ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TRASFORMATA DI BARGMANN DELL'OPERATORE CP, E SPAZIO DI FUNZIONI ASSOCIATO

Tesi di Laurea in Fisica Matematica Superiore

Relatore:
Chiar.mo Prof.
SANDRO GRAFFI

Presentata da:
ANDREA ZUCCHELLI

III Sessione
Anno Accademico 2010/2011

Ad Alessandro e Benedetta . . .

Introduzione

Nel corso dei miei studi universitari ho maturato un interesse via via sempre più definito e crescente nei riguardi della fisica matematica e nello specifico, ho concentrato la mia attenzione sugli aspetti che riguardano la teoria quantistica classica e la teoria dei campi.
Le motivazioni personali che mi hanno portato alla stesura della seguente tesi sono state un interesse speculativo sulla trattazione formale dei problemi classici della quantizzazione sia in ambito quantistico (prima quantizzazione), sia in quello riguardante la teoria dei campi (seconda quantizzazione).
Le motivazioni scientifiche di questo lavoro sono dettate dall'esigenza in primo luogo di approfondire il lavoro di V. Bargmann su di un particolare spazio di Hilbert di funzioni analitiche, allo scopo di ricercare risultati utili in campo analitico, ed in secondo luogo di elaborare alcune soluzioni di interesse generale sulla teoria degli operatori lineari autoaggiunti e non, tenendo come punto di partenza lo studio approfondito di una particolare sottoclasse di funzioni da me studiata ed elaborata.
V. Bargmann[1] tra gli altri lavori, è noto principalmente per il suo fondamentale contributo sulle rappresentazioni irriducibili unitarie dei gruppi di Lorentz, e lo studio da un punto di vista algebrico delle equazioni d'onda relativistiche. L'articolo da cui trae spunto questa tesi ha come base lo studio delle soluzioni operatoriali derivanti dalla prima quantizzazione (a cui Fock già collaborò), ed è rilevante in quanto, portando la ricerca di tali soluzioni dallo spazio classico delle funzioni di stato in $\mathbb{L}^2$ a uno spazio di funzioni

[1] Berlino 1908 - Princeton 1989, matematico e fisico tedesco.

analitiche intere, pone i presupposti per molti risultati utili in generale sugli operatori lineari su questo spazio, ed inoltre dà la possibilità di costruire alcuni operatori aventi forma piuttosto semplice da trattare soprattutto nella ricerca dello spettro, e poi per le loro proprietà più generali.

Nel corso di questa tesi è stato anzitutto studiato, analizzato ed integrato il lavoro di V. Bargmann; si è successivamente studiata la trasformata dell'operatore CP nel nuovo spazio di funzioni analitiche introdotto da Bargmann. In seguito lo studio si è focalizzato su di una particolare sottoclasse di funzioni analitiche, basata sulla trasformata dell'operatore CP e sul teorema di simmetria delle funzioni olomorfe di Schwartz. Sono poi stati messi in luce diversi aspetti topologici dello spazio in questione. In ultimo, si è considerato l'insieme degli operatori CP-simmetrici e sono state approfondite e rielaborate varie loro proprietà, facendo in particolare uso di alcuni risultati riguardanti le algebre di Banach e le costruzioni topologiche di Gel'fand, Naimark e Mazur.

Indice

Capitolo 1

Considerazioni e risultati preliminari

1.1 Quantizzazione classica

Nella teoria della meccanica quantistica classica per quantizzazione s'intende una regola per associare ad un osservabile classico f un operatore autoaggiunto $\hat{F}$ che agisce sullo spazio di Hilbert che descrive gli stati quantistici (puri) del sistema. Per esempio, una particella libera nello spazio, e la sua posizione tramite l'associazione $\vec{x} \longleftrightarrow Q_{\vec{x}}$ (una volta stabilito sotto quali condizioni quest'ultimo sia autoaggiunto). Esistono naturalmente vari modi per fornire tale associazione, e in seguito ne verranno trattati alcuni. Da un punto di vista più generale, quella che rappresenta l'idea della quantizzazione risiede nei principi stessi della meccanica quantistica, formulati intorno al 1930, che danno un'interpretazione profondamente diversa del concetto di misura e misurabilità degli osservabili stessi. Essi si possono elencare come

I. *Principio di sovrapposizione*: Gli stati puri di un sistema quantistico sono i vettori di uno spazio di Hilbert complesso separabile X.

II. *Principio di quantizzazione*: Ad ogni osservabile classico f è associato un unico operatore autoaggiunto F in X.

III. *Principio della misura*: Data la famiglia spettrale $E(\lambda)$ dell'opera-

tore autoaggiunto F corrispondente all'osservabile f, allora la distribuzione di probabilità dei valori che la grandezza f può assumere sullo stato preparato $\psi \in X$, in seguito ad un procedimento di misura, è $d\rho_\psi(\lambda) = d\langle E(\lambda)\psi, \psi\rangle / \|\psi\|^2$.
La famiglia spettrale di cui in **III.** (o *risoluzione dell'identità*) è per definizione una famiglia di proiettori ortogonali [1], $\lambda \mapsto E(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sullo spazio X, fortemente continua a destra, ossia $\lim_{\epsilon\to 0^+} E(\lambda+\epsilon) = E(\lambda)$, che soddisfa inoltre le proprietà seguenti:

1.

$$s - \lim_{\lambda\to-\infty} E(\lambda) = 0_X, \quad s - \lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = I_X;$$

2. $E(\lambda)$ è non decrescente; in altre parole, se $\lambda \leq \mu$, allora $E(\lambda) \leq E(\mu)$ nel senso debole

$$\langle E(\lambda)\psi, \psi\rangle \;\leq\; \langle E(\mu)\psi, \psi\rangle\,, \quad \forall\psi \in X$$

.

La famiglia spettrale introduce la *misura spettrale*, o $dE(\lambda)$, la quale fornisce una generalizzazione in dimensione infinita del teorema spettrale classico a dimensione finita, e che permette in seguito di scrivere un operatore autoaggiunto H come 'somma' di proiettori sugli autospazi corrispondenti allo spettro di H (che si sa, essendo autoaggiunto, avere spettro reale; ecco perché, fondamentalmente, λ è un parametro reale). In altre parole, vale la scrittura (grazie al teorema di Stone-Von Neumann) $H = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE(\lambda)$.
Ne viene direttamente che per calcolare $\|H\psi\|^2$, si usa

$$\|H\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2\, d\rho_\psi(\lambda), \quad \rho_\psi = \langle E(\lambda)\psi, \psi\rangle\,, \forall\psi \in X.$$

[1] Per ogni sottospazio chiuso $C \subset X$, $\forall\psi \in X$, vale la rappresentazione unica (grazie al teorema di proiezione di spazi di Hilbert) $\psi = \psi_C + \psi^\perp$, dove $\psi_C \in C$, e $\psi^\perp \in C^\perp$; l'operatore di proiezione ortogonale P^C è l'operatore che agisce su X proiettando i vettori su C, ossia

$$P^C\psi = P^C(\psi_C + \psi^\perp) := \psi_C, \quad \forall\psi \in X.$$

Dato quindi uno stato (puro) preparato $\psi \in X$ (per esempio, una particella libera nello spazio), a seguito di un processo di <u>*misura*</u> della grandezza f sullo stato medesimo, allora il valor medio di tale misura (in seguito alla quantizzazione) è dato da

$$f_\psi = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d \left\langle E(\lambda)\psi, \psi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\rho_\psi(\lambda) = \left\langle F\psi, \psi \right\rangle ,$$

dove, come si vede chiaramente, la misura spettrale dipende unicamente dall'operatore autoaggiunto F, risultato della quantizzazione.

Esempio 1.1. : Si prenda una particella libera nello spazio [2] $\mathbb{R}^3$; sia $X = L^2(\mathbb{R}^3)$. Sia poi $\vec{x}$ il nostro osservabile classico; ad esso viene associato l'operatore $Q_{\vec{x}_j}\psi = x_j\psi$, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Se R è una regione dello spazio, o meglio, un parallelepipedo formato dal triplice prodotto cartesiano di intervalli in $\mathbb{R}$, allora la famiglia spettrale corrispondente a $Q_{\vec{x}_j}$ risulta $E(I_j)\psi = \chi(I_j)\psi$, $j = 1, 2, 3$. Questo, valendo lungo le tre direzioni ortogonali x, y, z, comporta che la distribuzione di probabilità dei valori di posizione della particella in esame in una regione dello spazio R sia data dalla distribuzione congiunta delle tre misure spettrali, ossia $d\rho_\psi(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) = d < \chi(R)\psi, \psi >= |\psi|^2 \, d\vec{x}$. Di conseguenza la probabilità di misurare la posizione della particella nella regione R è data da

$$P_R = \int_R |\psi(\vec{x})|^2 \, d\vec{x}.$$

$\psi(\vec{x})$ può assumere in generale valori complessi; quello che più conta nelle analisi fisiche è però il modulo quadro di ψ, certamente reale, che in fisica assume il significato di ampiezza di probabilità della funzione d'onda associata a ψ.

1.2 Quantizzazione lineare

Richiamando quanto scritto in precedenza, un osservabile classico può essere visto come una funzione nello spazio delle fasi, generalmente indicata

[2] La dipendenza dal tempo rimane in quest'analisi implicita.

con $f(q,p)$; ad f viene poi associato (a meno di equivalenze unitarie) un operatore autoaggiunto F (indicato frequentemente anche con $\hat{f}$, o $\hat{F}$). In questo caso, l'osservabile f viene anche detto **simbolo** dell'operatore F.

Esempio 1.2. : *Quantizzazione* $2n$-*canonica*: $\forall j$, si pone

$$\begin{cases} q_j \longleftrightarrow Q_j \\ p_j \longleftrightarrow D_j = -\imath \partial_{x_j} \end{cases}$$

Esempio 1.3. : *Quantizzazione* $2n$-*pq*:

$$p_j q_j \longleftrightarrow \hat{p}_j \hat{q}_j$$

Quantizzazione $2n$-*qp*:

$$p_j q_j \longleftrightarrow \hat{q}_j \hat{p}_j$$

Esempio 1.4. : *Quantizzazione* $2n$-*media*:

$$p_j q_j \longleftrightarrow \frac{(\hat{p}_j \hat{q}_j + \hat{q}_j \hat{p}_j)}{2}$$

La quantizzazione $f \longleftrightarrow \hat{f}$ richiede in generale alcuni requisiti. Deve anzitutto essere lineare, ossia

1. $f + q \longleftrightarrow \hat{f} + \hat{g}$; $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha f \longleftrightarrow \alpha \hat{f}$.

2. *Principio di corrispondenza*: la quantizzazione dipende dal parametro $\hbar := h/2\pi$; in altre parole valgono

I. $\varphi : f \longrightarrow \hat{f}$ dipende da $\hbar \Leftrightarrow \varphi = \varphi(f, \hbar)$.

II. $f = f(q,p)$ è definita implicitamente tramite $\lim_{\hbar \to 0} \varphi(f, \hbar) = \hat{f}$.

La II. si traduce poi nel fatto che, per esempio, se $\hat{f} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$, allora $\exists\, f_1, f_2$ tali che $f = f_1 * f_2$,

$$\lim_{\hbar \to 0} (f_1 * f_2)(q,p) = f_1(q,p) f_2(q,p),$$
$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{\imath}{\hbar} \left[f_1 * f_2 - f_2 * f_1 \right](q,p) = \{f_1, f_2\}_P\,,$$

dove
$$\{f_1, f_2\}_P := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} \right).$$

Partendo dal simbolo f, si può giungere all'operatore $\hat{f}$ utilizzando il nucleo integrale, e cioè la funzione (o distribuzione) $k_f(x, y)$ tale che $\forall u \in C_0^\infty(X)$ l'azione di $\hat{f}$ si può scrivere come
$$(\hat{f}u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_f(x, y)u(y)\, d^n y.$$
Notando che il nucleo integrale non è a priori definito sullo spazio delle fasi (q, p), si vede tuttavia che esso funge in qualche modo da simbolo per la quantizzazione. Sullo spazio degli operatori si può definire un operatore 'semplice' differenziale del tipo

$$\hat{\varphi} := \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} c_{\alpha,\beta}\hat{q}^\alpha \hat{p}^\beta, \quad c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

con α e β multi-indici. Se $X = L^2(\mathbb{R}^n)$, allora gli operatori semplici definiti come sopra sono densi nell'insieme degli operatori in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Risulta allora evidente che i simboli, ove abbiano una corrispondenza continua con gli operatori nella quantizzazione, rimangono definiti, una volta che vengono definiti operatori del tipo 1.1; ciò che conta è dunque la quantizzazione di operatori del tipo $\hat{p}_j\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}\hat{p}_j$, $\hat{q}_j\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}\hat{q}_j$ in termini del simbolo φ dell'operatore $\hat{\varphi}$.

Definizione 1.1. (Quantizzazione lineare)
Siano $L^1_{p_j}$, $L^2_{p_j}$, $L^1_{q_j}$, $L^2_{q_j}$ operatori lineari differenziali del primo ordine a coefficienti costanti, per esempio
$$L^1_{p_j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha^1_{j,k} p_k + \beta^1_{j,k} q_k + \gamma^1_{j,k}\frac{\partial}{\partial p_k} + \delta^1_{j,k}\frac{\partial}{\partial q_k} \right).$$
Si definisce quantizzazione lineare un'associazione del tipo, $\forall j$,
$$\hat{p}_j\hat{\varphi} \longrightarrow L^1_{p_j}\varphi, \qquad \hat{\varphi}\hat{p}_j \longrightarrow L^2_{p_j}\varphi,$$
$$\hat{q}_j\hat{\varphi} \longrightarrow L^1_{q_j}\varphi, \qquad \hat{\varphi}\hat{q}_j \longrightarrow L^2_{q_j}\varphi.$$

Le matrici formate dai coefficienti non sono arbitrarie, ma nella quantizzazione esse devono soddisfare le regole di commutazione canonica $[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -\imath\hbar\delta_{i,j}$, $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 = [\hat{q}_i, \hat{q}_j]$.

Esempio 1.5. : La corrispondenza $f \longleftrightarrow k_f(x,y)$ tra simboli e loro rispettivi nuclei integrali è lineare, se gli L^i sono gli operatori risultanti dalla soluzione classica di Schrödinger.

1.2.1 qp-simboli

Definizione 1.2.
Si definisce qp-simbolo dell'operatore $\hat{\varphi}$ la funzione polinomiale data da

$$\varphi(q,p) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} c_{\alpha,\beta} q^\alpha p^\beta. \tag{1.2}$$

Proposizione 1.2.1.
Se φ è come in 1.2*, allora essa sottosta alla quantizzazione lineare fornita, $\forall j$ da*

$$\begin{aligned} \hat{p}_j\hat{\varphi} \longleftrightarrow \left(p_j - \imath\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}\right)\varphi, \qquad \hat{\varphi}\hat{p}_j \longleftrightarrow \varphi p_j, \\ \hat{q}_j\hat{\varphi} \longleftrightarrow q_j\varphi, \qquad \hat{\varphi}\hat{q}_j \longleftrightarrow \left(q_j - \imath\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}\right)\varphi. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul seguente risultato:

$$\hat{p}_j\hat{q}_j^{\alpha_j} = -\alpha_j\imath\hbar\hat{q}_j^{\alpha_j-1} + \hat{q}_j^{\alpha_j}\hat{p}_j.$$

□

Stando alla quantizzazione lineare, richiediamo ora che le condizioni 1.3 siano valide anche per simboli non polinomiali. In generale, dunque, si cercano degli operatori L ed L^* tali che, utilizzando il nucelo integrale, si abbia

$$f(q,p) = \int L(q,p;x,y)k_f(x,y)\,d^nx\,d^ny, \tag{1.4}$$

$$k_f(x,y) = \int L^*(x,y;q,p)f(q,p)\,d^nq\,d^np. \tag{1.5}$$

L'esempio 1.5 e la 1.3 implicano che

$$\left(p_j - \imath\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}\right) L = \imath\hbar\frac{\partial L}{\partial x_j}, \quad p_j L = -\imath\hbar\frac{\partial L}{\partial y_j},$$
$$q_j L = x_j L, \quad \left(q_j - \imath\hbar\frac{\partial}{\partial p_j}\right) L = y_j L. \tag{1.6}$$

Mentre per L^* valgono le equazioni aggiunte

$$\left(p_j + \imath\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}\right) L^* = -\imath\hbar\frac{\partial L^*}{\partial x_j}, \quad p_j L^* = \imath\hbar\frac{\partial L^*}{\partial y_j},$$
$$q_j L^* = x_j L^*, \quad \left(q_j + \imath\hbar\frac{\partial}{\partial p_j}\right) L^* = y_j L^*. \tag{1.7}$$

Consideriamo per ora le equazioni che coinvolgono L; come si vede dalle 1.6 esse sono equazioni ordinarie alle derivate parziali in x_j ed y_j. Si ricorda inoltre che ogni equazione scritta nella 1.6 prevede n equazioni differenziali ordinarie.
Risolvendo il secondo insieme di n equazioni differenziali, ossia $p_j L = -\imath\hbar\frac{\partial L}{\partial y_j}$, si ottiene

$$L = e^{\imath p\cdot y/\hbar} L_1(q, p; x);$$

Sostituendo quest'ultima nel primo insieme delle 1.6, ricaviamo

$$L_1(q, p; x) = e^{-\imath p\cdot(x+q)/(2\hbar)} L_2(x - q, p).$$

La terza invece dà direttamente

$$L_2(x - q, p) = \delta(x - q) L_3(p),$$

cosicché si può porre $x = q$. Andando infine a sostituire quest'ultimo risultato nel primo set di equazioni in 1.6 si ha che $L_3(p)$ non dipende da p, ed è dunque costante, $L_3(p) = c$. Questa costante si ricava tenendo presente che come condizioni a contorno il simbolo $f = 1$ ha come nucleo integrale associato $k_1(x, y) = \delta(x - y)$, di modo che $L_3(p) = c = 1$. Quindi, riscrivendo L opportunamente, si è trovato

$$L = \delta(x - q) e^{\imath p\cdot(y-q)/\hbar}, \tag{1.8}$$

ed analogamente

$$L^* = (2\pi\hbar)^{-n}\delta(x-q)e^{-\imath p\cdot(y-q)/\hbar}. \tag{1.9}$$

Per riassumere, si conclude che

Proposizione 1.2.2. *(Quantizzazione di qp-simboli e nuclei)*
Sia f un simbolo nello spazio (q,p), ed $\hat{f}$ l'opearatore corrispondente tramite quantizzazione lineare, espresso mediante il nucleo integrale di f. Allora vale

$$f(q,p) = \int k_f(x,y)e^{\imath p\cdot(y-q)/\hbar}\, d^n y, \tag{1.10}$$

$$k_f(x,y) = (2\pi\hbar)^{-n}\int f(x,p)e^{-\imath p\cdot(y-x)/\hbar}\, d^n p. \tag{1.11}$$

Questo implica, in particolare, che un operatore $\hat{f}$ possa essere espresso in termini del *qp*-simbolo f come

$$(\hat{f}u)(x) = (2\pi\hbar)^{-n}\int e^{\imath p\cdot(x-y)/\hbar}f(x,p)u(y)\, d^n y\, d^n p, \tag{1.12}$$

o, più brevemente

$$(\hat{f}u)(x) = \int e^{\imath\cdot x/\hbar}f(x,p)\tilde{u}(p)\, d^n p, \tag{1.13}$$

dove si è posto

$$\tilde{u}(p) = (2\pi\hbar)^{-n}\int e^{-\imath p\cdot y/\hbar}u(y)\, d^n y, \tag{1.14}$$

e, come si vede, $\tilde{u}(p)$ è strettamente legata alla trasformata di Fourier; inoltre si noti come queste ultime equazioni rimandino in particolare alla quantizzazione di Weyl (vedere prossima sezione).
Perciò, tali formule sono in grado di definire l'azione dell'operatore $\hat{f}$ su una vasta classe di simboli $f(q,p)$. Per quanto scritto sopra, sotto opportune condizioni di seguito illustrate, si può definire l'operatore $\hat{f}$ su $S(\mathbb{R}^n)$ (la trasformata di Fourier ben definita come operatore unitario), e dunque $\hat{f} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$, e di conseguenza, il dominio di $\hat{f}$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$, e si possono allora estendere diversi risultati per chiusura.
Si ricorda inoltre che, dalla teoria dei simboli in analisi, si ha che

Definizione 1.3. (Simbolo)
Sia $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$, $a = a(x, \theta)$, con $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}^N$. Se $\forall \alpha \in (\mathbb{Z}^+)^n$, $\forall \beta \in (\mathbb{Z}^+)^N$, e $\forall$ compatto $K \subset X$ esistono dei numeri reali $c_{\alpha,\beta,K}$, ρ, δ ed m tali che

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x, \theta)| \leq c_{\alpha,\beta,K}(1 + |\theta|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|}, \quad |\theta| \geq 1, \tag{1.15}$$

allora si dice che a è un *simbolo*, e si scrive $a \in S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$.

Definizione 1.4. (Funzione di fase)
Una funzione $\varphi = \varphi(x, \theta)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *di fase* se valgono

1. $\theta \in \dot{\mathbb{R}}^N$, dove $\dot{\mathbb{R}}^N := \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$;

2. $\Im\{\varphi\} \geq 0$;

3. $\varphi(x, \lambda\theta) = \lambda\varphi(x, \theta)$, $\lambda > 0$;

4. $d\varphi \neq 0$.

Si può naturalmente considerare lo spazio X come prodotto di due spazi in $\mathbb{R}^n$, raddoppiandone così la dimensione, che, con abuso di notazione, verrà indicato con $X \times Y$. Il simbolo a starà allora per $a = a(x, y, \theta) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times Y \times \mathbb{R}^N)$.

Esempio 1.6. : Se $a(x, \theta)$ è tale che, per $|\theta| \geq 1$ e se $\lambda > 0$, allora $a(x, \lambda\theta) = \lambda^m a(x, \theta)$ (a si dice *positivamente omogenea di grado m*), allora $a \in S^m_{1,0}$.

Esempio 1.7. : Il simbolo $a(x, \theta) = e^{\imath\langle x,\theta\rangle}$ sta in $S^0_{0,1}$.

Esempio 1.8. : Sia data una funzione $f \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$ tale che

1. f positivamente omogenea di grado 1;

2. $f \geq 0$,

allora $e^{-f(x,\theta)} \in S^0_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

Esempio 1.9. : (*funzione di fase*) L'esempio più comune di funzione di fase è $\varphi(x, y, \theta) := \langle x - y, \theta \rangle$, con $X = Y$, ed $N = n$. Si verifica subito che le condizioni **1.**, **2.** della definizione 1.4 sono soddisfatte; se $\lambda > 0$, si ha poi che $\varphi(x, y, \lambda\theta) = \lambda\varphi(x, y, \theta)$. Infine

$$d\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \, dy_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} \, d\theta_j = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \, dx_j - \sum_{j=1}^{n} \theta_j \, dy_j + \\ + \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) \, d\theta_j.$$

$\Longrightarrow d\varphi \neq 0$, in quanto $\theta \neq 0$.

Definizione 1.5.
Sia φ una funzione di fase (su $X \times \dot{\mathbb{R}}^N$); siano ρ, δ ed m tali che $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, $m < -N$ [3]. Se $a \in S^m_{\rho,\delta}$, allora si definisce *integrale oscillante*, o *distribuzione integrale di Fourier* (*FIO*) l'integrale $I(a, \varphi)$, definito come

$$I(a, \varphi) = \int e^{\imath\varphi(x,\theta)} a(x, \theta) \, d\theta,$$

che agisce come distribuzione nel modo seguente

$$< I(a, \varphi), u >= \int \int e^{\imath\varphi(x,\theta)} a(x, \theta) u(x) \, dx \, d\theta.$$

In particolare, se $\varphi(x, y, \theta) = \langle x - y, \theta \rangle$, allora $I(a, \theta)$ si dirà *operatore pseudodifferenziale*.
Tornando alla quantizzazione dei *qp*-simboli, si vede quindi che sotto opportune condizioni, per esempio $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, se $\forall \alpha$, $\beta \in (\mathbb{Z}^+)^n$, e $\forall$ compatto $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ esistono $c_{\alpha,\beta,K}$, ρ, δ ed m tali che

$$|\partial^\alpha_q \partial^\beta_p f(q, p)| \leq c_{\alpha,\beta,K}(1 + |p| + |q|)^m,$$

allora l'operatore $\hat{f}$ è l'operatore pseudodifferenziale del *qp*-simbolo $f(q, p)$.

[3] Le limitazioni poste derivano da un teorema che assicura che con tali restrizioni, la funzione $I(a, \varphi)$ sia ben definita come distribuzione integrale, e che sia continua $\forall m$.

1.3 Quantizzazione di Weyl

Se $f(q,p)$ è un osservabile classico, e $f \in S(\mathbb{R}^{2n})$, si può utilizzare la trasformata inversa di Fourier di $\hat{f}$, ottenendo così un operatore pseudodifferenziale, come esposto nella sezione precedente, operatore corrispondente del simbolo f. Più precisamente, vale

$$f(\eta,\xi) = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(q,p) T_{\eta,\xi}(q,p)\, d^n q\, d^n p, \quad T_{\eta,\xi}(q,p) := e^{\imath(\langle q,\xi\rangle + \langle p,\eta\rangle)}. \tag{1.16}$$

Il problema che si pone nella quantizzazione di Weyl è determinare quali operatori unitari corrispondono alla famiglia di osservabili classiche $T_{\eta,\xi}$, che rispettino le regole di commutazione canonica. Il problema cosidetto delle *CCR* (canonical commutation rules) è quello di determinare gli spazi di Hilbert e i gruppi unitari fortemente continui che soddisfino le regole di Weyl

$$\hat{T}_\hbar(-q,-p) = \hat{T}_\hbar(q,p)^* \tag{1.17}$$

$$\hat{T}_\hbar(q,p)\hat{T}_\hbar(q',p') = e^{\imath\pi\hbar\omega((q,p);(q',p'))}\hat{T}_\hbar(q',p')\hat{T}_\hbar(q,p). \tag{1.18}$$

Introducendo la soluzione di Schrödinger, che consiste nel sostituire formalmente l'impulso con $D_x = -\imath\nabla$, e la posizione con $X = x$, si ottiene la seguente famiglia unitaria

$$\hat{T}_\hbar(q,p) = e^{\imath(\langle q,X\rangle + \langle p,\hbar D_x\rangle)}. \tag{1.19}$$

Si giunge in questo modo ad una rapida definizione di quantizzazione per simboli in $S(\mathbb{R}^{2n})$, secondo Weyl; se F è l'operatore associato ad f, o la sua quantizzazione secondo Weyl, allora F che agisce su $L^2(\mathbb{R}^n)$ è dato dalla formula

$$F = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(q,p)\hat{T}_\hbar(q,p)\, d^n q\, d^n p. \tag{1.20}$$

Osservazione 1.
1. Dal momento che $\left\|\hat{T}_\hbar(q,p)\right\| = 1$, e $\hat{f} \in S$, allora F ha norma operatoriale finita.
2. In particolare si ha

$$\|F\| \leq \int |\hat{f}(q,p)|\, d^n q\, d^n p = \left\|\hat{f}\right\|_{L^1},$$

e quindi F è continuo come operatore in S ed anche per ogni osservabile classico che ammette trasformata di Fourier in L^1.

