze limitate è dunque da intendersi con ampiezze Γ relativamente piccole, per cui la probabilità di formazione dello stato metastabile diminuisce velocemente con l'allontanarsi dall'energia di risonanza E_r .

La sezione d'urto data da una singola risonanza limitata e isolata per la fusione di particelle cariche con spin si può esprimere attraverso una versione della formula di Breit-Wigner. Ricavare formalmente tale formula risulta complicato, ma la sua espressione può essere costruita in maniera più semplice considerando gli aspetti fisici delle componenti. In primo luogo si ha un fattore geometrico che esprime l'approssimazione classica della sezione d'urto: come anche visto nel paragrafo 1.3.1, per due nuclei di raggio rispettivamente R_1 e R_2 , e ricordando l'espressione del raggio nucleare attraverso quello del singolo nucleone $R = r_0 A^{1/3}$, questa risulta

$$\sigma_{\text{classica}} = \pi(R_1 + R_2)^2 = \pi r_0^2 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})^2 \propto \pi \lambda^2$$

in quanto, come particelle quantomeccaniche, i nucleoni hanno dimensioni dell'ordine della loro lunghezza d'onda di De Broglie ridotta $r_0 \approx \lambda = \lambda/2\pi$. Inoltre si ha la relazione, posti k numero d'onda e μ massa ridotta

$$\lambda = \frac{1}{k} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu E}}$$

Al fine di modellizzare una risonanza è necessario tenere conto delle probabilità dei

canali di uscita della reazione. Uno stato eccitato può decadere in due principali modalità: dividendosi nelle particelle reagenti iniziali attraverso lo stesso canale con cui era stato formato (processo detto *scattering elastico*), oppure diseccitandosi per emissione di raggi gamma o, più raramente, attraverso la formazione di coppie elettrone - positrone. La sezione d'urto della reazione sarà dunque dipendente dalle probabilità di avvenimento di questi due canali, in particolare come prodotto tra l'ampiezza del canale di scattering elastico Γ_a e quella del canale di diseccitazione Γ_γ . La distribuzione relativistica di Breit-Wigner risulta modulata inoltre da un termine $[(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1}$ che, analogamente al ruolo di $S(E)$ nelle reazioni non risonanti, racchiude gli aspetti prettamente fisici della reazione.

Infine, per reazioni tra particelle con spin è necessario considerare anche il momento angolare totale pesato delle particelle coinvolte nella fusione. Ciò è necessario in quanto, posto $\vec{J} = \vec{\ell} + \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ momento angolare totale dello stato risonante con $\vec{\ell}$ suo momento angolare orbitale e \vec{j}_i momenti di spin delle particelle incidenti, si hanno diversi orientamenti di spin possibili dello stato risonante, dati dal numero quantico magnetico. Dunque la sezione d'urto deve essere moltiplicata per la probabilità di trovare le particelle bersaglio e proiettile nello stato finale di spin totale J , sapendo le loro condizioni di momento angolare iniziali j_1 e j_2 . Questa informazione è contenuta nel termine

$$\omega = \frac{2J + 1}{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)}$$

dove si è considerato $\ell = 0$ per semplicità.

Combinando quanto appena detto si ottiene dunque la formula di Breit-Wigner per una singola risonanza limitata tra particelle cariche e con spin:

$$\sigma_{\text{BW}}(E) = \pi\lambda^2 \frac{2J + 1}{(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)} \frac{\Gamma_a \Gamma_\gamma}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} = \frac{\pi\lambda^2 \omega (\Gamma_a \Gamma_\gamma)}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (1.25)$$

Utilizzando questa sezione d'urto si può ricavare il tasso di reazione per coppia di parti-

celle per reazioni risonanti, sostituendo l'Eq. (1.25) nella (1.8):

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle &= \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty E \sigma_{\text{BR}}(E) e^{-E/(k_B T)} dE \\ &= \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{8\pi}{\mu}\right)^{1/2} (k_B T)^{-3/2} \omega \int_0^\infty \frac{\Gamma_a \Gamma_\gamma}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} e^{-E/(k_B T)} dE.\end{aligned}$$

Per una risonanza sufficientemente limitata, il fattore esponenziale di Maxwell-Boltzmann $\exp[-E/(k_B T)]$ e le ampiezze parziali Γ_i possono essere considerate costanti sull'ampiezza totale della risonanza, ed essere così sostituite con i loro valori all'energia di risonanza E_r . Si può quindi far emergere nell'integrale l'espressione della distribuzione relativistica di Breit-Wigner, che se integrata su tutto l'intervallo reale (l'ampliamento degli estremi di integrazione è possibile perché l'apporto della coda negativa è comunque trascurabile) vale π :

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle &= \frac{\hbar^2}{2} \frac{(8\pi)^{1/2}}{(\mu k_B T)^{3/2}} e^{-E_r/(k_B T)} \omega \frac{2\Gamma_a \Gamma_\gamma}{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma/2}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} dE \\ &= \hbar^2 \left(\frac{2\pi}{\mu k_B T}\right)^{3/2} e^{-E_r/(k_B T)} \omega \frac{\Gamma_a \Gamma_\gamma}{\Gamma}.\end{aligned}$$

Dato che i valori delle ampiezze parziali e totale si possono considerare costanti, fissata la risonanza, si compie la sostituzione $\gamma = \Gamma_a \Gamma_\gamma / \Gamma$ e si ottiene l'espressione del tasso di reazione per coppia di particelle

$$\langle\sigma v\rangle = \hbar^2 \left(\frac{2\pi}{\mu k_B T}\right)^{3/2} e^{-E_r/(k_B T)} \omega \gamma. \quad (1.26)$$

La grandezza $\omega \gamma$, chiamata *intensità di risonanza (resonance strength)* e dalle dimensioni di un'energia, è proporzionale all'area sottesa dalla sezione d'urto di risonanza e i suoi valori si possono ricavare sperimentalmente. Un caso particolare si può vedere per particelle cariche ad alte energie ($E_r \gtrsim 0.5$ MeV), per cui la probabilità di decadimento per diseccitazione è molto minore di quella per scattering elastico $\Gamma_\gamma \ll \Gamma_a$. Si ha così, ricordando che l'ampiezza totale di risonanza è $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_\gamma$, che l'intensità di risonanza risulta

$$\omega \gamma = \omega \frac{\Gamma_a \Gamma_\gamma}{\Gamma_a + \Gamma_\gamma} \approx \omega \frac{\Gamma_a \Gamma_\gamma}{\Gamma_a} = \omega \Gamma_\gamma,$$

cioè dipende solo dall'ampiezza parziale di diseccitazione attraverso emissione di raggi gamma.

È possibile ricavare la dipendenza diretta del tasso di reazione per coppia di particelle dalla temperatura. In primo luogo, dall'Eq. (1.26) questo può essere espresso come

$$\langle \sigma v \rangle_T = C' T^{-3/2} e^{-E_r/(k_B T)} \quad (1.27)$$

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo 1.3.1, si può considerare $\langle \sigma v \rangle_T$ attorno ad un punto di energia $T = T_0$ come una funzione di potenze, il cui esponenziale ha la stessa espressione ricavata in Eq. (1.23)

$$v = \frac{\partial \ln \langle \sigma v \rangle_T}{\partial \ln T}.$$

Utilizzando l'espressione in Eq. (1.27), si ha dunque

$$\ln \langle \sigma v \rangle_T = \ln C' - \frac{3}{2} \ln T - \frac{E_r}{k_B T}$$

da cui l'esponente

$$v = -\frac{3}{2} - \frac{E_r}{k_B} \frac{\partial(T^{-1})}{\partial \ln T} = (11.605 \times 10^6 \text{ K/keV}) \frac{E_r}{T} - \frac{3}{2}. \quad (1.28)$$

Quindi, per calcolare il tasso di produzione energetica di una reazione che avviene attraverso una risonanza limitata e isolata è necessario solo conoscere l'energia di risonanza E_r e la sua intensità $\omega\gamma$. Ciò permette di ignorare la forma esatta della curva della sezione d'urto della risonanza, consentendo il calcolo teorico di numerose reazioni che altrimenti non sarebbero possibili, se necessitassero dei valori delle ampiezze parziali e totali, non essendo questi sperimentalmente noti.

1.4 Interazione debole nei nuclei

Come visto, le reazioni nucleari di importanza astrofisica, cioè quelle che nelle stelle producono energia e fanno progredire la nucleosintesi, sono governate in ampia misura dalla forza nucleare e dalla forza elettromagnetica. A fianco di queste, inoltre, un ruolo fon-

damentale è svolto anche dall'interazione debole. Infatti, per esempio, quando durante i bruciamenti nucleari è prodotto un nuclide instabile, il suo decadimento attraverso un processo di interazione debole compete con la sua distruzione per fusione nucleare, e le proporzioni con cui queste reazioni avvengono influenzano le abbondanze degli elementi e dei loro isotopi nel cosmo. Inoltre, i neutrini emessi da questi decadimenti, interagendo solo molto debolmente con la materia barionica in condizioni di densità non critiche, riescono a uscire molto facilmente dagli interni stellari, sottraendo energia a quella prodotta e utilizzabile per contrastare la pressione gravitazionale delle stelle. Infine, le interazioni deboli determinano il rapporto tra protoni e neutroni nel plasma stellare, parametro cruciale nelle fasi più avanzate dei bruciamenti in stelle massive, in cui vengono sintetizzati gli elementi più pesanti del ferro attraverso catture neutroniche, e negli stadi finali per i meccanismi che portano alle supernovæ.

Nonostante le particelle leptoniche nel Modello Standard siano dodici, considerando anche le controparti antimateriche, le più rilevanti nell'ambito dei processi stellari sono solo quattro: l'elettrone e^- , chiamata anche *particella β* , il positrone e^+ , il neutrino elettronico ν_e e l'antineutrino elettronico $\bar{\nu}_e$ (d'ora in poi, per questioni di semplicità, con le sole notazioni "neutrino", "antineutrino", ν e $\bar{\nu}$ si intenderà lo specifico sapore di neutrino/antineutrino elettronico). Questi sono infatti coinvolti nei processi di decadimento β dei nuclei, in cui protoni e neutroni possono mutare uno nell'altro producendo particelle elettroniche. Le principali reazioni che coinvolgono queste quattro particelle sono:

- *decadimento β^-* , in cui si ha l'emissione di un elettrone assieme ad un antineutrino (per conservazione del numero leptonic) dovuto al decadimento di un neutrone in protone. Questo è il processo che avviene spontaneamente per il neutrone libero, data la sua massa maggiore rispetto al protone, che invece è stabile.



- *decadimento β^+* , in cui sono emessi un positrone e un neutrino per decadimento di un protone in neutrone. Questo processo non può avvenire per un protone isolato data la sua stabilità e la differenza di massa tra questo e il neutrone. Può quindi accadere solo se il nucleo prodotto possiede un'energia di legame maggiore rispetto

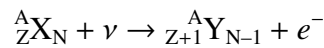
a quello che decade, trovandosi quindi in condizione di maggiore stabilità.



