

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**Emissione di sincrotrone e applicazioni
astrofisiche**

Tesi di laurea

Presentata da:
Cecilia Stella

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Anno Accademico 2022-2023

Introduzione

Viene detto sincrotrone un processo non termico, cioè la cui energia non segue la distribuzione termica di Maxwell-Boltzmann, di emissione di radiazione elettromagnetica continua. Essa è una conseguenza delle leggi di Maxwell, per le quali una particella che ruota intorno alle linee di forza di un campo magnetico irradia secondo la formula di Larmor.

Tale emissione venne osservata per la prima volta nel 1947 in un acceleratore di particelle a 70 MeV, chiamato sincrotrone, nel laboratorio di ricerca della General Electric nello stato di New York.

Presto si ipotizzò che la radiazione di sincrotrone potesse trovarsi anche in ambito astrofisico, data l'abbondante presenza di campi magnetici. Le supposizioni si rivelarono fondate. Tra gli oggetti astronomici che costituiscono sorgenti di emissione di sincrotrone troviamo resti di supernovae e radiogalassie, ovvero galassie al cui centro è presente un nucleo galattico attivo "radio-loud" che emette getti relativistici in cui sono presenti campi magnetici e particelle ultrarelativistiche.

In questo elaborato verranno delineati i meccanismi fisici alla base dell'emissione di sincrotrone e le sue principali caratteristiche, nonché le più importanti applicazioni astrofisiche.

Indice

1	Descrizione fisica	1
1.1	Ciclotrone	1
1.2	Ciclotrone relativistico	2
1.3	Sincrotrone	3
1.3.1	Potenza irraggiata	3
1.3.2	Durata dell'impulso	3
1.3.3	Distribuzione spettrale	4
2	Applicazioni dell'emissione di sincrotrone in astrofisica	6
2.1	Emissione di una popolazione di elettroni	6
2.2	Autoassorbimento di sincrotrone	7
2.3	Polarizzazione	8
2.3.1	Polarizzazione della nebulosa del granchio	9
2.4	Energetica di una radiosorgente	10
2.5	Tempo evolutivo	11
2.5.1	Caso di un'unica iniezione di particelle	12
2.5.2	Caso di iniezione continua di particelle	13
2.6	<i>Synchrotron self-Compton</i>	14
2.6.1	Spettro della Nebulosa del Granchio	15

Capitolo 1

Descrizione fisica

Per una particella che viaggia a velocità non relativistiche si parla di radiazione di ciclotrone, a velocità relativistiche si parla di radiazione di ciclotrone relativistico, a velocità ultrarelativistiche si parla di radiazione di sincrotrone.

1.1 Ciclotrone

Consideriamo una particella di massa m e di carica q che viaggia a velocità \mathbf{v} in un campo magnetico uniforme \mathbf{H} . La sua equazione del moto è:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (1.1)$$

\mathbf{p} è la quantità di moto, c è la velocità della luce nel vuoto.

La velocità \mathbf{v} si scompone rispetto alla direzione delle linee di campo magnetico nella componente parallela $v_{\parallel} = v \cos \theta$ e nella componente perpendicolare $v_{\perp} = v \sin \theta$, dove θ è l'angolo tra \mathbf{H} e \mathbf{v} detto *pitch angle* e $v = |\mathbf{v}|$.

Essendo $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ si ha che $p_{\parallel} = mv_{\parallel}$ e $p_{\perp} = mv_{\perp}$ e dunque, con $H = |\mathbf{H}|$, si ha:

$$\frac{d(m\mathbf{v}_{\parallel})}{dt} = 0, \quad \frac{d(m\mathbf{v}_{\perp})}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{H}. \quad (1.2)$$

Il risultato è un moto elicoidale dato dalla prima equazione di moto rettilineo uniforme, con velocità v_{\parallel} costante, e dalla seconda equazione di moto circolare, con velocità v_{\perp} costante. Il raggio di curvatura del moto circolare è il raggio di Larmor:

$$r_L = \frac{mc}{qH} v_{\perp}. \quad (1.3)$$

La frequenza di girazione è la frequenza di Larmor:

$$\nu_L = \frac{qH}{2\pi mc}. \quad (1.4)$$

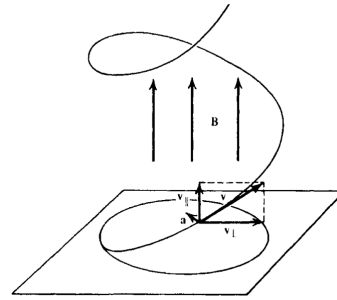


Figura 1.1: Moto elicoidale di una particella in un campo magnetico uniforme (Rybicki & Lightman [6]).