Per quanto riguarda l'azione dell'operatore F su S (si veda l'appendice 2, oppure direttamente [2]), vale la seguente

Proposizione 1.3.1.
$(Fu)(x) = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(q,p) e^{\imath\hbar\langle q,p\rangle} e^{\imath\langle q,x\rangle} u(x+\hbar q)\, d^n q\, d^n p.$

Capitolo 2

Lo spazio di Bargmann di funzioni analitiche F_n

Nella trattazione del problema dell'oscillatore armonico quantistico[1], vengono introdotti gli operatori di creazione e distruzione (opportunamente normalizzati) η e ξ, i quali soddisfano alle condizioni di commutazione canoniche (in $\mathbb{R}^n$)

$$[\xi_k, \eta_l] = \delta_{k,l}, \quad [\xi_k, \xi_l] = 0, \quad [\eta_k, \eta_l] = 0.$$

Essi sono intimamente legati ai consueti operatori di posizione e di momento, ottenuti a seguito della quantizzazione canonica dei corrispettivi osservabili classici. Di fatto, in meccanica quantistica avviene la quantizzazione canonica $x_k \longleftrightarrow q_k$ e $-\imath\hbar\partial_{x_k} \longleftrightarrow p_k$, per cui

$$[p_k, q_l] = -\imath\hbar\delta_{k,l}, \quad [p_k, p_l] = 0, \quad [q_k, q_l] = 0.$$

In maniera più formale, ci si può chiedere, una volta assegnata una coppia di n operatori, Q_k e D_l, quali siano le soluzioni operatoriali che soddisfino le regole di commutazione canonica. Per quanto concerne la quantizzazione usuale, posti per esempio $\eta_k := 2^{-1/2}(q_k - \imath p_k)$ e $\xi_k := 2^{-1/2}(q_k + p_k)$ (cioè gli operatori di creazione e distruzione), si ottiene la soluzione dovuta a Fock

[1] I risultati che seguono sono stati tratti principalmente dall'articolo di V. Bargmann, vedi [1]

$\xi_k = \partial/\partial\eta_k$, coerente con $[\xi_k, \eta_k] = 1$, in stretta analogia con la soluzione di Schrödinger $D_k = -\imath\hbar\nabla$, per cui vale $[Q_k, D_k] = -\imath\hbar$. Vale inoltre che $\eta_k^* = \xi_k$, e $\xi_k^* = \eta_k$.
Da un punto di vista più astratto, se considerassimo uno spazio denotato F_n in cui vengono realizzate le soluzioni del problema sopra esposto, allora dal momento che ξ_k dipende da η_k, le soluzioni (in F_n) saranno funzioni dipendenti esclusivamente dalla 'variabile' η_k, e quindi analitiche[2], la quale, per quanto scritto sopra, è combinazione lineare complessa degli operatori di posizione ed impulso, e quindi può essere considerata come variabile complessa. Viene dunque spontaneo considerare tale spazio F_n come un opportuno spazio di funzioni a variabili complesse, che possa creare un legame diretto con lo spazio di Hilbert consueto, denotato H_n, delle funzioni di stato delle particelle quantistiche.
Lo spazio F_n dovrà in primo luogo soddisfare le seguenti richieste:

1. avere un prodotto interno;

2. essere 'collegato' allo spazio delle funzioni di stato delle particelle quantistiche;

3. essere coerente con le regole di commutazione canonica (come da punto **2.**).

Cominciamo col vedere il primo punto.
1. Essendo le funzioni di F_n a variabili complesse, denotata con $z_k = x_k + \imath y_k$ la k-esima coordinata, allora si tratta di trovare una funzione reale positiva ρ_n che definisca univocamente un prodotto interno $(f, g) = \mu(\rho_n)$. Poiché $\eta_k^* = \xi_k$, $\xi_k^* = \eta_k$, deve valere la condizione

$$(z_k f, g) = (f, \frac{\partial g}{\partial z_k}), \quad 1 \leq k \leq n. \tag{2.1}$$

Di conseguenza

$$(f, \frac{\partial g}{\partial z_k}) = \int \frac{\partial}{\partial z_k}(\bar{f} g \rho_n)\, d^n z - \int \bar{f} g \frac{\partial \rho_n}{\partial z_k}\, d^n z, \tag{2.2}$$

[2]Essendo $\partial/\partial\bar{\eta}_k = 0$.

perché infatti $\partial \bar{f}/\partial z_k = 0$. Supponendo che f e g non crescano troppo velocemente all'infinito, il primo integrale della 2.2 si annulla, e dalla 2.1 si ottiene quindi

$$\int \bar{z}_k \bar{f} g \rho_n \, d^n z = -\int \bar{f} g \frac{\partial \rho_n}{\partial z_k} \, d^n z, \tag{2.3}$$

il che suggerisce $\partial \rho_n/\partial z_k = -\bar{z}_k \rho_n$, equivalente[3] a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \rho_n}{\partial x_k} - \imath \frac{\partial \rho_n}{\partial y_k}\right) = -(x_k - \imath y_k)\rho_n, \quad \forall k$$

ossia

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial x_k} = -2x_k \rho_n, \quad \frac{\partial \rho_n}{\partial y_k} = -2y_k \rho_n, \quad \forall k.$$

Di conseguenza, si ottiene

$$\rho_n = c \exp\left\{-\bar{z} \bullet z\right\}, \tag{2.4}$$

dove per $\bar{z} \bullet z$ s'intende la scrittura compatta $\sum_{k=1}^n \bar{z}_k z_k = \sum_{k=1}^n |z_k|^2$.

2. Tendendo presente lo schema $\eta \leftrightarrow z$, $\xi \leftrightarrow \partial/\partial z$, e il fatto che dallo spazio H_n si passa allo spazio F_n, ci si pone il problema di trovare un'applicazione da H_n a F_n, per cui

$$f(z) = \int A_n(z, x)\psi(x) \, d^n x, \quad \psi \in H_n.$$

In questo modo, ψ viene mandata in f, e coerentemente con le regole di commutazione canonica, $\eta_k \psi$ viene mandato in $z_k f$, e $\eta_k \psi$ in $\partial f/\partial z_k$. Poiché η_k e ξ_k sono uno l'aggiunto formale dell'altro, risulta

$$\int A_n(\eta_k \psi) \, d^n x = \int (A_n \xi_k)\psi \, d^n x = z_k f = \int z_k A_n \psi \, d^n x, \tag{2.5}$$

$$\int A_n(\xi_k \psi) \, d^n x = \int (\eta_k A_n)\psi \, d^n x = \frac{\partial f}{\partial z_k} = \int \frac{\partial A_n}{\partial z_k}\psi \, d^n x. \tag{2.6}$$

[3] Nella teoria di variabili complesse si ha

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \imath \frac{\partial}{\partial y_k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \imath \frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$

Da qui si ottiene

$$z_k A_n = \xi_k A_n = 2^{-1/2}\left(q_k A_n + \frac{\partial A_n}{\partial q_k}\right),$$
$$\frac{\partial A_n}{\partial z_k} = \eta_k A_n = 2^{-1/2}\left(q_k A_n - \frac{\partial A_n}{\partial q_k}\right),$$

da cui segue che

$$\frac{\partial A_n}{\partial q_k} = (2^{1/2} z_k - q_k) A_n, \quad \frac{\partial A_n}{\partial z_k} = (2^{1/2} q_k - z_k) A_n,$$

la quale suggerisce

$$A_n(z, x) = c' \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^2 + x^2) + 2^{1/2} z \bullet x\right\}. \tag{2.7}$$

3. Per quanto è stato descritto nei punti 1. e 2., risulta quindi che

$$\eta_k = 2^{-1/2}\left(q_k - \frac{\partial}{\partial q_k}\right), \quad \xi_k = 2^{-1/2}\left(q_k + \frac{\partial}{\partial q_k}\right);$$

inoltre $\eta_k \leftrightarrow z_k$, $\xi_k \leftrightarrow \partial/\partial z_k$, per cui $[\xi_i, \eta_j] = \delta_{i,j}$, $[\xi_i, \xi_j] = 0$, $[\eta_i, \eta_j] = 0$.

2.1 Lo spazio F_n

Definizione 2.1.
Gli elementi di F_n sono funzioni intere analitiche $f(z)$, $z = (z_1, \ldots, z_n) = x + \imath y$.

Definizione 2.2.
Il prodotto interno in F_n, per mezzo di ρ_n, è dato da

$$(f, g) := \int \overline{f(z)} g(z)\, d\mu_n(z), \quad d\mu_n(z) := \rho_n\, d^n x\, d^n y, \quad \rho_n := \pi^{-n} e^{-|z|^2}, \tag{2.8}$$

dove l'integrale in 2.8 è esteso a tutto $\mathbb{C}^n$. f appartiene a F_n se, per definizione, $(f, f) < +\infty$, ossia la norma, indotta dal prodotto scalare, $\|f\| =$

$\sqrt{(f,f)}$ è convergente.
Poiché gli elementi di F_n sono funzioni analitiche (su $\mathbb{C}^n$, e dunque olomorfe), essi si potranno scrivere come sviluppo intorno all'origine

$$f(z) = \sum_{m_i} a_{m_1 m_2 \dots m_n} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_n^{m_n};$$

ora, abbreviando la scrittura della sequenza $(m_1, \dots, m_n)$ con $[m]$, f si scrive in modo più compatto come

$$f(z) = \sum_m a_{[m]} z^{[m]}. \tag{2.9}$$

Proposizione 2.1.1.
$\forall f \in F_n$ vale

$$(f,f) = \sum_m [m!] |a_{[m]}|^2 \tag{2.10}$$

Dimostrazione. Si ponga

$$M(\sigma) := \int_{|z_k| \leq \sigma} |f(z)|^2 \, d\mu_n(z), \quad 0 < \sigma < +\infty,$$

così che $(f,f) = \lim_{\sigma \to +\infty} M(\sigma)$. Operando poi un cambio di coordinate in coordinate polari $z_k = r_k e^{\imath \phi_k}$, con $\phi_k \in [-\pi, \pi)$ e $r \in (0, \sigma)$, e usando la 2.9, si ottiene

$$M(\sigma) = \sum_{m,m'} \bar{a}_{[m]} a_{[m']} I_{m,m'}(\sigma),$$
$$I_{m,m'}(\sigma) := \prod_k \left\{ \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath (m'_k - m_k)\phi} \, d\phi \int_0^\sigma r e^{-r^2} r^{m_k + m'_k} \, dr \right\};$$

(lo Jacobiano della trasformazione introduce un r in più nel secondo integrale di $I_{m,m'}(\sigma)$), e ne segue che

- Se $m \neq m'$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath (m'_k - m_k)\phi} \, d\phi = 0 \quad \forall k \quad \Longrightarrow \quad I_{m,m'}(\sigma) = 0;$$

- Se $m = m'$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\imath(m'_k - m_k)\phi}\, d\phi = \pi \quad \forall k \quad \Longrightarrow \quad I_{m,m'}(\sigma) = \prod_k \int_0^\sigma r e^{-r^2} r^{2m_k}\, dr,$$

e questi ultimi integrali sono tutti Gaussiani, e danno come risultato $I_{m,m'}(\sigma) = \gamma_{[m]}(\sigma) \prod_k m_k! = \gamma_{[m]}(\sigma)[m!]$, $0 < \gamma_{[m]}(\sigma) < 1$, ed anche $\lim_{\sigma \to +\infty} \gamma_{[m]}(\sigma) = 1$.

Di conseguenza,

$$M(\sigma) = \sum_m [m!] |a_{[m]}|^2 \gamma_{[m]}(\sigma)$$

ed essendo $M(\sigma)$ uniformemente limitato $\forall \sigma$, ne viene che

$$\lim_{\sigma \to +\infty} M(\sigma) = (f, f) = \sum_m [m!] |a_{[m]}|^2 \lim_{\sigma \to +\infty} \gamma_{[m]}(\sigma).$$

$\square$

In questo modo, il prodotto interno tra elementi di F_n viene molto più facilmente espresso come

$$(f, g) = \sum_m [m!] \bar{a}_{[m]} b_{[m]}.$$

Dalla 2.10 si verifica facilmente che il più semplice insieme ortonormale in F_n è dato dalle funzioni

$$u_{[m]}(z) = \frac{z^{[m]}}{\sqrt{[m!]}} = \prod_k \frac{z_k^{m_k}}{\sqrt{m_k!}},$$

e $(u_{[m]}, u_{[m']}) = \delta_{m,m'}$.

Proposizione 2.1.2.
$\forall f \in F_n$ vale la seguente disuguaglianza

$$|f(z)| \leq e^{\frac{1}{2}|z|^2} \|f\|. \tag{2.11}$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz [4] si ottiene

$$|f(z)|^2 \leq (\sum |a_{[m]} z^{[m]}|)^2 \leq (\sum [m!] |a_{[m]}|^2) \left(\sum \frac{|z^{[m]}|^2}{[m!]} \right) = \|f\|^2 \, e^{|z|}.$$

□

Analogamente si verifica la seguente disuguaglianza

Proposizione 2.1.3.
$\forall f \in F_n$ *si ha*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z_k} \right| \leq (1 + \bar{z}_k z_k) e^{|z|^2} \, \|f\|^2 \, . \tag{2.12}$$

2.1.1 Vettori principali, e nucleo riproducente

Si noti anzitutto che disuguaglianze del tipo della 2.11, ed in modo più generico della forma $f(z) \leq \omega(z) \|f\|$, con $\omega(z)$ continua e reale, comportano che la convergenza forte in F_n (ossia la convergenza in norma) ed implicano la convergenza puntuale, proprio perché

$$|f(z) - g(z)| \leq \omega(z) \|f - g\| \, , \quad \forall f, g \in F_n,$$

e per la 2.11, la convergenza è uniforme $\forall K$ compatto.
Se consideriamo l'operatore che ad ogni f in F_n associa, per un fissato $a \in \mathbb{C}^n$, $f(a)$, esso risulta naturalmente limitato e lineare; sarà pertanto possibile scrivere l'azione di questo operatore come

$$f(a) = (\mathbf{e}_a, f), \tag{2.13}$$

per cui $\mathbf{e}_a \in F_n$ sia unico. D'altra parte la 2.13 implica la 2.11, in particolare $|f(a)| \leq \|\mathbf{e}_a\| \, \|f\| = \omega(a) \, \|f - g\|$.

Definizione 2.3. (Vettori principali di F_n)
I vettori $\mathbf{e}_a$ si dicono *vettori principali.*

[4] Se x, $y \in X$, X di Hilbert, vale $| < x, y > |^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$; per serie assolutamente convergenti vale che $(\sum_m a_m b_m)^2 \leq (\sum_m a_m^2)(\sum_m b_m^2)$.

Se visti come insieme continuo di proiezioni di f, l'insieme dei vettori principali si può considerare come un insieme continuo di vettori ortonormali. Si avrà allora [5]

$$(f, g) = \int \overline{f(z)} g(z)\, d\mu_n(z) = \int (f, \mathbf{e}_z)(\mathbf{e}_z, g)\, d\mu_n(z). \tag{2.14}$$

Dal momento che l'unico vettore ortogonale agli $\mathbf{e}_a$, $\forall a$, è $f = 0$, l'insieme dei vettori principali è completo in F_n, nel senso in cui ogni loro combinazione lineare finita è densa in F_n. Scrivendo la 2.13 in forma integrale, si ottiene

$$f(z) = \int k(z, \omega) f(\omega)\, d\mu_n(\omega), \qquad k(z, \omega) := \overline{\mathbf{e}_z(\omega)}; \tag{2.15}$$

Definizione 2.4.
$k(z, \omega)$ è il *nucleo riproducente* per F_n.

Essendo per definizione $\mathbf{e}_z(\omega) = (\mathbf{e}_\omega, \mathbf{e}_z)$, sussiste

$$k(z, \omega) = \overline{\mathbf{e}_z(\omega)} = \overline{(\mathbf{e}_\omega, \mathbf{e}_z)} = (\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\omega) = \overline{k(\omega, z)}. \tag{2.16}$$

Se H è un insieme completo ed ortonormale, e $v_h \in H\ \forall h$, $\mathbf{e}_a$ si può scrivere come

$$\mathbf{e}_a = \sum_{h \geq 1} (v_h, \mathbf{e}_a) v_h = \sum_{h \geq 1} \overline{v_h(a)} v_h, \quad \forall \mathbf{e}_a \in F_n.$$

La scomposizione sopra vale naturalmente in norma, e quindi si ha convergenza puntuale per i vettori principali; in altre parole

$$\mathbf{e}_a(z) = \sum_{h \geq 1} \overline{v_h(a)} v_h \tag{2.17}$$

Se come v_h si scelgono i vettori del tipo $u_{[m]}$, si trova

$$\mathbf{e}_a(z) = \sum_m \prod_k \frac{(\bar{a}_k z_k)^{m_k}}{m_k!} = e^{\bar{a} \bullet z}, \tag{2.18}$$

$$k(z, \omega) = e^{z \bullet \bar{\omega}}. \tag{2.19}$$

In particolare, si verifica immediatamente

[5] Si ricorda che il prodotto interno $< \cdot, \cdot >$ in uno spazio di Hilbert X è tale che $< \alpha, \beta > = \overline{< \beta, \alpha >}$, $\forall \alpha, \beta \in X$.

Proposizione 2.1.4.
$k(z, \omega)$ è analitico in z e $\bar{\omega}$.

2.1.2 Operatori lineari e limitati su F_n

Sia L un operatore lineare su F_n, e L^* il suo aggiunto formale. Tramite i vettori principali, L può essere rappresentato come una trasformata integrale, infatti $\forall f \in F_n$

$$(Lf)(z) = (\mathbf{e}_z, Lf) = (L^*\mathbf{e}_z, f),$$

in modo tale che

$$(Lf)(z) = \int L(z, \omega) f(\omega)\, d\mu_n(\omega), \tag{2.20}$$

dove $L(z, \omega) = \overline{(L^*\mathbf{e}_z)(\omega)} = \overline{(\mathbf{e}_\omega, L^*\mathbf{e}_z)} = \overline{(L\mathbf{e}_\omega, \mathbf{e}_z)}$, o, equivalentemente

$$L(z, \omega) = (\mathbf{e}_z, L\mathbf{e}_\omega) = (L\mathbf{e}_\omega)(z). \tag{2.21}$$

Se $L = 1$, allora $L(z, \omega) = k(z, \omega)$. Inoltre vale

Proposizione 2.1.5.
$L(z, \omega)$ è analitico in z e $\bar{\omega}$.

Risulta quindi che gli integrali

$$\int |L(z, \omega)|^2\, d\mu_n(\omega) \qquad \int |L(\omega, z)|^2\, d\mu_n(\omega)$$

sono entrambi finiti per ogni z. Se $M = L^*$, allora $M(z, \omega) = \overline{L(\omega, z)}$; se $N = ML$, con M ed L operatori lineari limitati, vale (come composizione di nuclei)

$$N(z, z') = \int M(z, \omega) L(\omega, z')\, d\mu_n(\omega).$$

L è unitario se e solo se $LL^* = L^*L = I$, ossia

$$\int L(z, \omega)\overline{L(z', \omega)}\, d\mu_n(\omega) = \int \overline{L(\omega, z)} L(\omega, z')\, d\mu_n(\omega) = k(z, z'). \tag{2.22}$$

Teorema 2.1.6.
Sia κ una costante positiva, e sia $h_a \in F_n$ un insieme di vettori definiti per ogni $a \in \mathbb{C}^n$ che soddisfano la condizione seguente: per ogni insieme finito $a_\nu \in \mathbb{C}^n$, $\nu = 1, \dots, k$, e per ogni insieme di costanti complesse γ_ν

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu h_{a_\nu} \right\| \leq \kappa \left\| \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu \boldsymbol{e}_{a_\nu} \right\|. \tag{2.23}$$

Allora esiste ed è unico l'operatore limitato (con limite $\leq \kappa$) L su F_n, tale che $L\boldsymbol{e}_a = h_a$, e di conseguenza $L(z, \omega) = h_\omega(z)$.

Dimostrazione. L'unicità di L è chiara, in quanto deve aversi $L\mathbf{e}_a = h_a$, e

$$L(\sum_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu \mathbf{e}_{a_\nu}) = \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu h_{a_\nu}, \quad a_\nu \neq a_\mu \text{ se } \nu \neq \mu. \tag{2.24}$$

Dal momento che ogni insieme finito di vettori principali $\mathbf{e}_{a_\nu}$ è linearmente indipendente (e denso in F_n), si ha che L rimane ben definito e limitato su tale insieme. Per densità L viene poi definito a tutte le $f \in F_n$ tramite chiusura.
In particolare se $(h_a, h_b) = (\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b)$, allora $\kappa = 1$, ed L risulta isometrico. □

2.1.3 Decomposizione di F_n

Per ogni scomposizione della dimensione n in due interi positivi n' ed n'' come $n = n' + n''$, si ha che F_n può essere scomposto come il prodotto

$$F_n = F_{n'} \otimes F_{n''}. \tag{2.25}$$

In primo luogo, infatti, ogni $f \in F_n$ rimane analitica; in secondo luogo la misura di Bargmann $d\mu_n(z)$, chiamati $z' = (z_1, \dots, z_{n'})$, $z'' = (z_{n'+1}, \dots, z_n)$, diventa

$$d\mu_n(z) = d\mu_{n'}(z')\, d\mu_{n''}(z'').$$

In maniera analoga, i nuclei riproducenti saranno prodotti di due nuclei riproducenti k' e k'', ed i vettori principali saranno scomposti in accordo ad n'

ed n''. Vale infine la scomposizione in n fattori di F_n come

$$F_n = \underbrace{F_1 \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_1}_{n}. \tag{2.26}$$

2.1.4 La classe O_λ

Definizione 2.5. Una funzione analitica intera f appartiene alla classe O_λ, con $0 < \lambda < 1$, se

$$|f(z)| \leq \gamma e^{\frac{1}{2}\lambda^2 |z|^2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, \tag{2.27}$$

con $\gamma \geq 0$ opportuna.

Osservazione 2.
$O_\lambda \subset F_n$.

Dimostrazione. Se infatti $f \in O_\lambda$, vale la 2.27, e quindi (f, f) risulta

$$(f, f) = \int |f(z)|^2 \, d\mu_n(z) \leq \gamma^2 \pi^{-n} \int e^{|z|^2(\lambda^2 - 1)} \, d^n x \, d^n y \overset{(0<\lambda<1)}{<} +\infty$$

□

Si definisca per ogni $f \in F_n$, la funzione f_λ come

$$f_\lambda(z) := f(\lambda z), \qquad 0 < \lambda < 1. \tag{2.28}$$

Se $f \in F_n$, allora per la 2.11 $f_\lambda \in O_\lambda$. Grazie alla 2.10 si ha

$$(f_\lambda, f_\lambda) = \sum_m [m!] \lambda^{2|m|} |a_{[m]}|^2, \quad |m| := m_1 + \ldots + m_n. \tag{2.29}$$

Per un risultato sulle serie convergenti ed uniformemente limitate (vedi teorema $A.1.1$), vale quindi che f appartiene a F_n se e solo se $f_\lambda \in F_n$, $0 < \lambda < 1$, e le norme $\|f_\lambda\|$ sono uniformemente limitate. In particolare,

$$\|f - f_\lambda\|^2 = \sum_m [m!](1 - \lambda^{|m|})^2 |a_{[m]}|^2.$$

Pertanto, se $f \in F_n$, allora

$$f_\lambda \xrightarrow{s} f \qquad \text{per } \lambda \to 1.$$

2.1.5 Calcolo di alcuni integrali

Si calcolano di seguito diversi integrali, che risulteranno fondamentali nel prosieguo della trattazione.
Sia

$$I_n(\gamma, \delta; a, b) := \int e^{\frac{1}{2}\gamma z^2 + a \bullet z} e^{\frac{1}{2}\bar{\delta}\bar{z}^2 + \bar{b} \bullet \bar{z}} \, d\mu_n(z), \tag{2.30}$$

dove $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$, e $a, b \in \mathbb{C}^n$. Potendo utilizzare il teorema di Fubini-Tonelli, è evidente che $I_n = \prod_{k=1}^n I_1(\gamma, \delta; a_k, b_k)$; si ottengono i seguenti risultati

1. I_n converge assolutamente se e solo se

$$|\gamma + \delta|^2 < 4. \tag{2.31}$$

2. Se vale la 2.31, allora

$$I_n = (1 - \gamma\bar{\delta})^{-n/2} \exp\left\{ \frac{\bar{\delta}a^2 + \gamma\bar{b}^2 + 2a \bullet \bar{b}}{2(1 - \gamma\bar{\delta})} \right\}, \quad \Re\left\{(1 - \gamma\bar{\delta})^{-1/2}\right\} > 0, \tag{2.32}$$

infatti $\Re\left\{(1 - \gamma\bar{\delta})^{-1/2}\right\} = 1 - \frac{1}{4}|\gamma + \delta|^2 + \frac{1}{4}|\gamma - \delta|^2 > 0$.
Ponendo $\gamma = \delta$ e $a = b$ si ottiene che $e^{\frac{1}{2}\gamma z^2 + a \bullet z} \in F_n$ se e solo se $|\gamma| < 1$.

Si ponga

$$A_n(z, q) := \pi^{-n/4} \exp\left\{ \frac{1}{2}(z^2 + q^2) + 2^{1/2} z \bullet q \right\},$$

e

$$J_n(\alpha, \beta; p, q) := \int A_n(\alpha z, p) A_n(\bar{\beta}\bar{z}, \bar{q}) \, d\mu_n(z), \tag{2.33}$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, e $p, q \in \mathbb{C}^n$. Allora

$$J_n(\alpha, \beta; p, q) = \pi^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(p^2 + \bar{q}^2) \right\} I_n(-\alpha^2, -\beta^2; 2^{1/2}\alpha p, 2^{1/2}\beta q). \tag{2.34}$$

Dalla 2.30 risulta:

1. J_n converge assolutamente se e solo se

$$|\alpha - \beta| < 2; \tag{2.35}$$

2. J_n dipende unicamente dal prodotto $\kappa = \alpha\bar{\beta}$; esplicitando tale dipendenza, J_n diviene $J_n(\alpha, \beta; p, q) = \sigma_n(\kappa; p, q)$, dove

$$\sigma_n(\kappa; p, q) := [\pi(1-\kappa^2)]^{-n/2} \exp\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{1-\kappa}{1+\kappa}(p+\bar{q})^2 + \frac{1+\kappa}{1-\kappa}(p-\bar{q})^2\right]\right\}, \tag{2.36}$$

e $\Re\left\{(1-\kappa)^{-1/2}\right\} > 0$.

Dalla 2.35 si ha che $A_n(\alpha z, q) \in F_n$ se e solo se $|\alpha| < 1$.

2.2 L'applicazione $\mathbf{A}_n$ da H_n a F_n

Vediamo ora come si struttura il collegamento tra gli spazi H_n e F_n. Come scritto nel punto **2.** all'inizio del capitolo, deve esistere un'applicazione che colleghi lo spazio delle funzioni di stato ed F_n, e che rispetti le regole di commutazione canonica, tradotte, nelle soluzioni di Fock, come regole di commutazione di soluzioni operatoriali (la più usuale delle quali, come si è già ampiamente descritto, è quella di Schrödinger).
D'ora in avanti, H_n denota lo spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$, il cui prodotto interno è dato da

$$(\psi_1, \psi_2) = \int \overline{\psi_1(x)}\psi_2(x)\, d^n x,$$

dove l'integrale è esteso a tutto $\mathbb{R}^n$. Si useranno equivalentemente le variabili $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e quelle classiche nello spazio delle fasi $q = (q_1, \ldots, q_n)$.

2.2.1 Il nucleo $A_n(z, q)$

Riprendiamo la funzione $A_n(z, q)$ introdotta sopra. Si verifica che per z fissata

$$A_n(z, q) := \pi^{-n/4} \exp\left\{\frac{1}{2}(z^2 + q^2) + 2^{1/2} z \bullet q\right\} \in H_n; \tag{2.37}$$

vale inoltre il seguente utile risultato

Proposizione 2.2.1.

$$\int A_n(z,q)\overline{A_n(\omega,q)}\,d^n q = e^{z\bullet\bar{\omega}}, \tag{2.38}$$

che, per quanto visto nelle 2.16, e 2.18, non è altro che il nucleo riproducente dei vettori principali.

Definizione 2.6.
Per ogni $\psi \in H_n$, si definisce la trasformazione

$$f(z) = (\mathbf{A}_n\psi)(z) := \int A_n(z,q)\psi(q)\,d^n q. \tag{2.39}$$

Dal momento che per z fissato, $A_n(z,q) \in H_n$, l'integrale in 2.39 è sempre definito. In particolare valgono:

Proposizione 2.2.2.
Per $f(z)$ come definita nella 2.39*,*

$$|f(z)| \leq e^{\frac{1}{2}|z|^2}\,\|\psi\|\,. \tag{2.40}$$

Dimostrazione. Segue da un calcolo diretto di $|f(z)|^2 = \overline{f(z)}f(z)$, sfruttando il fatto che, sostituendo $\omega = z$ nella 2.38, si ottiene $e^{|z|^2}$ che esce dall'integrazione, mentre il resto dà esattamente $\|\psi\|^2$. □

Proposizione 2.2.3.
$f(z)$ è analitica.

Dimostrazione. Per provarlo, si rimanda al teorema $A.1.2$; in tal caso le ipotesi sono tutte verificate, inoltre essendo $|2^{1/2}z\bullet q| \leq 2|z|^2 + 1/4q^2$, si ha che $|A_n|$ viene maggiorato da $\pi^{-n/4}\exp(5/2\alpha^2 - 1/4q^2)$, per $|z^2| \leq \alpha^2$, che moltiplicato per $|\psi|$, è la $\eta(q)$ del teorema $A.1.2$. □

Si noti che per la 2.39, $f_\lambda \in O_\lambda \subset F_n$, con $0 < \lambda < 1$. Rimane naturalmente da provare che $f \in F_n$, ossia che la sua norma sia finita.

