

**Alma Mater Studiorum - Università di Bologna**

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

## **Campi magnetici in astrofisica**

Tesi di laurea

Presentata da:  
**Riccardo Cognigni**

Relatore:  
**Chiar.ma Prof.ssa  
Marcella Brusa**

---

Appello IV  
Anno Accademico 2022-2023

*A chi rimarrà...*

## **Abstract**

Questo elaborato si propone di esplorare e analizzare diversi aspetti dei campi magnetici presenti, focalizzandosi sui fenomeni chiave come il sincrotrone e la rotazione di Faraday. Il sincrotrone, processo di accelerazione di particelle cariche in campi magnetici, sarà approfondito per comprendere le sue implicazioni nell'emissione di radiazione elettromagnetica. La rotazione di Faraday, fenomeno che coinvolge la rotazione del piano di polarizzazione della luce in un campo magnetico, sarà esplorata per comprendere la distribuzione e l'intensità dei campi magnetici.

Infine, verrà analizzato l'effetto di un campo magnetico su una nube di HI in papabili condizioni per il verificarsi dell'instabilità di Jeans.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Evidenze osservative e sperimentali . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Processi di radiazione in presenza di un campo magnetico</b>	<b>3</b>
2.1	Produzione di radiazione da parte di cariche immerse in un campo magnetico . . . . .	3
2.1.1	Radiazione da particelle accelerate . . . . .	4
2.1.2	Emissività specifica di una sorgente . . . . .	6
2.1.3	Stima dell'intensità del campo magnetico . . . . .	8
2.2	Interazione della radiazione con un campo magnetico . . . . .	8
2.2.1	Polarizzazione delle radiazione e direzione del campo . . . . .	8
2.2.2	Rotazione di Faraday . . . . .	9
2.2.3	Stima della distanza percorsa nel plasma . . . . .	10
2.2.4	Misura del campo magnetico . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Instabilità di Jeans in presenza di un campo magnetico</b>	<b>12</b>
3.1	Condizioni iniziali . . . . .	12
3.2	Sistema perturbato . . . . .	13
3.3	Conclusioni . . . . .	15

# Capitolo 1

## Introduzione

Nell'esplorazione degli intricati fenomeni che governano l'universo astrofisico, un ruolo di rilievo è attribuito ai campi magnetici, impercettibili ma onnipresenti nel tessuto cosmico. Al di là dei confini del nostro sistema solare, diventa complesso effettuare misurazioni dirette dei campi magnetici. In astrofisica, è spesso necessario sviluppare metodi indiretti per studiare questi campi attraverso i loro effetti sulla radiazione elettromagnetica, che costituisce un canale fondamentale per comprendere l'universo.

Si possono dedurre l'intensità e l'orientamento dei campi magnetici analizzando i processi di radiazione causati dagli effetti magnetici o osservando come i campi magnetici influenzano la propagazione della radiazione. Attualmente, siamo capaci di misurare i campi magnetici per una varietà di oggetti astronomici, tra cui pianeti, stelle, galassie, ammassi e il mezzo intergalattico. La diversità nella natura e nelle dimensioni di questi fenomeni suggerisce che i campi magnetici in astrofisica possano variare considerevolmente in intensità. La tabella 1.1 fornisce una panoramica degli ordini di grandezza dei campi magnetici di alcuni oggetti astronomici. Questo elaborato si concentra sui principali approcci utilizzati per studiare i campi magnetici, con particolare attenzione allo studio del campo magnetico della Via Lattea dove strutture dettagliate del campo magnetico sono state identificate, permettendo la ricostruzione di una struttura generale.

**Tabella 1.1:** Campi magnetici negli oggetti che ci circondano

Sorgente	Campo Magnetico [G]
Smartphone(d=5 cm)	0.51
Terra	0.25 – 0.65
Macchia Solare	1500
MRI	$10^4$
Stella di neutroni	$10^8 - 10^{15}$

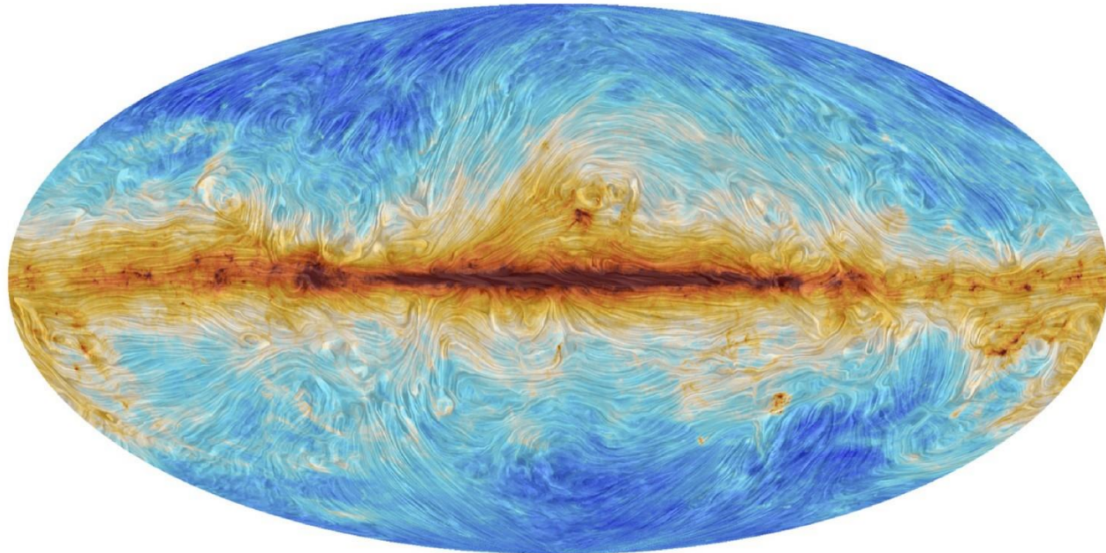
## 1.1 Evidenze osservative e sperimentali

La prima evidenza osservativa di campo magnetico nella Via Lattea, nel 1949, si ebbe grazie alla polarizzazione della luce stellare (in seguito riscontrata anche nella frequenza radio per la radiazione termica Figura 2.1). Si notò inoltre come la polarizzazione della luce aumentasse in rapporto alla distanza della sorgente osservata, quindi della materia attraversata dalla radiazione, e perciò legata all'estinzione generata dalla polvere interstellare. Infatti è possibile spiegare questo fenomeno considerando che la polvere ha una simmetria fusiforme e non sferica e che può, dunque, generare la polarizzazione della luce incidente per riflessione; la regolarità con cui questo fenomeno è distribuito porta a supporre come questi granuli abbiano stessa orientazione. Questo allineamento ha trovato una spiegazione nei campi magnetici galattici ordinati.