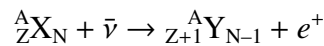
- *cattura elettronica*, in cui la fusione tra un protone e un elettrone produce un neutrone ed emette un antineutrino. Dato che i nuclei prodotti sono gli stessi del decadimento β^+ , queste reazioni possono considerarsi analoghe, anche se in determinate circostanze è utile differenziarle: se per esempio la differenza tra le masse atomiche dei nuclidi risulta $[\Delta M({}^A_Z X_N) - \Delta M({}^A_{Z+1} Y_{N-1})] c^2 < 2m_e c^2 = 1022 \text{ keV}$ (con m_e massa dell'elettrone), solo la cattura elettronica è permessa energeticamente.



- *cattura neutrinica*, in cui si ha l'interazione tra un neutrino e un neutrone, producendo un protone e un elettrone. Sebbene questa reazione sia estremamente rara in condizioni di laboratorio, il suo avvenimento è stato di fondamentale importanza per lo studio dei neutrini solari.



- *cattura antineutrónica*, in cui si ha, analogamente a sopra, l'interazione di un antineutrino con un protone, producendo un neutrone e un positrone. Anche in questo caso il suo avvenimento in laboratorio è improbabile, ma tale reazione è stata osservata con antineutrini prodotti dal materiale fissile di centrali nucleari.



Seppure la loro massa sia estremamente piccola e le possibili interazioni con la materia barionica molto rare, i neutrini hanno un'influenza rilevante sulla fisica delle stelle. Questi infatti svolgono un ruolo importante nel trasporto energetico dagli interni stellari alla superficie, in particolare durante gli stadi avanzati in stelle massive. Per temperature elevate ($T > 10^9 \text{ K}$), infatti, un grande numero di fotoni ha energie sufficienti per la produzione spontanea di coppie elettrone - positrone, $\gamma \rightarrow e^- + e^+$, che poi possono

conseguentemente annichilirsi attraverso i due canali $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$, oppure $e^- + e^+ \rightarrow \nu + \bar{\nu}$. I neutrini di quest'ultima reazione riescono poi a fuggire facilmente dagli interni stellari, e tale meccanismo risulta dominante nella perdita di energia per le fasi evolutive avanzate delle stelle massive.

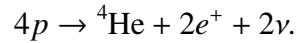
2. Bruciamento di idrogeno

L'idrogeno è l'elemento più leggero e abbondante nell'universo, in particolare nel suo isotopo più stabile *pròzio* ${}^1\text{H}$, il cui nucleo è composto da un singolo protone. Queste caratteristiche lo rendono il principale componente delle nebulose e dunque il principale costituente delle stelle che nascono da tali regioni dello spazio. I processi di fusione che sostengono la pressione gravitazionale delle stelle iniziano quindi con il bruciamento di idrogeno in elio, data la minore barriera coulombiana tra nuclei, e dunque la minore temperatura di innesco.

Dal raggiungimento delle temperature necessarie per il bruciamento di idrogeno nel nucleo stellare, al sostanziale termine della fusione nel *core* per rarefazione e carenza di protoni liberi, la stella si definisce nella fase di *Sequenza Principale (Main Sequence)*. Questo periodo è estremamente rilevante poiché è la fase più lunga nella vita di ogni stella, variando da milioni di anni ($\sim 10^6$ a) per stelle più massive e luminose di tipo *O* nella scala Morgan-Keenan, fino a centinaia o migliaia di miliardi ($\geq 10^{12}$ a) per quelle di tipo *M*, di massa minore e piccole. Di conseguenza il numero di stelle osservate in Sequenza Principale è estremamente più elevato rispetto a quello di stelle in qualsiasi altra fase evolutiva. Ciò è dovuto alla maggiore energia prodotta nella fusione di idrogeno rispetto ai successivi processi di bruciamento di elementi più pesanti, che fa inoltre in modo che le caratteristiche principali di luminosità e raggio stellare rimangano prevalentemente costanti durante la Sequenza Principale.

Il bruciamento di idrogeno in elio (chiamato anche *particella α*) consiste sostanzialmente nella fusione di quattro protoni in un nucleo di elio e, nel Modello Solare Standard, può avvenire attraverso due principali percorsi, in base alla temperatura e alla composizione chimica stellare: per stelle di massa minore di $1.3M_{\odot}$ (dove $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30}$ kg è la massa solare) dominano le *catene protone-protone* discusse nel Cap. 2.1, mentre per stelle più massive, nei cui nuclei si raggiungono temperature più elevate, e in stelle più giovani (dunque più ricche di elementi più pesanti di idrogeno ed elio) si ha maggiore rilevanza dei *cicli CNO*, discussi nel Cap. 2.2, più complessi e che coinvolgono isotopi di

nuclei più pesanti. Entrambe completano la reazione generale



Indifferentemente dal processo di fusione si può calcolare una prima stima dell'energia fornita da questo bruciamento, ignorando l'energia persa attraverso la produzione delle particelle leptoniche (positroni e^+ e neutrini elettronici ν_e): utilizzando l'Eq. (1.5) si ottiene

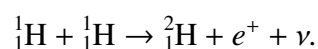
$$Q_{\text{H}} = [4 \cdot \Delta M({}^1\text{H}) - \Delta M({}^4\text{He})]c^2 = 4 \cdot (7.289 \text{ MeV}) - (2.425 \text{ MeV}) = 26.731 \text{ MeV}$$

per ogni reazione. Questo valore, confrontato con l'energia prodotta dal bruciamento di elio (come sarà mostrato nel Cap. 3.1) di $Q_{\text{He}} = 7.275 \text{ MeV}$, dimostra la portata e l'importanza della fusione dell'idrogeno.

2.1 Catena protone-protone

A temperature di circa $1.2 \times 10^7 \text{ K}$ il processo di fusione dell'idrogeno avviene attraverso una serie di reazioni denominate *catena protone-protone* o *p-p chain*. Questa è in realtà composta da tre sequenze di processi nucleari, mostrate in Tab. 2.1, che avvengono in maniera più o meno indipendente tra di loro, in base alla disponibilità dei combustibili e della temperatura nel nucleo stellare. Come si può notare, tutte e tre le catene condividono le prime due reazioni in cui si consumano tre protoni per produrre l'isotopo ${}^3\text{He}$ dell'elio, e si differenziano poi per come questo nucleo viene conseguentemente bruciato per produrre l'isotopo più stabile ${}^4\text{He}$. In particolare, data la maggiore repulsione coulombiana tra isotopi di elio, le catene PP2 e PP3 necessitano di temperature maggiori della PP1 per diventare rilevanti e richiedono che la prima catena abbia prodotto un numero sufficiente di nuclei di ${}^4\text{He}$. Queste reazioni consentono inoltre la formazione di piccole quantità di nuclei più pesanti, tra cui litio, berillio e boro.

La prima reazione di ogni catena consiste nella fusione di due protoni in un nucleo di *deuterio*, ${}^2\text{H}$ o *d*, producendo inoltre un positrone e^+ e un neutrino elettronico ν :



Catena	Reazioni	Q (MeV)	\bar{E}_ν (MeV)	t (s)
PP1	$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu$	1.442	0.265	10^{17}
	$d + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	5.493		
	${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p$	12.860		
PP2	$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu$	1.442	0.265	10^{17}
	$d + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	5.493		
	${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$	1.586		
	${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu$	0.861	0.862	10^6
	${}^7\text{Li} + p \rightarrow 2 {}^4\text{He}$	17.347		
PP3	$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu$	1.442	0.265	10^{17}
	$d + p \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	5.493		
	${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$	1.586		
	${}^7\text{Be} + p \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma$	0.135	6.710	10^{-1}
	${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu$	17.980		
	${}^8\text{Be} \rightarrow 2 {}^4\text{He}$	0.092		

TABELLA 2.1: Catene p - p e relative reazioni, con Q -value prodotta, energia persa per la fuga dei neutrini e tempo impiegato dai decadimenti. Valori di Q calcolati usando i dati di Wang et al. [6], altri dati ricavati da Bahcall [7]. La notazione p si riferisce al protone e d al deuterio.

Tale reazione (chiamata anche semplicemente *fusione pp*) è un caso particolare nei processi di fusione stellari, in quanto per avvenire necessita della conversione spontanea di un protone in neutrone per decadimento β^+ , visto in Eq. (1.30) $p \rightarrow n + e^+ + \nu$. La sua probabilità di avvenire sarà perciò regolata non solo dalle interazioni elettromagnetica e forte, ma anche da quella debole. Come visto nel Cap. 1.4, questo tipo di decadimento β^+ è molto poco probabile, rendendo la reazione $p(p, e^+ \nu)d$ il primo collo di bottiglia dei processi di fusione. Nonostante ciò, data l'abbondanza di protoni liberi nel plasma stellare, a seguito del raggiungimento delle condizioni di temperatura e densità per superare la barriera coulombiana tale processo risulta essere funzionale ed estremamente rilevante per la produzione energetica delle stelle.

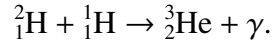
L'energia liberata da questa reazione è condivisa tra i prodotti del processo: mentre il deuterio prosegue la catena di fusione, il positrone viene generalmente annichilito in un urto con un elettrone e^- presente nel plasma, liberando la sua energia sotto forma di raggi gamma. Al contrario, data la loro scarsa interazione con la materia, i neutrini prodotti dal

decadimento β^+ hanno alte probabilità di fuggire dagli interni stellari, sottraendo energia. Dalle misure dello spettro dei neutrini solari, si ricava un valore medio dell'energia dei neutrini di $\bar{E}_\nu^{pp} \approx 265 \text{ keV}$ (come riportato da Bahcall [7]). Dunque, il valore finale dell'energia disponibile dalla reazione $p(p, e^+\nu)d$, considerando il guadagno di energia di e^+ e la perdita da parte di ν , risulta

$$Q_{pp} = [2 \cdot \Delta M(p) - \Delta M(d)]c^2 - \bar{E}_\nu = 1.442 \text{ MeV} - \bar{E}_\nu = 1.177 \text{ MeV}.$$

Il deuterio può essere anche prodotto attraverso un processo alternativo, detto *fusione pep*, in cui un protone decade per cattura elettronica: $p + p + e^- \rightarrow d + \nu$. Nonostante il suo tasso di reazione sia fondamentalmente trascurabile rispetto a quello della fusione pp in condizioni di densità normali, questo processo è estremamente importante per gli studi solari perché produce neutrini altamente energetici, a circa $\bar{E}_\nu^{pep} = 1.442 \text{ MeV}$.

La seconda reazione delle catene p-p consiste nella fusione del deuterio prodotto da $p(p, e^+\nu)d$ con un ulteriore protone, producendo l'isotopo stabile dell'elio ${}^3\text{He}$ (composto da due protoni e un neutrone) e liberando un fotone:



Questo è in realtà solo uno dei processi che competono nel bruciamento del deuterio prodotto dalla fusione pp , ma è quello in generale più probabile, data la sezione d'urto e la disponibilità dei reagenti: per esempio, reazioni come $d(d, n){}^3\text{He}$, nonostante la sezione d'urto maggiore, hanno tassi di avvenimento molto minori dovuti alla densità di deuterio libero estremamente bassa rispetto a quella dei protoni liberi. Il processo $d(p, \gamma){}^3\text{He}$, dipendendo solo dalle interazioni elettromagnetica e forte, è estremamente più veloce rispetto al primo passo delle catene p-p, consumando il deuterio in $\sim 1 \text{ s}$ dalla sua produzione e lasciando la sua abbondanza relativa pressoché costante negli interni stellari in maniera quasi immediata. L'energia prodotta da questa reazione risulta quasi 5 volte maggiore dalla fusione pp :

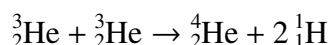
$$Q_{dp} = [\Delta M(d) + \Delta M(p) - \Delta M({}^3\text{He})]c^2 = 5.493 \text{ MeV}.$$

L'energia complessivamente prodotta da queste prime due reazioni, considerando an-

che la perdita data dalla fuga dei neutrini, è pari a $Q_{pp+d} = Q_{pp} + Q_{dp} = 6.671 \text{ MeV}$, un quarto del valore di $Q_H = 26.731 \text{ MeV}$ stimato in precedenza. Inoltre, data l'immediatezza di $d(p, \gamma)^3\text{He}$ rispetto a $p(p, e^+\nu)d$, si può considerare che questi processi abbiano lo stesso tasso di reazione, dipendente fondamentalmente solo dalla prima.