2.2.2 La classe C_0

Restringiamo dapprima le $\psi \in H_n$ alle funzioni in $C_0(\mathbb{R}^n)$, e cioè a supporto compatto, che sappiamo essere denso in H_n; una volta trovato l'insieme corrispondente in F_n, si estenderà allora l'argomento per densità.
Sia dunque $\psi \in C_0$, e assumiamo (non è restrittivo) che il supporto di ψ sia contenuto nella sfera chiusa D_r, $r < +\infty$ e $q^2 < r^2$. Si consideri l'integrale

$$F_\lambda := (f_\lambda, f_\lambda) = \int |f(\lambda z)|^2 \, d\mu_n(z), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Inserendo la 2.39, si ha

$$F_\lambda = \int\int\int \overline{A_n(\lambda z, q)} A_n(\lambda z, p) \overline{\psi(q)} \psi(p) \, d\mu_n(z) \, d^n q \, d^n p.$$

Essendo gli integrali in p e q estesi a D_r essi risultano assolutamente convergenti; anche l'integrale in z lo è per la 2.35. Portando fuori l'integrazione in z si ottiene

$$F_\lambda = \int\int \sigma_n(\lambda^2, p, q) \overline{\psi(q)} \psi(p) \, d^n p \, d^n q. \tag{2.41}$$

Posti

$$\epsilon := \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^{-1/2}, \quad s := \frac{1}{2}(p+q), \quad t := \frac{1}{2}(p-q),$$

si ottiene

$$\sigma_n(\lambda^2, p, q) = [(1+\epsilon^2)^n e^{-\epsilon^2 s^2}][(2\epsilon\pi^{1/2})^{-n} e^{-t^2/\epsilon^2}]; \tag{2.42}$$

si noti che per $\lambda \to 1$, $\epsilon \to 0$, e σ_n tende alla delta n-dimensionale $\delta_n(p-q)$.
Sostituendo le variabili t ed s, risulta

$$F_\lambda = (1+\epsilon^2) \int_{D_r} e^{-\epsilon^2 s^2} N_\epsilon(s) \, d^n s,$$

dove

$$N_\epsilon(s) = (\epsilon\pi^{1/2})^{-n} \int e^{-t^2/\epsilon^2} \overline{\psi(s-t)} \psi(s+t) \, d^n t =$$
$$= \pi^{-n/2} \int e^{-(t')^2} \overline{\psi(s-\epsilon t')} \psi(s+\epsilon t') \, d^n t'.$$

Ora, su D_r, $N_\epsilon(s)$ converge uniformemente a $|\psi(s)|^2$, per $\epsilon \to 0$ di modo che

$$\lim_{\lambda\to 1} F_\lambda = \lim_{\lambda\to 1} \|f_\lambda\|^2 = \int |\psi(s)|^2 \, d^n s = \|\psi\|^2 .$$

Da ciò segue che le $\|f_\lambda\|$ sono uniformemente limitate. Di conseguenza, per quanto visto in precedenza, $f \in F_n$, e $\|f\|^2 = \lim \|f_\lambda\|^2 = \|\psi\|^2$.
Riassumendo, se $\psi \in C_0$, allora $f(z) \in F_n$, e $\mathbf{A}_n$ è isometrico.

2.2.3 Isometria su H_n

Sia ora $\psi_0 \in H_n$; esiste una successione $\psi_j \in C_0$ che converge fortemente a ψ. Sia $f_0 = \mathbf{A}_n\psi_0$, e $f_j = \mathbf{A}_n\psi_j$. Dalla isometria di $\mathbf{A}_n$ su C_0 descritta nella sezione precedente, segue che

$$\|f_i - f_j\| = \|\mathbf{A}_n(\psi_i - \psi_j)\| = \|\psi_i - \psi_j\| .$$

Se $s - \lim f_j = g$, risulta che

$$|f_0(z) - f_j(z)| \leq e^{1/2|z|^2} \|\psi_0 - \psi_j\| ,$$

e quindi $g = f_0$. Di conseguenza

$$\|f_0\| = \lim \|f_j\| = \lim \|\psi_j\| = \|\psi_0\| .$$

Questo prova la seguente

Proposizione 2.2.4.
$\boldsymbol{A}_n$ è isometrico su H_n.

Siano ora $\chi_a \in H_n$, dove

$$\chi_a(q) := \overline{A_n(a, q)}, \quad a \in \mathbb{C}^n. \tag{2.43}$$

Si vede che i vettori principali si possono scrivere come

$$\mathbf{e}_a(a) = \int A_n(z, q)\chi_a(q) \, d^n q,$$

e quindi sono trasformati secondo

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{A}_n \chi_a. \tag{2.44}$$

Poiché i vettori pricipali $\mathbf{e}_a$ formano un insieme completo in F_n, ne viene allora che l'immagine degli χ_a tramite $\mathbf{A}_n$ è densa in F_n, dimostrando così il seguente

Teorema 2.2.5.
$f = \boldsymbol{A}_n \psi$ è una trasformazione lineare unitaria ed isometrica.

Corollario 2.2.6.
Sia S_n un insieme caratteristico[6] di vettori a. Poiché $\mathbf{e}_a$, $a \in S_n$, sono completi in F_n, segue che pure χ_a sono completi in H_n, e viceversa. In altre parole, le proprietà che valgono per $\mathbf{e}_a$, valgono anche per le trasformate χ_a.

Esempio 2.1. : Troviamo quali funzioni di H_n vengono trasformate nelle $u_{[m]}$, base ortonormale di F_n.
Dalla 2.38 otteniamo che, scrivendo $b := \bar{\omega}$, $\overline{A_n(\omega, q)} = \pi^{-n/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\bar{\omega}^2 + q^2] + 2^{1/2}\bar{\omega} \bullet q\right\} = A_n(b, q)$, da cui

$$e^{z \bullet b} = \int A_n(z, q) A_n(b, q)\, d^n q. \tag{2.45}$$

Si prenda $n = 1$; allora vale

$$u_m = \frac{z^m}{\sqrt{m!}} = \frac{1}{\sqrt{m!}} \frac{\partial^m}{\partial b^m} e^{b \bullet z}|_{b=0}.$$

Nella 2.45 si può scambiare derivazione ed integrazione rispetto a b, essendo A_n in H_n, e valendo la convergenza dominata. Di conseguenza poniamo

$$\phi_m(q) = \frac{1}{\sqrt{m!}} \frac{\partial^m}{\partial b^m} A_1(b, q)|_{b=0}. \tag{2.46}$$

Sostituendo in seguito A_1, e ponendo $b := 2^{1/2}\gamma$, si ottiene

$$\phi_m(q) = [2^m m! \sqrt{\pi}]^{-1/2} e^{-q^2/2} \frac{\partial^m}{\partial \gamma^m} (e^{2\gamma q - \gamma^2})|_{\gamma=0}.$$

[6]Un insieme di punti $S_n \subset \mathbb{C}^n$ è caratteristico se $f(a) = 0\ \forall a \in S_n$ e $f \in F_n$ implica che $f = 0$.

Dal momento che $e^{2\gamma q-\gamma^2}$ è la funzione generatrice dei polinomi di Hermite $H_m(q)$, troviamo le funzioni di Hermite normalizzate

$$\phi_m(q) = [2^m m!\sqrt{\pi}]^{-1/2} e^{-q^2/2} H_m(q). \tag{2.47}$$

Dalla 2.46, con z al posto di q, si può ottenere

$$A_1(z,q) = \sum_m u_m(z)\phi_m(q), \tag{2.48}$$

e generalizzando ad n, si ha

$$\phi_m(q) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{m_k}(q_k), \quad A_n(z,q) = \sum_m u_{[m]}(z)\phi_{[m]}(q). \tag{2.49}$$

2.2.4 L'operatore inverso $\mathbf{A}_n^{-1}$

Dal teorema 2.2.5 si evince l'esistenza dell'operatore inverso $\mathbf{A}_n^{-1}$ (in particolare dalla linearità e dall'unitarietà). Il teorema suggerisce una trasformazione inversa del tipo

$$(\mathbf{W}_n f)(q) = (\mathbf{A}_n^{-1} f)(q) = \int \overline{A_n(z,q)} f(z)\, d\mu_n(z), \quad f \in F_n. \tag{2.50}$$

Per q fissato, però, $A_n(z,q) \notin F_n$, e l'integrale potrebbe non convergere. Se $f \in O_\lambda$, l'integrale d'altra parte converge assolutamente. Per $\psi = \mathbf{W}_n f$, allora $\psi \in H_n$ (vedere appendice A, proposizione $A.1.3$).
Rimane da provare che $\mathbf{A}_n(\mathbf{W}_n f) = f$. Sia quindi $g = \mathbf{A}_n(\mathbf{W}_n f)$, cioè

$$g(\omega) = \int\int A_n(\omega,q)\overline{A_n(z,q)} f(z)\, d^n q\, d\mu_n(z). \tag{2.51}$$

L'integrale è assolutamente convergente[7].
Integrando in q risulta

$$g(\omega) = \int e^{\omega\bullet\bar{z}} f(z)\, d\mu_n(z) = f(\omega),$$

[7] Infatti, se $z = x + \imath y$, $\omega = u + \imath v$, si ha

$$\rho_n |A_n(\omega,q) A_n(z,q) f(z)| \leq c \exp\left\{1/2(v^2-u^2) + 2^{1/2} u \bullet q\right\} e^{-T},$$

dove $T = 1/2(1-\lambda^2)(x^2+y^2) + (q^2 + x^2 + 2^{1/2} q \bullet x)$ è definita positiva.

e quindi $g = f$. Dal momento che per ogni $f \in F_n$ si ha che $f = s-\lim_{\lambda\to 1} f_\lambda$, allora $\mathbf{A}_n^{-1} f = s - \lim \mathbf{A}_n^{-1} f_\lambda$. Poiché $f_\lambda \in O_\lambda$, segue che $\mathbf{A}_n^{-1} f_\lambda = \mathbf{W}_n f_\lambda$. Così si ha la seguente scrittura

$$(\mathbf{A}_n^{-1} f)(q) = s - \lim_{\lambda\to 1} \int \overline{A_n(z,q)} f(\lambda z)\, d\mu_n(z). \tag{2.52}$$

2.2.5 Operatori su F_n e H_n

$\mathbf{A}_n$ stabilisce un isomorfismo unitario tra gli operatori lineari su F_n e quelli di H_n; più precisamente, se L è operatore su H_n, e M su F_n, vale

$$M = \mathbf{A}_n L \mathbf{A}_n^{-1}, \quad D(M) = \mathbf{A}_n D(L). \tag{2.53}$$

Se si considera il gruppo G delle trasformazioni unitarie non-omogenee su $\mathbb{C}^n$ in se stesso, esse sono rappresentate tramite

$$z' = c + Uz, \qquad c \in \mathbb{C}^n, U \in GL(\mathbb{C}^n), \text{ unitaria.}$$

Un elemento di G sarà pertanto rappresentato come una coppia rispettivamente di 'traslazione' e 'rotazione' $g = (c, U)$, in maniera che risulti $g(z) = z' = c + Uz$. Il prodotto tra g e $g' = (c', U')$ in G, e l'elemento inverso sono dati da

$$g'g = (c' + U'c, U'U) \tag{2.54}$$
$$g^{-1} = (-U^{-1}c, U^{-1}) \tag{2.55}$$

Andiamo dunque a determinare l'azione di G su F_n. Definiamo anzitutto l'azione di elementi solo 'rotazionali', del tipo $g = (0, U)$:

Definizione 2.7.
$(V_U f)(z) := f(U^{-1}z)$.

V_U è unitario su F_n, infatti esso ha un inverso dato da $(V_U)^{-1} = V_{U^{-1}}$, ed è isometrico in quanto la misura $d\mu_n(z)$ non varia per azione di U[8]. Vale poi naturalmente che $V_{UU'} = V_{U'}V_U$.
Per g del tipo $g = (c, I)$ si definisce invece

[8]Infatti $- < z, z >= -\bar{z} \bullet z = -|z|^2 = - < Uz, Uz >= - < z', z' >= -|z'|^2$.

Definizione 2.8.
$(V_c f)(z) := e^{\bar{c}\bullet(z-c/2)} f(z-c)$.

Si verifica, ponendo $f_1 = V_c f$, che

$$|f_1(z)|^2 e^{-|z|^2} = |f(z-c)|^2 e^{-(\bar{z}-\bar{c})\bullet(z-c)}, \tag{2.56}$$

da cui si deduce l'isometria di V_c. L'unitarietà segue dal fatto che $V_c V_{-c} = V_{-c} V_c = I$.
Di conseguenza, per un arbitrario $g = (c, U)$, si ha

Definizione 2.9.
$V_g = V_c V_U, \qquad (V_g f)(z) = e^{\bar{c}\bullet(z-c/2)} f(U^{-1}(z-c)) = e^{\bar{c}\bullet(z-c/2)} f(g^{-1}(z))$.

Si riportano di seguito alcuni risultati utili sull'azione di G sui vettori principali:

Proposizione 2.2.7.
Vale:

1. $V_U \boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{e}_{Ua}$,

2. $V_c \boldsymbol{e}_a = e^{-c\bullet(\bar{a}+\bar{c}/2)} \boldsymbol{e}_{a+c}$,

3. $V_g \boldsymbol{e}_a = \exp\left\{\frac{1}{2}\bar{c} \bullet c - \overline{g(a)} \bullet c\right\} \boldsymbol{e}_{g(a)}$,

Valgono inoltre

Proposizione 2.2.8.

1. $V_{c'} V_c = e^{\frac{1}{2}(\bar{c'}\bullet c - c'\bullet\bar{c})} V_{c'+c}$,

2. $V_{c'} V_c V_{-c'} = e^{\bar{c'}\bullet c - c'\bullet\bar{c}} V_c$,

3. $V_U V_c V_{U^{-1}} = V_{Uc}$.

Al variare di g in G, V_g è continuo, per $f \in F_n$ fissate; in particolare, $\|V_g f\| = \|f\|$.
L'operatore di 'traslazione' V_c ricopre un ruolo importante per F_n. Come si vedrà più avanti, esso è infatti strettamente legato agli operatori di creazione e distruzione.
Sia $c = 2^{-1/2}(\alpha + \imath\beta)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$. Se consideriamo l'operatore su H_n corrispettivo di V_c, abbiamo

$$(T_{\alpha,\beta}\psi)(q) = e^{-\imath\beta\bullet(q-\alpha/2)}\psi(q-\alpha), \qquad T_{\alpha,\beta} = \mathbf{A}_n^{-1}V_c\mathbf{A}_n, \tag{2.57}$$

(si dimostra utilizzando direttamente il nucleo degli operatori $\mathbf{A}_n^{-1}$, e l'equivalenza $e^{\bar{c}\bullet(z-c/2)}A_n(z-c,q)e^{\imath\beta\bullet(q+\alpha/2)} = A_n(z, q+\alpha)$).
Se $c' = 2^{-1/2}(\gamma + \imath\delta)$, considerando $V_{c'}V_c$, dall'ultima proposizione si evince che

$$T_{\gamma,\delta}T_{\alpha,\beta} = e^{\imath\nu}T_{\gamma+\alpha,\delta+\beta}, \quad \nu := \frac{1}{2}(\beta\bullet\gamma - \alpha\bullet\delta).$$

Ora, per c fissati, gli operatori V_{tc} (o i corrispettivi $T_{t\alpha,t\beta}$), con $t \in \mathbb{R}$, formano un gruppo fortemente contiuno ad un parametro, poiché infatti vale $V_{tc}V_{sc} = V_{(s+t)c}$. Lasciando da parte il caso banale in cui $c = 0$, si assumerà in seguito senza perdita di generalità che c è unitario, nel senso in cui $\bar{c}\bullet c = 1$, o equivalentemente, $\alpha^2 + \beta^2 = 2$. Se poi si considera ogni coppia dei gruppi ad un parametro, con c differenti, per esempio V_{tc} e $V_{tc'}$, si ha naturalmente che i due gruppi saranno legati da un isomorfismo, in quanto esiste sempre una trasformazione unitaria U tale che $c' = Uc$.
Dal teorema di Stone, il gruppo V_{tc} è generato da un operatore autoaggiunto L_c, tale che

$$V_{tc} = e^{-\imath t L_c}, \quad L_c := s\lim_{t\to 0}\imath\left[\frac{V_{tc} - I}{t}\right]. \tag{2.58}$$

Per ogni $f \in F_n$ si ha $f(z,t) = (V_{tc}f)(z) = e^{t\bar{c}\bullet(z-tc/2)}f(z-tc)$. Perciò, se $h = L_c f$, allora

$$h(z) = \imath\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}|_{t=0} = \imath(\Lambda_c f)(z), \tag{2.59}$$

$$(\Lambda_c f)(z) = (\bar{c}\bullet z)f(z) - c\bullet\nabla f(z), \quad c\bullet\nabla f = \sum_k c_k\frac{\partial f}{\partial z_k}. \tag{2.60}$$

Di conseguenza f sta nel dominio $D(L_c)$ solo se $\Lambda_c f \in F_n$.
D'altra parte, supponiamo che $h = \imath\Lambda_c f \in F_n$; si verifica facilmente che $\partial f(z,t)/\partial t = -\imath(V_{tc}h)(z)$. Quindi

$$\imath t^{-1}(V_{tc}f - f) = t^{-1}\int_0^t V_{t'c}h\,dt' = \kappa_t. \tag{2.61}$$

Ora,

$$\kappa_t - h = t^{-1}\int_0^t (V_{t'c} - 1)\,dt';$$

dalla continuità forte di $V_{t'c}$ segue che $\|\kappa_t - h\| \to 0$, per $t \to 0$, e dunque $L_c f = h = \imath\Lambda_c f$. In conclusione, $f \in D(L_c)$ se e solo se $\Lambda_c f \in F_n$.
L'operatore differenziale Λ_c è lineare nelle componenti di c (vedi 2.60), e si può scrivere

$$L_c = \alpha \bullet \tilde{p} + \beta \bullet \tilde{q}, \tag{2.62}$$

in modo che, con $t = 1$,

$$V_c = \exp\left\{-\imath(\alpha \bullet \tilde{p} + \beta \bullet \tilde{q})\right\}, \tag{2.63}$$

dove

$$\tilde{q}_k f = 2^{-1/2}\left(z_k + \frac{\partial}{\partial z_k}\right) f, \quad \tilde{p}_k f = \imath 2^{-1/2}\left(z_k - \frac{\partial}{\partial z_k}\right) f. \tag{2.64}$$

Si noti che mentre $\imath\Lambda_c$ è lineare in α e β, lo stesso non vale in generale per L_c, perché il dominio di quest'ultimo si estende oltre ai $\tilde{p}_k$ e $\tilde{q}_k$ sopra. Di fatto la scrittura 2.63, benché importante, risulta occasionalmente conveniente.
Trasportando la medesima argomentazione su H_n, si ottiene, dopo opportune sostituzioni del vettore c, il gruppo generato da $e^{-\imath t q_k}$, dove q_k è il consueto operatore di moltiplicazione. A questo punto a p_k corrisponde la soluzione delle funzioni tali che $p_k = -\imath\partial/\partial q_k$, o alternativamente, utilizzando la trasformata di Fourier in modo tale che (vedi Appendice A, sezione $A.1.1$)

$$Fq_kF^{-1} = -p_k \qquad Fp_kF^{-1} = q_k.$$

2.2.6 Gli operatori z_k e $\partial/\partial z_k$

Definizione 2.10.
Si definiscono

$$(Z_k f)(z) = z_k f(z), \quad z_k f \in F_n, \tag{2.65}$$

$$(Y_k f)(z) = \frac{\partial f}{\partial z_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_k} \in F_n. \tag{2.66}$$

Teorema 2.2.9.
Risulta

1. Z_k *e* Y_k *sono chiusi.*

2. $D(Z_k) = D(Y_k)$.

3. $Z_K^* = Y_k$, $Y_k^* = Z_k$.

4. $D(Z_k) = D(\tilde{q}_k) \cap D(\tilde{p}_k)$.

Dimostrazione. Per semplicità, poniamo $k = 1$, e la notazione seguente: se $m = (m_1, \ldots, m_n)$, allora $m' = (m_1 + 1, \ldots, m_n)$.
1. Sia $g = s - \lim f_j$, e $h = s - \lim z_k f_j$. Allora per ogni z si ha $h(z) = \lim z_k f(z) = z_k g(z)$ (chiusura di Z_k).
Sia ancora $g = s - \lim f_j$, e $h = s - \lim \partial f_j / \partial z_k$. Per ogni z risulta $h(z) = \lim \partial f_j / \partial z_k$, e per la 2.12 segue che $\partial g / \partial z_k = \lim \partial f_j / \partial z_k$; quindi $h = \partial g / \partial z_k$ (chiusura di Y_k).

2. Sia $f(z) = \sum a_{[m]} z^{[m]} \in F_n$. Allora

$$\|z_k f\|^2 = \sum (1 + m_k)[m!]|a_{[m]}|^2,$$

e

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial z_k} \right\|^2 = \sum m_k [m!] |a_{[m]}|^2.$$

Di conseguenza,

$$\|z_k f\|^2 = \|f\|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial z_k} \right\|^2; \tag{2.67}$$

questo prova che $D(Z_k) = D(Y_k)$.

3. Siano

$$g = \sum b_{[m]} z^{[m]}, \quad h = \sum c_{[m]} z^{[m]} = Z_1^* g.$$

Sia poi $f = z^{[m]}$. Allora $(f, h) = (z_1 f, g)$ implica che $c_{[m]} = (1 + m_1) b_{[m']}$, e quindi $h = \partial g / \partial z_1$. Allora $Z_1^* \subset Y_1$.
D'altra parte, se

$$f = \sum a_{[m]} z^{[m]} \in D(Z_1), \quad g = \sum b_{[m]} z^{[m]} \in D(Y_1),$$

allora $(z_1 f, g) = (f, \partial g / \partial z_1)$, in quanto entrambi sono uguali a $\sum [m'!] \overline{a_{[m]}} b_{[m']}$, e dunque $Y_1 \subset Z_1^*$. L'altra autoaggiunzione si prova analogamente.

4. Se $f \in D(Z_k)$, allora per il **2.** sia $z_k f$ che $\partial f / \partial z_k$ sono in F_n, e quindi sia $\tilde{p}_k f$ che $\tilde{q}_k f$ sono definiti. Per la 2.64, poi, vale anche il viceversa. □

Esempio 2.2. : Introduciamo ora un esempio fondamentale per l'intera trattazione.
L'oscillatore armonico quantistico, sotto opportune normalizzazioni degli operatori di creazione e distruzione, è collegato all'operatore Hamiltoniano H, che risulta, in questo caso, essere definito positivo, ossia

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (p_k^2 + q_k^2 - 1) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \xi_k,$$

dove è stato per comodità sottratto il punto-zero di energia (il che non influenza la forma e le soluzioni di H). Come dominio di H nelle trattazioni quantistiche classiche si sceglie un insieme di funzioni regolari quanto basta, per esempio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, per poi estendere il risultato per chiusura.
L'operatore corrispondente ad H in F_n, cioè $\tilde{H} = (H^B) = \mathbf{A}_n H \mathbf{A}_n^{-1}$, risulta

$$\tilde{H} = \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial}{\partial z_k} = \sum_{k=1}^{n} Z_k Y_k,$$

la cui forma, come si può vedere, è molto semplice da trattare; per quel che riguarda lo spettro (in questo caso solamente discreto, in quanto H è compatto), si vedrà appunto più avanti come gli autostati in F_n siano effettivamente funzioni 'polinomiali', e dunque di semplice forma. Come dominio di $\tilde{H}$ si possono prendere polinomi in F_n, per poi passare alla chiusura, sempre che sia in F_n.

Capitolo 3

L'operatore $\tilde{B}$

Ci proponiamo nel seguente capitolo di calcolare la trasformata di Bargmann dell'opeartore CP che agisce nel consueto spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ come $(CP\psi)(q) = \overline{\psi(-x)}$. Per farlo utilizziamo l'isomorfismo unitario presentato nel capitolo precedente, che per comodità richiamiamo qui completamente:

$$\mathbf{A}_n : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow F_n, \quad (\mathbf{A}_n\psi)(z) = \int A_n(z, q)\psi(q)\, dq, \tag{3.1}$$

dove

$$A_n(z, q) := \pi^{-n/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^2 + q^2) + \sqrt{2}z \bullet q\right\}$$

e

$$\mathbf{A}_n^{-1} : F_n \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad (\mathbf{A}_n^{-1}h)(z) = \int \overline{A_n(z, q)}h(z)\, d\mu_n(z). \tag{3.2}$$

La misura nello spazio delle soluzioni di Fock-Bargmann (o più brevemente Bargmann) è

$$d\mu_n(z) = \frac{e^{-|z|^2}}{\pi^n} d^n x\, d^n y.$$

Per trovare l'azione dell'opearatore trasformato $CP =: B$ secondo Bargmann, dovremo allora semplicemente applicare l'isomorfismo $\mathbf{A}_n$ su rispettivamente C e poi P. Di fatto, dal momento che $[C, P] = 0$, non è importante quale dei due venga trasformato prima o dopo.

3.1 L'operatore $\tilde{P}$

Cominciamo a vedere come viene trasformato P, dove $(P\psi)(q) = \psi(-q)$.

Lemma 3.1.1. *Vale*

$$\int A_n(z,q)\overline{A_n(\omega,-q)}\, d^n q = e^{-z\bullet\bar{\omega}} \tag{3.3}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\int A_n(z,q)\overline{A_n(\omega,-q)}\, d^n q &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int e^{-\frac{1}{2}[z^2+q^2]+\sqrt{2}z\bullet q} e^{-\frac{1}{2}[\bar{\omega}^2+q^2]-\sqrt{2}\bar{\omega}\bullet q}\, d^n q \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}[z^2+\bar{\omega}^2]}}{\pi^{n/2}} \int e^{q^2+\sqrt{2}(z-\bar{\omega})\bullet q}\, d^n q \overset{(Fubini-Tonelli)}{=} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}[z^2+\bar{\omega}^2]}}{\pi^{n/2}} \prod_{k=1}^{n} \left\{ \int e^{q_k^2+\sqrt{2}(z_k-\bar{\omega}_k)q_k} \right\} dq_k = \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}[z^2+\bar{\omega}^2]}}{\pi^{n/2}} \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{2}(z_k-\bar{\omega}_k)^2} \int e^{-[q_k-\sqrt{2}/2(z_k-\bar{\omega}_k)]^2}\, dq_k = \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}[z^2+\bar{\omega}^2]}}{\pi^{n/2}} \prod_{k=1}^{n} \left\{ e^{\frac{1}{2}(z_k^2+\bar{\omega}_k^2-2z_k\bar{\omega}_k)}\sqrt{\pi} \right\} = \\
&= e^{-z\bullet\bar{\omega}}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

□

Proposizione 3.1.2.
Sia $P : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, $(P\psi)(q) = \psi(-q)$, $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Allora* $(\tilde{P}h)(z) = h(-z)$.

Dimostrazione. Sia $h \in F_n$; vale che $\tilde{P} = \mathbf{A}_n P \mathbf{A}_n^{-1}$; quindi $(q \in \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_n^{-1}h)(q) &= \varphi(q) = \int \overline{A_n(\omega,q)}h(\omega)\, d\mu_n(\omega), \\
\psi(q) &= (P\mathbf{A}_n^{-1}h)(q) = (P\varphi)(q) = \varphi(-q) = \int \overline{A_n(\omega,-q)}h(\omega)\, d\mu_n(\omega).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Da cui

$$
\begin{aligned}
(\tilde{P}h)(z) = (\mathbf{A}_n\psi)(z) &= \int A_n(z,q)\psi(q)\,d^nq = \\
&= \int A_n(z,q)\Big(\int \overline{A_n(\omega,-q)}h(\omega)\,d\mu_n(\omega)\Big)\,d^nq = \\
&= \int\int A_n(z,q)\overline{A_n(\omega,-q)}h(\omega)\,d^nq\,d\mu_n(\omega) \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

che, per la 3.3 del lemma 3.1.1, dà

$$
(\tilde{P}h)(z) = \int e^{-z\bullet\bar{\omega}}h(\omega)\,d\mu_n(\omega) = (e_{-z}, f) = h(-z). \qquad (3.7)
$$

□

3.2 L'operatore $\tilde{C}$

Vediamo ora l'operatore $\tilde{C}$ in F_n. Per farlo abbiamo bisogno di alcuni lemmi.