L'allineamento delle polveri, tuttavia, non è stata prova inconfutabile dell'esistenza dei campi magnetici nella galassia, ma altri fenomeni correlati, come l'ipotesi di Fermi sul confinamento dei raggi cosmici, hanno dato credito alla teoria.

Lo studio del campo magnetico nella Via Lattea si avvale di diversi metodi per la misurazione dell'intensità e per la modellazione della struttura. Le misure più accurate sull'intensità del campo magnetico provengono da osservazioni radioastronomiche, in particolare:

- Radiazione di sincrotrone
- Rotazione di Faraday



**Figura 1.1:** Polarizzazione della radiazione termica della polvere a 353 GHz. Le linee di flusso mostrano le orientazioni del campo nel piano del cielo mentre i colori le intensità del campo magnetico a 353 GHz. (da McLaughlin et al., 2006)

## Capitolo 2

# Processi di radiazione in presenza di un campo magnetico

I campi magnetici costituiscono un elemento fondamentale della galassia come la conosciamo. Infatti i processi che riguardano i campi magnetici spaziano dalla produzione di radiazione all'interazione con quest'ultima.

### 2.1 Produzione di radiazione da parte di cariche immerse in un campo magnetico

La presenza dei campi magnetici fa sì che le particelle cariche vengano accelerate anche a velocità prossime alla velocità della luce. Le particelle accelerate emetteranno, così, radiazione elettromagnetica.

Una particella carica che si muove in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme è deviata dall'interazione con questo secondo la legge:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

dove  $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$ . Quando le velocità della carica non sono relativistiche si parla di *radiazione di ciclotrone* e quindi  $\gamma$  può essere trascurato. L'angolo che intercorre tra il vettore velocità e il campo magnetico è detto *angolo di pitch*.

Il prodotto vettoriale  $\vec{v} \times \vec{B}$  ci rivela come l'unica componente che può modificare la forza subita dalla particella è quella perpendicolare al campo magnetico pari a  $v_{\perp} = v \sin(\theta)$ . Si ha quindi:

$$m \frac{dv_{\perp}}{dt} = \frac{q}{c} v B \sin(\theta) = \frac{q}{c} v_{\perp} B \quad (2.2)$$

Il vettore accelerazione è perpendicolare al piano contenente  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  e non modifica il modulo della velocità, ma solo la sua direzione. Inoltre essendo il campo uniforme e l'angolo di pitch costante, anche l'accelerazione sarà costante, il che si traduce in un moto risultante con asse parallelo alle linee di campo che può essere scomposto lungo la direzione parallela e lungo quella perpendicolare alle linee di forza del campo, rispettivamente in un moto uniforme e un moto circolare con raggio di curvatura dato dal raggio di Larmor:

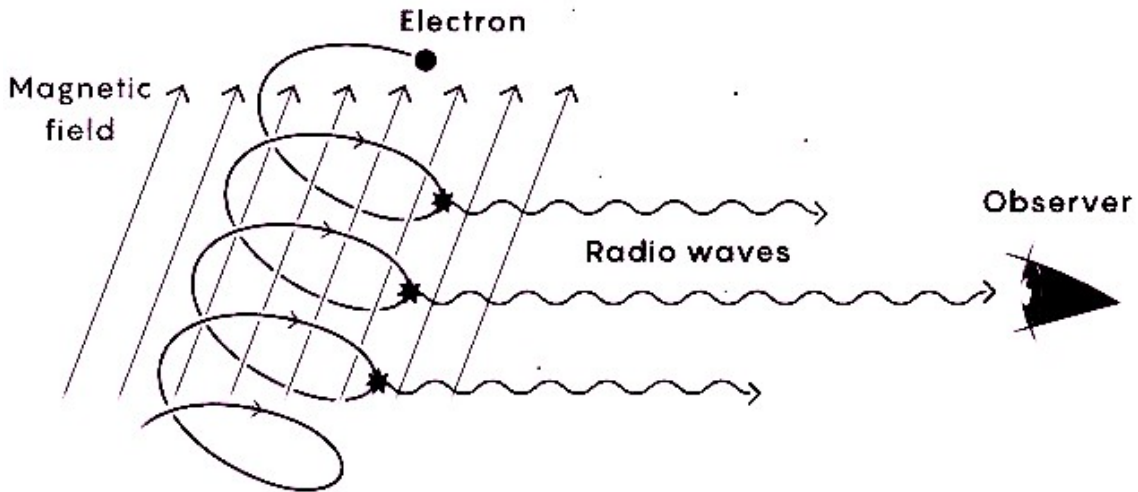
$$r_L = \frac{mc}{qB} v_{\perp} \quad (2.3)$$

In particolare se la particella entra nella regione di campo magnetico con un angolo di pitch diverso da zero, essa si muoverà in un'elica a passo costante. La particella essendo, perciò soggetta ad una accelerazione centripeta, dovuta alla forza di Lorentz, irraderà una potenza per unità di angolo solido, in particolare:

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^4}{m^2 c^3} \left( \frac{v_{\perp}}{c} \right)^2 B^2 \sin(\theta)^2 \quad (2.4)$$

con  $\theta$  angolo fra la direzione considerata per l'emissione della radiazione e quella definita dal vettore accelerazione. La potenza risulterà quindi massima lungo la direzione del campo magnetico mentre risulterà nulla lungo la direzione dell'accelerazione della particella.