Ricordiamo $v/c = \beta$ e la formula di Larmor $P = -d\varepsilon/dt = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$ con a l'accelerazione della particella.

$$F = ma = q\beta \sin \theta H \implies a = \frac{q}{m} \beta \sin \theta H \quad (1.5)$$

La radiazione emessa è:

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^4 \beta^2 \sin^2 \theta H^2}{m^2 c^4}. \quad (1.6)$$

1.2 Ciclotrone relativistico

Nel caso relativistico va considerata la massa relativistica $m = m_0 \gamma$ dove γ è il fattore di Lorentz così definito:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.7)$$

Il raggio di girazione e la frequenza sono ora

$$r_{rel} = \frac{m_0 c}{qH} v_{\perp} \gamma = r_L \gamma, \quad \nu_{rel} = \frac{qH}{2\pi m_0 c \gamma} = \frac{\nu_L}{\gamma}. \quad (1.8)$$

La formula di Larmor va trattata come invariante relativistico, dunque si scrive

$$P = -\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^3} \left(\frac{dp_i}{d\tau} \cdot \frac{dp_i}{d\tau} \right), \quad \left(\frac{dp_i}{d\tau} \cdot \frac{dp_i}{d\tau} \right) = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2 - \beta^2 \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2 \quad (1.9)$$

dove p_i sono le componenti del vettore energia-impulso e $d\tau = dt/\gamma$.

Valutando i contributi dell'accelerazione lineare e centripeta alla potenza irradiata si nota che che:

- considerare la sola accelerazione lineare equivale ad avere $|d\mathbf{p}/d\tau| = |dp/d\tau|$ che riporta al risultato di particella non relativistica;
- considerare la sola accelerazione centripeta equivale ad avere $|d\mathbf{p}/d\tau| \gg \beta (dp/d\tau) = 1/c (d\varepsilon/d\tau)$, ovvero a considerare trascurabile l'energia irradiata nell'unità di tempo, che porta al risultato

$$P \simeq \frac{2q^2}{3m_0^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2 = \frac{2q^2}{3m_0^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2. \quad (1.10)$$

La radiazione, a causa di effetti di aberrazione relativistica, non viene emessa tutta alla frequenza ν_{rel} , bensì in armoniche superiori con frequenze

$$\nu_k = k \nu_{rel} \left(1 - \frac{v_{\parallel} \cos \theta}{c} \right) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.11)$$

dove il fattore tra parentesi rappresenta lo spostamento Doppler dovuto alla componente parallela della velocità proiettata lungo la linea di vista.

Le energie alle varie armoniche seguono la legge

$$\left[\frac{d\varepsilon}{dt} \right]_{k+1} \approx \beta^2 \left[\frac{d\varepsilon}{dt} \right]_k \quad (1.12)$$

che denota un abbassamento del picco all'aumentare della frequenza. Come risultato dell'effetto Doppler, si ha amplificazione dei campi elettrico e magnetico quando la particella è in avvicinamento verso l'osservatore e attenuazione quando è in allontanamento.

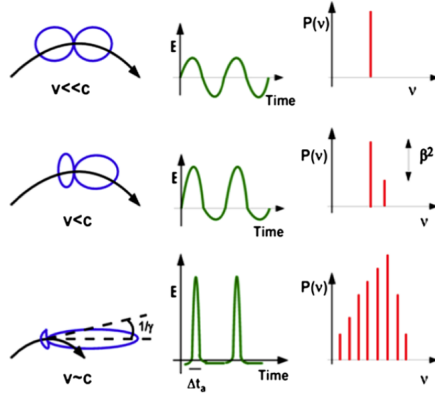


Figura 1.2: Pattern di emissione, andamento del campo elettrico in funzione del tempo, andamento della potenza in funzione della frequenza. All'aumentare della velocità aumenta il numero di armoniche su cui si distribuisce l'emissione della radiazione (Ghisellini [4]).