Lemma 3.2.1. *Vale*

$$
\int A_n(z,q)A_n(\omega,q)\,d^nq = e^{z\bullet\omega}. \qquad (3.8)
$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
\int A_n(z,q)A_n(\omega,q)\,d^nq &= \frac{1}{\pi^{n/2}}\int e^{-\frac{1}{2}[z^2+q^2]+\sqrt{2}z\bullet q}e^{-\frac{1}{2}[\omega^2+q^2]+\sqrt{2}\omega\bullet q}\,d^nq = \\
&= \frac{1}{\pi^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}[z^2+\omega^2]}\int e^{-q^2+\sqrt{2}(z+\omega)\bullet q}\,d^nq = \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}[z^2+\omega^2]}}{\pi^{n/2}}\prod_{k=1}^{n}\left\{\int e^{-q_k^2+\sqrt{2}(z_k+\omega_k)q_k}\,dq_k\right\} = \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}[z^2+\omega^2]}}{\pi^{n/2}}\prod_{k=1}^{n}\left\{e^{\frac{1}{2}[z_k+\omega_k]^2}\sqrt{\pi}\right\} = \\
&= e^{-\frac{1}{2}[z^2+\omega^2]}e^{\frac{1}{2}[z^2+\omega^2]}e^{z\bullet\omega} = \\
&= e^{z\bullet\omega}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.2.2.
Data $d\mu_n(z) = \pi^{-n} e^{-\bar{z}\cdot z} d^n x\, d^n y$, *con* $z = x + \imath y \in \mathbb{C}^n$, *allora*

$$\int d\mu_n(z) = \int d\mu_n(\bar{z}) \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Si ponga $n = 1$, e non si perde di generalità. Sia $z \in \mathbb{C}$, $z = x + \imath y$. In questo caso $d\mu_1(z) = \pi^{-1} e^{-|z|^2} dx\, dy$, e facendo la sostituzione $z \mapsto \bar{z}$ si ottiene $d\mu_1(\bar{z}) = \pi^{-1} e^{-|z|^2}(-dx\, dy)$. Integrando (x, y) su $\mathbb{C}$, dopo la sostituzione, risulta

$$\int d\mu_1(\bar{z}) = \int_{\mathbb{R}} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{-|z|^2}}{\pi} (-dx\, dy) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-|z|^2}}{\pi} dx\, dy = \int d\mu_1(z)$$

□

Lemma 3.2.3. *Vale*

$$\int e^{z \bullet \omega} \overline{h(\omega)} d\mu_n(\omega) = \overline{h(-\bar{z})}. \tag{3.11}$$

Dimostrazione. Definiamo $f(z) := \overline{h(\bar{z})}$; poiché $h \in F_n$, h si può sviluppare attorno all'origine come $h(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, e quindi $f(z) = \sum_{n \geq 0} \bar{a}_n z^n$. Risulta allora

$$\begin{aligned} \int e^{z\bullet\omega} \overline{h(\omega)}\, d\mu_n(\omega) &\overset{(\omega \mapsto \bar{\eta})}{=} \int e^{z\bullet\bar{\eta}} \overline{h(\bar{\eta})}\, d\mu_n(e\bar{t}a) \overset{(lemma 3.2.2)}{=} \int e^{z\bullet\bar{\eta}} f(\eta)\, d\mu_n(\eta) = \\ &= \int e^{\overline{\bar{z}\bullet\eta}} f(\eta)\, d\mu_n(\eta) = \\ &= (e_z, f) = f(z) = \\ &= \overline{h(\bar{z})} \end{aligned} \tag{3.12}$$

□

Proposizione 3.2.4.
Sia $C : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ *tale che* $(C\psi)(q) = \overline{\psi(q)}$, $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Allora* $(\tilde{C}h)(z) = \overline{h(\bar{z})}$.

Dimostrazione. Come per P, consideriamo $\tilde{C} = \mathbf{A}_n C \mathbf{A}_n^{-1}$, e quindi

$$(\mathbf{A}_n^{-1}h)(q) = \varphi(q) = \int \overline{A_n(\omega, q)} h(\omega)\, d\mu_n(\omega),$$
$$\psi(q) = (C\varphi)(q) = \overline{\varphi(q)} = \int A_n(\omega, q)\overline{h(\omega)}\, d\mu_n(\omega) \tag{3.13}$$

da cui ne viene che

$$\begin{aligned}(\tilde{C}h)(z) = (\mathbf{A}_n\psi)(z) &= \int A_n(z, q)\psi(q)\, d^n q = \\ &= \int A_n(z, q)\Big(\int A_n(\omega, q)\overline{h(\omega)}\, d\mu_n(\omega)\Big)\, d^n q = \\ &= \int\int A_n(z, q)A_n(\omega, q)\overline{h(\omega)}\, d\mu_n(\omega)\, d^n q \overset{(lemma 3.2.1)}{=} \\ &= \int e^{z\bullet\omega}\overline{h(\omega)}\, d\mu_n(\omega) = (e_{\bar{z}}, f) = \\ &= \overline{h(\bar{z})}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

□

Dalle proposizioni 3.1.2 e 3.2.4 si ottiene il seguente

Teorema 3.2.5.
Sia B l'operatore in $L^2(\mathbb{R}^n)$ definito da $B = CP$ (o equivalentemente $B = PC$), di modo che $(B\psi)(q) = \overline{\psi(-q)}$, $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora l'azione dell'operatore $\tilde{B}$, trasformata di Bargmann di B, in F_n è

$$(\tilde{B}h)(z) = \overline{h(-\bar{z})} \tag{3.15}$$

Dimostrazione. Vale $\tilde{B} = \tilde{C}\tilde{P} = \tilde{P}\tilde{C} = \mathbf{A}_n(CP)\mathbf{A}_n^{-1}$. Dopodiché la dimostrazione è immediata, tenendo presente le proposizioni 3.1.2 e 3.2.4. □

Vale poi la seguente

Proposizione 3.2.6.
$\tilde{B}$ è unitario.

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata. Basta infatti verificare che CP è unitario in $L^2(\mathbb{R}^n)$, e che $\mathbf{A}_n$ è anch'esso unitario. □

Capitolo 4

La sottoclasse β

4.1 I teoremi di simmetria

Si è visto, da un teorema precedente, come la trasformata di Bargmann, denotata con $\tilde{B}$, dell'operatore CP, dal consueto spazio di Hilbert di funzioni $H_n := L^2(\mathbb{R}^n)$ allo spazio di Bargamann F_n, tramite l'isomorfismo unitario $\mathbf{A}_n$, operi in F_n nel seguente modo:

$$\forall f \in F_n, \qquad (\tilde{B}f)(z) = \overline{f(-\bar{z})}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

In quanto segue, si supporrà che $n = 1$, il che non comporta una perdita importante nelle generalizzazione, che verrà ad ogni modo proposta in seguito.
Richiamiamo ora un teorema di simmetria dovuto a Schwartz sulle funzioni parzialmente olomorfe su dominî simmetrici (dove per un dominio D s'intende un aperto connesso $D \subseteq \mathbb{C}$). Il teorema è il seguente:

Teorema 4.1.1 (di simmetria di Schwartz)**.**
Sia D dominio in $\mathbb{C}$ simmetrico rispetto all'asse reale. Siano poi

$$D' := D \cap \{y \geq 0\}, \qquad D'' := D \cap \{y \leq 0\};$$

se f è continua in D', olomorfa in $D' \smallsetminus \Delta_{\mathbb{R}}$, dove $\Delta_{\mathbb{R}} := D \cap \mathbb{R}$, ed assume valori reali in $\Delta_{\mathbb{R}}$, allora $\exists\, \tilde{f}$ olomorfa su D tale che

$$\tilde{f}_{|D'}(z) = f(z).$$

In pratica, grazie al teorema, si riesce ad estendere la classe di funzioni olomorfe solo su $\{y \geq 0\}$, oppure $\{y \leq 0\}$, su tutto $\mathbb{C}$. Naturalmente il teorema vale anche per rotazioni di angoli arbitrari; ciò che interessa è che la funzione in questione assuma valori reali su una data linea Δ. Se ruotiamo i dominî considerati nel teorema di $\frac{\pi}{2}$ nel senso degli archi crescenti, otteniamo fondamentalmente un secondo teorema di simmetria, dove però interviene l'operatore di Bargmann $\tilde{B}$. Se f è olomorfa su $D' \setminus \Delta_{\mathbb{R}}$, lo sarà anche dopo una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ del dominio. Infatti:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

e se $z' = \imath z$,

$$f'(z) := f(z') = f(\imath z) = \sum_{n \geq 0} a_n \imath^n z^n = \sum_{n \geq 0} a'_n z^n, \quad z' \in R_{\frac{\pi}{2}}(D).$$

Se nel teorema classico di Schwartz interviene la funzione $h(z)$ definita nel seguente modo

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D' \\ g(z) & z \in D'', \end{cases}$$

$g(z) := \overline{f(\bar{z})}$, $\forall\, z \in D''$, nel teorema di Schwartz "ruotato"di $\frac{\pi}{2}$ interviene una nuova funzione

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in R_{\frac{\pi}{2}}(D') \\ (\tilde{B}f)(z) & z \in R_{\frac{\pi}{2}}(D''). \end{cases}$$

Questo è di facile verifica, in quanto, se $z' = \imath z$ allora $\forall\, z \in D''$, e $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ e di conseguenza

$$g(z') = g(\imath z) = \overline{f(\overline{\imath z})} = \overline{f(-\imath \bar{z})} = \overline{f(-\bar{z}')}.$$

Viceversa, se D è simmetrico rispetto all'asse immaginario, ed f assume valori reali su $\Delta_{\Im}$, allora ruotando D di $\frac{\pi}{2}$ nel senso degli archi decrescenti, si ottiene il teorema classico di Schwartz. Riassumendo

Teorema 4.1.2 (di simmetria di Schwartz e $\tilde{B}$, con n=1).
Sia D dominio in $\mathbb{C}$ simmetrico rispetto all'asse immaginario. Siano poi

$$D' := D \cap \{x \geq 0\}, \qquad D'' := D \cap \{x \leq 0\};$$

sia f continua in D', olomorfa in $D' \smallsetminus \Delta_{\Im}$, e tale da assumere valori reali in $\Delta_{\Im}$. Dato l'operatore $\tilde{B}$, trasformata di Bargmann di CP, allora la funzione

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D' \\ (\tilde{B}f)(z) & z \in D'' \end{cases}$$

estende analiticamente ed in modo unico la funzione $f(z)$.

L'unicità dell'estensione segue direttamente dal teorema del prolungamento analitico.
Come prima è dunque sufficiente considerare funzioni f nello spazio di Bargamann F_1 analitiche solo su uno dei due semipiani aperti destro o sinistro di $\mathbb{C}$, e tali naturalmente da soddisfare alla condizione $(f, f) < +\infty$, ricordando che quest'ultima equivale a

$$(f, f) = \|f\|_{F_1} = \int |f(z)|^2 \, d\mu_1(z) < +\infty$$

Definiamo le seguenti sottoclassi di funzioni:

Definizione 4.1.
$\tilde{\beta_1} := \{f \mid f\, olomorfa\ su\ \dot{\mathbb{C}}^+, continua\ su\ \mathbb{C}^+, f|_{\Delta_{\Im}} \subseteq \mathbb{R}, (f, f) < +\infty\}$,
$\Theta^+ := \{f \mid f\, olomorfa\ su\ \dot{\mathbb{C}}^+\}$,
$F_1^+ := \{f \mid f\, olomorfa\ su\ \dot{\mathbb{C}}^+, (f, f) < +\infty\}$,
dove

$$\dot{\mathbb{C}}^+ := \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid x > 0, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C} \smallsetminus \Delta_{\Im}.$$

Segue direttamente

Osservazione 3. $\tilde{\beta_1} \subset F_1^+ \subset \Theta^+$.

Dal secondo teorema di simmetria segue che ogni funzione f di β_1 si può estendere olomorficamente in modo unico ad una funzione h tramite

l'operatore di Bargmann. In altre parole, bastano un nucleo di estensione β_1 e l'operatore $\tilde{B}$ per ottenere una più ampia sottoclasse di funzioni olomorfe e di norma finita nello spazio di Bargmann.
Definiamo allora

Definizione 4.2.
$\beta_1 := \{h \mid h \text{ olomorfa}, h|_{\Delta_{\Im}} \subseteq \mathbb{R}, h \text{ estensione di } f \text{ tramite } \tilde{B}, (h,h) < +\infty\}.$

Osservazione 4.
$\beta_1 \subset \tilde{\beta}_1$.

Per quanto detto, a $\tilde{\beta}_1$ si può associare tramite un'applicazione $i_{\tilde{B}}$, fissato l'operatore $\tilde{B}$, l'insieme β_1, tramite $i_{\tilde{B}}(f) = h$, e risulta naturalmente che

$$\tilde{\beta}_1 :\overset{i_{\tilde{B}}}{\to} \beta_1 \qquad \frac{i_{\tilde{B}(f)}}{\tilde{\beta}_1} \cong \tilde{B}(f)$$

come spazi vettoriali, valendo naturalmente $\beta_1 \subset \tilde{\beta}_1$.

Il risultato che segue è di verifica immediata.

Osservazione 5. Il nucleo di estensione di β_1 è il limite per $\epsilon \to 0^+$ degli insiemi

$$\tilde{\beta}_1(\epsilon) = \{f \mid f \ \textit{olomorfa su } \mathbb{C}_\epsilon^+, \ \textit{reale su } \Delta_{\Im}\},$$

dove $\mathbb{C}_\epsilon^+ := \{(-\epsilon, y) \in \mathbb{C} \mid \epsilon > 0\}$.

4.2 Alcune proprietà di β_1

Per prima cosa passiamo a considerare da un punto di vista analitico la struttura di β_1. Ogni suo elemento h assume valori reali lungo l'asse immaginario; inoltre h è analitica, con raggio di convergenza $\rho = +\infty$. Potendo dunque sviluppare h attorno all'origine, risulta che

$$h(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \qquad \|h\|_{F_1} < +\infty,$$

dove $\forall\, n \in \mathbb{N}$ vale che $a_n = \frac{1}{n!} h^{(n)}(0)$. Imponendo la condizione di immagine reale sull'asse immaginario, si ottiene che $\forall\, y \in \Im$,

$$h(y) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} h^{(n)}(0) y^n \in \mathbb{R};$$

questa condizione è equivalente alla seguente, scrivendo $y \in \Im$ come $y = \imath t$, $t \in \mathbb{R}$

$$h(y) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a'_n t^n \in \mathbb{R},$$

con $a'_n := \frac{\imath^n}{n!} h^{(n)}(0)$, $\forall\, n$.

Proposizione 4.2.1.
Se $h \in \beta_1$, allora esiste un'unica coppia di funzioni ρ e j analitiche, tali che:

- *i)* $h(z) = \rho(z) + \imath j(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}$,
- *ii)* $j(z) = 0$, *per* $z = \imath y$,
- *iii)* ρ *e* j *sono tra loro ortogonali,*
- *iv)* $\|\rho\|_{F_1}, \|j\|_{F_1} < +\infty$.

Dimostrazione.
i) Sia $h \in \beta_1$; si consideri la restrizione di h all'asse immaginario. Sviluppando nell'origine si era visto che si otteneva la condizione $\sum_{n\geq 0} \frac{\imath^n}{n!} h^{(n)}(0) t^n \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, e poiché $t^n \in \mathbb{R} \quad \forall\, n$, deve valere in generale

$$a'_n = \frac{\imath^n}{n!} h^{(n)}(0) \in \mathbb{R}, \qquad \forall\, n.$$

Considerando l'involutività ed antiinvolutività, la simmetria e l'antisimmetria delle potenze di $\imath$, risulta

$$\begin{cases} a'_{2k} \in \mathbb{R} \\ a'_{2k+1} \in \Im, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La seconda condizione implica che $a'_{2k+1} = \imath \lambda_{2k+1}$, $\lambda_m \in \mathbb{R}$, $\forall\, m$.
Da ciò ne viene evidentemente che

$$h(z) = \sum_{n=2k} a'_n z^n + \imath \sum_{n=2k+1} \lambda_n z^n, \quad \forall\, z.$$

Ponendo $\rho(z) := \sum_{n=2k} a'_n z^n$ e $j(z) := \sum_{n=2k+1} \lambda_n z^n$, si ottiene l'asserto, considerando che l'unicità di ρ e j è garantita dal prolungamento analitico.

ii) E' conseguenza diretta di come è stato definito l'insieme β_1, in cui le funzioni che vi appartengono sono reali lungo gli $z = \imath y$.

iii) Vale

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \int \overline{(\rho + \imath j)}(\rho + \imath j)\, d\mu = \int (\bar{\rho} - \imath\bar{j})(\rho + \imath j)\, d\mu = \\ &= \|\rho\|^2 + \|j\|^2 + \imath(\rho, j) - \imath(j, \rho) = \\ &= \|\rho\|^2 + \|j\|^2 + \imath(\rho, j) - \imath\overline{(\rho, j)} = \\ &= \|\rho\|^2 + \|j\|^2 + 2\imath\Im(\rho, j); \end{aligned}$$

ora, $\rho(z) = \sum_{n\geq 0} r_n z^n$ e $j(z) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n z^n$, da cui segue

$$(\rho, j) = \sum_{n\geq 0} n! \overline{r_n} \lambda_n = \sum_{n\geq 0} n! r_n \lambda_n \quad \in \mathbb{R},$$

dunque $\Im(\rho, j) = 0$.

iv) Se $h \in \beta_1$, vale naturalmente

$$\|h\|^2_{F_1} = \|\rho + \imath j\|^2_{F_1} = \|\rho\|^2_{F_1} + \|j\|^2_{F_1} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \|\rho\|_{F_1}, \|j\|_{F_1} < +\infty.$$

$\square$

Corollario 4.2.2. *Esiste un'unica scomposizione di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali di β_1 in $\beta_1 = R \oplus \imath J$ e quindi due proiettori ortogonali in β_1, denotati con P^R e P^J, tali che*

- *i) $R = P^R(\beta_1)$ e $J = P^J(\beta_1)$,*
- *ii) $R(P^R) = Ker(P^J)$, $Ker(P^R) = R(P^J)$*
- *iii) $R(P^R) = Ker(P^R)^\perp$, $R(P^J) = Ker(P^J)^\perp$.*

Osservazione 6. Tali proiettori sono naturalmente lineari e continui, in quanto, preso per esempio P^R, $\forall h \in \beta_1$ $\left\|P^R h\right\| \leq \|h\|$, e sono dunque limitati, $\left\|P^R\right\| = 1$, $\left\|P^J\right\| = 1$. Si verifica inoltre facilmente che entrambi sono idempotenti, e che $P^J = I - P^R$, e $P^R = I - P^J$.

Osservazione 7. Il risultato della proposizione 4.2.1 è sostanzialmente invariante per traslazioni $u_t : z \mapsto z + \imath t$, $t \in \mathbb{R}$ del punto attorno a cui si sviluppa $h \in \beta_1$. Infatti, se $y, y_0 \in \Im$, $y \neq y_0$, per cui $(y - y_0) = \imath(t - t_0)$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$h(y) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} h^{(n)}(y_0)(y - y_0)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{\imath^n}{n!} h^{(n)}(y_0)(t - t_0)^n \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\imath^n}{n!} h^{(n)}(y_0) \in \mathbb{R} \quad \forall n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\imath^n}{n!} h^{(n)}(u_t(0)) \in \mathbb{R} \quad \forall n.$$

Si consideri ora il seguente insieme; dato l'anello $\mathbb{K}$

Definizione 4.3.
$S[\mathbb{K}] := \{\alpha \in \mathbb{K}^\infty \mid \alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots), a_i \in \mathbb{K} \quad \forall i\}$.

Su $S[\mathbb{K}]$ considero le operazioni di somma e prodotto, $S[\mathbb{K}](+, \cdot)$, definite da

- "+": $\alpha_1 + \alpha_2 := (a_0^1 + a_0^2, a_1^1 + a_1^2, a_2^1 + a_2^2, \ldots)$
- "·": $\alpha_1 \cdot \alpha_2 := \left(\sum_{\substack{m_1, m_2 \geq 0 \\ m = m_1 + m_2}} a_{m_1}^1 a_{m_2}^2 \right)_m , \quad \forall m \in \mathbb{N}.$

Osservazione 8. $S[\mathbb{K}](+, \cdot)$ così definito è un anello commutativo ed unitario.

Dimostrazione.
Dobbiamo dimostrare le proprietà di un anello, ossia:

1. $a + b \in S[\mathbb{K}]$, $\forall\, a,\, b \in S[\mathbb{K}]$;
2. $a + b = b + a$, $\forall\, a,\, b,\, c \in S[\mathbb{K}]$;
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall\, a,\, b \in S[\mathbb{K}]$;
4. $\exists\, 0$ tale che $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall\, a \in S[\mathbb{K}]$;
5. $\exists - a$ tale che $a - a = 0$, $\forall\, a \in S[\mathbb{K}]$;
6. $a \cdot b \in S[\mathbb{K}]$, $\forall\, a,\, b \in S[\mathbb{K}]$;
7. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $\forall\, a,\, b,\, c \in S[\mathbb{K}]$;
8. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$, $\forall\, a,\, b,\, c \in S[\mathbb{K}]$;
9. $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\, a,\, b \in S[\mathbb{K}]$;
10. $\exists\, e$ tale che $a \cdot e = e \cdot a = a$, $\forall\, a \in S[\mathbb{K}]$;

Queste sono tutte di facile verifica; si noti che l'elemento $0 = (0, 0, 0, \ldots)$, ed $e = (1, 0, 0, 0, \ldots)$.

□

Osservazione 9. Se $\mathbb{K}$ è dominio d'integrità, allora $S[\mathbb{K}]$ è un dominio d'integrità.

Dimostrazione. Basta osservare che $a \cdot b = 0 = (0, 0, 0, \ldots) \Leftrightarrow (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots)$, e quindi in particolare $a_0 b_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$, o $b_0 = 0$. Questo è sufficiente affinché almeno uno dei due elementi moltiplicativi a o b siano diversi da 0.

□

D'ora in poi si considereranno solo domini d'integrità $\mathbb{K}$.

Osservazione 10. Se $a \in S[\mathbb{K}]$, $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ è tale che $a_0 \neq 0$, $\forall\, a$, allora $S[\mathbb{K}]$ è un campo.

Dimostrazione. Si può verificare che l'inverso a^{-1} di ogni elemento $a \in S[\mathbb{K}]$, $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ è dato da

$$a^{-1} = \left(\frac{1}{a_0}, -\frac{a_1}{a_0^2}, \frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{a_2}{a_0^2}, \ldots \right);$$

$S[\mathbb{K}]$ è dunque un campo se naturalmente $a_0 \neq 0$.

□

La seguente osservazione è di verifica immediata.

Osservazione 11. Sia $\nu : \mathbb{K}' \to S[\mathbb{K}]$, tale che $\nu(\sigma) = \sigma a$, $\forall\, \sigma \in \mathbb{K}'$, $a \in S[\mathbb{K}]$. Allora $S[\mathbb{K}]$ è un $\mathbb{K}'$ spazio vettoriale.

Si consideri ora l'applicazione ϕ_0, e $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\phi_0 : S[\mathbb{K}] \to \mathbb{C}, \qquad \forall\, \alpha \in S[\mathbb{K}] \quad \phi_0(\alpha) = \alpha \bullet z,$$

dove $\alpha \bullet z := \sum_{k \geq 0} a_k z^k$, dove naturalmente tale somma abbia senso.
In caso di convergenza, si può ovviamente stabilire come immagine di ϕ_0 proprio β_1.

Proposizione 4.2.3.
ϕ_0 è lineare.

Dimostrazione.
Sia $c \in \mathbb{K}$ ed $\alpha \in S[\mathbb{K}]$. Allora, se $z \in \mathbb{C}$, vale

$$\phi_0(c\alpha) = ca_0 + ca_1 z + ca_2 z^2 + \ldots = c\phi_0.$$

Siano poi α_1 ed $\alpha_2 \in S[\mathbb{K}]$; allora

$$\phi_0(\alpha_1 + \alpha_2) = a_0^1 + a_0^2 + (a_1^1 + a_1^2)z + (a_2^1 + a_2^2)z^2 + \ldots = \phi_0(\alpha_1) + \phi_0(\alpha_2).$$

□

Si prenda poi su $S[\mathbb{K}]$ il sottoinsieme S_0 i cui elementi sono zeri-alternati, ossia $a \in S_0 \Leftrightarrow a = (a_0, 0, a_2, 0, \ldots)$, oppure $a = (0, a_1, 0, a_3, \ldots)$. Se π e

δ sono elementi di S_0 in modo che siano zero-alternati tra di loro, allora s'instaura in modo naturale un'aplicazione lineare tra S_0 e β_1 definita da

$$\phi_0(\pi + \imath\delta) = \phi_0(\pi) + \imath\phi_0(\delta) = h(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

$\phi_0(\pi) := \rho(z)$ e $\phi_0(\delta) := j(z)$.

Proposizione 4.2.4.
ϕ_0 è un isomorfismo tra $S[\mathbb{K}]$ e β_1.

Dimostrazione.
Dalle osservazioni precedenti rigurdanti $S[\mathbb{K}]$ si deduce facilmente che

$$\phi_0(\alpha_1 + \alpha_2) = \phi_0(\alpha_1) + \phi_0(\alpha_2)$$

$$\phi_0(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \phi_0(\alpha_1)\phi_0(\alpha_2)$$

in modo che ϕ_0 risulti un omomorfismo.
Si verifica inoltre facilmente che $Ker(\phi_0) = (0)$, rendendo così ϕ_0 un isomorfismo.

□

Si consideri ora l'insieme S_0^2, e tutte le coppie ordinate di elementi rispettivamente del tipo $\pi = (a_0, 0, a_2, 0, \ldots)$, e $\delta = (0, a_1, 0, a_3, \ldots)$, ossia l'insieme $S^2_{0,P-D}$. Fissato $s = (\pi, \delta) \in S^2_{0,P-D}$, allora si può prendere un'altra applicazione ψ_0, definita tramite ϕ_0 nel seguente modo

$$\psi_0 : S^2_{0,P-D} \to \beta_1, \qquad \psi_0(s) = \phi_0(\pi + \imath\delta),$$

e risulta evidentemente che pure ψ_0 è un isomorfismo.

4.3 Topologia di β_1

Dal momento che si dispone di un prodotto scalare definito sullo spazio di Bargmann in modo da renderlo di Hilbert, si ha già una metrica indotta dal prodotto scalare. Più precisamente, se $h \in \beta_1$, allora

$$\|h\|^2_{F_1} = \|\rho\|^2_{F_1} + \|j\|^2_{F_1} = \sum_{n\geq 0} n!|r_n|^2 + \sum_{n\geq 0} n!|\lambda_n|^2,$$

e quindi

$$d(h,f) := \|h-f\|^2_{F_1} = \sum_{n\geq 0} n!|r^1_n - r^2_n|^2 + \sum_{n\geq 0} |\lambda^1_n - \lambda^2_n|^2.$$

Osservazione 12. $d : \beta_1 \times \beta_1 \to \mathbb{R}^+$ è una metrica.

Dimostrazione. Verifichiamo che d soddisfi alle proprietà di una metrica:

- i) $d(h,f) > 0$, $\forall\, h, f \in \beta_1$, $h \neq f$;
- i') $d(f,f) = 0$, $\forall\, f \in \beta_1$;
- ii) $d(h,f) = \|h-f\|_{F_1} = \|f-h\|_{F_1} = d(f,h)$, $\forall\, h, f \in \beta_1$;
- iii) $d(h,f) \leq d(h,g) + d(g,h)$, $\forall\, h, f, g \in \beta_1$; infatti vale

$$\begin{aligned} d^2(h,f) &= \int |h-f|^2(z)\, d\mu_1(z) = \int |h-g+g-f|^2(z)\, d\mu_1(z) \leq \\ &\leq \int |h-g|^2(z)\, d\mu_1(z) + \int |g-f|^2(z)\, d\mu_1(z) + \\ &+ 2\int |h-g|(z)|g-f|(z)\, d\mu_1(z) = \\ &= d^2(h,g) + d^2(g,f) + 2\int |h-g|(z)|g-f|(z)\, d\mu_1(z); \end{aligned}$$

ricordando la seconda disuguaglianza di Hölder, cioè se ϕ e χ sono misurabili su X, e p, p' sono tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, allora

$$\int_X |\phi|\, |\chi| \leq \left(\int_X |\phi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |\chi|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

posto $\phi := h-g$ e $\chi := g-f$, con $p = p' = \frac{1}{2}$, si ottiene

$$d^2(h,f) \leq d^2(h,g) + d^2(g,f) + 2d(h,g)d(g,f) = (d(h,g)+d(g,f))^2,$$

da cui naturalmente $d(h,f) \leq d(h,g) + d(g,f)$.