2.1.1 PP1

Il primo processo che completa la fusione dell'idrogeno in elio che si attiva all'aumentare della temperatura nel nucleo stellare è la reazione di bruciamento di due nuclei ^3He in un nucleo ^4He , con il rilascio di due protoni liberi:

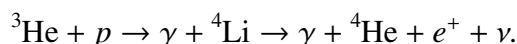


che produce un'energia pari a

$$Q_{^3\text{He}^3\text{He}} = [2 \cdot \Delta M(^3\text{He}) - \Delta M(^4\text{He}) - 2 \cdot \Delta M(p)]c^2 = 12.860 \text{ MeV}.$$

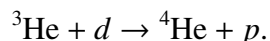
Anche in questo caso si tratta di solo uno dei processi in cui ^3He può essere convertito in ^4He , ma è quello più probabile ed efficiente. Canali d'entrata alternativi sono

- Fusione tra ^3He e un protone, liberando un fotone e producendo l'isotopo instabile del litio ^4Li , che decade in elio per processo β^+ :



Nonostante la repulsione coulombiana minore che aumenterebbe la sezione d'urto della prima reazione, tale canale d'uscita del litio è altamente improbabile: in neanche 10^{-22} s ^4Li espelle un protone e decade nuovamente in ^3He , in maniera estremamente più veloce rispetto a un decadimento per interazione debole.

- Fusione tra ^3He e deuterio, producendo elio e un protone libero:



Nonostante la sezione d'urto simile a $^3\text{He}(^3\text{He}, 2p)^4\text{He}$, il deuterio è prevalentemente consumato nella reazione $d(p, \gamma)^3\text{He}$ data la repulsione coulombiana minore

e, successivamente al raggiungimento dell'equilibrio nell'abbondanza relativa di ${}^3\text{He}$, non ha più alcun ruolo nella produzione diretta di elio, lasciando che ${}^3\text{He}$ sia distrutto da altre particelle identiche.

L'energia complessiva prodotta dalla catena PP1 si può calcolare notando che perché avvenga l'ultima reazione ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ è necessario che le prime due fusioni avvengano due volte, per produrre due nuclei ${}^3\text{He}$ che verranno bruciati nella formazione dell'elio. In tal modo, considerando la produzione finale di due nuclei di idrogeno, il netto di protoni usati rimane costante e pari a quattro. L'energia effettivamente prodotta risulta quindi

$$Q_{\text{PP1}} = 2 \cdot Q_{pp+dp} + Q_{{}^3\text{He}^3\text{He}} = 26.202 \text{ MeV}$$

che, se sommata all'energia persa per la fuga dei neutrini, pari a $2 \cdot \bar{E}_\nu^{pp} = 2 \cdot 0.265 \text{ MeV} = 0.530 \text{ MeV}$, cioè circa il 2% dell'energia totale, risulta in linea con il valore stimato in precedenza.

Il tasso di produzione energetica dell'intera catena PP1 è ricavabile come somma tra il tasso delle prime due reazioni, che convertono tre protoni in un nucleo di ${}^3\text{He}$, e quello della ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$. Utilizzando l'Eq. (1.21) si ha

$$\epsilon_{\text{PP1}} = \frac{6.671 \text{ MeV}}{\rho} r_{pp} + \frac{12.860 \text{ MeV}}{\rho} r_{{}^3\text{He}^3\text{He}}$$

con r_{pp} e $r_{{}^3\text{He}^3\text{He}}$ i tassi di reazione delle prime due reazioni e della terza. In particolare, come detto sopra, il tasso di reazione r_{pp} risulta fondamentalmente pari a quello della sola $p(p, e^+\nu)d$, data la velocità con cui avviene il processo $d(p, \gamma){}^3\text{He}$ rispetto alla precedente fusione pp . Ricordando l'espressione del tasso di reazione dall'Eq. (1.7) si può scrivere ϵ_{PP1} come

$$\epsilon_{\text{PP1}} = \frac{6.671 \text{ MeV}}{\rho} \frac{H^2}{2} \langle \sigma v \rangle_{pp} + \frac{12.860 \text{ MeV}}{\rho} \frac{({}^3\text{He})^2}{2} \langle \sigma v \rangle_{{}^3\text{He}^3\text{He}} \quad (2.1)$$

dove H e ${}^3\text{He}$ sono le densità numeriche dell'idrogeno e dell'isotopo d'elio nel plasma stellare, rispettivamente. Tale densità dell'elio può essere espressa in maniera più proficua studiando la variazione dell'abbondanza di ${}^3\text{He}$ nel tempo: questa si può considerare come la differenza tra il tasso di reazione del processo che lo produce, cioè quindi della fusione pp (sempre nell'approssimazione che la fusione dp avvenga istantaneamente), e di quello

del processo che lo consuma, notando che per ogni reazione ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ si bruciano due nuclei di ${}^3\text{He}$

$$\begin{aligned}\frac{d({}^3\text{He})}{dt} &= r_{pp} - r_{{}^3\text{He}^3\text{He}} = \frac{H^2}{2} \langle \sigma v \rangle_{pp} - 2 \cdot \frac{({}^3\text{He})^2}{2} \langle \sigma v \rangle_{{}^3\text{He}^3\text{He}} \\ &= \frac{H^2}{2} \langle \sigma v \rangle_{pp} - ({}^3\text{He})^2 \langle \sigma v \rangle_{{}^3\text{He}^3\text{He}}\end{aligned}\quad (2.2)$$

L'espressione della densità numerica ${}^3\text{He}$ si ricava imponendo la condizione di equilibrio all'Eq. (2.2):

$$\left. \frac{d({}^3\text{He})}{dt} \right|_{\text{eq}} = 0 \quad \Rightarrow \quad {}^3\text{He} = \sqrt{\frac{H^2 \langle \sigma v \rangle_{pp}}{2 \langle \sigma v \rangle_{{}^3\text{He}^3\text{He}}}}. \quad (2.3)$$

Sostituendo ora l'Eq. (2.3) nella (2.1) e utilizzando la forma dell'Eq. (1.21), si ottiene il tasso di produzione energetica all'equilibrio dell'abbondanza di ${}^3\text{He}$ come

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{PP1}} &= \frac{6.671 \text{ MeV}}{\rho} \frac{H^2}{2} \langle \sigma v \rangle_{pp} + \frac{12.860 \text{ MeV}}{\rho} \frac{H^2}{4} \langle \sigma v \rangle_{pp} = 6.551 \langle \sigma v \rangle_{pp} H^2 \quad (\text{MeV s}^{-1}) \\ &= 6.551 \langle \sigma v \rangle_{pp} N_A^2 \left(\frac{X_H}{A_H} \right)^2 \rho \quad (\text{MeV s}^{-1} \text{ g}^{-1}).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Come già evidenziato, la prima reazione $p(p, e^+ \nu)d$ è quella di gran lunga più lenta ad avvenire, ponendo dunque restrizioni al tasso di reazione e, di conseguenza, al tasso di produzione energetica complessivo: all'equilibrio di ${}^3\text{He}$ si può dunque considerare che la fusione pp sia la reazione determinante della catena PP1. Tale approssimazione permette dunque di semplificare la dipendenza di ϵ_{PP1} dalla temperatura, considerandola solo per la fusione tra protoni. Dall'Eq. (1.22) si ricava

$$\epsilon_{\text{PP1}}(T) = \epsilon_{\text{PP1}}(T_0) \left(\frac{T}{T_0} \right)^\nu = \epsilon_0 \rho X_H^2 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\nu \quad (2.5)$$

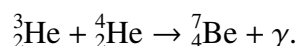
dove, per la reazione $p(p, e^+ \nu)d$ nel Sole, si ha $T_0 = 1.57 \times 10^7 \text{ K}$ che, dalle Eq. (1.18) e (1.24), dà un fattore $\tau = 13.6$ e quindi un esponente

$$\nu_{\text{PP1}} = \frac{\tau - 2}{3} \approx 3.9$$

che mostra una modesta dipendenza dalla temperatura.

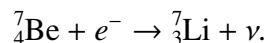
2.1.2 PP2 e PP3

Una volta che nel nucleo stellare la temperatura e l'abbondanza di ^4He diventano abbastanza grandi grazie al lavoro della catena PP1, il principale meccanismo di bruciamento di ^3He smette di essere la reazione $^3\text{He}(^3\text{He}, 2p)^4\text{He}$ vista sopra e si innescano nuove catene che portano alla produzione di elio. In particolare, ^3He viene consumato attraverso la fusione con particelle α (prodotte o primordiali), dando l'isotopo del berillio ^7Be e liberando un fotone:

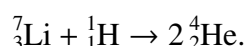


Le modalità con cui il berillio viene successivamente consumato e i bruciamenti che proseguono fino alla produzione di elio distinguono le catene PP2 e PP3:

- La PP2 continua attraverso la cattura di un elettrone del plasma o ancora legato al nucleo da parte di ^7Be , che decade quindi nell'isotopo del litio ^7Li rilasciando un neutrino



Questo decadimento β , essendo mediato solo dall'interazione debole è poco dipendente dalla temperatura. A seguire, la fusione del litio con un protone completa la catena, producendo due nuclei di elio:



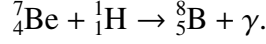
La principale perdita di energia della catena PP2 è data dalla fuga dei neutrini nel decadimento del ^7Be , che risultano avere un'energia media, riportata da Bahcall [7], di $\bar{E}_\nu^{\text{Be}} = 0.862 \text{ MeV}$. L'energia liberata dalla catena risulta quindi

$$Q_{\text{PP2}} = Q_{\text{H}} - \bar{E}_\nu^{\text{pp}} - \bar{E}_\nu^{\text{Be}} = 25.604 \text{ MeV}$$

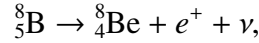
e le perdite ammontano a circa il 4% dell'energia totale prodotta.

- Nella catena PP3 il berillio è consumato attraverso la fusione con un protone, invece che con cattura elettronica, producendo un'isotopo instabile del boro e liberando un

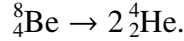
fotone:



Questo processo e la sua continuazione diventano dominanti sulla catena PP2 per alte temperature, in particolare sopra ai 2.5×10^7 K. La catena è poi completata rapidamente (in circa 1 s) dal decadimento β^+ del boro in un ulteriore isotopo instabile del berillio, liberando un positrone e un neutrino



e dal conseguente immediato ($\tau({}^8\text{Be}) \approx 4 \times 10^{-22}$ s) decadimento del berillio in due nuclei di elio



Considerate le perdite dovute ai neutrini, questa catena è quella che libera meno energia netta. Infatti, nel decadimento del boro, il neutrino in fuga sottrae un'energia media di $\bar{E}_\nu^{\text{B}} = 6.710$ MeV (Bahcall [7]), lasciando un Q -value complessivo di

$$Q_{\text{PP3}} = Q_{\text{H}} - \bar{E}_\nu^{\text{pp}} - \bar{E}_\nu^{\text{B}} = 19.756 \text{ MeV}$$

con una perdita pari al 26% sul totale prodotto.