### 2.1.1 Radiazione da particelle accelerate



**Figura 2.1:** Radiazione emessa da un elettrone in un campo magnetico. (da Wolchover, 2020)

Nell'emissione da singola particella non relativistica tutta la radiazione viene emessa alla frequenza di girazione:

$$\nu_L = \frac{qB}{2\pi mc} \quad (2.5)$$

mentre quando la particella ha una velocità prossima a quella della luce nel vuoto il pattern di emissione della radiazione viene modificato dagli effetti del fenomeno di aberrazione relativistica e si dovrà considerare la forma relativistica della formula di Larmor. Quando le velocità delle particelle si trovano nel regime relativistico e ultra-relativistico parleremo di radiazione di sincrotrone.

Dalla formula di Larmor per  $\gamma$  elevati otteniamo la radiazione emessa per sincrotrone da particelle ultra-relativistiche:

$$-\frac{dW}{dt} = 2c\sigma_T\gamma^2 \frac{B^2}{8\pi} \sin(\theta)^2 \quad (2.6)$$



con

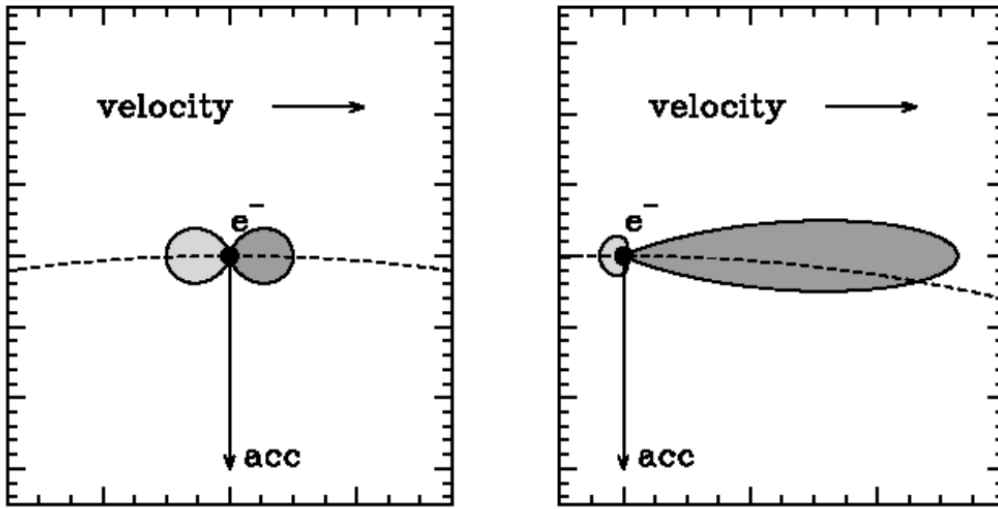
$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{(e^2)^2}{m_e C^2}$$

sezione d'urto Thomson di una particella.

Andando a considerare la particella un elettrone, possiamo andare a stimare l'emissione di radiazione di sincrotrone per un plasma di elettroni relativistico magnetizzato, stimando:

$$\omega_s = -\frac{dW}{dt} = 1.62 \times 10^{-15} \gamma^2 B^2 \sin(\theta)^2 \text{ erg s}^{-1} \quad (2.7)$$

considerando  $\sigma_{T,e} = 6.6524586 \times 10^{-25} \text{ cm}^{-2}$  sezione d'urto Thomson dell'elettrone.



**Figura 2.2:** Beaming relativistico su una carica sottoposta ad accelerazione centripeta.

Come accennato in precedenza l'aberrazione influenza l'emissione della radiazione. Questo modificando l'angolo sotto cui viene emessa la radiazione, isotropa nel riferimento della particella ma non più tale per un osservatore esterno. In generale per ottenere la distribuzione della radiazione nel sistema dell'osservatore occorre una trasformazione di angoli fra i due sistemi utilizzando la formula relativistica per l'aberrazione della luce. Se  $\alpha$  e  $\alpha'$  sono corrispondenti a gli angoli di un raggio di luce, rispettivamente nel sistema dell'osservatore e nel sistema della particella misurati rispetto alla direzione della velocità, si ha la relazione:

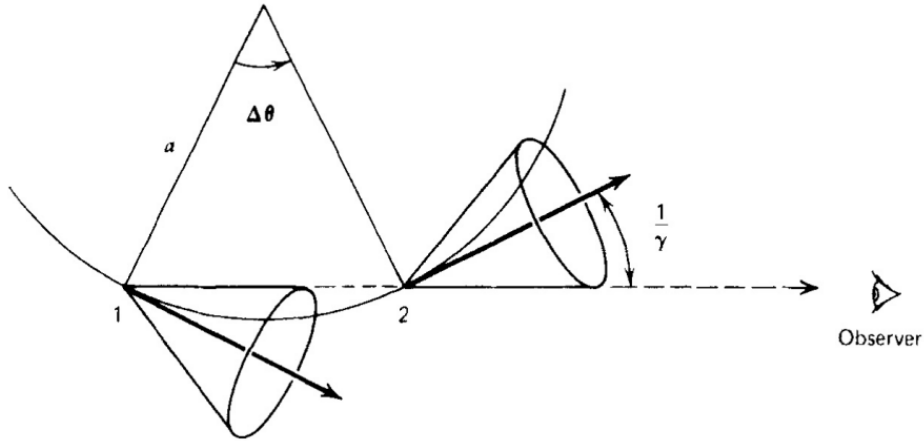
$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha')\sqrt{1-\beta^2}}{\cos(\alpha') + \beta} \quad (2.8)$$

con  $\beta = v/c$ .