$\square$

Osservazione 13. Se $h, f \in \beta_1$, allora la metrica d si può scrivere come

$$d^2(h,f) = \|h\|_{F_1}^2 + \|f\|_{F_1}^2 - 2\Re\{(h,f)\}.$$

Dimostrazione. Si tratta di una verifica diretta della definizione di d; infatti

$$\begin{aligned} d^2(h,f) &= \|h-f\|_{F_1}^2 = (h-f, h-f) = \\ &= \int \overline{(h-f)(z)}(h-f)(z)\, d\mu_1(z) = \\ &= \|h\|_{F_1}^2 + \|f\|_{F_1}^2 - \int \overline{h(z)} f(z)\, d\mu_1(z) - \int h(z)\overline{f(z)}\, d\mu_1(z) = \\ &= \|h\|_{F_1}^2 + \|f\|_{F_1}^2 - (h,f) - (f,h) = \\ &= \|h\|_{F_1}^2 + \|f\|_{F_1}^2 - \Big((h,f) + \overline{(h,f)}\Big) = \\ &= \|h\|_{F_1}^2 + \|f\|_{F_1}^2 - 2\Re\{(h,f)\}. \end{aligned}$$

□

Su β_1 si può allora definire la topologia indotta dalla metrica d; più precisamente

Definizione 4.4.
(β_1, τ_d) è lo spazio topologico definito dalla topologia indotta da d

$$\tau_d = \{\Omega \subseteq \beta_1 \mid \forall\, h \in \Omega \quad \exists\, \rho > 0 \quad : \quad D_\rho(h) \subseteq \Omega\},$$

dove

$$D_\rho(h) := \{f \in \beta_1 \mid d(h,f) < \rho, \quad \rho > 0\}.$$

Ora, si era visto che l'operatore n dimensionale di Bargmann $\mathbf{A}_n$, tale che $\mathbf{A}_n : H_n \to F_n$, è continuo. In H_n è definito il consueto prodotto scalare nello spazio delle funzioni $L^2(\mathbb{R}^n)$ nelle variabili canoniche $q = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$. Poiché pure l'operatore inverso di $\mathbf{A}_n$ è continuo, risulta evidente la seguente

Osservazione 14. $\mathbf{A}_n$ è un'applicazione aperta.

Di conseguenza, essendo $\mathbf{A}_n^{-1}$ un isomorfismo unitario aperto, e dunque un omeomorfismo unitario, l'immagine dei dischi $D_\rho(h)$ sono dei dischi $D_\rho(\psi)$, dove $\psi(q) = (\mathbf{A}_n^{-1}f)(q)$, e in H_n si ottiene la topologia immagine mediante $\mathbf{A}_n^{-1}$ indotta dalla metrica d', data da $d'(\psi, \chi) = \|\psi - \chi\|_{H_n}$. Una volta assegnato lo spazio topologico (β_1, τ_d) si ottiene lo spazio topologico $(H_n, \tau *_{d'})$ immagine di β_1 mediante $\mathbf{A}_n^{-1}$ e viceversa. Naturalmente, qualsiasi omeomorfismo che agisca da F_n ad H_n, ristretto a β_1 avrà come immagine l'insieme delle funzioni immagini dell'operatore CP in H_n.

Proposizione 4.3.1.
β_1 è chiuso in τ_d.

Dimostrazione.
Per dimostrarlo, consideriamo $h \in \beta_1$, ed una successione $h_k \in \beta_1$ tale che $h_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} h$. Possiamo considerare h ed h_k sviluppate attorno all'origine, cossiché risulta tramite l'isomorfismo ϕ_0

$$(a_0^k, a_1^k, a_2^k, \ldots) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (a_0, a_1, a_2, \ldots) \quad \Leftrightarrow$$

$$\rho_k + \imath j_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \rho + \imath j,$$

con $\rho_k = \phi_0(\pi_k)$ e $j_k = \phi_0(\delta_k)$. Poiché in $S[\mathbb{R}]$ π_k e j_k convergono rispettivamente a π ed a j, allora il limite di h_k è anch'esso in β_1.
Considerare le funzioni sviluppate nell'origine permette di concludere che β_1 è chiuso per funzioni sviluppate in altri punti che non siano l'origine stessa, in quanto per continuità di $h \in \beta_1$ le sue derivate n-esime variano a sua volta con continuità (uniforme) il che significa che per ogni traslazione del punto attorno a cui avviene lo sviluppo, cambia naturalmente l'isomorfismo ϕ_0, diventando $\phi_{u(0)}$, ma non cambia sostanzialmente la continuità con cui avviene il limite espresso sopra, trattandosi alla fine di composizione di funzioni continue.

□

Proposizione 4.3.2.
β_1 è connesso in τ_d.

Dimostrazione.
Affinché sia connesso è necessario e sufficiente che $\forall\, h, f \in \beta_1$ il segmento $[h, f] \subset \beta_1$, dove per segmento s'intende

$$[h, f] := tf + (1-t)h, \quad t \in [0, 1].$$

Considerando le funzioni sviluppate sempre attorno all'origine si ottiene che $\forall\, t \in [0, 1]$ vale

$$\begin{aligned} tf + (1-t)h &= t(\rho_2 + \imath j_2) + (1-t)(\rho_1 + \imath j_1) = \\ &= t\rho_2 + (1-t)\rho_1 + \imath[tj_2 + (1-t)j_1] = \\ &= \psi_0([\pi_1, \pi_2], [\delta_1, \delta_2]); \end{aligned}$$

essendo $S^2_{0,P-D}$ connesso in quanto sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$, si ottiene quindi che $[h, f] \subset \beta_1$.

$\square$

Proposizione 4.3.3.
β_1 è di Hausdorff.

Dimostrazione.
Per vederlo basta considerare due elementi di β_1, h ed f, tali che $h \neq f$. Come intorno dei due punti possiamo prendere degli intorni aperti, cioè dei dischi di centro rispettivamente h ed f. Se poi $d(h, f) =: r$ è la distanza tra i due punti, allora possiamo prendere come intorni $N_h = D_{r/3}(h)$ e $N_f = D_{r/3}(f)$ di modo che $\exists$ due intorni dei punti, N_h ed N_f, non vuoti, e tali che $N_h \cap N_f = \emptyset$.

$\square$

β_1 è dunque $T2$, pertanto anche $T1$.

Essendo β_1 spazio metrico, si ha che esso soddisfa automaticamente al primo assioma di numerabilità.

Proposizione 4.3.4.
β_1 soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

Per dimostrarlo è utile analizzare alcuni risultati riguardanti l'insieme $S[\mathbb{R}]$ che, tramite l'isomorfismo ϕ_0 definito prima, fornisce un ritratto isometrico di β_1. Se $h, f \in \beta_1$, ponendo rispettivamente $\alpha = \phi_0^{-1}(h)$ e $\beta = \phi_0^{-1}(f)$, allora si ottiene in $S[\mathbb{R}]$ una distanza euclidea data dalla retroimmagine tramite ϕ_0 definita come

$$d_\epsilon(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| = \left(\sum_{k\geq 0}(\alpha_k - \beta_k)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

che converge per come è stato definito ϕ_0. Risulta quindi che su $S[\mathbb{R}]$ è possibile costruire una topologia indotta dalla metrica d_ϵ, mediante la retroimmagine di ϕ_0.

Lemma 4.3.5. $(S[\mathbb{R}], \tau_\epsilon(\phi_0))$ *è separabile.*

Dimostrazione.
Scegliamo il sottoinsieme dei punti di $S[\mathbb{R}]$ razionali, ossia $S[\mathbb{Q}]$. Evidentemente $S[\mathbb{Q}]$ è denso in $S[\mathbb{R}]$ e numerabile. □

Lemma 4.3.6. $(S[\mathbb{R}], \tau_\epsilon(\phi_0))$ *soddisfa il secondo assioma di numerabilità.*

Dimostrazione.
Si tratta di provare che $\tau_\epsilon(\phi_0)$ ha una base numerabile. Scegliamo allora come base l'insieme

$$\mathfrak{B} = \left\{D_q(a) \mid q \in \mathbb{Q}^+,\ a \in S[\mathbb{Q}]\right\};$$

si verifica facilmente che $\mathfrak{B}$ è numerabile. Rimane da provare che ogni aperto A di $\tau_\epsilon(\phi_0)$ è unione di elementi di $\mathfrak{B}$. Sia $A \subset S[\mathbb{R}]$ aperto e $b \in A$; sia $r > 0$ tale che $D_r(b) \subset A$. Ora, poiché $S[\mathbb{Q}]$ è denso esiste $a \in D_{r/3}(b) \cap S[\mathbb{Q}]$ (in quanto $S[\mathbb{Q}]$ interseca ogni aperto non vuoto di $S[\mathbb{R}]$). Scegliendo q razionale tale che $\frac{r}{3} < q < \frac{2r}{3}$, vale che

$$b \in D_q(a) \subset D_r(b) \subset A,$$

e quindi A è unione di aperti di $\mathfrak{B}$.

□

Si pongano ora per comodità $X := (\beta_1, \tau_d)$ e $Y := (S[\mathbb{R}], \tau_\epsilon(\phi_0))$, da cui $Y \xrightarrow{\phi_0} X$;

Lemma 4.3.7. *Se $f \in D_\rho(h_0)$ allora $\beta \in D_\rho(\alpha)$, dove $\beta = \phi_0^{-1}(f)$ ed $\alpha = \phi_0^{-1}(h_0)$.*

Dimostrazione.

$$f \in D_\rho(h_0) \quad \Leftrightarrow \quad \|f - h_0\| < \rho \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n \geq 0} n!|a_n - b_n|^2 < \rho^2.$$

In definitiva vale che

$$d_\epsilon^2(\alpha, \beta) = \sum_{n \geq 0} |a_n - b_n|^2 < \sum_{n \geq 0} n!|a_n - b_n|^2 < \rho^2.$$

□

Proposizione 4.3.8.
β_1 è separabile.

Dimostrazione.
Per i lemmi precedenti basta considerare l'omeomorfismo ϕ_0 che agisce tra Y ed X di modo che avendo provato Y separabile, anche X lo è.

□

Per quanto visto, $S[\mathbb{R}]$ è un campo se e solo se ogni suo elemento è tale che $a_0 \neq 0$. In tal caso gli unici ideali saranno $S[\mathbb{R}]$ e (0). La stessa cosa vale per β_1. Contrariamente, vale la seguente

Proposizione 4.3.9.
$\forall z \in \mathbb{C}$ sia $M_z = \{f \in \beta_1 \mid f(z) = 0\}$; allora al variare di z in $\mathbb{C}$ la famiglia M_z descrive tutti e soli gli ideali massimali di β_1.

Dimostrazione.
Sia $z \in \mathbb{C}$; definiamo l'applicazione di valutazione E_z come $E_z : \beta_1 \to \mathbb{C}$, $E_z(h) = h(z)$.
E_z è un omomorfismo di anelli suriettivo. Infatti vale che $E_z(h + f) =$

$(h + f)(z) = h(z) + f(z) = E_z(h) + E_z(f)$, e $E_z(h \cdot f) = (h \cdot f)(z) = h(z)f(z) = E_z(h)E_z(f)$. Inoltre, poiché il range di β_1 è tutto $\mathbb{C}$, se $\omega \in \mathbb{C}$, allora $\exists\, h, z_0$: $h(z_0) = \omega$.
Si ha che $Ker(E_z) = M_z$, $\forall z \in \mathbb{C}$; come si verifica direttamente, il nucleo di un omomorfismo di anelli è un ideale.
Dimostriamo ora che gli M_z sono ideali massimali $\Leftrightarrow Im(E_z)$ è un campo.
$\Rightarrow$) se $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$ allora $\exists\, h \in \beta_1$ tale che $\omega = E_z(h)$; ma $\omega \neq 0 \Rightarrow z \notin M_z$. Dunque $M_z + (h)$ è un ideale che contiene M_z, ed essendo per ipotesi M_z massimale dovrà essere $M_z + (h) = \beta_1$. Pertanto $\exists\, f \in M_z$, $g \in \beta_1$ tali che $1 = f + gh$, da cui segue, applicando E_z,

$$1 = E_z(h) + E_z(g)E_z(h) = E_z(g)\omega.$$

Quindi $E_z(g)$ è l'inverso di ω.
$\Leftarrow$) supponiamo che esista un ideale M tale che $M_z \subset M$, e che $f \in M \setminus M_z$; allora $E_z(h) = \omega \neq 0$ ed $\exists\, \eta \in \mathbb{C}$: $\omega\eta = 1$.
Applicando E_z^{-1} su 1 si ottiene

$$E_z^{-1}(1) = E_z^{-1}(\omega\eta) = E_z^{-1}(\omega)E_z^{-1}(\eta) = fE_z^{-1}(\eta) \in M;$$

allora $1 \in M \Rightarrow M = \beta_1$, e quindi M_z è ideale massimale.

$\square$

Nota: le proprietà topologiche considerate valgono in una dimensione, ma introducendo la topologia prodotto nello spazio $\mathbb{C}^n$ sostanzialmente non variano. Per la definizione della sottoclasse β che in realtà non è altro che l'analisi delle funzioni in dimensione n, ci si propone dunque di considerare β come il prodotto delle sottoclassi β_1, ciascuna con le sue proprietà,

$$\beta = \underbrace{\beta_1 \otimes \ldots \otimes \beta_1}_{n}.$$

4.4 Topologia di Zariski e β_1

Ci proponiamo in questa sezione di mettere in luce alcuni risulati che mettono in relazione la topologia di Zariski in $\mathbb{C}$, e la sottoclasse di funzioni finora considerate β_1.
Consideriamo l'anello dei polinomi $\mathbb{C}[z]$ nella variabile complessa, e sia S un suo sottoinsieme; possiamo allora andare a considerare l'ideale generato da S, indicato con (S), che costruttivamente è l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di S, ossia

$$(S) = \{f_1 p_1 + \ldots f_r p_r \mid f_i \in S \,\forall i, \quad p_i \in \mathbb{C}[z] \,\forall i\}\,.$$

L'insieme degli zeri di S è l'insieme degli $z_0 \in \mathbb{C}$ tali che $f(z_0) = 0$, $\forall f \in S$; esso verrà indicato con $V(S)$, e solitamente viene chiamato *insieme algebrico.*
Evidentemente vale

$$V(S) = V((S)).$$

Non è dunque restrittivo considerare solo gli insiemi algebrici definiti da ideali.
Gli insiemi algebrici soddisfano le condizioni della topologia dei chiusi, più precisamente si verifica che

a) $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$, I_1, I_2 ideali;

b) $V(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} V(I_\alpha)$, se $\{I_\alpha\}$ è una famiglia di ideali, dove $\sum_{\alpha\in A} I_\alpha$ è l'ideale somma degli ideali I_α, cioè $\sum_{\alpha\in A} = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$;

c) $\emptyset = V((1))$, $\mathbb{C} = V((0))$.

Con tali proprietà segue allora che la famiglia dei sottoinsiemi algebrici gode delle proprietà degli insiemi chiusi; si può pertanto definire una topologia nella quale gli insiemi aperti sono gli insiemi il cui complementare è proprio un insieme algebrico; avendo così definito gli aperti, tale topologia si chiama *topologia di Zariski* su $\mathbb{C}$. Riportiamo in seguito solo alcuni risultati che saranno utili in seguito nella trattazione.

Proposizione 4.4.1.
Ogni punto di $\mathbb{C}$ è chiuso nella topologia di Zariski.

La verifica è immediata, considerando gli ideali di polinomi del tipo $I = (z - z_0) \Rightarrow V(I) = \{z_0\}$.
Enunciamo ora alcuni risultati sulla topologia di Zariski in dimensione n.

Proposizione 4.4.2.
Siano Z ed Y chiusi propri di $\mathbb{C}^n$. Allora $Z \cup Y \neq \mathbb{C}^n$.

Dimostrazione. Supponiamo che $Z \cup Y = \mathbb{C}^n$ per certi chiusi, e dimostriamo che almeno uno di essi è tutto $\mathbb{C}^n$.
Se $Z = V((S_1))$ e $Y = V((S_2))$, allora

$$\mathbb{C}^n = Z \cup Y = V((S_1 \cdot S_2)),$$

e quindi ogni prodotto risultante da $S_1 \cdot S_2$ è nullo. Poiché l'insieme $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ è dominio di integrità, se supponiamo che $Y \neq \mathbb{C}^n$, allora qualche polinomio $p(y) \in S_2 \neq 0$, e di conseguenza, per ogni polinomio $p(x) \in S_1$ deve aversi

$$p(x)p(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) = 0, \quad \forall p \in S_1,$$

ed evidentemente $Z = \mathbb{C}^n$. $\square$

Corollario 4.4.3.
Se A e B sono aperti non vuoti, allora $A \cap B \neq \emptyset$

Corollario 4.4.4.
Ogni aperto non vuoto nella topologia di Zariski è denso.

Supponiamo ora di avere un ideale (S), e consideriamo l'insieme algebrico $V((S))$; $\forall p \in S$ e $\forall z_0 \in V((S))$ si ha

$$p(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + \ \ldots \ + a_m z_0^m,$$

dove per fissare le idee supponiamo che $\deg p = m$, e per comodità $m > 0$. E' chiaro che, una volta fissato un intero positivo $k < m$, e dato l'operatore differenziale lineare $\partial^{(k)} : \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$, $\partial^{(k)}(p(z)) := \frac{\partial^{(k)} p(z)}{\partial z}$, allora

$$V((S)) \subset V((\partial_z^{(k)} S)).$$

Il viceversa ovviamente non è vero; il che porta in maniera naturale a considerare l'operatore differenziale lineare definito sopra in stretto legame con un'applicazione π_k da $\mathbb{C}[z]_m$ in $\mathbb{C}[z]_{m-k}$, ossia l'applicazione che ad ogni polinomio di grado m, scrivibile come $p(z) = q(z) + s(z)$, con $\deg q = k$ e $s \in (z^{k+1})$, associa $s(z)/z^{k+1}$. Le applicazioni ∂^{k+1} e π_k sono in stretto legame in quanto, indicato con $Z(\pi_k)$ il $Ker(\pi_k)$, allora $Z(\pi_k) = Ker(\partial^{k+1})$. Infatti se $q \neq 0 \in Z(\pi_k)$ necessariamente starà in $Ker(\partial^{k+1})$. Viceversa, se un elemento non nullo appartiene a $Ker(\partial^{k+1})$ allora la sua proiezione di grado k si annulla. Si ricorda che l'immagine dell'operatore ∂^{k+1} di un polinomio di grado m, è:

$$\partial^{k+1}(p(z)) = s'(z) = a_k c^0_{m,k} + a_{k+1} c^1_{m,k} z + \ldots + a_m c^{m-k}_{m,k} z^{m-k},$$

per opportuni coefficienti $c^j_{m,k}$.
Sia $E_z : \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}$, $E_z(p) = p(z)$ la solita funzione di valutazione; la retroimmagine di $\mathbb{C}[z]_{m-k}$ mediante π_k è data da

$$\pi_k^{-1}(p(z)) = Z(\pi_k) + s(z);$$

se $s \in Ker(E_z(\pi_k(p)))$, allora risulta $E_z(\pi_k^{-1}(p)) = E_z(Z(\pi_k))$, in quanto ovviamente $s(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad z^{k+1} s(z) = 0$.

Ora, $Z(\pi_k)$ è composto da polinomi di grado $\deg \leq k$; esso si può suddividere nell'insieme in polinomi di grado inferiore o uguale a k che si annullano in un fissato z_0, ed il suo complementare, ossia rispettivamente

$$Z(\pi_k) = Z_0(\pi_k) \cup Y(\pi_k), \quad Y(\pi_k) := \complement Z_0(\pi_k),$$

$$Z_0(\pi_k) =< z_0 >_k := \{ r(z) \in \mathbb{C}[z] \mid \deg(r) \leq k,\, r(z_0) = 0 \}.$$

Dato che $z_0 \in V(< z_0 >_k)$ per costruzione, allora per il teorema fondamentale dell'algebra ogni polinomio in $< z_0 >_k$ si scriverà come

$$r(z) = (z - z_0)r'(z), \quad r'(z) = \prod_{i \leq \hat{k}} (z - z_i), \quad \deg(r') = k - 1.$$

In tal caso risulta evidentemente che $< z_0 >_k = (z - z_0)_k$, che è l'insieme dei polinomi di grado inferiore o uguale a k, appartenenti all'ideale $(z - z_0)$.
Si è dimostrata allora la seguente

Proposizione 4.4.5.
Sia s un polinomio non costante di grado m'. Se $z_0 \in V(s)$, allora $\forall k < m'$, $\pi^{-1}_{k|<z_0>_k}(s)$ è un polinomio di grado $m'+k$ tale che $z_0 \in V((z-z_0)_k+z^{k+1}s(z))$.

Ciascun elemento di β_1 dà vita a una successione di polinomi di grado crescente, al limite infinito, e può dunque essere scritto come somma di un polinomio e di una funzione di troncamento ad un grado prefissato

$$h \longrightarrow p_1^1, p_2^1, \ldots, p_k^1, \ldots$$

$$f \longrightarrow p_1^2, p_2^2, \ldots, p_k^2, \ldots$$

e così via. Tali successioni di polinomi inducono una successione di insiemi algebrici, per ogni elemento di β_1:

$$h \longmapsto V(p_1^1), V(p_2^1), \ldots, V(p_k^1), \ldots =: V_1^1, V_2^1, \ldots, V_k^1, \ldots$$

Sia k un intero positivo. Con L_k indichiamo l'insieme dei polinomi di grado uguale a k fissato; sia poi L un sottoinsieme di L_k, $L \subset L_k$. Una volta fissato k è chiaro che ogni funzione di β_1 avrà o meno una funzione di troncamento di ordine k a seconda che il coefficiente dello sviluppo attorno all'origine sia o meno uguale a zero. Per comodità supponiamo di avere elementi di β_1 tutti con troncamento di ordine k, altrimenti si può considerare (non è restrittivo) l'ordine $k \pm 1$, sempre se questo si mantiene positivo.

Proposizione 4.4.6.
Sia $h \in \beta_1$; sia poi $p \in \mathbb{C}[z]$ tale che $\deg(p) = k$, $k > 0$, *e che* $h(z) = p(z) + r_k(z)$. *Se $p \in L \subset L_k$, allora $\forall z_0 \in V((L))$, $\forall N_{z_0}$ intorno di z_0, $\forall \eta > 0$, esistono delle funzioni K_{z_0}, γ_{z_0} e $\varphi(\eta, z_0)$ analitiche in z_0 e a valori reali, tali che*

$$\|h\|_{N_{z_0}-loc} \leq \|p\|_{N_{z_0}-loc} + 2K_{z_0}\gamma_{z_0} + \varphi(\eta, z_0), \quad \overset{\eta\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+.$$

Dimostrazione.
Se $z_0 \in V((L))$ e $z \in \complement V((L))$, tale che $|z - z_0| < \eta$, con $\eta \ll 1$, $h(z) = p(z) + r_k(z)$, vale

$$|h(z) - h(z_0)| = |p(z) + r_k(z) - r_k(z_0)| \leq |p(z)| + |r_k(z) - r_k(z_0)|;$$

dato che

$$r_k(z) - r_k(z_0) = \sum_{n\geq k+1} a_n(z^n - z_0^n) = \sum_{n\geq k+1} \left(a_n(z - z_0) \sum_{i=0}^{n-1} z^i z_0^{n-i} \right),$$

$$\Longrightarrow |r_k(z) - r_k(z_0)| \leq \eta \sum_{n\geq k+1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_n||z^i z_0^{n-i}|.$$

Consideriamo ora un intorno N_{z_0} di z_0, e una funzione cut-off $\chi(z)$, tale che $supp\, \chi \subset N_{z_0}$; allora

$$\begin{aligned}
&\int |\chi(z)|^2 |h(z)|^2 \, d\mu_1(z) = \int_{N_{z_0}} |h(z)|^2 \, d\mu_1(z) = \int_{N_{z_0}} |h(z) - h(z_0) + h(z_0)|^2 \, d\mu_1(z) \leq \\
\leq \;& \int_{N_{z_0}} |h(z) - h(z_0)|^2 + |h(z_0)|^2 + 2|h(z_0)||h(z) - h(z_0)| \, d\mu_1(z) \leq \\
\leq \;& \int_{N_{z_0}} |p(z)|^2 \, d\mu_1(z) + \int_{N_{z_0}} |r_k(z) - r_k(z_0)|^2 \, d\mu_1(z) + \\
& +2\int_{N_{z_0}} |p(z)||r_k(z) - r_k(z_0)| \, d\mu_1(z) + 2|h(z_0)| \int_{N_{z_0}} |p(z)| + |r_k(z) - r_k(z_0)| \, d\mu_1(z) \leq \\
\leq \;& \|p\|_{N_{z_0}-loc} + 2|h(z_0)| \int_{N_{z_0}} |p(z)| \, d\mu_1(z) + 2\eta \int_{N_{z_0}} \sum_{n\geq k+1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_n||z^i z_0^{n-i}||p(z)| \, d\mu_1(z) + \\
& +2\eta|h(z_0)| \int_{N_{z_0}} \sum_{n\geq k+1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_n||z^i z_0^{n-i}| \, d\mu_1(z) + \eta^2 \int_{N_{z_0}} \left(\sum_{n\geq k+1} \sum_{i=0}^{n-1} |a_n||z^i z_0^{n-i}| \right)^2 d\mu_1(z).
\end{aligned}$$

Con le opportune sostituzioni di termini, la disuguaglianza sopra risulta

$$\|h\|_{N_{z_0}-loc} \leq \|p\|_{N_{z_0}-loc} + 2K_{z_0}\gamma_{z_0} + 2\eta K'_{z_0} + 2\eta K''_{z_0}\gamma_{z_0} + \eta^2 K'''_{z_0}, \quad \eta \ll 1,$$

che si può riscrivere in modo più compatto come

$$\|h\|_{N_{z_0}-loc} \leq \|p\|_{N_{z_0}-loc} + 2K_{z_0}\gamma_{z_0} + \varphi(\eta, z_0), \quad \varphi(\eta, z_0) \stackrel{\eta \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

L'analiticità di tali funzioni segue direttamente dalla loro definizione.