Nonostante entrambe le catene PP2 e PP3 abbiano un output di due particelle α , queste richiedono un nucleo di elio come catalizzatore per la fusione iniziale del ${}^3\text{He}$, dando una produzione netta di un singolo ${}^4\text{He}$ per reazione.

In una stella con sufficiente abbondanza di ${}^4\text{He}$, il bruciamento di idrogeno avviene attraverso tutte e tre le catene p-p contemporaneamente, e i vari tassi di produzione energetica dipenderanno da temperatura, densità e composizione dell'interno stellare. Assumendo, nel nucleo stellare, frazioni di massa di idrogeno ed elio $X_{\text{H}} = X_{\text{He}} = 0.5$, si possono ricavare prime stime sulle temperature a cui le varie catene diventano predominanti: studiando le vite medie delle reazioni ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p)\alpha$ e ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, si ha che la PP1 prevale a temperature comprese circa tra 10^7 K (innescò della fusione pp) e 1.8×10^7 K, oltre la quale domina la PP2. Per ${}^7\text{Be}(e^-, \nu){}^7\text{Li}$ e ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$, il punto di inversione risulta a $T \approx 2.5 \times 10^7$ K, oltre il quale prevale la catena PP3. Queste temperature risultano indipendenti dalla densità.

Il tasso di produzione energetica complessiva delle catene p-p è complicato da calcola-

re come somma dei singoli contributi delle tre catene, ma può essere espresso in maniera più compatta come prodotto

$$\epsilon_{\text{PP}} = \frac{Q_{\text{H}}}{\rho} \frac{d(^4\text{He})}{dt} (f_{\text{PP1}} F_{\text{PP1}} + f_{\text{PP2}} F_{\text{PP2}} + f_{\text{PP3}} F_{\text{PP3}}) \quad (2.6)$$

dove $Q_{\text{H}} = 26.731$ MeV è l'energia totale prodotta, $d(^4\text{He})/dt$ è il tasso di produzione di elio, i coefficienti $f_{\text{PP}i}$ indicano la porzione di energia prodotta dalla catena $\text{PP}i$ che rimane nella stella in seguito alla fuga dei neutrini ($f_{\text{PP1}} = 0.98$, $f_{\text{PP2}} = 0.96$, $f_{\text{PP3}} = 0.74$) e i $F_{\text{PP}i}$ la porzione di ^4He prodotto nella catena $\text{PP}i$. Questi ultimi termini, detti *branching rate*, possono essere calcolati come rapporti tra tassi di reazione tra i processi che fungono da "bivio":

$$F_{\text{PP1}} = \frac{r_{^3\text{He}^3\text{He}}}{r_{^3\text{He}^3\text{He}} + r_{\alpha^3\text{He}}} \approx 0.833$$

$$F_{\text{PP2}} = (1 - F_{\text{PP1}}) \frac{r_{e^7\text{Be}}}{r_{e^7\text{Be}} + r_{p^7\text{Be}}} \approx 0.167$$

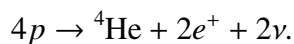
$$F_{\text{PP3}} = (1 - F_{\text{PP1}} - F_{\text{PP2}}) \approx 0.002$$

dove i valori espressi sono stati ricavati per il Sole, come espresso in Adelberger *et al.* [8]. Ciò mostra come la catena PP1 abbia la maggior rilevanza nella produzione energetica solare, mentre le altre forniscono solo un apporto limitato. Dunque, nella stima della dipendenza diretta dalla temperatura del tasso di produzione energetica complessiva per le catene p-p, è possibile compiere una prima approssimazione e considerare un esponente ν nell'Eq. (1.22) circa pari a quello per la singola catena PP1, $\nu \approx 4$.

2.2 Cicli CNO

Molte stelle, soprattutto quelle più giovani di Popolazione I che sono sorte dalle ceneri di stelle più vecchie, contengono oltre a idrogeno ed elio anche nuclidi più pesanti, prodotti dalle reazioni di fusione delle generazioni di stelle precedenti. Questi elementi, detti *metalli* (nonostante la categoria comprenda elementi che chimicamente non sono metalli, come carbonio e ossigeno), a temperature elevate possono concorrere nella fusione di idrogeno in elio attraverso i cosiddetti *cicli CNO* (dai simboli chimici di carbonio, azoto e

ossigeno). Si tratta di quattro serie di processi in cui isotopi di carbonio, ossigeno, azoto e fluoro agiscono da catalizzatori (ovvero vengono consumati e poi prodotti durante il ciclo) per completare la stessa reazione complessiva delle catene p-p:



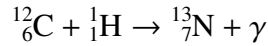
Le diverse catene, mostrate in Tab. 2.2, in condizioni di equilibrio a temperature sufficientemente elevate ($T > 1.5 \times 10^7$ K) coinvolgono vari isotopi come catalizzatori attraverso reazioni di fusione con idrogeno o di decadimento β , e si differenziano poiché per i nuclei ${}^{15}\text{N}$, ${}^{17}\text{O}$, ${}^{18}\text{O}$ e ${}^{19}\text{F}$ entrambi i canali (p, γ) e (p, α) sono energeticamente possibili: mentre il primo produce un elemento più pesante, facendo progredire il ciclo, il secondo genera nuclidi più leggeri dei reagenti, producendo elio e facendo ricominciare il ciclo corrispondente. Nonostante la possibilità energetica di uscire in entrambi i canali, per questi isotopi su tutto il range di temperature degli interni stellari, in condizioni non degeneri, si può notare che la reazione (p, α) avviene più rapidamente della (p, γ) , portando ad una maggiore produzione di elio rispetto allo sviluppo dei cicli successivi.

In generale, per la corretta descrizione dei vari cicli in una stella è necessario conoscere l'abbondanza relativa iniziale dei vari isotopi metallici, in modo da poter sviluppare precisamente la loro evoluzione temporale fino all'equilibrio. Come già accennato, i nuclidi più pesanti dell'idrogeno e dell'elio necessari per questi cicli sono prodotti da stelle di generazioni precedenti durante i processi di bruciamento dell'elio, come si vedrà nel Cap. 3.1, e poi espulsi nelle regioni di formazione stellare durante le ultime fasi di vita di una stella. In particolar modo i nuclidi più abbondanti sono gli isotopi stabili ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$ e (seppur in grado minore) ${}^{14}\text{N}$, che dunque fungeranno da principali catalizzatori per i vari cicli. Come già evidenziato sopra, la maggior velocità del canale (p, α) rispetto al (p, γ) , combinata con la maggiore repulsione coulombiana per nuclei più pesanti come O e F, rende i cicli CNO3 e CNO4 (detti anche *cicli OF* per la predominanza di questi elementi) molto meno rilevanti dei primi due, detti rispettivamente *ciclo CN* e *ciclo NO*, che coinvolgono principalmente carbonio, azoto e ossigeno.

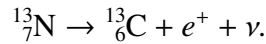
2.2.1 CNO1 e CNO2

Il ciclo CNO1, o CN, se in condizione di equilibrio delle abbondanze e alle temperature adeguate può iniziare da qualsiasi reazione. Tuttavia data la minore barriera coulombiana

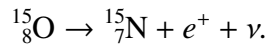
tra i reagenti e la stabilità dell'isotopo si ha, in generale, una prevalenza delle reazioni di cattura protonica



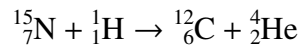
che è seguita rapidamente dal decadimento beta dell'azoto, il cui isotopo con $A = 13$ ha un'emivita di 598 s



A queste reazioni seguono due ulteriori fusioni con idrogeno ${}^{13}\text{C}(p, \gamma){}^{14}\text{N}$ e ${}^{14}\text{N}(p, \gamma){}^{15}\text{O}$ e un secondo rapido decadimento beta



Il ciclo termina poi con la cattura protonica



che produce un nucleo di elio e l'isotopo stabile ${}^{12}\text{C}$ iniziale.

La reazione più lenta del ciclo CNO1, per temperature $T < 10^8$ K, oltre le quali si ha una risonanza, è la fusione ${}^{14}\text{N}(p, \gamma){}^{15}\text{O}$, con un tasso di reazione 100 volte inferiore alle altre. Per questo, date le basse probabilità dei canali di uscita (p, γ) discussi in precedenza, questa reazione costituisce un collo di bottiglia estremamente rilevante in generale per tutti i cicli CNO. Ciò permette di semplificare notevolmente i calcoli per il tasso di produzione energetica complessiva dei cicli, approssimandoli a dipendenti in buona misura dall'avvenimento di questa reazione di fusione.

L'energia prodotta dalle varie reazioni è espressa in Tab. 2.2, ma, come nelle catene pp, la fuga di neutrini prodotti dai decadimenti beta sottrae energia. I valori medi, come riportati da Bahcall [7], risultano per le due reazioni viste sopra nel ciclo CNO1

$$\bar{E}_\nu^{13\text{N}} = 0.707 \text{ MeV}, \quad \bar{E}_\nu^{15\text{O}} = 0.997 \text{ MeV}.$$

Questi valori dimostrano come la perdita energetica sia comunque piccola (circa 6%) sul totale prodotto di $Q_{\text{H}} = 26.731 \text{ MeV}$.

Per temperature del nucleo stellare superiori a $T = 2 \times 10^7$ K, nonostante della maggiore repulsione coulombiana dei reagenti da superare, il ciclo CNO2 (o NO) inizia ad

essere efficiente, seppure sempre in misura inferiore al CNO1: il rapporto tra i tassi di reazione dei due canali di ^{15}N rimane infatti $\langle\sigma v\rangle_{(p\alpha)} / \langle\sigma v\rangle_{(p\gamma)} \approx 10^4$ su tutto l'intervallo di temperature. In maniera analoga i tassi di ramificazione per le altre reazioni che possono portare a cicli successivi appaiono sempre dell'ordine di $10^3 - 10^4$ per tutte le temperature. L'unica eccezione si ha con la reazione finale del ciclo CNO2 $^{17}\text{O} + p$, che a temperature inferiori a $\sim 3 \times 10^7$ K ha tassi di produzione comparabili per i due canali, rendendo i cicli CNO3 e CNO4 possibili.