Se si considerasse  $\alpha' = 90$  ed essendo  $\beta \sim 1$  allora

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \approx \frac{1}{\gamma} \quad (2.9)$$

Poichè  $\gamma \gg 1$ , è possibile approssimare il valore della tangente come valore dell'angolo, allora l'angolo sotto il quale la radiazione viene emessa in un sistema di riferimento in cui la particella è in moto ultra-relativistico è pari a  $\gamma^{-1}$ . La particella è come emettesse solo nella direzione della velocità in un cono di semiapertura  $\gamma^{-1}$  come si vede nelle figure 2.2 e 2.4. Questo effetto è noto come *beaming relativistico*. La conseguenza diretta di questo fenomeno è che, a causa del moto dell'elettrone sulla sua orbita, un osservatore fisso riceve la radiazione solo quando il cono punta nella sua direzione. Inoltre l'emissione di sincrotrone da parte di un singolo elettrone giunge a noi sottoforma di impulsi e, a causa dell'effetto Doppler relativistico, amplificata nella direzione del moto.



**Figura 2.3:** Schema di un elettrone in moto circolare e della radiazione emessa in un cono di semiapertura  $\gamma^{-1}$  a causa del beaming relativistico. (da Rybicki & Lightman, 1979)

Dall'analisi di Fourier della durata dell'impulso, nel sistema di riferimento dell'osservatore, data dalla relazione:

$$\Delta\tau \approx \frac{5 \times 10^{-8}}{\gamma^2 B[G]} \text{sec} \quad (2.10)$$

ci sarà possibile ricavare lo spettro dell'energia irradiata, identificando anche il valore della frequenza caratteristica di emissione di sincrotrone data da:

$$\nu_s \approx \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\tau} = \frac{3}{4\pi} \gamma^2 \frac{eB}{m_e c} \quad (2.11)$$

Introducendo alcuni valori numerici si ottiene  $\nu_s(\text{GHz}) \approx 4.2 \times 10^{-9} \gamma^2 B[\mu\text{G}]$   
 Per valori tipici di esempi in astrofisica, per esempio con un campo magnetico  $B \sim 10 \mu\text{G}$  e  $\gamma \sim 10^4$ , si ottiene una frequenza caratteristica  $\nu_s \sim 4 \text{GHz}$ , tipica della radioastronomia.

## 2.1.2 Emissività specifica di una sorgente

Il fenomeno che si osserva nelle sorgenti astrofisiche è l'emissione di popolazioni immerse in un campo magnetico con velocità relativistiche e non di singoli elettroni.

Le energie degli elettroni delle popolazioni non saranno omogenee ma seguiranno una distribuzione energetica. Inoltre dalla definizione di  $\nu_s$  si nota come, data la dipendenza da  $\gamma^2$ , variando anche di poco il valore di  $\gamma$  viene coperta tutta la banda radio.

Considerando che non vi siano processi collettivi e che non vi siano fenomeni di auto-assorbimento, l'emissività totale sarà data dai contributi dei singoli elettroni. Sia  $N(\varepsilon) d\varepsilon$  il numero di elettroni, per *unità di volume*, con energia compresa fra  $\varepsilon$  e  $\varepsilon + d\varepsilon$  che irradiano prevalentemente nell'intervallo di frequenze  $\nu_m - \nu_m + d\nu_m$ . Si ha che l'emissività specifica è data da:

$$J_s(\nu) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \omega_s(\nu, \varepsilon) N(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (2.12)$$

con  $\omega_s(\nu, \varepsilon)$  spettro di emissione di un elettrone di energia  $\varepsilon$ .

Per fare delle previsioni sulla emissività attesa in funzione della frequenza dobbiamo fare un modello della distribuzione in energia degli elettroni. Supporremo:

$$N(\varepsilon) = N_0 \varepsilon^{-\delta} \quad (2.13)$$

dove  $N_0$  e  $\delta$  sono delle costanti. Tale spettro è giustificabile dal fatto che rappresenti la distribuzione spettrale energetica osservata nei raggi cosmici. Inoltre alcuni meccanismi di accelerazione degli elettroni relativistici prevedono uno spettro a legge di potenza.

La forma dello spettro di radiazione si otterrà così introducendo la relazione 2.13 in 2.12. Ora normalizzando la frequenza alla frequenza critica e integrando tra 0 a  $\infty$  si trova un valore finito, cioè costante:

$$J_s(\nu) \propto \nu^{-(\delta-1)/2} = \nu^{-\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{\delta-1}{2} \quad (2.14)$$

L'altra assunzione riguarda l'espressione per l'emissione da singolo elettrone, necessaria per determinare la costante di proporzionalità. In questo caso viene utilizzato un modello secondo il quale ogni elettrone emette in modo monocromatico alla sua frequenza caratteristica. Si ottiene così la relazione per l'emissività specifica per una sorgente che emette per sincrotrone:

$$J_s = \left( -\frac{d\varepsilon}{dt} \right) N(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{d\nu} \approx f(\delta) N_0 B_{\perp}^{(\delta+1)/2} \nu^{-(\delta-1)/2} \propto N_0 B_{\perp}^{(\delta+1)/2} \nu^{-\alpha} \quad (2.15)$$

dove

$$f(\delta) = \frac{1}{9} \left( \frac{4\pi e^3}{m_e c^2} \right) \left( \frac{4\pi m_e^3 c^5}{3e} \right)$$

### 2.1.3 Stima dell'intensità del campo magnetico

L'emissività specifica per emissione di sincrotrone (EQ) da parte di un insieme di elettroni relativistici con spettro di energia  $N(E) = N_0 E^{-\delta}$  è proporzionale a  $N_0 \times B_{\perp}^{(\delta+1)/2}$ . La brillantezza di sincrotrone osservata nella Galassia è:

$$B_s(\nu) \propto N_0 B_{\perp}^{(\delta+1)/2} \times l \quad (2.16)$$

con  $l$  spessore della Galassia nella direzione di osservazione.

Assumiamo per  $N_0$  il valore corrispondente alla densità di energia  $\approx 0.01 \text{ eV cm}^{-3}$ , che è quella osservata nei raggi cosmici in prossimità del sistema solare, si deduce  $B_{\perp} \approx 11 \mu\text{G}$ .

Dalle misure di  $N_0$  ottenute, da palloni ad alta quota e satelliti, però si ottiene una differenza tra le stime, teorica e osservativa, anche del 40% sul valore di  $B$ . Inoltre l'emissione di sincrotrone dipende da  $B_{\perp}$ , mentre dalle misure di dispersione e rotazione si ottiene  $B_{\parallel}$ . Per confrontare  $B_{\parallel}$  e  $B_{\perp}$  si richiede una conoscenza della orientamento spaziale del campo  $\vec{B}$  molto accurata.