□

Si considerino ora le succesioni di insiemi algebrici generati dagli elementi di β_1:

$$h^1 \longmapsto V_1^1, V_2^1, \dots, V_k^1, \dots$$

$$h^2 \longmapsto V_1^2, V_2^2, \dots, V_k^2, \dots$$

$$\dots$$

$$h^j \longmapsto V_1^j, V_2^j, \dots, V_k^j, \dots$$

$$\dots$$

in generale esistono un numero di successioni di cardinalità del continuo.
Per $k > 0$ fissato, si consideri, come prima, l'insieme L_k dei polinomi di grado uguale a k, e si prenda una famiglia numerabile di suoi sottoinsiemi $\{L_k^i\}_{i \in A}$.
Ad ogni elemento della famiglia si prenda il suo insieme algebrico, formando così la famiglia di insiemi algebrici $\{V_k^i\}_{i \in A}$.
Si consideri poi la più piccola intersezione non vuota di tutti gli elementi di tale famiglia,

$$B_k = \bigcap_{i \in A} V((L_k^i)),$$

ed eventualmente l'unione in k di tutte le intersezioni, cioè

$$A = \bigcup_k B_k.$$

Ne viene che $\forall z_0 \in B_k$, e $\forall z \in \complement B_k$, date h ed f con troncamento per entrambe di ordine k, per ogni intorno N_{z_0} di z_0, vale

$$d^2_{z_0}(h,f) = \|h\|^2_{N_{z_0}-loc} + \|f\|^2_{N_{z_0}-loc} - 2\Re\left\{(h,f)_{z_0}\right\},$$

ed essendo h ed f in β_1 si ha

$$\begin{aligned}
\Re\{(h,f)\} &= \Re\left\{\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\overline{a_n}b_n\right\} = \Re\left\{\sum_{2n\geq 0}\frac{1}{(2n)!}\overline{a_{2n}}b_{2n} + \sum_{2n+1\geq 0}\frac{1}{(2n+1)!}\overline{a_{2n+1}}b_{2n+1}\right\} = \\
&= \Re\left\{\lambda + \sum_{2n+1\geq 0}\frac{1}{(2n+1)!}(-\imath)\alpha_{2n+1}(i)\beta_{2n+1}\right\} = \\
&= \Re\{\lambda+\mu\} = \lambda+\mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

da cui

$$d^2_{z_0}(h,f) = \|h\|^2_{N_{z_0}-loc} + \|f\|^2_{N_{z_0}-loc} - 2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\overline{a_n}b_n,$$

ed essendo

$$\begin{cases}
\|h\|_{N_{z_0}-loc} \leq \|p\|_{N_{z_0}-loc} + 2K_{z_0}\gamma_{z_0} + \varphi(\eta,z_0), & \varphi(\eta,z_0) \overset{\eta\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+ \\
\|f\|_{N_{z_0}-loc} \leq \|q\|_{N_{z_0}-loc} + 2K'_{z_0}\gamma'_{z_0} + \varphi'(\eta,z_0), & \varphi'(\eta,z_0) \overset{\eta\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+
\end{cases}$$

con le opportune sostituzioni di termini di funzioni, si ottiene

$$d^2_{z_0}(h,f) \leq \|p\|^2_{N_{z_0}-loc} + \|q\|^2_{N_{z_0}-loc} + \tilde{\xi}^2_{z_0,\eta} - 2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\overline{a_n}b_n,$$

o in maniera equivalente si ottiene

Proposizione 4.4.7.
$\forall z_0 \in B_k$ e $\forall h \in \beta_1$ tale che i polinomi generati di grado k, $p_h \in L^i_k$, allora la distanza in un intorno di z_0 soddisfa la seguente condizione

$$d^2_{z_0}(h,f) \leq \eta^2\left[\left\|\frac{p}{z-z_0}\right\|^2_{N_{z_0}-loc} + \left\|\frac{q}{z-z_0}\right\|^2_{N_{z_0}-loc}\right] + \tilde{\xi}^2_{z_0,\eta} - 2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\overline{a_n}b_n$$

Osservazione 15. Naturalmente la norma locale di Bargmann dei polinomi dipende dall'ordine di troncamento k.
Inoltre, la sommatoria che compare nella disuguaglianza è estesa solo in un intorno di z_0.

Si considerino ora due insiemi della famiglia $\{L_k^i\}_{i\in A}$, L^1 ed L^2; chiamati $A_1 = \complement V((L^1))$ e $A_2 = \complement V((L^2))$ gli aperti di Zariski, sia A la loro unione $A_1 \cup A_2$, corrispondente a $\complement(V((L^1)) \cap V((L^2)))$, e sia $\complement A =: \bar{A}$ il suo complementare.
La distanza tra due funzioni h ed f in β_1 con opportuno ordine di troncamento k sarà

$$\begin{aligned}
d^2(h,f) &= \int_A |h(z)-f(z)|^2\, d\mu_1(z) + \int_{\bar{A}} |h(z)-f(z)|^2\, d\mu_1(z) = \\
&= \int_A |p(z)+r_k(z)-q(z)-s_k(z)|^2\, d\mu_1(z) + \int_{\bar{A}} |r_k(z)-s_k(z)|^2\, d\mu_1(z) \le \\
&\le \int_A |p(z)-q(z)|^2\, d\mu_1(z) + \int_A |r_k(z)-s_k(z)|^2\, d\mu_1(z) + \int_{\bar{A}} |r_k(z)-s_k(z)|^2\, d\mu_1(z) + \\
&\quad +2\int_A |p(z)-q(z)||r_k(z)-s_k(z)|\, d\mu_1(z) \le \\
&\le d^2(p,q) + d^2(r_k,s_k) + 2d(p,q)d_A(r_k,s_k),
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la disuguaglianza di Hölder. Il risultato ottenuto è evidentemente equivalente a

$$d(h,f) \le d(r_k,s_k) + \frac{d(p,q)}{d(h,f)+d(r_k,s_k)}(2d_A(r_k,s_k)+d(p,q)).$$

4.4.1 Alcune stime delle funzioni di troncamento

Vediamo ora come varia la distanza $d(r_k,s_k)$ al variare del parametro di troncamento k. Per quanto visto precedentemente, ogni $h \in \beta_1$ si può scrivere come $h(z) = p(z) + r_k(z)$; tale scrittura dipende dall'intero positivo k fissato. Supponiamo quindi di avere un altro intero positivo k' diverso da k, e tale che $k' > k$ (lo si prende per comodità maggiore, la qual cosa non è restrittiva; di fatto il ruolo tra i due può essere permutato); la distanza di

Bargmann dei troncamenti r_k ed s_k sarà allora data da:

$$\begin{aligned}
d^2(r_k, s_k) &= \int |\sum_{n=k+1}^{k'} (a_n - b_n)z^n + \sum_{n>k'} (a_n - b_n)z^n|^2 \, d\mu_1(z) \leq \\
&\leq \int |\sum_{n=k+1}^{k'} (a_n - b_n)z^n|^2 \, d\mu_1(z) + d^2(r_{k'}, s_{k'}) + \\
&\quad +2\int |\sum_{n=k+1}^{k'} (a_n - b_n)z^n|| \sum_{n>k'} (a_n - b_n)z^n| \, d\mu_1(z) \leq \\
&\overset{(*)}{\leq} \int |\sum_{n=k+1}^{k'} (a_n - b_n)z^n|^2 \, d\mu_1(z) + d^2(r_{k'}, s_{k'}) + \\
&\quad +2\left(\int |\sum_{n=k+1}^{k'} (a_n - b_n)z^n| \, d\mu_1(z)\right) d(r_{k'}, s_{k'}) =: \\
&=: c + 2\sqrt{c}\, d(r_{k'}, s_{k'}) + d^2(r_{k'}, s_{k'}), \quad k' > k
\end{aligned}$$

dove in $^{(*)}$ è stata utilizzata la disuguaglianza di Hölder, e dove si è posto

$$c := \int |\sum_{n=k+1}^{k'} (a_n - b_n)z^n|^2 \, d\mu_1(z).$$

In altre parole, vale la seguente

Proposizione 4.4.8.
$\forall k'$ intero positivo tale che $k' > k$, con k fissato, vale

$$d(r_{k'}, s_{k'}) \geq d(r_k, s_k) - \sqrt{c_{k,k'}},$$

dove

$$c_{k,k'} = \int |\sum_{n=k+1}^{k'} (a_n - b_n)z^n|^2 \, d\mu_1(z).$$

Per comodità di scrittura verranno in seguito tolti i pedici di $c_{k,k'}$ (come è stato fatto anche in precedenza).

Proposizione 4.4.9.
Siano k e k' interi positivi tali che $k' > k+1$; posti $\tau := \max\{|a_n - b_n|,\ k < n \leq k'\}$, e

$$\zeta(k) := \left(-2^{k+1} - \sum_{l=0}^{k} 2^{k+1-l} \prod_{i=0}^{l}(2k+2-2i) + (1-\frac{1}{e}) \prod_{l=0}^{k+1}(2k+2-2l) \right)$$

$$\lambda(k') := \left(2^{k'} + \sum_{l=0}^{k'-1} 2^{k'-l-1} \prod_{i=0}^{l}(2k'-2i) + \prod_{l=0}^{k'}(2k'-2l) \right),$$

allora vale

$$c \leq \frac{\tau^2 \sigma \kappa_{k,k'}}{e} \left[\frac{1}{2^{k+1}} \zeta(k) + \frac{1}{2^{k'}} \lambda(k') \right],$$

per opportuni coefficienti reali positivi σ e $\kappa_{k,k'}$.

Dimostrazione. Per come è stata definita c risulta

$$\begin{aligned} c &\leq \int \left(\sum_{n=k+1}^{k'} |a_n - b_n||z^n| \right)^2 d\mu_1(z) \leq \int \left(\sum_{n=k+1}^{k'} \tau |z^n| \right)^2 d\mu_1(z) \\ &= \int_{\{|z|<1\}} \left(\sum_{n=k+1}^{k'} \tau |z^n| \right)^2 d\mu_1(z) + \int_{\{|z|\geq 1\}} \left(\sum_{n=k+1}^{k'} \tau |z^n| \right)^2 d\mu_1(z); \end{aligned}$$

consideriamo ora la funzione integranda:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=k+1}^{k'} \tau |z^n| \right)^2 &= \tau^2 (|z|^{k+1} + \ldots + |z|^{k'})^2 = \\ &= \tau^2 \underbrace{(|z|^{2k+2} + 2|z|^{2k+3} + 2|z|^{2k+4} + \ldots + |z|^{2k'})}_{\text{(k'-k)+(k'-k-1)+...+1}}, \end{aligned}$$

e vale poi che

$$(k'-k)+(k'-k-1)+\ldots+1 = \frac{(k'-k)}{2}(k'-k+1) = \frac{1}{2}((k')^2+k^2-2k'k+k'-k) =: \kappa_{k,k'}.$$

Ora, se $|z| < 1$, si ha che

$$\begin{aligned} \tau^2(|z|^{2k+2} + 2|z|^{2k+3} + 2|z|^{2k+4} + \ldots + |z|^{2k'}) \leq \tau^2(|z|^{2k+2} + 2|z|^{2k+2} + \\ + 2|z|^{2k+2} + \ldots + |z|^{2k+2}) = \tau^2 \sigma \kappa_{k,k'} |z|^{2k+2}, \end{aligned}$$

se invece $|z| \geq 1$ allora

$$\tau^2(|z|^{2k+2} + 2|z|^{2k+3} + 2|z|^{2k+4} + \ldots + |z|^{2k'}) \leq \tau^2(|z|^{2k'} + 2|z|^{2k'} + \\ + 2|z|^{2k'} + \ldots + |z|^{2k'}) = \tau^2\sigma\kappa_{k,k'}|z|^{2k'};$$

esplicitando la misura di Bargmann, si ottiene

$$c \leq \frac{\tau^2\sigma\kappa_{k,k'}}{\pi}\int_{\{|z|<1\}} |z|^{2k+2}e^{-|z|^2}\,dz + \frac{\tau^2\sigma\kappa_{k,k'}}{\pi}\int_{\{|z|\geq 1\}} |z|^{2k'}e^{-|z|^2}\,dz \\ =: \frac{\tau^2\sigma\kappa_{k,k'}}{\pi}(I_1 + I_2).$$

Cominciamo col calcolare I_1; utilizziamo la trasformazione di coordinate in coordinate polari, ossia

$$\begin{cases} x = r\cos(\vartheta) \\ y = r\sin(\vartheta) \quad r \in [0,1), \vartheta \in [0,2\pi); \end{cases}$$

essendo lo Jacobiano della trasformazione r, I_1 diventa uguale a

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2k+3}e^{-r^2}\,dr\,d\vartheta,$$

ed utilizzando la sostituzione $t = r\sqrt{2}$, si ottiene

$$I_1 = \frac{2\pi}{2^{k+2}}\int_0^{\sqrt{2}} t^{2k+3}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Integrando per parti risulta

$$I_1 = \frac{2\pi}{2^{k+2}}\left(-\int_0^{\sqrt{2}} t^{2k+2}(-te^{-\frac{t^2}{2}})\,dt\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{2^{k+2}}\left(-[t^{2k+2}e^{-\frac{t^2}{2}}]_0^{\sqrt{2}} + (2k+2)\int_0^{\sqrt{2}} t^{2k+1}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{2^{k+2}}\left(-\frac{2^{k+1}}{e} - (2k+2)\int_0^{\sqrt{2}} t^{2k}(-te^{-\frac{t^2}{2}})\,dt\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{2^{k+2}}\left(-\frac{2^{k+1}}{e} - (2k+2)\left([t^{2k}e^{-\frac{t^2}{2}}]_0^{\sqrt{2}} - 2k\int_0^{\sqrt{2}} t^{2k-2}(-te^{-\frac{t^2}{2}})\,dt\right)\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{2^{k+2}}\left(-\frac{2^{k+1}}{e} - (2k+2)\frac{2^k}{e} - (2k+2)2k\int_0^{\sqrt{2}} t^{2k-2}(-te^{-\frac{t^2}{2}})\,dt\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{2^{k+2}}\left(-\frac{2^{k+1}}{e} - \frac{2^k}{e}(2k+2) - \frac{2^{k-1}}{e}(2k+2)2k + (2k+2)2k(2k-2)\int_0^{\sqrt{2}} t^{2k-3}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right).$$

Iterando l'integrazione per parti, si vede che gli esponenti del fattore integrando di partenza t^{2k+3}, quindi dispari, calano ad ogni iterazione di 2. Indicizzando con il parametro l, allora il processo di integrazione per parti si arresta qualora $2k+3-2l=1$, ottenedo così l'integrale finale

$$\int_0^{\sqrt{2}} te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1 - \frac{1}{e}.$$

Riassumendo, risulta quindi che

$$I_1 = \frac{2\pi}{e2^{k+2}}\left(-2^{k+1} - \sum_{l=0}^{k+1} 2^{k+1-l}\prod_{i=0}^{l}(2k+2-2i) + (1-\frac{1}{e})\prod_{l=0}^{k+1}(2k+2-2l)\right) =: \frac{2\pi}{e2^{k+2}}\zeta(k),$$

da cui ovviamente

$$\frac{\tau^2\sigma\kappa_{k,k'}}{\pi}I_1 = \frac{\tau^2\sigma\kappa_{k,k'}}{e2^{k+1}}\zeta(k).$$

Ci occupiamo ora del secondo integrale I_2. Come prima, passando in coordinate polari, ricordando che in questo caso gli etremi delle coordinate polari sono $r \in [+\infty)$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$, e appicando in seguito la medesima sostituzione di variabili, si ottiene

$$I_2 = \frac{\pi}{2^{k'}}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} t^{2k'+1}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Come prima, procediamo con l'integrazione per parti:

$$
\begin{aligned}
I_2 = \frac{\pi}{2^{k'}}\left(-[t^{2k'}e^{\frac{t^2}{2}}]_{\sqrt{2}}^{+\infty} + 2k'\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} t^{2k'-1}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right) = \\
= \frac{\pi}{2^{k'}}\left(\frac{2^{k'}}{e} - 2k'\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} t^{2k'-2}(-te^{-\frac{t^2}{2}})\,dt\right) = \\
= \frac{\pi}{2^{k'}}\left(\frac{2^{k'}}{e} + \frac{2^{k'-1}}{e}2k' - 2k'(2k'-2)\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} t^{2k'-4}(-te^{-\frac{t^2}{2}})\,dt\right) = \\
= \frac{\pi}{2^{k'}}\left(\frac{2^{k'}}{e} + \frac{2^{k'-1}}{e}2k' + \frac{2^{k'-2}}{e}2k'(2k'-2) + 2k'(2k'-2)(2k'-4)\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} t^{2k'-5}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right).
\end{aligned}
$$

Si vede che l'esponente del fattore integrando di partenza $t^{2k'+1}$ dispari, cala ad ogni integrazione di 2, e quindi il processo termina quando $2k'+1-2l = 1 \Leftrightarrow l = k'$. Otteniamo quindi l'integrale finale

$$
\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{e},
$$

da cui segue che

$$
I_2 = \frac{\pi}{e2^{k'}}\left(2^{k'} + \sum_{l=0}^{k'-1} 2^{k'-l-1}\prod_{i=0}^{l}(2k'-2i) + \prod_{l=0}^{k'}(2k'-2l)\right) =: \frac{\pi}{e2^{k'}}\lambda(k'),
$$

e naturalmente ne viene che

$$
\frac{\tau^2\sigma\kappa_{k,k'}}{\pi}I_2 = \frac{\tau^2\sigma\kappa_{k,k'}}{e2^{k'}}\lambda(k').
$$

□

Per quanto visto in precedenza, si ottiene il seguente risultato

Proposizione 4.4.10.
Se $k' > k$ ed $h, f \in \beta_1$, rispettivamente $h(z) = p(z) + r_k(z)$ ed $f(z) = q(z) + s_k(z)$, allora

$$
d(r_{k'}, s_{k'}) \geq d(r_k, s_k) - \tau\left(\frac{\sigma\kappa_{k,k'}}{e}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2^{k+1}}\zeta(k) + \frac{1}{2^{k'}}\lambda(k')\right]^{\frac{1}{2}}.
$$

Osservazione 16. Vale:

per $k' \to +\infty$, $c^{\frac{1}{2}} \to d(r_k, s_k)$;

per $k' \to k$, $c \to 0$.

Cosicché $c^{\frac{1}{2}}$ è una funzione a valori interi positivi il cui range è (inclusi gli estremi) $[0, d(r_k, s_k)]$.
Si supponga ora che k' sia dipendente da un parametro reale t, $t \in (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, cioè $k' = k'(t)$, di modo che sia

$$c^{\frac{1}{2}} = \frac{d(r_k, s_k)}{\nu(t)}, \quad \nu(t) \in (1, +\infty).$$

Allora vale

$$\frac{d(r_{k'(t)}, s_{k'(t)})}{d(r_k, s_k)} \geq 1 - \frac{1}{\nu(t)}.$$

D'ora in poi si ponga per comodità $d := d(r_k, s_k)$ e $d(k') := d(r_{k'(t)}, s_{k'(t)})$; ne viene allora che

$$\frac{d}{dt}(d(k') =: \partial_t d(k') = \dot{k}'(t)\frac{d}{dk'}(d(k')) =: \dot{k}'(t)\partial_{k'} d(k').$$

Supponiamo che $\nu(t)$ sia monotona crescente e a crescenza lenta, e che quindi $\dot{\nu}(t) > 0$ $\forall t \in (a, b)$; poiché $-\partial_t d(k') > 0 \Leftrightarrow -\partial_{k'} d(k') > 0$, si ha

$$\frac{1}{d}\left(-\dot{k}'(t)\partial_{k'} d(k')\right) \geq \frac{1}{d(k')}\left(1 - \frac{1}{\nu(t)}\right)\left(-\dot{k}'(t)\partial_{k'} d(k')\right);$$

inoltre vale

$$-\frac{\partial_t d(k')}{d} + \frac{d(k')}{d} \geq 1 - \frac{1}{\nu(t)} - \frac{\partial_t d(k')}{d};$$

dalle due ultime disuguaglianze se ne ottiene una nuova, ponendo $\psi(x(t)) := d(k'(t))/d$,

$$\partial_t \psi(x(t)) \leq \psi(x(t)) + \dot{x}(t)\left[1 - \frac{1}{\nu(t)}\right]\psi^{-1}(x(t))\partial_x \psi(x(t)),$$

o equivalentemente

$$\dot{\psi}(x) \leq \psi(x) + \dot{x}[1 - \nu^{-1}(t)]\psi^{-1}(x)\partial_x \psi(x)$$

che fornisce una descrizione di come varia $d(k')$ al variare di k' e dunque di t.

Ora, il fatto di avere una descrizione implicita della velocità con cui variano le distanze delle funzioni di troncamento nella norma di Bargmann, per $k > 0$ fissato, dà l'idea che la ψ delle equazioni precedenti possa, in qualche maniera, essere collegata ad un osservabile classico (mediante la trasformata di Bargmann); supponendo di avere un'associazione $\psi \leftrightarrow \xi \in \mathcal{S}(\Omega)$, data una funzione di potenziale $V = V(\psi, \dot{\psi}, t)$, allora la Lagrangiana del sistema è:

$$L(\psi, \dot{\psi}, t) = \dot{\psi}^2 - V \geq \psi^2 + \dot{x}^2[1-\nu^{-1}(t)]^2\psi^{-2}(\partial_x\psi)^2 + 2\dot{x}[1-\nu^{-1}(t)]\partial_x\psi - V.$$

Le geodetiche del moto saranno pertanto date dall'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L(\psi, \dot{\psi}, t)}{\partial \psi}\right) - \frac{\partial L(\psi, \dot{\psi}, t)}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\partial_t\partial_\psi V - 2\dot{\psi} - \partial_{\dot{\psi}} V = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial_{\dot{\psi}} V - \partial_t\partial_\psi V}{2},$$

da cui si ottiene

$$\psi + \dot{x}[1-\nu^{-1}(t)]\psi^{-1}\partial_x\psi \geq -\frac{1}{2}\left[\dot{\psi}V - \partial_t\partial_\psi V\right].$$

Fino ad ora è stata utilizzata la scomposizione di elementi di β_1 in polinomi q di grado k, e funzioni di troncamento r_k; tale scomposizione ovviamente non è unica, e può essere considerata, per k fissato, come applicazione suritettiva σ_k da β_1 in $\mathbb{C}[z]_k$. Ci si pone ora il problema di determinare quali condizioni devono sussistere affinché valga il viceversa, ossia partendo da elementi in $\mathbb{C}[z]_k$, determinare la retroimmagine non vuota σ_k^{-1}.
Una volta fissato un polinomio $q(z)$ di grado k, il problema è equivalente a determinare una funzione olomorfa $r_k(z)$ tale che esista una $h \in \beta_1$ con $h(z) = q(z) + r_k(z)$. Affinché h sia in β_1 è poi necessario che $h(\imath t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Proposizione 4.4.11.
Sia $q \in \mathbb{C}[z]_k$, $\deg(q) = k > 0$, e siano b_n i suoi coefficienti; sia h analitica intera, e λ_n i rispettivi coeficienti di sviluppo attorno all'origine. Se

esiste una funzione continua $\varphi(z)$ sul cammino orientato γ, omotopo alla circonferenza unitaria, e posta

$$r(z) := \int_\gamma \frac{\varphi(\eta)}{\eta - z}\, d\eta,$$

con $r(z)$ continua su γ o in un insieme di punti isolati di γ; se poi $\varphi(z)$ è tale che

$$\begin{cases} \int_\gamma \frac{\varphi(\eta)}{\eta^{n+1}}\, d\eta = \frac{1}{n!}(\lambda_n - b_n) & 0 \le n \le k, \\ \int_\gamma \frac{\varphi(\eta)}{\eta^{n+1}}\, d\eta = \frac{1}{n!}\lambda_n & n > k, \end{cases}$$

e se $r(z)$ è tale da soddisfare $\forall t \in \mathbb{R}$ $\overline{r(\imath t)} - r(\imath t) = q(\imath t) - \overline{q(\imath t)}$, o equivalentemente, se la forma differenziale

$$\forall t \quad \omega_t := \left(\frac{1}{z^2 + t^2}\right)(2\imath t \Re\{h(z)\} - (\bar{z}h(z) + zh(\bar{z})))\, dz$$

è chiusa, allora $h \in \beta_1$, $r(z)$ è analitica intera, e $h(z) = q(z) + r(z)$.

Dimostrazione. Consideriamo un punto a appartenente al complementare (aperto) di γ, $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$; posto $\rho := \inf_{\eta\in\gamma} |\eta - a|$, allora se $0 < r < \rho$, e $|z-a| \le r$, la funzione $\frac{1}{\eta - z}$ si può espandere come serie di potenze convergente (con raggio di convergenza ρ) in un intorno di a. In particolare, essa si può sviluppare in un intorno dell'origine (con $\rho = R_\gamma$); infatti basta considerare che

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - z + a - a} = \frac{1}{(\eta - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\eta - a)} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\eta-a}},$$

e poiché $|z - a| < |\eta - a|$, $\frac{1}{1-\frac{z-a}{\eta-a}}$ si può scrivere come serie convergente $\sum_{n\ge0} \left(\frac{z-a}{\eta-a}\right)^n$.

Ne viene che $r(z)$ è analitica in un intorno di ogni punto di $\mathbb{C} \setminus \gamma$, e dunque ivi la forma differenziale $r(z)\, dz$ è chiusa; per il teorema di Morera, segue che $r(z)\, dz$ è chiusa su tutto $\mathbb{C}$, e quindi $r(z)$ è analitica intera.

Come conseguenza vale che

$$r^{(n)}(0) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(\eta)}{\eta^{n+1}}\, d\eta$$

che per ipotesi dà l'uguaglianza di coefficienti tra $r(z)$ e $h(z) - q(z)$.
Sia ora Γ un cammino orientato chiuso di indice 1, che interseca non in un solo punto l'asse immaginario. In questo caso vale

$$h(\imath t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_\Gamma \frac{h(z)}{z - \imath t}\,dz = \overline{h(\imath t)} = \frac{\imath}{2\pi}\overline{\int_\Gamma \frac{h(z)}{z-\imath t}\,dz} = \frac{\imath}{2\pi}\int_{\bar\Gamma}\frac{h(\bar z)}{\bar z + \imath t}\,dz \quad \Leftrightarrow$$
$$-\imath\int_\Gamma \frac{h(z)}{z-\imath t}\,dz - \imath\int_{\bar\Gamma}\frac{h(\bar z)}{\bar z + \imath t}\,dz = 0;$$

poiché in generale si ha che $\bar\Gamma = -\Gamma$, l'equazione sopra è equivalente alla seguente

$$-\imath\left[\int_\Gamma \frac{h(z)}{z-\imath t}\,dz + \int_{-\Gamma}\frac{h(\bar z)}{\bar z + \imath t}\,dz\right] = 0.$$

Raccogliendo opportunamente i termini, si ottiene

$$0 = \int_\Gamma \frac{h(z)\bar z + \imath t h(z) - h(\bar z)z + \imath t h(\bar z)}{z^2+t^2}\,dz = \int_\Gamma \frac{1}{z^2+t^2}\left[\imath t(h(z)+h(\bar z)) - h(z)\bar z - h(\bar z)z\right]\,dz,$$

$\forall t \in \mathbb{R}$.
Se definiamo

$$\omega_t := \left(\frac{1}{z^2+t^2}\right)\left(2\imath t\Re\{h(z)\} - (\bar z h(z) + z h(\bar z))\right)dz,$$

allora si è dimostrato che la chiusura di ω_t è condizione necessaria e sufficiente affinché h sia reale lungo l'asse immaginario.

$\square$

Nota: dai risultati esposti in questa sezione, si evince che la topologia di Zariski e la topologia in norma dello spazio di funzioni analitiche di Bargmann, al di là di approssimazioni e valutazioni locali, non hanno un vero e proprio legame; se da un lato le funzioni analitiche possono essere considerate come dei polinomi di qualsivoglia grado, e quindi generatori di insiemi algebrici, d'altro canto la topologia di Zariski non tiene minimamente conto della dimensione dello spazio delle funzioni in questione. Risulta in conclusione molto difficile stabilire dei legami in particolare di convergenza tra le due topologie.

Capitolo 5

Operatori lineari in β_1

Sia $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ e T un operatore lineare con dominio in $L^2(\mathbb{R})$; l'azione di T su ψ si può esprimere tramite il nucleo integrale k_T come

$$(T\psi)(q) = \int k_T(q,p)\psi(p)\,dp.$$

Ponendo $\varphi(q) = (T\psi)(q)$, allora, utilizzando la trasformata unidimensionale di Bargmann $\mathbf{A}_1$, ne viene che la funzione nello spazio di Fock-Bargmann F_1 immagine di φ è

$$\tilde{\varphi}(z) = (\mathbf{A}_1\varphi)(z) = \int A_1(z,q)\varphi(q)\,dq = \int A_1(z,q)(\int k_T(q,p)\psi(p)\,dp)dq$$

che, per Fubini-Tonelli, dà

$$\tilde{\varphi}(z) = \int\int A_1(z,q)k_T(q,p)\psi(p)\,dp\,dq,$$

ed $A_1(z,q)$ è dato da

$$A_1(z,q) := \pi^{-\frac{\pi}{4}} e^{\left\{-\frac{1}{2}(z^2+q^2)-\sqrt{2}\,z\bullet q\right\}}.$$

Essendo $\mathbf{A}_1$ un isomorfismo unitario, $\exists\, h \in F_1$: $h = \mathbf{A}_1\psi$, e quindi

$$\psi(p) = (\mathbf{A}_1^{-1}h)(q) = \int \overline{A_1(\omega,p)}h(\omega)\,d\mu_1(\omega),$$

il quale, unito a quanto ricavato sopra, fornisce l'immagine del nucleo integrale di k_T nello spazio F_1

$$\tilde{\varphi}(z) = \int\int\int A_1(z,q)k_T(q,p)\overline{A_1(\omega,p)}h(\omega)\,d\mu_1(\omega)\,dp\,dq =$$

$$= \int (\int \int A_1(z,q) k_T(q,p) \overline{A_1(\omega,p)}\, dp\, dq) h(\omega)\, d\mu_1(\omega);$$

ponendo

$$k_T(z,\omega) := \int \int A_1(z,q) k_T(q,p) \overline{A_1(\omega,p)}\, dp\, dq$$

si ottiene la scrittura tramite nucleo integrale nello spazio F_1:

$$\tilde{\varphi}(z) = \int k_T(z,\omega) h(\omega)\, d\mu_1(\omega). \tag{5.1}$$

$k_T(z,\omega)$ conserva naturalmente le proprietà del nucleo 'originale' $k_T(x,y)$. La stessa conclusione la si sarebbe potuta ottenere considerando direttamente la trasformata di Bargmann dell'operatore T come $\tilde{T} = \mathbf{A}_1 T \mathbf{A}_1^{-1}$.