1.3 Sincrotrone

Quando la particella viaggia a velocità ultrarelativistiche si ha $\beta \sim 1$. Per tali valori le armoniche risultano infinitesimamente vicine, tanto da formare un continuo.

1.3.1 Potenza irradiata

La potenza irradiata da una singola particella è:

$$P = -\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2q^4}{3m_0^2 c^2} \beta^2 \gamma^2 H^2 \sin^2 \theta, \quad (1.13)$$

$$P = -\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2q^4}{3m_0^4 c^7} \varepsilon^2 H^2 \sin^2 \theta, \quad \varepsilon = m_0 c^2 \gamma \quad (1.14)$$

Data la forte dipendenza inversa della radiazione dalla massa della particella, d'ora in avanti considereremo solamente elettroni, salvo dove diversamente specificato.

1.3.2 Durata dell'impulso

Nel sistema di riferimento (*SdR*) dell'elettrone la radiazione è isotropa, ma nel *SdR* dell'osservatore questa viene emessa sotto un angolo che si ottiene considerando la formula relativistica per l'aberrazione della luce. Vale la relazione

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \alpha' + \beta} = \frac{\sin \alpha'}{\gamma (\cos \alpha' + \beta)} \quad (1.15)$$

in cui α è l'angolo del *SdR* dell'osservatore e α' quello del *SdR* solidale con l'elettrone. Se si considera il semispazio nel *SdR* dell'elettrone $\alpha' = \pm 90^\circ$, a velocità ultrarelativistiche si ha

$$\tan \alpha = \frac{1}{\gamma} \approx \alpha. \quad (1.16)$$

Metà della radiazione è concentrata in un cono di semiampiezza $\sim 1/\gamma$ con asse lungo la direzione della velocità istantanea dell'elettrone, l'altra metà è distribuita sullo spazio restante. Questo fenomeno è chiamato beaming relativistico. Conseguentemente, l'emissione di sincrotrone da parte di un singolo elettrone appare impulsiva. Per descrivere la durata dell'impulso osservato, facciamo riferimento alla figura (1.3).

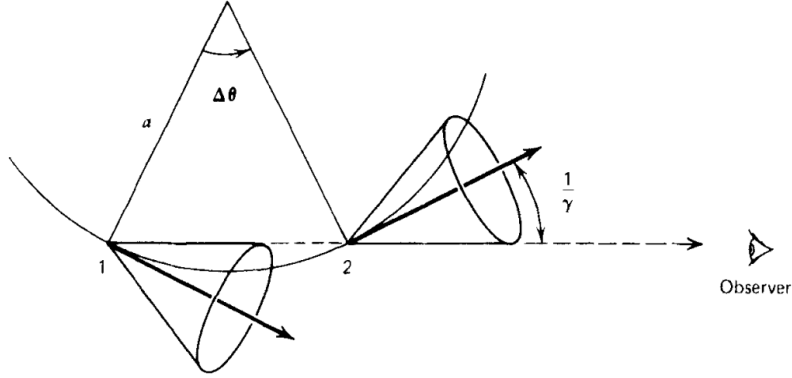


Figura 1.3: Schema del calcolo della durata dell'impulso (Rybicki & Lightman [6]).