È possibile dare una spiegazione alternativa, per la quale il campo  $\vec{B}$  abbia fluttuazioni notevoli rispetto al suo valore medio di  $\langle B \rangle$ , con valori abbastanza elevati in coda alla distribuzione.

## 2.2 Interazione della radiazione con un campo magnetico

In astrofisica le cariche libere hanno un ruolo fondamentale nella propagazione delle onde elettromagnetiche nel mezzo.

La propagazione di onde elettromagnetiche in un gas ionizzato globalmente neutro, detto plasma, magnetizzato può essere utilizzata come strumento per studiare i campi magnetici del mezzo interstellare.

### 2.2.1 Polarizzazione delle radiazione e direzione del campo

La polarizzazione lineare è un tratto caratteristico dell'emissione di sincrotrone.

L'emissione di un singolo elettrone è polarizzata ellitticamente se osservata da una direzione generica (sempre all'interno del cono di ampiezza  $2/\gamma$  all'interno del quale la radiazione può essere osservata), e lineare se si osserva lungo il piano dell'orbita. La radiazione di un gruppo di elettroni è quella emessa da tutti gli elettroni presenti entro un angolo  $1/\gamma$  dalla LOS. Questi hanno in generale velocità disordinate, quindi i piani delle orbite degli elettroni dai quali l'osservatore riceve radiazione sono diversi tra loro.

Le ellissi di polarizzazione saranno in parte uguali destrorse e sinistrorse, per cui i contributi di polarizzazione circolare tenderanno in media a cancellarsi. Quindi resterà uno stato di polarizzazione lineare, col vettore elettrico ancora perpendicolare al campo magnetico. Il segnale polarizzato sarà però minore del segnale totale. Il

grado di polarizzazione lineare teorico per una distribuzione di elettroni relativistici è:

$$p_0 = \frac{3\delta + 3}{3\delta + 7} \quad (2.17)$$

Che per valori tipici dell'indice spettrale si aggira tra il 70% – 80%.

In realtà il grado di polarizzazione che si osserva è di molto inferiore, sia perché il campo magnetico potrebbe non essere uniforme nella regione dal quale il telescopio riceve radiazione, sia perché in regioni di formazione stellare l'emissione termica non polarizzata potrebbe essere parte dominante.

Essendo le osservazioni condotte dall'interno della galassia stessa, la ricostruzione dell'orientamento del campo è ostacolata dalla depolarizzazione dovuta alla rotazione differenziale di Faraday e prima di poter trarre conclusioni sulla direzione di polarizzazione originale, e quindi sulla direzione di  $B_{\perp}$ , è necessario correggere le osservazioni per la rotazione di Faraday

## 2.2.2 Rotazione di Faraday

Quando una regione di mezzo interstellare magnetizzato viene attraversata da radiazione elettromagnetica polarizzata linearmente si verifica una rotazione del vettore campo elettrico  $\vec{E}$  dell'onda elettromagnetica. Per spiegare il fenomeno, noto come rotazione di Faraday, è utile decomporre la radiazione polarizzata linearmente nelle due componenti polarizzate circolarmente e studiarne la propagazione nel plasma. L'indice di rifrazione in un plasma magnetizzato può infatti essere riscritto come:

$$n_r = \sqrt{1 - \frac{(\nu_p/\nu)^2}{1 \pm (\nu_L/\nu) \cos \theta}} \quad (2.18)$$

con  $\nu_p$  e  $\theta$  rispettivamente frequenza di plasma e angolo formato tra la direzione di propagazione e il campo magnetico; con + e - si indicano il senso di polarizzazione circolare, rispettivamente destrorso e sinistrorso.

Le due onde viaggiano nel plasma a due velocità differenti e quando si ricompongono, dopo uno spostamento infinitesimo  $dl$ , la loro differenza di fase è cambiata. Questa variazione fa sì che il vettore di polarizzazione subisca una rotazione, come si nota nell'equazione 2.19.

Inoltre, il piano di polarizzazione dell'onda polarizzata linearmente, somma delle due onde polarizzate circolarmente, risulta ruotato di  $d\psi = d\phi/2$  dove  $d\phi$  è definito in 2.20:

$$\Delta n \simeq \frac{\nu_p^2 \nu_L}{\nu^3} \cos \theta \quad (2.19)$$

$$d\phi = \frac{2\pi dl}{\lambda} \Delta n = \frac{2\pi \nu \Delta n}{c} dl \quad (2.20)$$

Integrando e effettuando delle sostituzioni si ottiene l'espressione per l'angolo di

rotazione del vettore di polarizzazione. Dopo aver percorso uno spessore  $L$  attraverso il plasma magnetizzato il piano di polarizzazione avrà subito una rotazione pari a:

$$\Delta\psi = \int_0^L d\psi = \frac{e^3\lambda^2}{2\pi m_e^2 c^4} \int_0^L n_e(l) B_{\parallel}(l) dl \quad (2.21)$$

Si definisce inoltre *rotation measure*:

$$R.M. = \frac{\Delta\psi}{\lambda^2} = \int_0^L d\psi = \frac{e^3}{2\pi m_e^2 c^4} \int_0^L n_e(l) B_{\parallel}(l) dl \quad (2.22)$$

la quale esprime la capacità di un plasma di ruotare il vettore di polarizzazione della radiazione che lo attraversa. La R.M. dipende dalle dimensioni e densità elettronica della nube, oltre che alla componente di  $B$  lungo la linea di vista. Conoscere le tre grandezze è complicato e in genere non possibile, ma quello che si può ottenere è una loro misura integrata lungo la linea di vista.

Si può allora riscrivere la R.M.

$$\Delta\psi = \lambda^2 R.M. \quad (2.23)$$

La R.M. sarà definita positiva per  $B_{\parallel}$  diretto verso l'osservatore. Misurando a varie lunghezze d'onda l'angolo di polarizzazione di sorgenti diverse si può sondare la R.M. dovuta al campo magnetico galattico al variare delle coordinate. Così facendo, se si riuscisse a stimare lo spessore attraversato dalla radiazione, sarebbe possibile ottenere una stima del campo magnetico parallelo alla linea di vista.