Dati gli apporti trascurabili dei cicli NO e OF, si può considerare in prima approssimazione solo la fusione attraverso il ciclo CNO1 e ricavare il tasso di produzione energetica per questo: l'energia prodotta totale è pari a quella della catena pp, da cui, considerando la fuga di neutrini

$$Q_{\text{CNO1}} = Q_{\text{H}} - \bar{E}_{\nu}^{13\text{N}} - \bar{E}_{\nu}^{15\text{O}} = 25.027 \text{ MeV}.$$

Da ciò si ha che il tasso di produzione energetica all'equilibrio si può scrivere come in Eq. 1.21

$$\epsilon_{\text{CNO1}} = \frac{Q_{\text{CNO1}}}{\rho} r_{\text{CNO1}} = \frac{Q_{\text{CNO1}}}{\rho} \frac{(\sum \text{CNO1}) H}{\sum \tau(\text{CNO1})}$$

dove la sommatoria al numeratore riguarda la densità numerica dei nuclidi che compiono fusione con protoni e quella al denominatore è relativa all'emivita degli isotopi, dominata largamente da $\tau(^{14}\text{N})$. Questo valore, in condizione di equilibrio, risulta pari all'inverso del tasso di reazione $\langle\sigma v\rangle_{^{14}\text{N}(p,\gamma)}$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{CNO1}} &= \frac{25.027 \text{ MeV}}{\rho} \frac{(\sum \text{CNO1}) H}{\tau(^{14}\text{N})} = \frac{25.027 \text{ MeV}}{\rho} (\sum \text{CNO1}) H \langle\sigma v\rangle_{^{14}\text{N}(p,\gamma)} \\ &= 25.027 \langle\sigma v\rangle_{^{14}\text{N}(p,\gamma)} N_A^2 \rho \left(\sum_i \frac{X_i}{A_i} \right) \frac{X_{\text{H}}}{A_{\text{H}}} \quad (\text{MeV s}^{-1} \text{ g}^{-1}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove la sommatoria in i è su tutti i nuclidi del ciclo. Da questa si può ricavare la dipendenza dalla temperatura: alla temperatura di massima operatività del ciclo ($T_0 = 2.5 \times 10^7$ K), il fattore di Gamow (Eq. 1.18) è pari a $\tau = 51.96$, da cui si ottiene un esponente

$$\nu_{\text{CNO}} = \frac{\tau}{3} - \frac{2}{3} \approx 16.7$$

che dimostra l'elevata dipendenza dalla temperatura del ciclo CNO. La funzione esplicita

si può esprimere quindi come

$$\epsilon_{\text{CNO}}(T) = \epsilon'_0 \rho X_{\text{CN}} X_{\text{H}} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{16.7} \quad (2.8)$$

dove X_{CN} è l'abbondanza in massa di carbonio e azoto nell'interno stellare.

Eguagliando le Eq. (2.5) e (2.8) si può trovare il limite di transizione di efficienza per il bruciamento di idrogeno tra la catena PP1 e il ciclo CNO1:

$$T = T_0 \left(\frac{\epsilon_0 X_{\text{H}}}{\epsilon'_0 X_{\text{CN}}} \right)^{1/13} \approx 1.7 \times 10^7 \left(\frac{X_{\text{H}}}{50 X_{\text{CN}}} \right)^{1/13} \text{ K}$$

(come riportato da Arnett [4]). Per stelle di Popolazione I come il Sole, in cui $X_{\text{H}} = 0.71$ e $X_{\text{CN}} = 0.003$, il punto di inversione risulta a circa $T_{\text{core}} \approx 2 \times 10^7 \text{ K}$. Al di sotto di questo limite, cioè per stelle di massa minore e dunque meno calde, il processo dominante per la produzione energetica è la catena PP1, mentre al di sopra, per stelle di massa maggiore, nei cui nuclei si raggiungono temperature superiori a questa soglia, il processo dominante risulta il ciclo CNO1, come si può vedere in Fig. 4.

Il Sole, come stella di piccola massa, non raggiunge nel nucleo le temperature per rendere efficienti i cicli CNO: infatti solo circa l'1% dell'energia prodotta per bruciamento di idrogeno è dovuto al ciclo CNO1, mentre la restante quasi totalità proviene dalla catena PP1.

2.3 Evoluzione stellare in Sequenza Principale e Post - Sequenza Principale

Le stelle si formano dall'addensamento di nubi di mezzo interstellare, costituite da gas (prevalentemente idrogeno ed elio) e polveri (grani di silicati e grafite) che permeano in maniera diffusa le galassie. Queste nubi si contraggono sotto effetto della gravità, compattandosi in sferoidi e aumentando la temperatura nel proprio nucleo fino all'innescio dei bruciamenti d'idrogeno, raggiungendo così l'equilibrio idrostatico. I dettagli dei meccanismi con cui si formano le protostelle sono complicati e ancora non chiari, cosa che porta a gravose problematiche in diversi campi dell'astrofisica, ma risultano anche irrilevanti dal punto di vista della nucleosintesi e possono essere ignorati in questa sede.

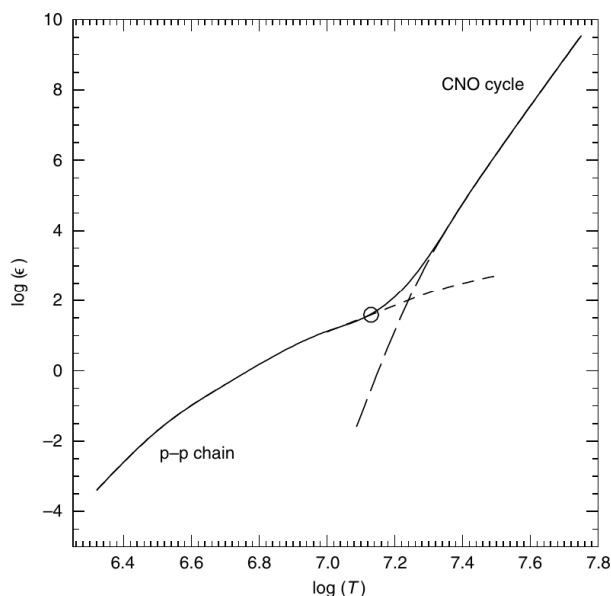


FIGURA 4: Energia nucleare per unità di tempo e di massa (espressa in $\text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}$) prodotta dalla fusione di idrogeno in funzione della temperatura (espressa in kelvin), con andamenti specifici per la catena p-p e il ciclo CNO per una stella di composizione chimica solare. Il cerchio indica la posizione del Sole nel diagramma.

All'equilibrio idrostatico, la protostella si trova in una condizione in cui il suo interno è completamente convettivo (l'energia è trasportata attraverso flussi di materiale dal nucleo verso la superficie) e continua a contrarsi, aumentando la temperatura, fino allo sviluppo di un nucleo radiativo (l'energia è trasportata attraverso fotoni o per conduzione termica). A questo punto, se la protostella ha massa superiore a $0.08M_{\odot}$, si raggiungono nel nucleo temperature di circa 10^7 K che permettono l'innescio dei bruciamenti di idrogeno: la protostella è così diventata una stella, che sta sperimentando la sua prima fase evolutiva, detta *Sequenza Principale*.

Data la differente dipendenza dalla temperatura dei due processi di bruciamento di idrogeno (come visto nei paragrafi 2.1 e 2.2), è utile considerare l'evoluzione stellare in Sequenza Principale in maniera separata per le stelle poco massive e quelle più massive. La soglia per la distinzione è comunemente posta a una massa di circa $1.3M_{\odot}$ (il valore preciso dipende dalla composizione chimica iniziale della stella [10]): al di sotto di questa soglia si parla di *Bassa Sequenza Principale*, al di sopra di *Sequenza Principale Superiore*.

Una volta esaurito l'idrogeno nelle regioni centrali, la stella rimane con un nucleo di

elio inerte che non contribuisce alla produzione energetica fino a che la contrazione gravitazionale non aumenterà sufficientemente la temperatura. Negli strati più esterni, ancora ricchi di H, i bruciamenti continuano in un guscio attorno al nucleo. Questa fase che precede l'innesco delle fusioni di elio nel nucleo è divisa in due sotto-fasi (il *Ramo delle Sub-Giganti* o *Herzsprung Gap*, e il *Ramo delle Giganti Rosse*) e anche in questo caso le modalità di evoluzione stellare dipendono in larga parte dalla massa.

2.3.1 Bassa Sequenza Principale ed evoluzione successiva di stelle di piccola massa

Per le stelle al di sotto delle $1.3M_{\odot}$ il principale meccanismo di fusione d'idrogeno è attraverso le catene p-p, a causa delle minori temperature raggiunte nel nucleo dovute alla minore pressione gravitazionale. I bruciamenti avvengono in una regione radiativa al centro della stella, la quale coinvolge una grande frazione della massa complessiva. Gli strati più esterni, invece, trasportano energia verso la superficie in maniera convettiva a causa della maggiore opacità alla radiazione dovuta alla presenza di H ed He parzialmente ionizzati. La stella regola i suoi tassi di reazione in modo da mantenere l'equilibrio idrostatico: nel caso in cui l'energia nucleare prodotta fosse maggiore del necessario, la stella si espande, facendo calare temperatura e densità e di conseguenza il tasso di reazione, ristabilendo l'equilibrio.

La conversione di idrogeno in elio fa calare il numero di particelle libere nel plasma, diminuendo così la pressione negli interni stellari. Per mantenere l'equilibrio, quindi la stella si contrae e aumenta la propria temperatura interna. Questo, combinato con il calo di opacità per la maggiore presenza di elio e l'aumento del peso molecolare medio del plasma, porta ad un lento ma costante aumento della temperatura effettiva e quindi della luminosità superficiale durante l'evoluzione in Sequenza Principale.

Il bruciamento di idrogeno continua fino all'esaurimento di H nel nucleo senza che vi siano cambiamenti particolari delle caratteristiche macroscopiche della stella. La Sequenza Principale per stelle poco massive è particolarmente lunga, con durate dell'ordine di circa 10^{10} anni e fortemente dipendenti dalla massa (minore la massa, maggiore la durata). Il punto in cui si esauriscono le fusioni di idrogeno nel nucleo è detto *Turn Off* ed è l'indicatore temporale più importante dell'evoluzione stellare. All'esaurimento dell'idrogeno nel nucleo i bruciamenti sono già estesi alle regioni più esterne, continuando attorno al

nucleo di elio inerte che si contrae sotto effetto della gravità.

L'evoluzione Post-Sequenza Principale per stelle poco massive è particolarmente lenta. Ciò è dovuto allo sviluppo di un nucleo in condizioni di degenerazione elettronica, a causa delle elevate densità raggiunte durante la contrazione. In tale situazione non è permessa ulteriore contrazione del nucleo per raggiungere le temperature necessarie per il bruciamento di elio, e l'equilibrio idrostatico è mantenuto dalla pressione esercitata dagli elettroni degeneri del plasma. Questa fase, in cui l'idrogeno viene processato in un guscio spesso attorno al nucleo, espandendo la stella, è chiamata *Ramo delle Sub-Giganti*. Si ha così una diminuzione della temperatura superficiale mentre la luminosità rimane pressoché costante.

A seguire, il bruciamento di idrogeno continua in uno strato sottile attorno al nucleo e la stella evolve lungo il *Ramo delle Giganti Rosse*. In questa fase, a causa dell'aumento dell'opacità per l'espansione e il raffreddamento degli strati più esterni, si sviluppa una regione convettiva vicino alla superficie che poi penetra sempre più a fondo nella stella. Ciò porta ad un mescolamento delle specie chimiche tra le aree ricche di idrogeno e litio più esterne e quelle prevalentemente formate da elio, modificando la composizione della fotosfera (*primo dragaggio*).