5.1 Operatori $\tilde{B}$-simmetrici

Si consideri ora il seguente problema: data la sottoclasse β_1, determinare quali operatori lineari sono $\tilde{B}$ invarianti. In altre parole, dato l'operatore di Bargmann $\tilde{B} = \tilde{C}\tilde{P} = \tilde{P}\tilde{C}$, secondo la trasformata di Bargmann dell'operatore CP di parità e coniugio nel consueto spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$, trovare quali operatori lineari con dominio in β_1 hanno range in β_1, ossia trovare l'insieme degli automorfismi $\{T \,|\, D(T) = \beta_1,\ R(T) = \beta_1\}$.
(Si ricorda che affinché h appartenga a β_1, dev'essere analitica intera, sommabile secondo la norma di Bargmann, estensione di una data f definita su $\mathbb{C}^+$, e reale lungo l'asse immaginario).
Si è visto che ad ogni nucleo integrale in L^2 si può associare un nucleo integrale corrispondente in F_1, $T \leftrightarrow k_T(z,\omega)$; gli operatori lineari su F_1 saranno dunque scrivibili in generale come

$$(Tf)(z) = \int k_T(z,\omega) f(\omega)\, d\mu_1(\omega).$$

Se $h \in \beta_1$, allora $g(z) = (Th)(z)$ è ancora in β_1 se valgono

$$\begin{cases} (i) \quad g(\imath y) = \overline{g(\imath y)} & \forall y \in \mathbb{R}, \\ (ii) \quad g(z) = \tilde{B} g'(z) & z \in \mathbb{C}^-. \end{cases} \tag{5.2}$$

Vediamo cosa comportano le due condizioni scritte sopra. Dalla (i) si ricava immediatamente che

$$\int k_T(\imath y,\omega)h(\omega)\,d\mu_1(\omega) = \int \overline{k_T(\imath y,\omega)h(\omega)}\,d\mu_1(\omega).$$

Ora, $h(z) \in \beta_1$ è estensione di una certa $f(z)$ tramite l'operatore $\tilde{B}$, cioè

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \mathbb{C}^+ \\ (\tilde{B}f)(z) =: \nu(z) & z \in \mathbb{C}^- \end{cases}$$

e naturalmente l'azione di $\tilde{B}$ è $(\tilde{B}f)(z) = \overline{f(-\bar{z})}$. Per $g(z)$ dovrà valere la medesima condizione, ossia

$$g(z) = (Th)(z) = \begin{cases} f'(z) & z \in \mathbb{C}^+ \\ (\tilde{B}f')(z) =: \nu'(z) & z \in \mathbb{C}^-, \end{cases}$$

dove $f'(z) = (Tf)(z)$ e $\nu'(z) = (T\nu)(z)$. Ma per come è definita β_1 dev'essere anche $\nu'(z) = (\tilde{B}f')(z) = (\tilde{B}Tf)(z)$. Quindi

$$\nu'(z) = (T\nu)(z) = (T\tilde{B}f)(z) = (\tilde{B}f')(z) = (\tilde{B}Tf)(z) \Leftrightarrow$$

$$(T\tilde{B} - \tilde{B}T)f(z) = 0 \quad \forall f \in \tilde{\beta}_1, \forall z \in \mathbb{C}^+ \quad \Leftrightarrow$$

$$[T,\tilde{B}]_{|\tilde{\beta}_1} = 0.$$

Per l'osservazione 4 del capitolo precedente, risulta evidente che

$$[T,\tilde{B}]_{|\tilde{\beta}_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad [T,\tilde{B}]_{|\beta_1} = 0; \tag{5.3}$$

allora le condizioni 5.2 implicano le seguenti

$$\begin{cases} (i) & \int k_T(\imath y,\omega)h(\omega)\,d\mu_1(\omega) = \int \overline{k_T(\imath y,\omega)h(\omega)}\,d\mu_1(z), \\ (ii) & [T,\tilde{B}] = 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

La (ii) delle 5.4 implica poi che $\forall h \in \beta_1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, indicando con $h^* := \tilde{B}h$ (naturalmente $h^*(z) := (\tilde{B}h)(z)$, $\forall z$),

$$\begin{aligned} Th^* - (Th)^* = 0 \quad \forall h \quad &\Leftrightarrow \\ (Th^*)(z) - (Th)^*(z) = 0 \quad \forall h, z \quad &\Leftrightarrow \end{aligned} \tag{5.5}$$

esplicitando i nuclei integrali la 5.5 diventa

$$\begin{aligned} (Th^*)(z) &= \int k_T(z,\omega)h^*(\omega)\,d\mu_1(\omega) = \int k_T(z,\omega)\overline{h(-\bar{\omega})}\,d\mu_1(\omega) = \\ &= (Th)^*(z) = (\int k_T(z,\omega)h(\omega)\,d\mu_1(\omega))^* = \overline{\int k_T(-\bar{z},\omega)h(\omega)\,d\mu_1(\omega)} = \\ &= \int \overline{k_T(-\bar{z},\omega)h(\omega)}\,d\mu_1(\omega) = (\omega = -\bar{\eta}) = \\ &= \int \overline{k_T(-\bar{z},-\bar{\omega})h(-\bar{\omega})}\,d\mu_1(\omega) \end{aligned} \tag{5.6}$$

La 5.6 dà un'informazione sul nucleo integrale degli operatori in questione, ossia che $\forall z, \omega \in \mathbb{C}$, poste $-\bar{z} =: z^*$ e $-\bar{\omega} =: \omega^*$, vale il seguente

Teorema 5.1.1. *($\tilde{B}$-simmetria dei nuclei integrali)*

$$k_T(z,\omega) = \overline{k_T(z^*,\omega^*)} \tag{5.7}$$

Andiamo ora a considerare la (i) delle 5.4; se $z = \imath y$, $y \in \mathbb{R}$, allora $z = z^*$. Dal risultato 5.7 si ottiene in particolare che $k_T(\imath y,\omega) = \overline{k_T(\imath y,\omega^*)}$, e quindi sull'insieme Ω dei punti tali che $\omega = \omega^*$ risulta

$$\int_\Omega k_T(\imath y,\omega)(h(\omega) - \overline{h(\omega^*)})\,d\mu_1(\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h(\omega) = \overline{h(\omega^*)} \quad \text{q.d. su}\,\Omega, \tag{5.8}$$

che alla luce di quanto è stato finora ottenuto, risulta una condizione superflua.

Osservazione 17.
Se $k_T(z,\omega)$ è reale per ogni coppia di punti z, ω, e simmetrico rispetto a $\Delta = \{(\imath x, \imath y)\}$, allora T è $\tilde{B}$-simmetrico.

Dimostrazione. Infatti se il nucleo è ovunque reale e simmetrico rispetto a Δ, la condizione 5.7 è soddisfatta. □

La condizione 5.7 è soddisfatta naturalmente anche nel caso particolare di nuclei reali e costanti in una delle variabili (nuclei di questo tipo sono associabili ad operatori moltiplcativi per delle costanti).
Il seguente risultato è di verifica immediata.

Osservazione 18.
Se $T = T^*$, T $\tilde{B}$-simmetrico $\Leftrightarrow k_T(\omega, z) = k_T(z^*, \omega^*)$.

Come si può vedere, nuclei di operatori $\tilde{B}$-simmetrici, oltre ad appartenere a $C(\mathbb{C}^2)$, conservano in qualche modo le proprietà degli elementi di β_1. Vale infatti la seguente

Proposizione 5.1.2.
Se il nucleo integrale k_T di un operatore T $\tilde{B}$-simmetrico è analitico, allora esso si può scrivere in maniera unica come somma di due operatori a loro volta analitici, come

$$k_T = R_T + \imath J_T.$$

Dimostrazione. Vale

$$k_T(z, \omega) = \sum_{p+q=n} k_{p,q} z^p \omega^q = k_{0,0} + k_{1,0} z + k_{0,1} \omega + k_{2,0} z^2 + k_{1,1} z\omega + k_{0,2} \omega^2 + \dots$$

e

$$\begin{aligned} \overline{k_T(z^*, \omega^*)} = \sum_{p+q=n} \overline{k_{p,q}} \overline{(z^*)^p (\omega^*)^q} = \overline{k_{0,0}} - \overline{k_{1,0}} z - \overline{k_{0,1}} \omega + \\ + \overline{k_{2,0}} z^2 + \overline{k_{1,1}} z\omega + \overline{k_{0,2}} \omega^2 + \dots \end{aligned}$$

Dovendo valere $k_T(z, \omega) = \overline{k_T(z^*, \omega^*)}$, dev'essere

$$\begin{aligned} k_{0,0} &= \overline{k_{0,0}}, \\ k_{1,0} &= -\overline{k_{1,0}}, \quad k_{0,1} = -\overline{k_{0,1}}, \\ k_{2,0} &= \overline{k_{2,0}}, \quad k_{1,1} = \overline{k_{1,1}}, \quad k_{0,2} = \overline{k_{0,2}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Come si vede, i coefficienti dello sviluppo di k_T attorno all'origine sono tali che quelli di indice n la cui somma tra p e q è pari sono reali, mentre quelli di indice n dispari sono immaginari puri. Come è stato fatto per le funzioni di β_1, vale anche in questo caso, per il prolungamento analitico, se R_T è la serie degli indici pari e zero altrove, e J_T è la serie di indici dispari e zero altrove, la scrittura unica $k_T = R_T + \imath J_T$. $\square$

Proposizione 5.1.3.

Sia T un operatore lineare in β_1, sia $h \in \beta_1$ zero di T. Se, dato $z \in \mathbb{C}$, $\gamma_{z,T}$ ed $\eta_{z,T}$ sono funzioni continue a valori reali, e $k_{z,T}(x,y) = e^{x^2+y^2}[\gamma_{z,T} - \eta_{z,T}]$, allora $\omega_T := P_T\, dx + Q_T\, dy$ è chiusa, per opportune funzioni continue $P_T(x,y)$ e $Q_T(x,y)$.

Viceversa, se $\omega_{z,T} := P_{z,T}\, dx + Q_{z,T}\, dy$ è chiusa $\forall z \in A$ con

$$\begin{cases} Q_{z,T}(x,y) = \gamma_{z,T}(y)H(x,y), \\ P_{z,T}(x,y) = \eta_{z,T}(x)H(x,y), \end{cases}$$

dove $H(x,y)$ è una primitiva di h, allora $\exists\, k_{z,T}(x,y)$ continuo tale che h è zero di un operatore lineare T su A.

Dimostrazione. Supponiamo che h sia zero di T, e che quindi

$$\int k_T(z,\omega)h(\omega)\, d\mu_1(\omega) = 0;$$

esplicitando la misura di Bargmann, con $\omega = x + \imath y$ e $z = u + \imath v$, la condizione sopra è equivalente a

$$0 = \int\int k_T(u,v;x,y)h(x,y)e^{-x^2-y^2}\frac{dx\, dy}{\pi}.$$

Dal momento che $h \in \beta_1$, allora h è chiusa ed ammette dunque primitiva sul medesimo dominio. Sia tale primitiva $H(x,y)$ di modo che $H(x,y) \longleftrightarrow \partial_x H(x,y) = h(x,y)$ e $H(x,y) \longleftrightarrow \partial_y H(x,y) = h(x,y)$. Sia poi $\varphi(u,v;x,y) := \varphi_z(x,y) = k_T(u,v;x,y)e^{-x^2-y^2}$. Se $\exists\, P(u,v;x,y) =: P_z(x,y)$ e $Q(u,v;x,y) =: Q_z(x,y)$ tali che $[\partial_x Q_z - \partial_y P_z] = \varphi h$, allora applicando il teorema di Green nel piano si ottiene

$$\int\int \partial_x Q_z - \partial_y P_z = \int P_z\, dx + Q_z\, dy.$$

Date dunque due funzioni continue $\gamma(u,v;y) =: \gamma_z(y)$ ed $\eta(u,v;x) =: \eta_z(x)$, ponendo $Q_z(x,y) = \gamma_z(x,y)H(x,y)$ e $P_z(x,y) = \eta_z(x,y)H(x,y)$ vale ovviamente

$$\partial_x Q_z(x,y) - \partial_y P_z(x,y) = (\gamma_z(y) - \eta_z(x))h(x,y),$$

da cui

$$\varphi_z(x,y) = \gamma_z(y) - \eta_z(x) = k_T(u,v;x,y)e^{-x^2-y^2}$$

e dunque $k_T(u,v;x,y) = \exp\{x^2+y^2\}(\gamma_z(y) - \eta_z(x))$. Con $k_T(u,v;x,y) := k_{z,T}(x,y)$ di questo tipo si può applicare la formula di Green nel piano ed avere pertanto che la forma differenziale $\omega_{z,T} := P_z\,dx + Q_z\,dy$ è chiusa.
Dal momento che h è uno zero di T, $\omega_{z,T}$ è chiusa $\forall z \in \mathbb{C}$, e quindi $\omega_{z,T} = \omega_T$. Il viceversa si prova in maniera del tutto equivalente. Se poi $A = \mathbb{C}$, c'è l'equivalenza completa.

$\square$

5.1.1 Operatori $\tilde{B}$-simmetrici ed autoaggiunti

In generale, dato uno spazio di Hilbert X, l'insieme

$$\Omega = \{T : X \to X \mid T \text{ lineare e continuo }\}$$

con la norma operatoriale $\|T\| := \sup_{u\in X} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}$, è uno spazio di Banach; su Ω è dunque possibile costruire una topologia indotta dalla norma, inoltre nulla vieta di poter costruire una topologia di Zariski su X, considerado in questo caso che Ω come anello unitario non è in generale commutativo, e pertanto la costruzione di tale topologia procede per ideali sinistri. L'analisi fatta nel capitolo precedente che lega la topologia in β_1 indotta dalla norma di Bargmann e la topologia di Zariski su $\mathbb{C}$ può essere idealmente trasportata al caso in cui $X = \beta_1$ e invece di β_1 si considera Ω; risulta però evidente che in generale le proprietà di analiticità di β_1 sono difficili da poter legare in maniera più generica possibile ad Ω. Una possibilità potrebbe risiedere nel considerare gli operatori lineari e limitati che siano anche autoaggiunti; in tal caso, grazie al teorema di Stone-Von Neumann, si avrebbe a che fare con

gruppi di operatori fortemente continui, scrivibili come limiti convergenti di somme operatoriali.
Si richiama di seguito un risultato fondamentale nella teoria degli operatori autoaggiunti.

Teorema 5.1.4 (Di Stone)**.**
Ogni gruppo fortemente continuo di operatori unitari ad un parametro $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ in uno spazio di Hilbert X è generato da un operatore autoaggiunto:

$$U(t) = e^{-\imath tA}, \quad A := s - \lim_{t \to 0} \imath \frac{U(t) - I}{t}. \tag{5.9}$$

Viceversa, se A è autoaggiunto la famiglia di operatori tali che $t \mapsto e^{-\imath tA}$ è un gruppo fortemente continuo di operatori unitari in X che gode delle seguenti proprietà:

1. *$e^{-\imath tA} D(A) \subset D(A)$; $[A, e^{-\imath tA}] = 0$ su $D(A)$;*
2. *Se $\psi \in D(A)$, $e^{-\imath tA}\psi$ è fortemente derivabile in t e vale*

$$-\imath \frac{d\psi(t)}{dt} = A\psi(t).$$

Con la scrittura $e^{-\imath tA}$, con $A \in \Omega$ s'intende

$$e^{-\imath tA} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-\imath t)^n A^n}{n!} = I - \imath tA - \frac{1}{2} t^2 A \circ A + \imath \frac{t^3 A \circ A \circ A}{3!} + \dots \tag{5.10}$$

dove la somma converge assolutamente nella norma operatoriale. Si ricorda poi che un gruppo fortemente continuo di operatori unitari ad un parametro t è una famiglia di operatori $t \mapsto U(t)$ da $\mathbb{R}$ a $\mathcal{B}(X)$ tali che:

1. $U(t)$ è fortemente continuo $\forall t \in \mathbb{R}$, in altre parole se per ogni t, $U(t) \xrightarrow{s} V(t)$ se e solo se $U(t)\psi \to V(t)\psi$, $\forall \psi \in X$;
2. $\|U(t)\| = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$;
3. $U(t + s) = U(t)U(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

Sia $X = \beta_1$. Consideriamo dunque un operatore H in Ω autoaggiunto, $H = H^*$; sia A un aperto della topologia di Zariski di β_1, di modo che ogni $h \in A$ sia zero di H. Per il teorema di Stone 5.9 $\exists$ un gruppo fortemente continuo di operatori unitari $U(t)$. tale che $U(t) = e^{-\imath tH}$, e

$$H = s - \lim_{t\to 0} \imath \left[\frac{U(t-I)}{t}\right].$$

$U(t)$ si può scrivere $\forall t$ per la 5.10 come

$$U(t) = I - \imath tH - \frac{t^2}{2}H^2 + \dots \quad : \forall t \in \mathbb{R} \;\; U(t)\psi = \psi, \text{ se } \psi \in A, \tag{5.11}$$

e quindi, se $\psi \in A$, $\forall t$ vale $U(t) = I$.

Se $\psi \in \complement A$, vale d'altra parte

$$U(t)\psi = \psi - \imath tH\psi - \frac{t^2}{2}H^2\psi + \dots = \psi + \Lambda(H,t), \quad \Lambda(H,t) \stackrel{t\to 0}{\to} 0. \tag{5.12}$$

Dal teorema 5.1.4 si ha anche

$$U(t)H = HU(t), \quad \forall t$$

e quindi

$$U(t)H\psi = H\psi + \Lambda(H,t)H\psi = H[\psi + \Lambda(H,t)\psi] = H\psi + H(\Lambda(H,t)\psi) \quad \Leftrightarrow$$
$$[H, \Lambda(H,t)] = 0, \quad \forall t. \tag{5.13}$$

Ora, se $t < \|H\|^{-1}$ si ha

$$\begin{aligned}
\|U(t)\| &= \sup_{\psi,\|\psi\|=1} \|U(t)\psi\| = \sup_{\psi,\|\psi\|=1} \|\psi + \Lambda(H,t)\psi\| \leq \\
&\leq 1 + \sup_{\psi,\|\psi\|=1} \|\Lambda(H,t)\| \leq 1 + \sup_{\psi,\|\psi\|=1} (|t|\,\|H\psi\| + \frac{|t^2|}{2}\|H\psi\| + \dots \\
&= 1 + |t|\,\|H\| + \frac{|t^2|}{2}\|H\|^2 + \dots < \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots = 1 + e. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Osserviamo allora che $\|U(0)\| = 1$, e che per la 5.14, $\|U(t)\| < 1 + e$, $\forall t < \|H\|^{-1}$; per una costante $c << 1$: $t < c\|H\|^{-1}$, vale quindi $\|U(t)\| < 1 + ce$.

Proposizione 5.1.5.
Sia $H = H^*$, ed $H \in \mathcal{B}(\beta_1)$; se $\exists\, c << 1$ tale per cui, se t identifica il gruppo $U(t)$ fortemente continuo generato da H, $U(t)$ è tale che $\forall t \in [0, c\,\|H\|^{-1})$

$$\left\| \frac{dU(t)}{dt} \right\| \leq \|H\|\,[c^{-1} + e],$$

allora $\forall \psi \in \beta_1$, $H\psi \to 0$.

Dimostrazione. Per ipotesi, la condizione sulla crescita di $U(t)$ comporta che quest'ultimo sia molto 'vicino' ad I. Assieme a ciò, si utilizzano la 5.12 e la 5.14. Tramite infine il teorema di Stone 5.1.4 si ha l'asserto.

□

Diamo in seguito una serie di risultati che riguardano gli spazi metrici e completi.

Definizione 5.1.
Sia X spazio uno spazio metrico. T è di Lipschitz $\Leftrightarrow \exists\, L > 0$: $d(T(h), T(f)) \leq Ld(h, f)$, $\forall h, f \in X$.

Definizione 5.2.
T è una *contrazione* in X se $L < 1$.

Teorema 5.1.6 (Di Banach)**.**
Sia X metrico e completo. Se T è una contrazione in $X \Rightarrow \exists!\, \psi \in X$: $T\psi = \psi$.

Teorema 5.1.7 (Di Caccioppoli)**.**
Sia X spazio metrico e completo. Se $\exists\, n$: T^n è una contrazione in $X \Rightarrow \exists!\, \psi \in X$: $T\psi = \psi$.

Sia $H = H^*$; per quanto visto precedentemente, vale $[H, \Lambda(H,t)]_{|\beta_1} = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Inoltre l'operatore $\Lambda(H,t)$ ha norma

$$\|\Lambda(H,t)\| = \sup_{\psi, \|\psi\|=1} \|\Lambda(H,t)\psi\| \leq \|U(t)\| + 1 = 2.$$

Ricordiamo poi che per la proposizione 3.2.6, gli operatori B e $\tilde{B}$ sono entrambi unitari ed antilineari nei rispettivi spazi.
Ci chiediamo ora se $\exists$ un $t \neq 0$ tale che $\Lambda(H,t) = B$; in tal caso risulterebbe che $[H, B] = 0$, e che quindi per tale t si avrebbe che H autoaggiunto è automorfismo di β_1.
Vale la seguente

Proposizione 5.1.8.
Posto $R_t := U(t) - B$, se $\exists\, t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}^+$: R_t^m sia una contrazione, allora $\exists\,!\, \psi \in \beta_1$ tale che ψ è zero di $ad_{H,B} := [H, B]$.

Dimostrazione. Dal momento che β_1 è uno spazio metrico completo, si utilizza direttamente il teorema 5.1.7, □

Proposizione 5.1.9.
Sia $T = T^*$, e $\tilde{B}$-simmetrico; allora, $\forall \lambda, \mu$ autovalori di T (con rispettivi autovettori h ed f), vale

$$\frac{|(h, \tilde{B}f)||(\tilde{B}h, f)|}{\|h\|^2 \|f\|^2} \leq \left(\frac{|\lambda|}{|\mu|} + 1\right)\left(\frac{|\mu|}{|\lambda|} + 1\right).$$

Dimostrazione. Per ipotesi in particolare T è simmetrico, per cui $(Th, f) = (h, Tf)$; inoltre

$$(\tilde{B}Th, f) = (T\tilde{B}h, f) = (\tilde{B}h, Tf),$$
$$(h, \tilde{B}Tf) = (h, T\tilde{B}f) = (Th, \tilde{B}f),$$

da cui segue che

$$|(\tilde{B}Th, f)| = |(\tilde{B}h, Tf)| \leq \left\|\tilde{B}h\right\| \|Tf\| = \|h\| \|Tf\|,$$

ed anche

$$|(\tilde{B}Th, f)| \leq \left\|\tilde{B}Th\right\| \|f\| = \|Th\| \|f\|.$$

Analogamente risulta

$$|(Th, \tilde{B}f)| \leq \|h\| \|Tf\|$$

e

$$|(Th, \tilde{B}f)| \leq \|Th\| \, \|f\| \, .$$

Posto $\alpha := \frac{1}{2}(\|h\| \, \|Tf\| + \|Th\| \, \|f\|)$, si ottiene

$$|(\tilde{B}h, Tf)| \leq \alpha, \qquad |(Th, \tilde{B}f)| \leq \alpha,$$

Se λ e μ sono autovalori di T con rispettivi autovettori h ed f, moltiplicando tra loro i termini precedenti si ottiene

$$|(h, \tilde{B}f)||(\tilde{B}h, f)| \leq 4\alpha^2 = \|h\|^2 \, \|f\|^2 \left(\frac{|\lambda|}{|\mu|} + 1\right) \left(\frac{|\mu|}{|\lambda|} + 1\right).$$

□

5.2 Algebre di Banach e $\mathcal{C}^*$-algebre

Ci proponiamo in questo capitolo di mettere in luce alcuni risultati riguardanti le cosiddette algebre di Banach, ed eventuali relazioni che sussistono con la sottoclasse β esaminata in precedenza.

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Se A è una $\mathbb{K}$-algebra (o algebra su $\mathbb{K}$), allora si può dare la seguente

Definizione 5.3. (Algebra di Banach unitaria)
Un'algebra di Banach unitaria A è una $\mathbb{K}$-algebra associativa dotata dell'elemento unitario 1, per cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, e tale che A sia anche uno spazio di Banach rispetto ad una norma $\|\cdot\|$, e che rispetti inolotre la seguente relazione

$$\forall x, y \in A \quad \|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \, , \quad \|1\| = 1.$$

Un'algebra di Banach (unitaria) A si dirà *uniforme* se $\forall a \in A$ vale che $\|a^2\| = \|a\|^2$; questa condizione pone dei limiti sulla struttura dell'algebra A. Algebre di operatori non soddisfano mai in generale, per esempio, tale condizione (che rimane invece verificata per algebre di funzioni).
Si ricorda poi che affinché A sia un'algebra associativa su $\mathbb{K}$, dev'essere data una funzione o operazione $* : A^2 \to A$, tale che

1. $(a+b)*c = a*b + b*c$,

2. $a*(b+c) = a*b + a*c$,

3. $(\lambda a)*b = \lambda(a*b)$,

4. $a*(\lambda b) = \lambda(a*b)$,

$\forall a, b, c \in A$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$. Diamo ora qualche esempio.

Esempio 5.1. : L'insieme F_1 delle funzioni analitiche intere in una variabile complessa con la norma indotta dal prodotto interno di Bargmann e dalla misura in tale spazio $\rho_1(z) = \pi^{-1}e^{-|z|^2}$, con l'operazione $*$ uguale alla moltiplicazione solita tra funzioni olomorfe, è una $\mathbb{C}$-algebra di Banach commutativa, unitaria ed uniforme.

Esempio 5.2. : L'insieme β_1 è una sottoalgebra della $\mathbb{C}$-algebra di Banach F_1; più precisamente è una $\mathbb{R}$-algebra di Banach commutativa unitaria ed uniforme. Infatti la condizione affinché h sia un elemento di β_1 è che h sia reale lungo l'asse immaginario, in particolare sviluppando h attorno all'origine, deve valere che $h(0) = a_0 \in \mathbb{R}$. Si vede quindi che β_1 non è nemmeno un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Restringendo il campo ad $\mathbb{R}$, si verifica d'altra parte che β_1 con l'operazione $*$ di moltiplicazione consueta di funzioni olomorfe è $\mathbb{R}$-algebra.

Sia A una $\mathbb{K}$-algebra di Banach, e sia * un'applicazione $^* : A^2 \to A$.

Definizione 5.4.
Se * soddisfa le seguenti condizioni

1. $(a+b)^* = a^*b^*$,

2. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda}a^*$,

3. $(ab)^* = b^*a^*$,

4. $(a^*)^* = a$,

$\forall a \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, allora * è un'*involuzione*.

Definizione 5.5.
$a \in A$ è *autoaggiunto* se e solo se $a^* = a$.

Esempio 5.3. : La $\mathbb{C}$-algebra $L^2(\mathbb{R})$ con l'operazione di coniugio è un'algebra di Banach con involuzione.

Esempio 5.4. : La sottoclasse β_1 come $\mathbb{R}$-algebra di Banach, così come l'insieme F_1, con l'operazione $^* = \tilde{B}$ sono algebre involutive; in particolare, l'involuzione è commutativa rispetto all'operazione moltiplicativa dell'algebra.

Esempio 5.5. : L'insieme degli operatori lineari su F_1 con la consueta operazione * di aggiunzione formale, è un'algebra di Banach involutiva (ed uniforme).

Per la definizione che segue si assume $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definizione 5.6. Una $\mathcal{C}^*$-algebra A è un'algebra di Banach tale che

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in A.$$

Si verifica facilmente che

Osservazione 19.
Se A è una $\mathcal{C}^*$-algebra, allora vale $\|a^*\| = \|a\|$, $\forall a$.

Si noti che gli spazi quali F_1, β_1, o $L^2(\mathbb{R})$ non sono in generale $\mathcal{C}^*$-algebre, in quanto vale sempre per la disuguaglinza di Schwartz

$$\|\psi^*\psi\| \leq \|\psi\|^2, \quad \forall \psi.$$

Enunciamo ora un teorema che risulterà utile nel seguito

Teorema 5.2.1. *(di Gel'fand-Mazur)*
Se $A \neq 0$ è un'algebra di Banach (su $\mathbb{K}$) con unità, in cui ogni elemento non nullo ammette un inverso, allora A è isomorfa canonicamente a $\mathbb{K}$.