### 2.2.3 Stima della distanza percorsa nel plasma

Per avere una stima dello spessore attraversato dalla radiazione si può sfruttare una proprietà della propagazione delle onde elettromagnetiche in un plasma, per la quale per le onde con frequenza superiore alla frequenza di plasma ( $\nu > \nu_p$ ), la velocità di propagazione dipende dall'indice di rifrazione, che a sua volta dipende dalla frequenza. La velocità di gruppo sarà data da:

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = c \times n_r = c \times \sqrt{1 - \left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2} = \frac{c^2}{v_f} < c \quad (2.24)$$

con  $k = \lambda^{-1}$  è il numero d'onda, cioè il numero di oscillazioni dell'onda per unità di lunghezza).

Il tempo  $T_a(\nu)$  che l'onda impiega ad attraversare uno spessore  $L$  è dato:

$$T_a(\nu) = \int_0^L \frac{dl}{v_g} \approx \int_0^L \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2 \right] \frac{dl}{c} = \frac{L}{c} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{\pi m_e} \frac{1}{\nu^2} \int_0^L n_e dl \quad (2.25)$$

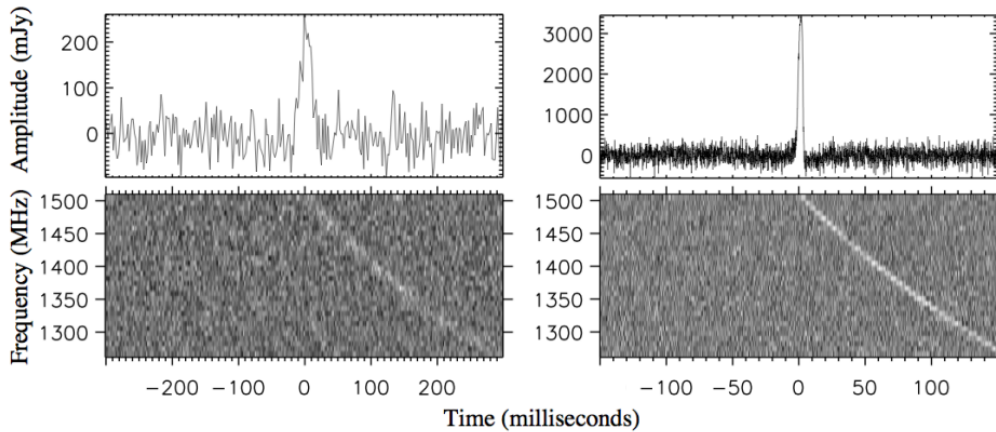
Il tempo di attraversamento dipende quindi dalla frequenza della radiazione e dalle caratteristiche fisiche del mezzo. Queste ultime sono espresse, in forma integrata, dalla *dispersion measure*, definita come:

$$D.M. = \int_0^L n_e dl \quad (2.26)$$

Se si ha a disposizione una sorgente che emette un segnale impulsivo, che viene emesso in un arco di tempo molto breve, si può osservare che il segnale a diverse frequenze arriva ad intervalli di tempo leggermente differenti.

La differenza in tempo nell'arrivo di un segnale osservato a due frequenze diverse,  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , è data da:

$$\Delta T = T'_a - T''_a = D.M. \times \frac{e^2}{2\pi m_e} \left( \frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2} \right) \quad (2.27)$$



**Figura 2.4:** La parte superiore dell'immagine mostra l'impulso di due sorgenti, la parte inferiore quello osservato da terra per effetto della dispersione. (da McLaughlin et al., 2006)

## 2.2.4 Misura del campo magnetico

Se si osserva il segnale di una Pulsar, si possono ottenere sia la misura di dispersione (dallo spettro), sia la misura di rotazione (da misure di polarizzazione, considerato che l'emissione di una pulsar è di Sincrotrone, e dunque linearmente polarizzata). Dal rapporto R.M./D.M. si può ottenere un valore medio della componente del campo magnetico lungo la linea di vista:

$$\langle B_{\parallel} \rangle \propto \frac{R.M.}{D.M.} \propto \frac{\int n_e B_{\parallel} dl}{n_e dl} \quad (2.28)$$

Si può anche studiare la geometria del campo del disco a partire da pulsar con distanza nota, dato che la R.M. varia al variare della linea di vista, così come cambia  $B_{\parallel}$  sulla base del punto osservato. Il solo svantaggio nell'uso delle pulsar è l'eventuale incertezza sulla stima della distanza. Altri studi sulle misure di rotazione sono stati condotti su sorgenti extragalattiche, già a partire dagli anni '70. Da questi primi lavori si è creato un largo consenso sul fatto che il campo magnetico, alle basse latitudini galattiche, sia prevalentemente parallelo al piano della Galassia, con qualche eccezione.

## Capitolo 3

# Instabilità di Jeans in presenza di un campo magnetico

Oltre all'interazione con particelle microscopiche e con la radiazione, i campi magnetici giocano un ruolo fondamentale nello studio dei fenomeni macroscopici. Uno su tutti la formazione stellare in seguito al collasso di una nube di  $H_2$  molecolare il cui fenomeno alla base è l'instabilità di Jeans. Tale instabilità si instaura quando la pressione interna del gas non è in grado di contrastare il collasso gravitazionale cui va naturalmente incontro una nube ricca di materia. Per mantenersi stabile la nube dovrebbe essere in uno stato di equilibrio idrostatico, secondo la relazione:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \quad (3.1)$$

ma l'effetto di un campo magnetico può modificare in maniera importante le condizioni iniziali che interessano l'equilibrio della nube e andare a originare fenomeni che non si avverrebbero in assenza di esso.