2.3.2 Sequenza Principale Superiore ed evoluzione successiva per stelle massive

Nelle stelle con massa superiore alle $1.3M_{\odot}$ la produzione energetica avviene prevalentemente attraverso i cicli CNO, grazie alle più alte temperature che si raggiungono nel nucleo a causa della maggiore massa stellare. Questi processi di fusione, come visto, hanno un'elevata dipendenza dalla temperatura, per cui risultano maggiormente localizzati nelle regioni centrali della stella. Tale concentrazione della produzione energetica porta ad un elevato flusso di energia che rende il nucleo convettivo. Ciò comporta quindi che i bruciamenti di idrogeno in stelle massive avvengano in regioni in cui H ed He sono completamente miscelati, dando un gradiente chimico durante la Sequenza Principale completamente diverso da quello per stelle di massa minore. Massa e temperatura interna di una stella sono direttamente dipendenti, perciò in stelle più massive si ha anche un flusso energetico maggiore e dunque una regione convettiva di dimensioni maggiori. Gli strati più esterni di queste stelle risultano invece radiativi: la maggiore opacità delle

regioni con idrogeno ed elio parzialmente ionizzati è poco rilevante per il comportamento termico dell'atmosfera stellare, in quanto queste si trovano troppo lontane dal nucleo e quindi ad una densità troppo bassa.

Le stelle in Sequenza Principale Superiore vanno incontro ad un'evoluzione osservabile molto differente rispetto alle stelle meno massive. Con il progredire del tempo, si ha un lento ma stabile aumento della luminosità, mentre la temperatura superficiale diminuisce fino al raggiungimento del *Turn Off*. In particolare, quando l'abbondanza di idrogeno nel nucleo convettivo diminuisce sotto a 0.05% della massa totale, le fusioni di H non riescono a produrre sufficiente energia per mantenere la stabilità, portando ad una contrazione della stella fino all'esaurimento completo dell'idrogeno.

Terminata la Sequenza Principale, le regioni centrali ora inerti ricche di elio delle stelle massive si contraggono, mentre gli strati più esterni si espandono, raffreddandosi e portando ad un aumento significativo dell'opacità. In questo modo, l'energia prodotta dai bruciamenti di idrogeno che avvengono nel guscio attorno al nucleo è intrappolata maggiormente all'interno della stella, favorendo l'espansione degli strati esterni. Questa fase, caratterizzata da una diminuzione della temperatura superficiale mentre la luminosità rimane costante, corrisponde al *Ramo delle Sub-Giganti* discusso per le stelle di piccola massa, ma avendo una durata temporale molto breve ben poche stelle sono osservate durante questa rapida fase evolutiva, che viene quindi denominata *Herzsprung Gap*.

Con il raffreddamento dovuto all'espansione, gli strati più esterni della stella diventano convettivi, rallentando l'aumento del raggio ed evitando la dissoluzione della struttura stellare. A questo punto, anche per le stelle di massa più elevata, inizia la fase di *Gigante Rossa*, sempre di breve durata, in cui l'aumento della luminosità avviene quasi a temperatura superficiale costante. Per tali stelle le densità del nucleo sono sufficientemente basse da evitare la degenerazione elettronica, permettendo agli strati ricchi di elio inerte di contrarsi senza resistenza fino a raggiungere le temperature necessarie per la fusione di He nel nucleo. A questo punto il nucleo smette di contrarsi e la stella è nuovamente sostenuta dai bruciamenti nucleari. La durata della fase evolutiva di Gigante Rossa è fortemente dipendente dalla massa, risultando più corta o addirittura quasi scomparendo per stelle particolarmente massive.

Ciclo	Reazioni	Q (MeV)	\bar{E}_ν (MeV)	τ_β (s)
CNO1	$^{12}\text{C} + p \rightarrow ^{13}\text{N} + \gamma$	1.944	0.707	597.9
	$^{13}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu$	2.221		
	$^{13}\text{C} + p \rightarrow ^{14}\text{N} + \gamma$	7.550		
	$^{14}\text{N} + p \rightarrow ^{15}\text{O} + \gamma$	7.293	0.997	
	$^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu$	2.761		
	$^{15}\text{N} + p \rightarrow ^{12}\text{C} + ^4\text{He}$	4.965		
CNO2	$^{14}\text{N} + p \rightarrow ^{15}\text{O} + \gamma$	7.293	0.997	122.2
	$^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu$	2.761		
	$^{15}\text{N} + p \rightarrow ^{16}\text{O} + \gamma$	12.126		
	$^{16}\text{O} + p \rightarrow ^{17}\text{F} + \gamma$	0.601	0.999	
	$^{17}\text{F} \rightarrow ^{17}\text{O} + e^+ + \nu$	2.762		
	$^{17}\text{O} + p \rightarrow ^{15}\text{N} + ^4\text{He}$	1.193		
CNO3	$^{15}\text{N} + p \rightarrow ^{16}\text{O} + \gamma$	12.126	0.999	69.5
	$^{16}\text{O} + p \rightarrow ^{17}\text{F} + \gamma$	0.601		
	$^{17}\text{F} \rightarrow ^{17}\text{O} + e^+ + \nu$	2.762		
	$^{17}\text{O} + p \rightarrow ^{18}\text{F} + \gamma$	5.609	$\leq 0.634^\dagger$	
	$^{18}\text{F} \rightarrow ^{18}\text{O} + e^+ + \nu$	1.656		
	$^{18}\text{O} + p \rightarrow ^{15}\text{N} + ^4\text{He}$	3.980		
CNO4	$^{16}\text{O} + p \rightarrow ^{17}\text{F} + \gamma$	0.601	0.999	69.4
	$^{17}\text{F} \rightarrow ^{17}\text{O} + e^+ + \nu$	2.762		
	$^{17}\text{O} + p \rightarrow ^{18}\text{F} + \gamma$	5.609		
	$^{18}\text{F} \rightarrow ^{18}\text{O} + e^+ + \nu$	1.656	$\leq 0.634^\dagger$	
	$^{18}\text{O} + p \rightarrow ^{19}\text{F} + \gamma$	7.994		
	$^{19}\text{F} + p \rightarrow ^{16}\text{O} + ^4\text{He}$	8.114		

TABELLA 2.2: Cicli CNO e relative reazioni, con Q -value prodotta, energia persa per la fuga dei neutrini ed emivita dei decadimenti. Valori di Q calcolati usando i dati di Wang et al. [6], valori di \bar{E}_ν ricavati da Bahcall [7] e per † da Arnett [4], emivite ricavate da Iliadis [9].

3. Bruciamento di elio

Con quattro nucleoni, l'elio è il secondo elemento stabile più leggero dopo l'idrogeno e il secondo più abbondante, costituendo circa il 23% della massa barionica dell'universo. Come visto nel capitolo precedente, esso è il principale prodotto dei processi di bruciamento d'idrogeno negli interni stellari, cosa che spiega solo in parte la sua ampia presenza nel cosmo.

A causa della maggiore repulsione coulombiana dovuta alla presenza di due protoni, i nuclei di elio non riescono a fondersi tra di loro alle temperature per cui sono efficienti le catene p-p o i cicli CNO. Si stima infatti che il processo di bruciamento di ${}^4\text{He}$ diventi rilevante per $T > 1.2 \times 10^8$ K, temperatura maggiore di un ordine di grandezza rispetto a quella del nucleo solare $T_{\text{core}} \approx 1.57 \times 10^7$ K. È quindi necessario che il nucleo stellare, dove si accumula il plasma inerte di elio prodotto dalla fusione di idrogeno, si contragga sotto effetto della gravità e aumenti la propria densità e temperatura affinché i processi di produzione energetica attraverso nucleosintesi possano progredire.

Il problema principale del bruciamento di elio è che non esistono nuclidi stabili con massa atomica $A = 8$, non permettendo quindi la fusione tra due soli ${}^4\text{He}$, in quanto il nucleo prodotto decaderebbe rapidamente nei reagenti. La soluzione, proposta inizialmente da Edwin Salpeter [11], è che avvenga quasi istantaneamente una triplice collisione tra particelle alfa, in modo da superare lo scoglio dell'instabilità del berillio ${}^8\text{Be}$ e producendo così un nucleo di carbonio ${}^{12}\text{C}$. Questo processo, per quanto risolvesse il problema e spiegasse la nucleosintesi dei metalli, risultava avere però un tasso di reazione troppo basso per l'evoluzione stellare osservata. Fu Fred Hoyle [12] a ipotizzare l'esistenza di una risonanza della reazione per uno stato eccitato ${}^{12}\text{C}^*$, che avrebbe permesso alla fusione di avvenire abbastanza rapidamente. L'esistenza di tale stato del carbonio fu in effetti confermata lo stesso anno [13]. In tal modo l'elio riesce a superare la regione di numeri di massa $6 < A < 11$ (i cui elementi non sono dunque sintetizzati nelle stelle, spiegando la loro bassissima abbondanza nell'universo) per produrre nuclidi stabili ed energia. Il processo di fusione necessario, coinvolgendo tre nuclei di elio, è chiamato *catena 3 alfa*.

L'energia prodotta dal bruciamento di elio è pari a

$$Q_{\text{He}} = [3 \cdot \Delta M(^4\text{He}) - \Delta M(^{12}\text{C})]c^2 = 3 \cdot (2.425 \text{ MeV}) = 7.275 \text{ MeV}$$

e risulta quasi quattro volte inferiore a quella prodotta dalla fusione di idrogeno $Q_{\text{H}} = 26.731 \text{ MeV}$. Ciò spiega quindi perché il periodo di evoluzione legato alla fusione di ^4He risulti, fissata la massa stellare, circa 100 volte più breve di quello del bruciamento d'idrogeno.

A seguito del processo 3α di conversione di elio in carbonio, è possibile una ulteriore fusione tra ^4He e ^{12}C per produrre l'isotopo stabile dell'ossigeno ^{16}O . Questa reazione, come in realtà anche la precedente, è particolarmente rilevante poiché influenza le abbondanze degli elementi fino al ferro e l'evoluzione delle stelle particolarmente massive che terminano il loro ciclo vitale come supernovæ. Infatti alla $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ possono seguire analoghi processi di fusione tra nuclei di elio ed elementi sempre più pesanti, seppure con tassi di reazione sempre minori dovuti alla maggiore repulsione coulombiana.

Il processo di bruciamento di elio, a differenza di quello d'idrogeno, avviene attraverso la stessa catena di reazioni 3α in tutte le stelle indifferentemente dalla loro massa. Inoltre, risulta anche l'ultimo stadio in cui la stella perde energia prevalentemente attraverso l'emissione di fotoni, mentre per temperature superiori a $T \approx 5 \times 10^8 \text{ K}$ ciò avviene per la fuga di neutrini altamente energetici.

3.1 Catena 3-alfa

Come visto, il processo 3α avviene in due passi.