All'inizio dell'impulso, quando l'osservatore inizia a ricevere la radiazione, l'elettrone si trova in posizione 1, alla fine dell'impulso si trova in posizione 2. Approssimando l'arco con la corda sottesa, la distanza tra i due punti è $\Delta s = \Delta \theta r_{rel}$. Il fotone emesso in 1 ha impiegato un tempo $\Delta t_1 = \Delta \theta r_{rel}/c$ per percorrere la distanza, l'elettrone ha invece impiegato un tempo $\Delta t_2 = \Delta \theta r_{rel}/v$. La durata netta dell'impulso è:

$$\tau = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{\Delta \theta}{\omega_{rel}} (1 - \beta) = \Delta t (1 - \beta) \quad (1.17)$$

dove Δt è la durata dell'impulso nel *SdR* dell'elettrone. Attuando lo sviluppo in serie (1.18), si ottiene (1.19):

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}, \quad (1.18)$$

$$\Delta \tau = \frac{\Delta t}{2\gamma^2} = \frac{m_e c}{eH} \frac{1}{\gamma^2}. \quad (1.19)$$

1.3.3 Distribuzione spettrale

La distribuzione spettrale $P(\nu)$ della radiazione, cioè la potenza emessa per unità di frequenza, si ricava tramite l'analisi di Fourier dell'impulso ricevuto. Lo spettro che si trova è lo stesso del ciclotrone relativistico ma in questo caso vengono considerate un numero infinito di armoniche, ottenendo uno spettro continuo. La maggior

parte della radiazione è emessa (cioè si ha un picco nello spettro) alla frequenza caratteristica, che è l'inverso della durata dell'impulso.

$$\nu_S \simeq \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\Delta\tau} = \frac{3}{4\pi} \gamma^2 \frac{eH}{m_e c} = \frac{3}{4\pi} \frac{eH}{m_e^3 c^5} \varepsilon^2 \quad (1.20)$$

Si ha emissione quasi monocromatica alla frequenza di picco $\nu_{max} = 0.3\nu_S$. La distribuzione spettrale presenta due andamenti:

- Per $\nu \ll \nu_S$ è $\propto \left(\frac{\nu}{\nu_S}\right)^{\frac{1}{3}}$
- Per $\nu \gg \nu_S$ è $\propto e^{-\left(\frac{\nu}{\nu_S}\right)}$

Le formule ricavate utilizzano $\theta = 90^\circ$, per angoli diversi bisogna usare $H_\perp = H \sin \theta$.

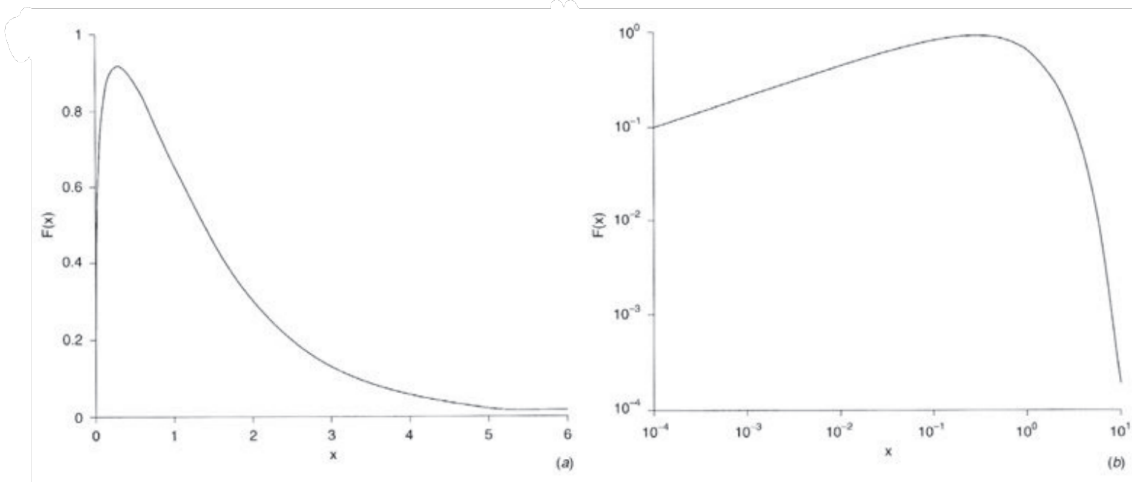


Figura 1.4: Spettro della radiazione di sincrotrone mostrato in scala lineare (sinistra) e scala logaritmica (destra). Con x si indica il rapporto ν/ν_S (Longair [5]).