Nell'approssimazione MHD il comportamento di un plasma astrofisico è governato da una forma semplificata delle equazioni di Maxwell, insieme all'idrodinamica a cui si aggiunge l'effetto della forza di Lorentz. Pertanto, le equazioni d'onda MHD che governano un plasma astrofisico magnetizzato sono le equazioni di continuità, l'equazione del moto e la legge di Faraday dell'induzione.

### 3.1 Condizioni iniziali

Si consideri una nube di gas permeata da un campo magnetico uniforme  $\vec{B}_0$ . Lo stato di equilibrio iniziale  $s_0$  sarà costituito da una pressione  $p_0 > 0$  costante, una velocità  $\vec{v}_0 = 0$ , un potenziale di autogravità  $\phi_0$  costante e il campo magnetico  $\vec{B}_0$  anch'esso costante.

Assumiamo la conservazione della massa e della quantità di moto come segue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.2)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + C_s^2(\rho_0) \nabla \rho - \rho \nabla \phi = \frac{\nabla \times \vec{B} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (3.3)$$

con  $C_s$  velocità del suono e  $\mu_0$  permeabilità magnetica nel vuoto.



Considerando quindi anche l'equazione di Faraday per l'induzione magnetica e che il campo magnetico è solenoidale, il sistema così costruito sarà:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + C_s^2(\rho_0) \nabla \rho - \rho \nabla \phi = \frac{\nabla \times \vec{B} \times \vec{B}}{\mu_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla^2 \phi - \Lambda \phi = -4\pi G \rho \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Lo stato omogeneo e in quiete considerato non soddisferebbe tutte le equazioni infatti, l'equazione per la definizione del termine di autogravità è stata modificata utilizzando l'approccio dell'Universo in espansione, per il quale l'equazione di Poisson  $\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho$  viene sostituita con l'equazione di gravitazione non relativistica di Einstein, con la presenza della costante cosmologica  $\Lambda > 0$ . Questo procedimento viene attuato proprio perché l'implicazione nello stato iniziale  $\phi$  costante porterebbe a  $\rho = 0$ , cioè densità nulla.

## 3.2 Sistema perturbato

Per studiare il sistema, si utilizza il metodo delle onde dispersive; si perturba lo stato iniziale  $s_0$  con una perturbazione  $\delta s = (\delta \rho(\vec{x}, t), \delta \vec{v}(\vec{x}, t), \delta \vec{B}(\vec{x}, t), \delta \phi(\vec{x}, t))$  e si costruisce così il sistema linearizzato perturbato:

$$\begin{cases} \delta \rho_t + \rho_0 \nabla \cdot (\delta \vec{v}) = 0 \\ \rho_0 \delta \vec{v}_t + C_s^2(\rho_0) \nabla \delta \rho - \rho_0 \nabla \delta \phi = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \delta \vec{B}) \times \vec{B}_0 \\ \nabla \cdot \delta \vec{B} = 0 \\ \nabla^2 \delta \phi - \Lambda \delta \phi = -4\pi G \delta \rho \\ \delta \vec{B}_t - (\nabla \delta \vec{v}) \cdot \vec{B}_0 + \vec{B}_0 \nabla \cdot \delta \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

con  $x_t = \frac{\partial x}{\partial t}$ .

Si cercheranno soluzioni per il sistema di equazioni 3.5 le cui dipendenze  $(\vec{x}, t)$  sono date da  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$ , nominalmente si cercano soluzioni del tipo *modi normali*, cioè andremo a sostituire ad ogni perturbazione:

$$\begin{cases} \delta \rho = \rho_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \delta \vec{v} = \vec{v}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \delta \phi = \phi_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \delta \vec{B} = \vec{B}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \end{cases} \quad (3.6)$$

Sostituendo le relazioni 3.6 in 3.5 e considerando i versori tangenti ( $\hat{t}_1, \hat{t}_2$ ) e normale ( $\hat{n}$ ) alla direzione di propagazione delle perturbazioni si ottiene:

$$\begin{cases} \omega\rho_1 - \rho_0(\vec{v}_1 \cdot \hat{n})k = 0 \\ \omega(\vec{v}_1 \cdot \hat{n}) - C_s^2(\rho_0)\frac{\rho_1}{\rho_0}k + \phi_1 k = \frac{1}{\mu_0\rho_0}(\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1)k \\ \omega(\vec{v}_1 \cdot \hat{t}_i) - \frac{1}{\mu_0\rho_0}(\vec{B}_0 \cdot \hat{n})\vec{B}_1 k \cdot \hat{t}_i = 0 \\ \omega(\vec{B}_1 \cdot \hat{t}_i) - k(\hat{n} \cdot \vec{B}_0)\vec{v}_1 \cdot \hat{t}_i + (\vec{v}_1 \cdot \hat{n})k\vec{B}_0 \cdot \hat{t}_i = 0 \\ \vec{B}_1 \cdot \hat{n} = 0 \\ \phi_1 = \frac{4\pi G}{k^2 + \Lambda}\rho_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

$\forall i = 1, 2$ .

Dal quale otteniamo le relazioni:

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{\rho_0 k (\vec{v}_1 \cdot \hat{n})}{\omega} \\ \vec{v}_1 \cdot \hat{t}_i = -\frac{1}{\mu_0\rho_0}(\vec{B}_0 \cdot \hat{n})\frac{k}{\omega}\vec{B}_1 \cdot \hat{t}_i \\ \vec{B}_1 \cdot \hat{t}_i = B_{1,i} \\ \phi_1 = \frac{4\pi G\rho_0}{k^2 + \Lambda}k\frac{\vec{v}_1 \cdot \hat{n}}{\omega} \end{cases} \quad (3.8)$$

$\forall i = 1, 2$ .

Sostituendo le relazioni 3.8 in 3.7 si ottiene un sistema di Cramer la cui matrice associata è:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \frac{k^2}{k^2 + \Lambda}C_s^2(\rho_0)(k^2 - k_{J,\Lambda}^2) & -\frac{1}{\mu_0\rho_0}\omega k\vec{B}_{0,1} & -\frac{1}{\mu_0\rho_0}\omega k\vec{B}_{0,2} \\ -k\omega\vec{B}_{0,1} & \omega^2 - \frac{(\vec{B}_0 \cdot \hat{n})^2}{\mu_0\rho_0}k^2 & 0 \\ -k\omega\vec{B}_{0,2} & 0 & \omega^2 - \frac{(\vec{B}_0 \cdot \hat{n})^2}{\mu_0\rho_0}k^2 \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

con  $B_0, i = \vec{B}_0 \cdot \hat{t}_i \forall i = 1, 2$ .