Nel primo, due nuclei di elio interagiscono per formare un nucleo di ^8Be nel suo stato fondamentale. La reazione è (per $T < 10^{10} \text{ K}$) non risonante e ha un Q -value negativo

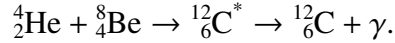
$$Q_{\alpha+\alpha \rightarrow ^8\text{Be}} = [2 \cdot \Delta M(^4\text{He}) - \Delta M(^8\text{Be})]c^2 = -91.839 \text{ keV},$$

per cui il nuclide di berillio prodotto è instabile e tende a scindersi nuovamente in due particelle alfa molto rapidamente, in meno di 10^{-16} s . Nonostante ciò, per temperature nel nucleo stellare superiori a $1.2 \times 10^8 \text{ K}$, la concentrazione del berillio riesce a crescere nel tempo fino a portare un equilibrio dinamico in cui il tasso di produzione di ^8Be eguaglia

quello di decadimento, dando



A seguire, un terzo nucleo di elio interagisce con il berillio prodotto prima che questo decada, formando ${}^{12}_6\text{C}$ e liberando un fotone, attraverso il passaggio per il suo stato eccitato ${}^{12}_6\text{C}^*$:



La cattura alfa da parte del berillio, il quale nel suo stato fondamentale ha momento angolare totale $J = 0$ e parità π positiva, avviene grazie alla risonanza con lo stato eccitato permesso $J^\pi = 0^+$ del carbonio. Infatti, l'energia prodotta dalla fusione esotermica del berillio ${}^8\text{Be}(\alpha, \gamma){}^{12}\text{C}$ è

$$Q_{{}^8\text{Be}(\alpha, \gamma){}^{12}\text{C}} = [\Delta M({}^4\text{He}) + \Delta M({}^8\text{Be}) - \Delta M({}^{12}\text{C})]c^2 = 7.366 \text{ MeV},$$

che risulta comparabile con l'energia $E_* \approx 7.654 \text{ MeV}$ a cui si trova lo stato eccitato ${}^{12}_6\text{C}^*$. Questo poi decade nello stato fondamentale ${}^{12}_6\text{C}$ attraverso diseccitazione per emissione di raggi gamma o, più raramente, per formazione di una coppia elettrone - positrone.

Si può ora ricavare il tasso di produzione energetica ϵ per il processo 3α . Come visto nell'Eq. (1.21), questo è dipendente dall'energia rilasciata nella fusione Q e dal tasso di reazione r . In particolare r può essere espresso in funzione della costante di decadimento $\lambda_{3\alpha}$, cioè del numero di particelle che sono consumate nell'unità di tempo attraverso lo specifico percorso del processo 3α , come

$$r_{3\alpha} = \frac{He \lambda_{3\alpha}}{3}$$

dove He è la densità numerica dell'elio nel nucleo stellare e il fattore 3 al denominatore è presente in quanto per ogni processo completo si consumano tre particelle alfa. La costante di decadimento per la catena 3α tiene in considerazione i due passi del processo in maniera indipendente, come fattori moltiplicativi, poiché questi avvengono senza influenzarsi l'un l'altro. In particolare, il primo stadio vede la competizione tra la fusione di elio in berillio e la sua scissione nei due nuclei iniziali, per cui $\lambda_{3\alpha}$ totale dovrà valutare

il tasso di progressione del processo come

$$\lambda_{3\alpha} = \frac{\lambda_{\alpha+\alpha \rightarrow {}^8\text{Be}}}{\lambda_{{}^8\text{Be} \rightarrow \alpha+\alpha}} \lambda_{{}^8\text{Be}(\alpha,\gamma){}^{12}\text{C}} = 3He \left(\frac{h^2}{2\pi} \right) \frac{1}{(\mu_{\alpha\alpha} k_B T)^{3/2}} \exp \left[\frac{Q_{\alpha+\alpha \rightarrow {}^8\text{Be}}}{k_B T} \right] \lambda_{{}^8\text{Be}(\alpha,\gamma){}^{12}\text{C}} \quad (3.1)$$

dove $\mu_{\alpha\alpha} = m_\alpha/2$ è la massa ridotta dei due nuclei di elio. La costante di decadimento della seconda fusione $\lambda_{{}^8\text{Be}(\alpha,\gamma){}^{12}\text{C}}$ è invece dipendente dall'abbondanza di elio e dal tasso di reazione tra ${}^8\text{Be}$ e ${}^4\text{He}$:

$$\lambda_{{}^8\text{Be}(\alpha,\gamma){}^{12}\text{C}} = He \langle \sigma v \rangle_{{}^8\text{Be}(\alpha,\gamma){}^{12}\text{C}}. \quad (3.2)$$

Quest'ultima, dato che la reazione di bruciamento del berillio avviene attraverso un meta-stato risonante del carbonio, si può esprimere (come visto nel paragrafo 1.3.2) attraverso l'Eq. (1.26)

$$\langle \sigma v \rangle_{{}^8\text{Be}(\alpha,\gamma){}^{12}\text{C}} = \left(\frac{2\pi}{\mu_{\alpha {}^8\text{Be}} k_B T} \right)^{3/2} \hbar^2 \exp \left[-\frac{E_r}{k_B T} \right] \omega \gamma_{{}^8\text{Be}(\alpha,\gamma){}^{12}\text{C}} \quad (3.3)$$

dove $\mu_{\alpha {}^8\text{Be}} = 2m_\alpha/3$ è la massa ridotta tra elio e ${}^8\text{Be}$ (essendo $m_{{}^8\text{Be}} = 2m_\alpha$) e si ha una dipendenza da due caratteristiche della risonanza:

- E_r è l'energia della risonanza e può essere ricavata come l'energia del centro di massa dello stato eccitato risonante

$$E_r = E_* - Q_{{}^8\text{Be}(\alpha,\gamma){}^{12}\text{C}} = 287.61 \text{ keV},$$

- $\omega \gamma_{{}^8\text{Be}(\alpha,\gamma){}^{12}\text{C}}$ è l'intensità di risonanza e dipende dall'ampiezza della risonanza. In questo caso, dato che i momenti angolari totali delle particelle sono $J({}^{12}\text{C}) = j(\alpha) = j({}^8\text{Be}) = 0$, si ha un valore (da Iliadis [9])

$$\omega \gamma_{{}^8\text{Be}(\alpha,\gamma){}^{12}\text{C}} = \frac{2J+1}{(2j_1+1)(2j_2+1)} \frac{\Gamma_\alpha \Gamma_\gamma}{\Gamma} \approx \Gamma_\gamma \approx 3.7 \times 10^{-3} \text{ keV},$$

dove $\Gamma = \Gamma_\alpha + \Gamma_\gamma$ è l'ampiezza totale della risonanza, espressa come somma delle ampiezze parziali rispettivamente di scattering elastico tra elio e berillio e di decadimento dello stato eccitato del carbonio per emissione di raggi gamma.

Dunque la costante di decadimento complessiva $\lambda_{3\alpha}$ si ricava sostituendo le Eq. (3.2) e (3.3) nella (3.1), ottenendo

$$\lambda_{3\alpha} = 3He^2 \left(\frac{2\sqrt{3}\pi}{m_\alpha k_B T} \right)^3 e^{-E'/k_B T} \omega \gamma_{^8\text{Be}(\alpha,\gamma)^{12}\text{C}} \quad (3.4)$$

con $E' = E_r - Q_{\alpha+\alpha \rightarrow ^8\text{Be}} \approx 379.45$ keV. Ricordando che la densità numerica He si può esprimere in termini di densità del plasma ρ , numero di Avogadro N_A e frazione di massa dell'elio X_α

$$He = \rho N_A \frac{X_\alpha}{4}$$

si può riscrivere l'Eq. (3.4) come

$$\begin{aligned} \lambda_{3\alpha} &= \left(\frac{3^{5/2}\pi^3}{2} \frac{N_A^2}{(m_\alpha k_B)^3} \right) \frac{(\rho X_\alpha)^2}{T^3} e^{-E'/k_B T} \omega \gamma_{^8\text{Be}(\alpha,\gamma)^{12}\text{C}} \\ &= 8.759 \times 10^{17} \frac{(\rho X_\alpha)^2}{T^3} e^{-E'/k_B T} \quad (\text{s}^{-1}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Da ciò segue che il tasso di produzione energetica è

$$\begin{aligned} \epsilon_{3\alpha} &= \frac{Q_{\text{He}}}{\rho} r_{3\alpha} = \frac{Q_{\text{He}}}{\rho} \frac{He}{3} \lambda_{3\alpha} \\ &= \frac{7.275 \text{ MeV}}{3\rho} \left(\rho N_A \frac{X_\alpha}{4} \right) 8.759 \times 10^{17} \frac{(\rho X_\alpha)^2}{T^3} e^{-E'/k_B T} \\ &= 3.198 \times 10^{41} \frac{\rho^2 X_\alpha^3}{T^3} e^{-E'/k_B T} \quad (\text{MeV g}^{-1} \text{ s}^{-1}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si possono ora ricavare le dipendenze esplicite dalla temperatura. Per la sola reazione risonante $^8\text{Be}(\alpha, \gamma)^{12}\text{C}$ si può utilizzare l'Eq. (1.28) con i valori $E_r = 287.61$ keV e $T = 1.2 \times 10^8$ K, trovando l'esponente della funzione di potenze del tasso di reazione pari a $\nu_{^8\text{Be}(\alpha,\gamma)^{12}\text{C}} \approx 26.3$, che suggerisce una grande dipendenza della catena 3α dalla temperatura.

Per avere maggiore precisione, è possibile ricavare la dipendenza dalla temperatura del tasso di produzione energetica per l'intera catena 3α , in analogia con quanto fatto nel paragrafo 1.3.2. Dato che l'unica funzione di T a influenzare $\epsilon_{3\alpha}$ è la costante di decadimento, è possibile lavorare anche solo con $\lambda_{3\alpha}$, considerandola nell'intorno di una

temperatura $T = T_0$ come una funzione di potenze

$$\lambda_T = \lambda_{T_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^\nu.$$

Si può ricavare l'esponente ν come

$$\ln \lambda_T = \ln \lambda_{T_0} + \nu (\ln T - \ln T_0) \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\partial \ln \lambda_T}{\partial \ln T}.$$

Da questa, scrivendo dall'Eq. (3.5) la costante di decadimento come $\lambda_{3\alpha} = cT^{-3}e^{-E'/k_B T}$ (dove c è una costante), si ottiene

$$\nu = \frac{\partial}{\partial \ln T} \left(\ln c - 3 \ln T - \frac{E'}{k_B T} \right) = -3 + \frac{E'}{k_B T} \approx \frac{4.403 \times 10^9 \text{ K}}{T} - 3.$$

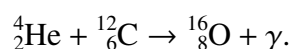
Per la temperatura tipica di inizio del processo 3α ($T \approx 1.2 \times 10^8 \text{ K}$) si ottiene quindi un esponente per la costante di decadimento, e conseguentemente per il tasso di produzione energetica della catena,

$$\nu_{3\alpha} \approx 33.7$$

che mostra la grandissima dipendenza del bruciamento di elio dalla temperatura. Dunque, un piccolo aumento di temperatura porta ad un grande incremento nella produzione di energia per mezzo della catena 3α durante la fase di bruciamento di elio. Viceversa, un calo anche irrisorio della temperatura porta ad una brusca diminuzione della produzione energetica attraverso questo processo.