Capitolo 2

Applicazioni dell'emissione di sincrotrone in astrofisica

In situazioni astrofisiche l'emissione di sincrotrone avviene spesso nella banda radio. Infatti se si inseriscono valori numerici per ν_S , considerando $\gamma \simeq 10^4$ e $H \simeq 10 \mu\text{G}$, si ottiene $\nu_S \simeq 4 \text{ GHz}$ una frequenza tipica della radioastronomia.

Si nota poi che, dipendendo ν_S da γ^2 , con elettroni di energie abbastanza diverse tra loro è possibile coprire tutta la banda radio.

Talvolta però si presentano anche situazioni in cui il campo magnetico è più intenso, ad esempio per le pulsar, e la radiazione può facilmente raggiungere la banda ottica e i raggi X.

2.1 Emissione di una popolazione di elettroni

Si supponga di avere una popolazione di elettroni la cui emissione totale è la somma delle emissioni dei singoli elettroni, ovvero non ci sono processi collettivi e non c'è assorbimento interno. Sia $N(\varepsilon)d\varepsilon$ il numero di elettroni per unità di volume con energia compresa tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$ e che emettono nell'intervallo di frequenze $\nu_{max} + d\nu_{max}$. Le energie di tale popolazione sono descritte da una distribuzione di energia a legge di potenza:

$$N(\varepsilon) = N_0 \varepsilon^{-\delta} d\varepsilon \quad (2.1)$$

in cui N_0 e δ sono delle costanti. La scelta di questa distribuzione è giustificata da osservazioni di radiosorgenti. L'emissività specifica della popolazione, cioè la potenza monocromatica per unità di volume, è:

$$J(\nu) = \int_{\varepsilon_{min}}^{\varepsilon_{max}} P(\nu, \varepsilon) N(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2.2)$$

con ε_{min} e ε_{max} estremi dello spettro di energia della popolazione. Facciamo uso della approssimazione per cui ciascun elettrone di energia ε emette alla frequenza caratteristica ν_S , ovvero $\nu = \nu_S$. ε può essere scritto in funzione di ν :

$$\varepsilon(\nu) = \left(\frac{4\pi m_0^3 c^5}{3e} \right)^{1/2} H_{\perp}^{-1/2} \nu^{1/2} . \quad (2.3)$$

Per l'emissività riscriviamo

$$J(\nu)d\nu = \left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right) N(\varepsilon)d\varepsilon \implies J(\nu) = \left(-\frac{d\varepsilon}{dt}\right) N(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{d\nu}. \quad (2.4)$$

Calcolando $d\varepsilon/d\nu$ e sostituendo si ottiene:

$$J(\nu) \propto N_0 H_\perp^{\frac{\delta+1}{2}} \nu^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{\delta-1}{2}. \quad (2.5)$$

α è detto indice spettrale per la radiazione di sincrotrone.

2.2 Autoassorbimento di sincrotrone

L'ipotesi di una nube di elettroni trasparente alla propria radiazione non regge quando la temperatura di brillanza T_B raggiunge la temperatura cinetica degli elettroni T_e e si ha autoassorbimento. Innanzitutto bisogna definire queste temperature:

- La temperatura di brillanza è la temperatura che dovrebbe avere un corpo nero per avere la brillanza osservata. Nella banda radio la legge di Planck può essere approssimata con la legge di Rayleigh-Jeans:

$$B(\nu) = \frac{2kT_B}{\lambda^2}, \quad (2.6)$$

per cui si ottiene che la temperatura di brillanza è

$$T_B(\nu) = \frac{B(\nu)}{2k} \lambda^2 = \frac{B(\nu)}{2k} \left(\frac{c}{\nu}\right)^2. \quad (2.7)$$

- La temperatura cinetica degli elettroni è una temperatura che associamo agli elettroni ad una data energia tramite la formula per particelle relativistiche

$$\gamma m_e c^2 = \varepsilon = 3kT_e, \quad (2.8)$$

da cui si ottiene che la temperatura cinetica degli elettroni è

$$T_e = \frac{\varepsilon}{3k} = \text{const.} H_\perp^{-1/2} \nu^{1/2}. \quad (2.9)$$