Si definisce  $k_{J,\Lambda}^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{C_s^2} - \Lambda$  numero d'onda critico di Jeans-Einstein per cui i valori di numero d'onda al quadrato minori di esso portano al collasso della nube.

Calcolando il determinante della matrice e ponendolo uguale a 0, si ottiene l'equazione di dispersione seguente:

$$(\omega^2 - C_a^2 k^2) \left[ \omega^4 - \omega^2 \left( \frac{k^2}{k^2 + \Lambda} C_s^2(\rho_0)(k^2 - k_{J,\Lambda}^2) + C_m^2 k^2 \right) + \frac{k^2}{k^2 + \Lambda} C_s(\rho_0)(k^2 - k_{J,\Lambda}^2) C_a^2 k^2 \right] = 0$$

con  $C_a^2 := \frac{(\vec{B}_0 \cdot \hat{n})^2}{\mu_0\rho_0} k^2$ ,  $C_b^2 := \frac{\vec{B}_{0,1} + \vec{B}_{0,2}}{\mu_0\rho_0}$  e  $C_m^2 = C_a^2 + C_b^2$ .

### 3.3 Conclusioni

Studiando la relazione di dispersione si avrà:

1.  $C_a^2 > 0$ , insorgenza di onde di Alfvén
2.  $C_a^2 = 0$ , solo se  $\vec{B}_0 \cdot \hat{n} = 0$  cioè non si propagherebbero onde di Alfvén dato che  $\vec{B}_0$  sarebbe parallelo al vettore d'onda.

Nel caso 2 la relazione di dispersione si trasformerebbe in:

$$\omega^2 \left( \omega^2 - \left( \frac{k^2}{k^2 + \Lambda} C_s^2(\rho_0) \left( k^2 - \left( \frac{4\pi G \rho_0}{C_s^2} - \Lambda \right) \right) + C_b^2 k^2 \right) \right) = 0 \quad (3.10)$$

dalla quale si ottiene:

1.  $\omega^2 = 0$ , caso stazionario stabile
2.  $\omega^2 = \frac{k^2}{k^2 + \Lambda} (C_s^2 + C_b^2) \left( k^2 - \left( \frac{4\pi G \rho_0}{C_s^2 + C_b^2} - \Lambda \right) \right)$

Ponendo  $\left( \frac{4\pi G \rho_0}{C_s^2 + C_b^2} - \Lambda \right) = k_{J,\Lambda,M}^2$  numero d'onda critico di Jeans-Einstein corretto per il campo magnetico, l'equazione di dispersione al punto 2 si legge:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{k^2 + \Lambda} (C_s^2 + C_b^2) (k^2 - k_{J,\Lambda,M}^2) \quad (3.11)$$

Come si nota dalle definizioni  $k_{J,\Lambda,M}^2$  e  $k_{J,\Lambda}^2$  il numero d'onda critico di Jeans-Einstein corretto per il campo magnetico è minore della sua definizione in assenza di quest'ultimo; questo fa sì che il campo magnetico abbia un effetto stabilizzante sul collasso gravitazionale.

Dunque il criterio di Jeans per l'insorgenza dell'instabilità gravitazionale si modifica e diventa:

$$k^2 < k_{J,\Lambda,M}^2$$

Nel caso dell'insorgenza delle onde Alfvén si ha:

$$\begin{cases} \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{k^2}{k^2 + \Lambda} (C_s^2 + C_m^2) (k^2 - \tilde{k}_{J,\Lambda,M}^2) \\ \omega_1^2 \omega_2^2 = C_s^2 \frac{k^2}{k^2 + \Lambda} C_a^2 k^2 (k^2 - k_{J,\Lambda}^2) \end{cases} \quad (3.12)$$

dove la soglia critica  $\tilde{k}_{J,\Lambda,M}^2 = \left( \frac{4\pi G \rho_0}{C_s^2 + C_b^2 + C_a^2} - \Lambda \right)$ .

Tuttavia per l'insorgenza dell'instabilità gravitazionale basterebbe che  $\omega_1^2 \omega_2^2 < 0$ , cioè che  $k^2 < k_{J,\Lambda}^2$  e quindi il criterio di Jeans è solo modificato per l'effetto di  $\Lambda$  e non del campo magnetico.

# Bibliografia

- Beck R., 2011, *Magnetic Fields in Galaxies*. Springer New York, p. 215–230, doi:10.1007/978-1-4614-5728-2\_8, [http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-5728-2\\_8](http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-5728-2_8)
- Cherkos A. M., Tessema S. B., Tessema 2013, *Gravitational instability on propagation of MHD waves in astrophysical plasma*, *Journal of Plasma Physics*, **79**, 805
- Dallacasa D., 2022, *Processi di Radiazione e MHD*
- Fanti C., Fanti R., 2021, *Una finestra sull'Universo Invisibile: Lezioni di radioastronomia*. Bologna
- Franchi F., 2022, *Meccanica dei continui*
- Jhandi B., Kalra G., 1985, *Gravitational Instability of Thermally Anisotropic plasma Astrophysical Journal (1986) 304, 6-10 Bhupinder Singh G.L. Kalra., The Astrophysical Journal*, 304, 6
- Kurtz S., 2005, *Hypercompact HII regions*, *IAU Symp.*, 1, 111
- McLaughlin M., Lyne A., Lorimer D., et al. 2006, *Transient radio bursts from rotating neutron stars*, *Nature*, 439, 817
- Planck Collaboration et al., 2016, *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, , 594, A13
- Rybicki G. B., Lightman A. P., 1979. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119403227>
- Wolchover N., 2020, *The Hidden Magnetic Universe Begins to Come Into View*, Quanta Magazine