3.2 Catture alfa

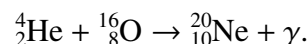
Una volta che la catena 3α ha prodotto sufficiente carbonio nel nucleo stellare, possono verificarsi ulteriori processi di fusione che consumano elio per produrre nuclidi sempre più pesanti, chiamati *catture alfa*. In particolare, il primo ad avvenire e il più rilevante per l'evoluzione delle stelle poco massive come il Sole è la fusione tra l'elio e il carbonio precedentemente prodotto, che produce l'isotopo stabile dell'ossigeno ^{16}O :



Se questa reazione avvenisse in maniera abbastanza rapida, una volta prodotta una quantità sufficiente di carbonio ^{12}C , l'elio si convertirebbe per la maggior parte in ossigeno ed elementi più pesanti, evitando il collo di bottiglia dato dal ^8Be . Eppure il rapporto tra le abbondanze di ^{12}C e ^{16}O nell'universo risulta $N(^{12}\text{C})/N(^{16}\text{O}) \approx 0.4$, dimostrando che la nucleosintesi di elementi pesanti sia relativamente lenta e che una volta esaurito l'elio nel nucleo stellare vi rimanga una quantità non trascurabile di carbonio. Ciò è supportato dall'assenza di risonanze permesse per la reazione di fusione $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$, che la obbliga ad avvenire attraverso altri processi necessariamente più lenti. Si ha una dipendenza diretta tra la massa della stella e la quantità di ^{16}O che produce relativamente a ^{12}C . Questo processo necessita di una temperatura tipica di $T \approx 2 \times 10^8$ K per diventare rilevante rispetto alla produzione di carbonio, e rende un Q -value paragonabile a quello della catena 3α :

$$Q_{^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}} = [\Delta M(^{12}\text{C}) + \Delta M(^4\text{He}) - \Delta M(^{16}\text{O})]c^2 = 7.162 \text{ MeV}.$$

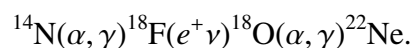
Il successivo processo per cattura alfa è la fusione di elio con il ^{16}O prodotto per ottenere neon ^{20}Ne :



Anche questo bruciamento avviene lentamente in quanto non sono permesse risonanze nell'intervallo di temperature in cui la reazione è possibile, consentendo a un'elevata quantità di ossigeno di preservarsi: il rapporto tra le abbondanze misurate nel sistema solare risulta infatti $N(^{16}\text{O})/N(^{20}\text{Ne}) \approx 6.2$. L'energia prodotta da questa fusione è però inferiore a quella delle altre reazioni, in linea con l'andamento calante della produzione energetica dei bruciamenti che coinvolgono elementi via via più pesanti:

$$Q_{^{16}\text{O}(\alpha, \gamma)^{20}\text{Ne}} = [\Delta M(^{16}\text{O}) + \Delta M(^4\text{He}) - \Delta M(^{20}\text{Ne})]c^2 = 4.730 \text{ MeV}.$$

Parallelamente a questi processi, negli interni stellari possono avvenire altre reazioni di catture alfa, più o meno rilevanti dal punto di vista cosmico. Una catena che assume una certa importanza in stelle di massa elevata, in cui il ciclo CNO ha prodotto sufficiente ^{14}N , è la sequenza (Cameron [14])



Il neon così prodotto è consumato attraverso le reazioni in competizione $^{22}\text{Ne}(\alpha, \gamma)^{26}\text{Mg}$ e $^{22}\text{Ne}(\alpha, n)^{25}\text{Mg}$. La seconda, pur avendo un Q -value negativo ($Q = -0.488$ MeV), verso la fine dei bruciamenti di elio, per temperature $T > 2.5 \times 10^8$ K, risulta un'essenziale fonte di neutroni per la sintesi di elementi pesanti ($60 < A < 90$).

3.3 Evoluzione stellare nel Ramo Orizzontale e nel Ramo Asintotico delle Giganti

Come visto nel Cap. 2.3, al termine del Ramo delle Giganti Rosse, cioè appena prima dell'innesco dei bruciamenti di elio nel nucleo, le stelle hanno comportamenti molto differenti in base alla loro massa.

Le stelle poco massive, terminate le fusioni di idrogeno, sviluppano un nucleo inerte in degenerazione elettronica che non è comprimibile e la cui pressione è indipendente dalla temperatura. Per stelle di massa superiore alle $0.5M_{\odot}$, una volta raggiunti i 1.2×10^8 K necessari per superare la barriera coulombiana tra particelle α , i bruciamenti di elio si innescano e il rilascio di energia è molto elevato e quasi esplosivo. Questo fenomeno, noto come *flash dell'elio*, è dovuto all'innesco di reazioni termonucleari in un ambiente degenere, ovvero non termo-regolato, cioè in cui la pressione del gas non dipende dalla temperatura.

Il passaggio repentino da una debole o assente dipendenza dalla temperatura della pressione di degenerazione all'enorme dipendenza della catena 3α . L'energia così prodotta è utilizzata per rimuovere la degenerazione elettronica, e solo dopo che ciò è avvenuto questa può diventare energia termica di un gas perfetto, espandendo il nucleo e diminuendo densità e temperatura, rallentando così il tasso di reazione. Nelle stelle di massa maggiore, invece, non sviluppandosi degenerazione elettronica nel nucleo, il processo di innesco dei bruciamenti di elio è quiescente. La temperatura e la densità per la fusione sono raggiunte rapidamente nel nucleo, il quale si espande grazie all'energia ora prodotta e spinge verso l'esterno il guscio di idrogeno che lo circonda. Questo così si raffredda e fa calare il tasso di produzione energetica del bruciamento di idrogeno, portando ad un brusco calo della luminosità.

Una volta che la fusione di elio nel nucleo diventa efficiente, l'evoluzione stellare prima dell'innesco dei bruciamenti degli elementi più pesanti si può considerare simile per tutte

le stelle. Questa fase è detta *Ramo Orizzontale*, e le stelle si evolvono a luminosità quasi costante. In questo stadio, l'efficienza dei bruciamenti nel guscio di idrogeno attorno al nucleo cala monotonicamente mentre quella della fusione centrale di elio cresce. In particolare, fintanto che la prima risulta maggiore di quella della catena 3α , la stella aumenta la propria temperatura superficiale, apparendo sempre più blu, per poi invertire tendenza una volta che i bruciamenti nel nucleo risultano la principale fonte energetica. La forte dipendenza dalla temperatura dei processi 3α fa sì che si sviluppi un nucleo puramente convettivo.

Poco dopo l'inizio dell'arrossamento della stella (corrispondente al calo della sua temperatura superficiale), l'elio nel nucleo si esaurisce, favorendo ulteriormente la diminuzione della temperatura efficace. Il nucleo ora composto di carbonio e ossigeno inerti si contrae, aumentando la propria temperatura, mentre al suo esterno si sviluppa uno strato che brucia elio. La temperatura superficiale cala fino a raggiungere il limite idrostatico, per cui se si arrossasse ulteriormente alla stessa luminosità diventerebbe instabile. La fase che segue i bruciamenti di elio nel nucleo, detta *Ramo Asintotico delle Giganti*, vede quindi le stelle evolvere in prossimità di questo limite di equilibrio (detto limite di Hayashi), aumentando fortemente la propria luminosità mentre la temperatura superficiale cala leggermente. Questo stadio si può considerare analogo al Ramo delle Giganti Rosse per il bruciamento di idrogeno in un guscio sottile attorno al nucleo.

Lo strato che brucia elio fuori dal nucleo inerte di carbonio e ossigeno fa espandere i sovrastanti strati di idrogeno, spegnendo i bruciamenti lì presenti e, in stelle massive ($> 5M_{\odot}$), portando ad un aumento della profondità della regione convettiva esterna. Questo fenomeno, chiamato *secondo dragaggio*, permette un ulteriore mescolamento delle specie chimiche negli interni stellari. Il guscio che brucia elio col tempo si muove sempre più verso l'esterno, consumando lo strato accumulato dai bruciamenti di idrogeno più superficiali che in questa fase sono inattivi, fino a raggiungere strati di densità e temperatura troppo basse per la catena 3α . La stella così si contrae e le fusioni di idrogeno negli strati più esterni riprendono, fornendo elio allo strato sottostante. Nelle stelle con massa iniziale minore di $8M_{\odot}$, la contrazione gravitazionale del nucleo non è sufficiente a raggiungere le temperature necessarie per l'innesco dei bruciamenti di carbonio e ossigeno. Di conseguenza, la densità del nucleo aumenta e il plasma passa in condizioni di degenerazione elettronica, fino ad esercitare una pressione sufficiente a mantenere l'equilibrio idrostatico della struttura. Poiché anche il guscio di elio immediatamente adiacente al

nucleo si trova in condizioni di semi-degenerazione, i bruciamenti in questo strato si innescano in maniera esplosiva, fornendo nuovamente energia che fa espandere gli strati di idrogeno più esterni e fermando i loro processi di fusione. Questo comportamento, detto di *Pulsi Termici*, prosegue ad intermittenza quasi periodica, portando a un calo repentino di luminosità e raggio stellare ad ogni innesco dell'elio.

In stelle sufficientemente massive (oltre le $8M_{\odot}$), invece, il nucleo riesce a raggiungere le temperature necessarie per bruciare il carbonio e l'ossigeno che lo compongono, progredendo nella nucleosintesi di elementi sempre più pesanti fino al ferro, più stabile. Queste strutture terminano la propria vita esplodendo come supernovae di tipo II (a collasso del nucleo). Le stelle di massa inferiore, invece, dopo la fase di pulsioni termiche, perdono gli strati più esterni di idrogeno ed elio nella fase detta di *supervento*, e concludono la propria evoluzione come *nane bianche* di carbonio - ossigeno inerti, inizialmente circondate da un alone di gas detto *nebulosa planetaria* e successivamente reffraddandosi e spegnendosi progressivamente. Questo è il destino a cui andrà incontro anche il Sole tra circa 5 miliardi di anni.

Bibliografia

- [1] A. S. Eddington, «The Internal Constitution of the Stars,» *The Scientific Monthly*, vol. 11, p. 297, 4 1920.
- [2] G. Gamow, «Zur Quantentheorie des Atomkernes,» *Zeitschrift für Physik*, vol. 51, p. 204, 1928.
- [3] E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, W. A. Fowler e F. Hoyle, «Synthesis of the Elements in Stars,» *Reviews of Modern Physics*, vol. 29, p. 547, 4 1957.
- [4] D. Arnett, *Supernovae and Nucleosynthesis*, 1^a ed. Princeton: Princeton University Press, 1996.
- [5] D. Benzaid, S. Bentriddi, A. Kerraci e al., «Bethe–Weizsäcker semiempirical mass formula coefficients 2019 update based on AME2016,» *Nuclear Science and Techniques*, vol. 31, 9 2020.
- [6] M. Wang, W. Huang, F. Kondev, G. Audi e S. Naimi, «The AME 2020 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references,» *Chinese Physics C*, vol. 45, p. 030003, 3 2021.
- [7] J. Bahcall, *Neutrino Astrophysics*, 1^a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [8] E. G. Adelberger e al., «Solar fusion cross sections. II. The pp chain and CNO cycles,» *Reviews of Modern Physics*, vol. 83, p. 201, 1 2011.
- [9] C. Iliadis, *Nuclear Physics of Stars*, 2^a ed. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2015.
- [10] M. Salaris e S. Cassisi, *Evolution of Stars and Stellar Populations*, 1^a ed. Chichester: John Wiley e Sons Ltd, 2005.
- [11] E. Salpeter, «Nuclear Reactions in Stars Without Hydrogen,» *Astrophysics Journal*, vol. 115, p. 326, 1952.
- [12] F. Hoyle, «On Nuclear Reactions Occurring in Very Hot Stars. I. the Synthesis of Elements from Carbon to Nickel,» *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 1, p. 121, 1954.
- [13] D. N. F. Dunbar, R. E. Pixley, W. A. Wenzel e W. Whaling, «The 7.68-Mev State in C¹²,» *Physical Review*, vol. 92, p. 649, 3 1953.
- [14] A. Cameron, «New neutron sources of possible astrophysical importance,» *Astronomical Journal*, vol. 65, p. 485, 1960.