In particolare risulta evidente in questo caso che A è commutativa.

5.2.1 Costruzione di alcune sottoalgebre

Vediamo ora una particolare costruzione di una sottoalgebra a partire dall'algebra di Banach β_1, coerente con il teorema 5.2.1. Si noti per prima cosa che affinché gli elementi siano invertibili in β_1, per quanto visto in un capitolo precedente, è necessario che, se $h \in \beta_1$, allora $h(0) = a_0 \neq 0$ (sviluppata attorno all'origine), condizione che rende inoltre β_1 un campo. Per considerare un'eventuale applicazione del teorema di Gel'fand-Mazur, viene allora spontaneo considerare l'insieme β_1 privato degli elementi che si annullano in 0, ossia l'insieme β_1^*; è tuttavia evidente che β_1^* non è un'algebra di Banach, in quanto in particolare non è nemmeno un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale ($(\beta_1^*, +)$ non è un gruppo rispetto al '+'). Procediamo allora nel seguente modo. Ogni elemento h in β_1 per cui $h(0) \neq 0$ ha un inverso in β_1; si può di conseguenza andare a suddividere β_1 in due insiemi, rispettivamente l'insieme degli elementi che ammettono inverso, e quelli che non lo amettono, ossia se $\beta_1^{-1} := \{h \in \beta_1 \,|\, \exists\, h^{-1} \in \beta_1\}$, e $\beta_1^0 := \{h \in \beta_1 \,|\, h(0) = 0\}$, scrivere

$$\beta_1 = \beta_1^{-1} \cup \beta_1^0.$$

β_1^0 naturalmente è un ideale; infatti $\forall u \in \beta_1^0$, $\forall h \in \beta_1$, si ha $uh = hu$, per cui $(uh)(0) = (hu)(0) = 0$. Inoltre $\beta_1^0 = (z)$. Si verifica altrettanto facilmente che β_1^0 è un sottogruppo di β_1, ed essendo β_1 un gruppo commutativo (rispetto al '+'), ogni suo sottogruppo è normale (cioè, per definizione, se e solo se $\forall h \in \beta_1$, $\forall u \in \beta_1^0 \Rightarrow huh^{-1} \in \beta_1^0$).

Se $h, f \in \beta_1$ si definisce poi la seguente relazione: $h \sim f$ se e solo se $(h - f) \in \beta_1^0$, e si scriverà $h \equiv f \bmod \beta_1^0$. Si verifica facilmente che $\sim$ è di equivalenza; si possono allora considerare le classi di equivalenza per $\sim$, indicate con $[h]_\sim$, dove

$$[h]_\sim = \{f \in \beta_1 \,|\, f(0) = h(0)\},$$

che è la condizione equivalente che esprime $\sim$. Si vede allora che vale la scomposizione $[h]_\sim = [h(0)] \oplus (z)$. Si definisce quindi

$$Z_1 := \beta_{1/\sim} \equiv \frac{\beta_1}{\beta_1^0};$$

Z_1 risulta allora essere un gruppo commutativo rispetto al '+' ($[h]_\sim + [f]_\sim := [h+f]_\sim$), e tramite un'applicazione $\kappa : \mathbb{R} \times Z_1 \to Z_1$ di moltiplicazione per scalare è spazio vettoriale. L'operazione di moltiplicazione di algebra su β_1 viene qui trasportata tramite $[h]_\sim \cdot [f]_\sim := [h \cdot f]_\sim = [hf]_\sim$. Verifichiamo ora che sia anche uno spazio di Banach. Utilizziamo in tal caso la norma indotta da β_1; si vede che la topologia di sottospazio coincide con la topologia indotta dalla metrica di β_1 in Z_1, cioè

$$d_0([h]_\sim, [f]_\sim) := |h(0) - f(0)|.$$

β_1 è completo, ed ogni successione di Cauchy convergente in β_1 è ancora di Cauchy in Z_1, e converge, tramite convergenza puntuale, alla classe limite. Si è dunque provato il risultato seguente

Proposizione 5.2.2.
Z_1 è una $\mathbb{R}$-algebra di Banach non banale, commutativa, con unità.

Ogni elemento non nullo di Z_1, cioè ogni classe $[h]_\sim \neq [0]_\sim$, è tale che il suo inverso rispetto al '$\cdot$' dell'algebra è ancora in Z_1, in particolare

$$[h]_\sim^{-1} = \frac{1}{[h]_\sim} \in Z_1.$$

Per il teorema 5.2.1 risulta allora che Z_1 è canonicamente isomorfo a $\mathbb{R}$,

$$Z_1 \overset{\psi}{\cong} \mathbb{R}, \tag{5.15}$$

evidentemente $\psi : [h]_\sim \mapsto h(0)$.
Il risultato appena ottenuto vale per la particolare sottoclasse β_1; nulla vieta di applicare una costruzione simile per algebre di Banach qualsiasi, per esempio F_1 che contiene β_1. Da essa infatti ne risulta una sottolgebra Y_1 canonicamente isomorfa, questa volta, a $\mathbb{C}$, per cui in particolare vale che $Z_1 \subset Y_1$, andando a formare il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{C} \\ Z_1 \arrow[u] \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{R} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

5.2.2 Topologia di Gel'fand

Sia ora B una $\mathbb{C}$-algebra di Banach di funzioni in $\mathbb{C}$; supponiamo che da essa si possa estrarre (in un modo costruttivo del tipo di quello descritto sopra) una sottoalgebra, denotata con B^*, non banale, per cui ogni elemento non nullo abbia un inverso. Tale sottoalgebra sarà allora isomorfa a $\mathbb{C}$ per il teorema 5.2.1. Se denotiamo con ψ tale isomorfismo canonico, $\psi : B^* \longrightarrow \mathbb{C}$, facendo agire in $\mathbb{C}$ un elemento di B^* (per esempio una funzione analitica intera), e applicando in seguito ψ^{-1}, si ottiene la seguente composizione di funzioni

$$F := \psi^{-1} \circ f \circ \psi, \quad F : B^* \to \mathbb{C} \to \mathbb{C} \to B^* \quad \Rightarrow \quad F : B^* \to B^*,$$

di modo che se $h \in B^*$, allora $F(h) = (\psi^{-1} \circ f \circ \psi)(h)$. Se denotiamo con $(B^*)\breve{}$ l'insieme degli operatori da B^* a B^*, viene così a crearsi in modo naturale un'applicazione $\tilde{\psi} : B^* \longrightarrow (B^*)\breve{}$, $\tilde{\psi}(f) = F$, tramite l'isomorfismo ψ.

Proposizione 5.2.3.
Siano $z_0 \in \mathbb{C}$, e $h_0 \in B^*$, per cui $z_0 = \psi(h_0)$. Sia $M_{z_0} = \{f \in B^* \,|\, f(z_0) = 0\}$, e $M_{h_0} = \left\{F \in (B^*)\breve{} \,|\, F(h_0) = 0\right\}$. Allora

$$f \in M_{z_0} \quad \Leftrightarrow \quad F \in M_{h_0}.$$

Esempio 5.6. : Se B^* è un'opportuna sotto$\mathbb{R}$-algebra dell'insieme delle funzioni continue, allora dalla preposizione precedente, e grazie al lemma di Urysohn[1], si vede che $\tilde{\psi}$ conserva lo spettro di B^*, ossia l'insieme degli ideali massimali.
Più in generale, se X è un insieme compatto e di Hausdorff, ogni ideale massimale di una $\mathbb{C}$-algebra di Banach $B(X)$ induce un omeomorfismo canonico

[1]Secondo il lemma di Urysohn, se X è compatto e Hausdorff, se x,y $\in X$, $x \neq y$, allora $\exists f \in \mathcal{C}(X)$: $f(x) = 0$ ed $f(y) = 1$.
Tale lemma risulta poi fondamentale per il seguente teorema sugli insiemi di funzioni continue in X; $\forall x \in X$, indicato con $I(x) = \{f \in \mathcal{C}(X) \,|\, f(x) = 0\}$, al variare di x in X, la famiglia $I(X)$ descrive tutti e i soli gli ideali massimali di $\mathcal{C}(X)$ (e quindi il suo spettro). Inoltre se $x \neq y \Rightarrow I(X) \neq I(Y)$.

ψ_M di $B(X)$ su $\mathbb{C}$. Quindi, se si considera un elemento h di $B(X)$, la sua immagine tramite ψ_M sarà $h(M) \in \mathbb{C}$; di conseguenza $\forall \psi_M : B(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ si ha che $h(M)$ si può vedere come funzione in $\mathbb{C}$ al variare di M, per cui gli $h \in B(X)$ si possono vedere come funzioni complesse su $MAX(B) = \{\mathrm{M} \,|\, \mathrm{M} \text{ ideale massimale}\}$. Se si considera $MAX(B(X))$ con la topologia immagine tramite h, e cioè A è aperto in $MAX(B(X))$ se è retroimmagine mediante h di un B aperto in $\mathbb{C}$, allora si può dimostrare che $MAX(B(X))$ è compatto e di Hausdorff. $MAX(B(X))$ è lo **spettro** di $B(X)$.
Come scritto prima, in generale le algebre di Banach di funzioni non sono anche $\mathcal{C}^*$-algebre; per completezza, si riporta il seguente risultato, che riguarda alcune $\mathcal{C}^*$-algebre e il loro lo spettro:

Teorema 5.2.4. *(Gel'fand-Naimark)*
Una $\mathcal{C}^*$-algebra B commutativa, con unità è isometricamente isomorfa ad una sotto$\mathcal{C}^*$-algebra dell'algebra di Banach delle funzioni continue su un compatto $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$; precisamente $X = MAX(B)$.

Per quanto riguarda l'applicazione $\tilde{\psi}$ si ha

Proposizione 5.2.5.
$\forall f \in B^*$, $\tilde{\psi}$ è $1-1$ e suriettiva.

Dimostrazione. **1-1**) Siano f_1 ed f_2 in B^*; supponiamo che $\tilde{\psi}(f_1) = \tilde{\psi}(f_2)$. Quindi $F_1 = F_2 \Leftrightarrow \psi^{-1} \circ f_1 \circ \psi = \psi^{-1} \circ f_2 \circ \psi$. Di conseguenza, $\forall h \in B^*$, $\psi^{-1}(f_1 \circ \psi)(h) = \psi^{-1}(f_2 \circ \psi)(h) \Leftrightarrow (f_1 \circ \psi)(h) = (f_2 \circ \psi)(h) \Rightarrow f_1 = f_2$.
su) Se $F \in (B^*)\check{}$, allora $\exists$ ed è proprio $f \in B^*$ tale che $\tilde{\psi}_f^{-1}(F) = f$. □

L'inversa $\tilde{\psi}^{-1}$ è evidentemente tale che $\tilde{\psi}^{-1}(F) = f$, e $f = \psi \circ F \circ \psi^{-1}$.

Definizione 5.7.
Sia B un'algebra di Banach. Un omomorfismo di algebre $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{C}$ è un *carattere.*

Teorema 5.2.6.
Ogni carattere φ è continuo. In particolare $\|\varphi\| = 1$.

Diamo nel seguito una seconda definizione dello spettro, equivalente a quella presentata nell'esempio precedente

Definizione 5.8. Lo *spettro* di un'algebra di Banach B è l'insieme

$$\mathfrak{M}(B) = \{\varphi \,|\, \varphi \text{ carattere non banale}\}\,.$$

Definizione 5.9. (Trasformata di Gel'fand)
Sia B un'algebra di Banach. Se $b \in B$, l'applicazione

$$\hat{b} : \mathfrak{M}(B) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{b}(\varphi) \mapsto \varphi(b)$$

si chiama *trasformata di Gel'fand.*

Sia $\varphi_0 \in \mathfrak{M}(B)$; si può costruire una topologia, detta *topologia di Gel'fand*, per cui gli aperti sono definiti in modo costruttivo come

$$\left\{\psi \in \mathfrak{M}(B) \,|\, |\hat{b}_i(\psi) - \hat{b}_i(\varphi_0)| < \epsilon, \quad i = 1, \ldots, n\right\}. \tag{5.16}$$

Se $MAX(B)$ è l'insieme degli ideali massimali di B, allora sussiste il seguente

Teorema 5.2.7.
Se T è tale che

$$T : \mathfrak{M}(B) \longrightarrow MAX(B), \quad T(\varphi) = Ker(\varphi),$$

allora T è biunivoca.

Tale risultato mette in luce lo stretto legame che sussiste tra lo spettro di un'algebra di Banach e l'insieme dei suoi ideali massimali. Inoltre

Proposizione 5.2.8.
$\mathfrak{M}(B)$ è compatto, e $\mathfrak{M}(B) \neq \emptyset$.

Definizione 5.10. (Algebra semi-semplice)
Un'algebra di Banach B è *semi-semplice* se

$$\bigcap M = \{0\}\,, \quad M \in MAX(B).$$

Esempio 5.7. : La $\mathbb{C}$-algebra delle funzioni continue su di un insieme compatto e Hausdorff X, è semi-semplice; infatti, in tal caso, $MAX(B) = MAX(C(X))$ è dato dalla famiglia di ideali $I(x)$ (come sopra), per cui, in particolare, se $x \neq y \Rightarrow I(x) \neq I(y)$. Ne viene che $\bigcap_{x \in X} I(x) = \{f \in C(X) \,|\, f(x) = 0, \forall x \in X\} = \{0\}$

Per le algebre di Banach semi-semplici vale in particolare il seguente risultato

Teorema 5.2.9.
Se B è semi-semplice, allora ogni omomorfismo[2] *$\lambda : A \to B$, A algebra di Banach, è continuo.*

Supponiamo ora che l'algebra di Banach B^* [3] sia costruita su di uno spazio di Hilbert. D'ora in avanti si suppone, per fissare maggiormente le idee, che gli elementi di B^* siano continui come funzioni (per esempio, Y_1). Dotiamo in seguito $\mathfrak{M}(B^*)$ della topologia di Gel'fand come prescritto da 5.16. Sia poi

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad E_z(h) := h(z) \in B^*,$$
$$E : \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{M}(B^*), \quad E : z \mapsto E_z(h), \quad \forall h \in B^*$$

la funzione di valutazione; $\forall z \in \mathbb{C}$, E_z è un carattere.
L'applicazione E è certamente suriettiva (per ogni E_z esiste un z tale che $E(z) = E_z$).

Proposizione 5.2.10.
$E : \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{M}(B^*)$ è continua.

[2] Per omomorfismo λ da X a Y di algebre di Banach s'intende un omomorfismo da X a Y di spazi di Banach (e quindi in norma), che preservi l'operazione moltiplicativa dell'algebra, ossia $\lambda(x_1 \overset{X}{*} x_2) = y_1 \overset{Y}{*} y_2$

[3] Ricordiamo che B^* è una sottoalgebra di Banach unitaria, ricavata in modo tale che ogni elemento non nullo in B^* abbia un inverso. Se B^* è in particolare una sottoalgebra di funzioni di uno spazio di Banach (o Hilbert), allora in B^* vale che se $h \neq 0 \Rightarrow \exists\, h^{-1}$; pertanto $hh^{-1} = 1 \Leftrightarrow \|h\| \neq 0$.

Dimostrazione. Sia W un intorno di E_z; allora $\exists\, b_1, \ldots, b_n, \epsilon > 0 : W_{E_z}(b_1, \ldots, b_n, \epsilon) \subset W$, dove, se $\hat{b}_i$, $i = 1, \ldots, n$ sono le trasformate di Gel'fand dei $b_i \in B^*$,

$$W_{E_z}(b_1, \ldots, b_n, \epsilon) = \left\{\psi \in \mathfrak{M}(B^*) \,|\, |\hat{b}_i(\psi) - \hat{b}_i(E_z)| < \epsilon, \quad i = 1, \ldots, n\right\} =$$
$$= \{\psi \in \mathfrak{M}(B^*) \,|\, |\psi(b_i) - E_z(b_i)| < \epsilon, \quad i = 1, \ldots, n, \quad b_i \in B^*\}\,.$$

Sia $U \subset \mathbb{C}$ un intorno di z, per cui $|b_i(\omega) - b_i(z)| < \epsilon$, $\forall \omega \in U$. Allora $E(U) \subset W_{E_z}(b_1, \ldots, b_n, \epsilon)$, e vale $|E_\omega(b_i) - E_z(b_i)| < \epsilon$, $\forall i$. U è l'intorno cercato, grazie al quale E risulta continua. $\square$

Se ora si considera l'isomorfismo ψ dato dal teorema 5.2.1, e lo si compone successivamente con l'applicazione continua E, si ottiene un'applicazione continua $\sigma : B^* \longrightarrow \mathfrak{M}(B^*)$, che lega l'algebra di Banach B^*, e il suo spettro, dove $\sigma := E \circ \psi$, per cui $\sigma(h) = E_{\psi(h)}$.
Dalla proposizione 5.2.5, una volta dotata $(B^*)\check{}$ della topologia che rende continua la $\tilde{\psi}^{-1}$, si ha allora

Proposizione 5.2.11.
$\exists$ un'applicazione continua

$$\xi : (B^*)\check{} \longrightarrow \mathfrak{M}(B^*),$$

dove $\xi := \sigma \circ \tilde{\psi}^{-1}$.

Appendice A

Sullo spazio di Bargmann F_n

discorso.

A.1 Alcuni risultati utili

Teorema A.1.1.
Sia $S = \sum_{k\geq 1} b_k$ *una serie a termini reali non-negativi, e sia* γ_{ki}*,* $i = 1, \dots$ *tali che*

1. $0 \leq \gamma_{ki} \leq 1$*,*

2. $\lim_{i\to+\infty} \gamma_{ki} = 1$*,*

e si ponga $S_i := \sum_k \gamma_{ki} b_k$*.* S *converge se e solo se gli* S_i *sono uniformemente limitati, e in tal caso vale* $S = \lim S_i$*.*

Teorema A.1.2. *Sia dato un integrale del tipo*

$$F(z) = \int_D f(z, \tau)\, d^k\tau,$$

con D *insieme misurabile in* $\mathbb{R}^k$*, e* $z = (z_1, \dots, z_m)$ *un punto in un aperto* A *di* $\mathbb{C}^m$*. Se per ogni* z *in un intorno* N_b *del tipo* $|z_j - b_j| < \rho_j$ *del punto* $b \in A$ *si ha che* f *è analitica in* z *per ogni* τ*, misurabile in* τ *e tale che*

$$|f(z, \tau)| \leq \eta(\tau), \qquad |z_j - b_j| < \rho_j,$$

dove η è sommabile su D, allora $F(z)$ è analitica in N_b, e le derivate parziali di F sono ottenute derivando sotto il segno di integrale, essendo gli integrali risultanti sommabili (per la convergenza dominata di Lebesgue).

Dalla 2.27 segue direttamente

Proposizione A.1.3.
Se $f \in O_\lambda$, vale

$$|A_n f(z)|\rho_n \leq \gamma\pi^{-5n/4} \exp\left\{-\left(\frac{3-\lambda^2}{2}x^2 + \frac{1-\lambda^2}{2}y^2 + \frac{1}{2}q^2\right) + 2^{1/2}x \bullet q\right\}.$$

Da cui, se $\psi = \mathbf{W}_n f$, segue che

$$|\psi(q)| \leq \frac{2^n\gamma\pi^{-n/4}}{[(3-\lambda^2)(1-\lambda^2)]^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1-\lambda^2}{2(3-\lambda^2)}q^2\right\}.$$

A.1.1 Trasformazioni omogenee in F_n

Consideriamo il gruppo G di traslazioni-rotazioni; se la U in 2.9 è una matrice ortogonale reale, denotata con O, allora l'operatore V_O corrispondente in H_n è

$$(V_O\psi)(q) = \psi(O^{-1}q), \quad \psi \in H_n; \tag{A.1}$$

infatti è facile verificare che $A_n(z,q)$ è invariante rispetto a simultanee trasformazioni ortogonali di z e q, tenendo conto anche dell'invarianza delle misura di Bargmann $d\mu_n(z)$.
Se si considera il sottogruppo di G delle trasformazioni del tipo $U = e^{\imath t}I$, $t \in \mathbb{R}$, e si denota con $W_t := U$, in questo caso allora vale

$$W_t W_{t'} = W_{t+t'}, \text{ in } H_n \qquad \tilde{W}_t\tilde{W}_{t'} = \tilde{W}_{t+t'}, \text{ in } F_n. \tag{A.2}$$

W_t è reale ed ortogonale se $e^{\imath t} = \pm 1$, cioè $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In questo caso, per la $A.1$, si ottiene

$$W_0 = I, \qquad W_\pi = P, \tag{A.3}$$

dove $(P\psi)(q) = \psi(-q)$ è l'operatore di *parità*.
Possiamo ricavare W_t in un altro modo, utilizzando le funzioni f_λ. Supponiamo che ψ sia una funzione il cui supporto è all'interno di un cubo Q_α, $|q_k| < \alpha$,

e sia $\psi_1 := W_t\psi$. Con $f = \mathbf{A}_n\psi$, $g = \tilde{W}_t f$, in altre parole, $g(z) = f(e^{-\imath t}z)$, abbiamo

$$\psi_1 = s - \lim_{\lambda\to 1}\psi_{1,\lambda}, \quad \psi_{1,\lambda} = \mathbf{A}_n^{-1}g_\lambda,$$

più precisamente ($g = \tilde{W}_t(\mathbf{A}_n\psi)$), $\psi_{1,\lambda}$ è data da

$$\begin{aligned}\psi_{1,\lambda}(q) &= \int\int A_n(\bar{z},q)A_n(\lambda e^{-\imath t}z,q')\psi(q')\,d\mu_n(z)\,d^nq' = \\ &= \int \sigma_n(\lambda e^{-\imath t},q',q)\psi(q')\,d^nq'.\end{aligned}$$

Su Q_α il nucleo di quest'ultimo integrale converge uniformemente a $\sigma_n(e^{-\imath t},q',q)$ per $\lambda \to 1$, e quindi

$$\psi_1(q) = \lim_{\lambda\to 1}\psi_{1,\lambda}(q) = \int_{Q_\alpha}\sigma_n(e^{-\imath t},q',q)\psi(q')\,d^nq'.$$

Se scriviamo t in modo da esplicitare la dipendenza angolare, abbiamo

$$t = 2k\pi + \epsilon\theta, \quad \epsilon = \pm 1, \quad \theta \in (0,1),$$

allora $1 - e^{-2\imath t} = 2e^{\imath\epsilon(\pi/2-t)}\sin(\theta)$. Se quindi $e^{2\imath t} \neq 1$, possiamo scrivere σ_n come

$$\sigma_n(e^{-\imath t},q',q) = \frac{\exp\{-\imath\epsilon n(1/4\pi - 1/2\theta)\}}{(2\pi|\sin(t)|)^{n/2}}\exp\left\{\imath\cot(t)\frac{q^2+q'^2}{2} - \imath\frac{q\bullet q'}{\sin(t)}\right\}. \tag{A.4}$$

Per qualsiasi $\psi \in H_n$, si ponga in seguito $\psi_\alpha(q) = \psi(q)$ se $q \in Q_\alpha$, e $\psi_\alpha(q) = 0$, se $q \notin Q_\alpha$. In questo modo risulta $\psi = s - \lim_{\alpha\to+\infty}\psi_\alpha$, e $W_t\psi = s - \lim_{\alpha\to+\infty}W_t\psi_\alpha$, in altre parole

$$(W_t\psi)(q) = s - \lim_{\alpha\to+\infty}\int_{Q_\alpha}\sigma_n(e^{-\imath t},q',q)\psi(q')\,d^nq'. \tag{A.5}$$

Per $t = \pi/2$, σ_n si riduce a $\sigma_n = (2\pi)^{-n/2}\exp\{-\imath q\bullet q'\}$, diventando così la trasformata di Fourier $F = W_{\pi/2}$. Come diretto corollario, si ottengono le proprietà della trasformata di Fourier; la sua unitarietà, $F^2 = P$, $F^4 = I$, l'inversa $F^{-1} = W_{-\pi/2}$, e così via.

Per l'insieme delle funzioni ortonormali $u_{[m]}$ in F_n (e le corrispettive Herimtiane in H_n), ne viene poi che

$$\tilde{W}_t u_{[m]} = e^{-\imath|m|t}u_{[m]}, \qquad W_t\phi_{[m]} = e^{-\imath|m|t}\phi_{[m]}.$$

Appendice B

Sulla quantizzazione di Weyl

Calcoliamo l'azione dell'operatore $e^{\imath t\langle r,q\rangle + \langle s,p\rangle}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ nella rappresentazione di Weyl.
Si consideri la famiglia

$$U(t) = e^{-\imath t\langle s,p\rangle} e^{-\imath t\langle r,q\rangle} e^{\imath t(\langle r,q\rangle + \langle s,p\rangle)} = \prod_{k=1}^{n} U_k(t),$$

dove $U_k(t) = e^{-\imath t s_k p_k} e^{-\imath t r_k q_k} e^{\imath t(r_k q_k + s_k p_k)}$. Derivando U_k rispetto a t si ottiene

$$\frac{\partial U_k(t)}{\partial t} = -\imath s_k e^{-\imath t s_k p_k}[p_k e^{-\imath t r_k q_k} - e^{-\imath t r_k q_k} p_k] e^{\imath t(r_k q_k + s_k p_k)} =$$
$$= \imath\hbar t s_k r_k e^{-\imath t s_k p_k} e^{-\imath t r_k q_k} e^{\imath t(r_k q_k + s_k p_k)} = \imath\hbar t s_k r_k U_k(t).$$

Tenendo conto che $U_k(0) = I$, come equazione differenziale lineare allora risulta

$$U_k(t) = e^{\imath\hbar s_k r_k t^2/2} I,$$

da cui

$$U(t) = e^{\imath\hbar t^2\langle r,s\rangle/2} I,$$

e

$$e^{\imath t(\langle r,q\rangle + \langle s,p\rangle)} = e^{\imath\hbar t^2\langle r,s\rangle/2} e^{\imath t\langle r,q\rangle} e^{\imath t\langle s,p\rangle}.$$

Ponendo quindi $t = 1$ si ha

$$e^{\imath(\langle r,q\rangle + \langle s,p\rangle)} = e^{\imath\hbar\langle r,s\rangle/2} e^{\imath\langle r,q\rangle} e^{\imath\langle s,p\rangle}. \tag{B.1}$$

Questo implica che

$$[e^{\imath(\langle r,q\rangle+\langle s,p\rangle)}u](x) = e^{\imath(\langle r,x\rangle+\hbar\langle r,s\rangle/2)}u(x+\hbar s), \tag{B.2}$$

da cui

$$(\hat{f}u)(x) = \int e^{\imath(\langle r,x\rangle+\hbar\langle r,s\rangle/2)}\hat{f}(r,s)u(x+\hbar s)\,d^n r\,d^n s. \tag{B.3}$$

Bibliografia

[1] V. BARGMANN, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform*, Communications on pure and applied mathematics, Vol. XIV, 187-214, 1961.

[2] F.A. BEREZIN, M.S. SHUBIN, *The Schrödinger equation*, Capitolo V, Kluwer, 1991.

[3] S. GRAFFI, *Alcuni aspetti matematici della meccanica quantistica*, Quaderni dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, 2004.

[4] E. SERNESI, *Geometria 2*, Capitoli 1,2,3, Bollati Boringhieri, 2001.

[5] I.N. HERSTEIN, *Algebra*, Editori Riuniti, 2003.

[6] E. LANCONELLI, *Lezioni di analisi matematica 2*, Vol. I, Pitagora Editrice, 2000.

Ringraziamenti

Vorrei naturalmente rivolgere un sincero ringraziamento a tutti coloro che hanno, direttamente o indirettamente, contribuito a scrivere questa tesi.
In primo luogo ringrazio il mio relatore *prof.* Sandro Graffi, che mi ha concesso di studiare e lavorare liberamente sui vari argomenti trattati, donandomi un ampio spazio di lavoro, ma aiutandomi nel contempo a dirigermi lungo i binari giusti onde non 'deragliare'.
Ringrazio poi i miei genitori per la costante vicinanza, affetto e supporto. Ringrazio inoltre Angela con tutto il cuore. Un grazie sentito e 'levante' va alla *dott.ssa* Alina Garagnani e al *dott.* Davide Ventura.
Un ringraziamento particolare va anche ad Antonella per avermi supportato e sopportato.
Ringrazio Piuma per avermi tenuto costantemente compagnia, e naturalmente ringrazio tutti coloro che avrei voluto ringraziare, ma che non ho potuto o non posso, e spero, in questo che non ne saranno risentiti.