La brillanza di una radiosorgente è data da

$$B_S(\nu) = \frac{J_S(\nu)}{4\pi\mu_S(\nu)} (1 - e^{-\tau_S(\nu)}), \quad (2.10)$$

dove

$$\mu_S(\nu) \propto \nu^{-\frac{\delta+4}{2}} H_\perp^{\frac{\delta+2}{2}} N_0 \quad (2.11)$$

è il coefficiente di assorbimento, ricavato usando i coefficienti di Einstein, per una nube di elettroni ultrarelativistici con spettro di energia dato dalla legge di potenza (2.1). La dipendenza del coefficiente dalla frequenza denota che la sorgente è più

opaca al diminuire della frequenza. $\tau(\nu)$ è lo spessore ottico della sorgente definito come

$$\tau_S(\nu) \equiv \mu_S(\nu)l_0 \quad l_0 \text{ spessore della sorgente.} \quad (2.12)$$

Per regimi otticamente spessi e otticamente sottili, inserendo l'emissività $J_S(\nu)$, si ottengono le espressioni

$$B_S(\nu) \simeq \frac{J_S(\nu)}{4\pi\mu_S(\nu)} \propto \nu^{5/2} H_{\perp}^{-1/2} \quad \tau \gg 1 \quad (2.13)$$

$$B_S(\nu) \simeq \frac{J_S(\nu)}{4\pi} \propto N_0 l_0 \nu^{-\alpha} H_{\perp}^{\frac{\delta+1}{2}} \quad \tau \ll 1 \quad (2.14)$$

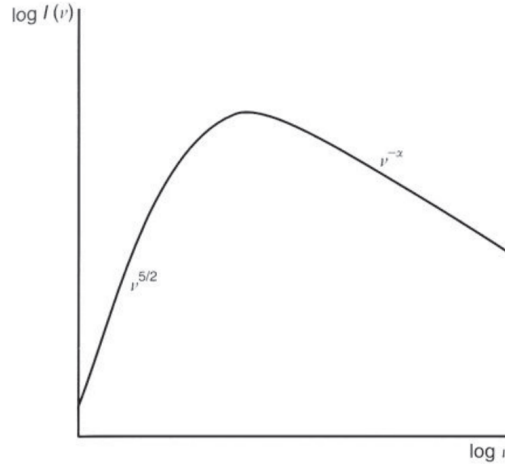


Figura 2.1: Spettro di una sorgente autoassorbita (Longair [5]).

I due regimi hanno un massimo ad un determinato valore di τ , dettato da δ . La frequenza in cui si ha questo picco si ottiene derivando la (2.10) per ν e ponendo la derivata uguale a zero. Si ottiene:

$$\nu_{max} \propto B_{S,max}^{2/5} H_{\perp}^{1/5} \propto S_{max}^{2/5} \theta^{-4/5} H_{\perp}^{1/5} (1+z)^{1/5} \quad (2.15)$$

dove S_{max} è il picco del flusso della sorgente, θ è il diametro angolare, cioè apparente, della sorgente, z tiene conto di eventuali effetti dovuti al redshift. L'osservazione di uno spettro autoassorbito è quasi sempre indice di sorgenti compatte ($\mu_S \propto N_0$). Tuttavia bisogna ricordare che il modello assume che la sorgente sia una sfera omogenea, caso realmente mai verificato. Lo scenario che si verifica più frequentemente è quello di componenti compatte costituite da strutture più piccole che non vengono risolte nelle osservazioni. La somma degli spettri di queste strutture, che raggiungono picchi ciascuno a frequenze diverse, dà ancora uno spettro tipico di sincrotrone ma la parte di autoassorbimento generalmente ha una pendenza più piatta rispetto a quella di 5/2 prevista teoricamente.

2.3 Polarizzazione

La radiazione di sincrotrone mostra una forte polarizzazione lineare, che la distingue da altri processi di emissione in astrofisica.

Un elettrone ultrarelativistico deve essere osservato in modo tale che la linea di vista sia compresa entro l'angolo $1/\gamma$ dal piano dell'orbita. Se si osserva esattamente lungo il piano dell'orbita, la radiazione risulta polarizzata linearmente; per qualsiasi altro angolo compreso nel limite di visibilità la radiazione ha una polarizzazione ellittica. Per una popolazione di elettroni con una certa distribuzione di angoli di pitch, il contributo viene da quegli elettroni la cui velocità formano un angolo $\leq 1/\gamma$ con la linea di vista. Ci saranno in egual parte elettroni con polarizzazione ellittica destrorsa e sinistrorsa, per cui mediamente i contributi circolari si compenseranno e si riceverà radiazione linearmente polarizzata, benché diminuita in intensità.

Siano P_{\parallel} e P_{\perp} la potenza irradiata parallela e perpendicolare alle proiezioni del campo magnetico sul piano del cielo. Per particelle con energie distribuite secondo legge di potenza si ha il grado di polarizzazione lineare:

$$\Pi(\nu) = \frac{P_{\perp} - P_{\parallel}}{P_{\perp} + P_{\parallel}} = \frac{\delta + 1}{\delta + \frac{7}{3}}. \quad (2.16)$$

Dunque per un valore tipico dell'indice $\delta = 2.5$ si aspetta teoricamente un grado di polarizzazione pari al 72%. Generalmente però si osservano sorgenti con polarizzazioni molto inferiori a questo valore; la diminuzione è spesso dovuta alla rotazione di Faraday e alla disomogeneità del campo magnetico.

L'emissione di sincrotrone, in quanto polarizzata, è uno strumento fondamentale per mappare il campo magnetico di una radiosorgente.

2.3.1 Polarizzazione della nebulosa del granchio

La nebulosa del Granchio (M1 o NGC 1952) è il resto di una supernova esplosa nel 1054 d.C. (SN 1054) con all'interno una pulsar (stella a neutroni ad elevata velocità di rotazione).

Gran parte della struttura appare come una nebulosa bluastra nella banda ottica, il cui spettro spazia dalla banda radio fino ai raggi gamma. L'origine di questa emissione costituiva un mistero per il mondo scientifico in quanto non si riusciva a risalire a un processo che fosse coerente con le osservazioni.

Nel 1953 il fisico russo Iosif Sklovskij postulò che la nebulosa emettesse per sincrotrone e propose di verificare se la radiazione fosse polarizzata. Osservazioni nel 1954 confermarono la supposizione.

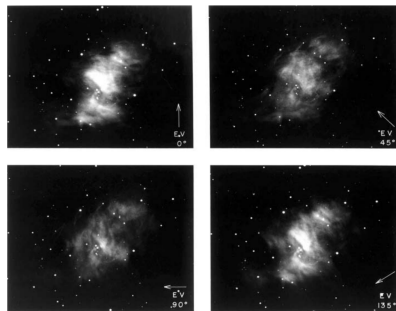


Figura 2.2: Fotografie della nebulosa del Granchio in luce polarizzata. Il polarizzatore è stato posto con quattro diverse orientazioni per cui risultano evidenti le differenze in intensità della luce ricevuta (Bradt [1]).

2.4 Energetica di una radiosorgente

L'energia totale contenuta in una sorgente che emette per sincrotrone è data dalla somma dei contributi energetici delle particelle relativistiche e del campo magnetico.

$$U_{tot} = U_{el} + U_{prot} + U_H = (1 + k) U_{el} + U_H \quad (2.17)$$

Non avendo informazioni riguardo alla radiazione dei protoni, assumiamo che essi abbiano energia proporzionale a quella degli elettroni. Sulla costante di proporzionalità k si possono fare le seguenti ipotesi:

- $k = 0$ per un plasma relativistico di soli elettroni;
- $k = 1$ per un plasma relativistico pesante, composto sia da elettroni che da protoni;
- $k > 1$ per un plasma relativistico anziano, dove gli elettroni si sono già raffreddati in quanto emettono più radiazione, e sono dunque i protoni ad essere più energetici.

Se si considerano gli elettroni, l'energia ad essi associata è:

$$U_{el} = V \int_{\varepsilon_{min}}^{\varepsilon_{max}} \varepsilon N(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{VN_0}{2-\delta} (\varepsilon_{min}^{2-\delta} - \varepsilon_{max}^{2-\delta}) \quad \delta \neq 2 \quad (2.18)$$

V è il volume della sorgente. Scriviamo la luminosità della sorgente, di cui supponiamo di conoscere la distanza, tramite il flusso $S(\nu)$, utilizzando come estremi ν_{min} e ν_{max} corrispondenti alle energie ε_{min} e ε_{max} .

$$\begin{aligned} L &= 4\pi d^2 \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} S(\nu) d\nu = V \int_{\varepsilon_{min}}^{\varepsilon_{max}} N(\varepsilon) \left(-\frac{d\varepsilon}{dt} \right) d\varepsilon = \\ &= \frac{bVN_0H_{\perp}^2}{3-\delta} (\varepsilon_{max}^{3-\delta} - \varepsilon_{min}^{3-\delta}) \quad \delta \neq 3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

b raggruppa le costanti.

Esplicitando per N_0V e sostituendo nella (2.18) si ottiene

$$U_{el} = \frac{3-\delta}{2-\delta} \frac{\varepsilon_{max}^{2-\delta} - \varepsilon_{min}^{2-\delta}}{\varepsilon_{max}^{3-\delta} - \varepsilon_{min}^{3-\delta}} \frac{L}{b} \frac{1}{H_{\perp}^2}. \quad (2.20)$$

Dal momento che ε_{max} e ε_{min} non sono note, ci mettiamo nell'assunzione per cui esse corrispondono alle frequenze limite per osservazioni nella banda radio, ovvero $\nu_1 = 10$ MHz e $\nu_2 = 100$ GHz. In questo modo si ottiene il valore minimo possibile per l'energetica della sorgente. Di conseguenza la (2.20) diventa

$$U_{el} = C_{el} H^{-3/2} L. \quad (2.21)$$

Tutte le quantità costanti, compreso un termine che tiene conto della distribuzione degli angoli di pitch, sono state raggruppate nel termine C_{el} .

Essendo l'energia magnetica

$$U_H = \int \frac{H^2}{8\pi} dV = C_m H^2 V \quad (2.22)$$

L'energetica della radiosorgente è dunque:

$$U_{tot} = (1 + k) C_{el} H^{-3/2} L + C_m H^2 V . \quad (2.23)$$

Per determinare il contenuto energetico bisogna conoscere il campo magnetico, che è tuttavia noto raramente e solo in casi particolari. Ma, poiché U_{tot} ha un minimo in funzione di H , si può fare una stima dell'energia minima associata alla radiazione di sincrotrone ponendo $dU_{tot}/dH = 0$. Da questo calcolo si ha:

$$(1 + k) U_{el} = \frac{4}{3} U_H . \quad (2.24)$$

Questa condizione è detta di equipartizione, dal momento che l'energia è divisa in maniera quasi equivalente fra la componente di particelle e quella di campo magnetico. Il campo magnetico associato all'energia minima è chiamato campo magnetico di equipartizione H_{eq} :

$$H_{eq} = \left[\frac{3}{4} (1 + k) \frac{C_{el}}{C_H} \right]^{2/7} \left(\frac{L}{V} \right)^{2/7} . \quad (2.25)$$

La stima dell'energia minima associata alla radiosorgente è dunque:

$$U_{tot,min} = 2[(1 + k)C_{el}]^{4/7} C_H^{3/7} L^{4/7} V^{3/7} . \quad (2.26)$$

2.5 Tempo evolutivo

La distribuzione di energia di una popolazione di elettroni che emette per sincrotrone in un determinato volume cambia nel tempo, dal momento che l'emissione di radiazione avviene a spese dell'energia cinetica degli stessi elettroni. Il contenuto energetico può inoltre essere modificato a causa della fuga di particelle dal volume occupato dalla radiosorgente o per l'immissione di nuove particelle. Oltretutto le perdite energetiche potrebbero essere compensate da processi di riaccelerazione degli elettroni.

Si ha l'equazione di continuità

$$\frac{\partial N(\varepsilon, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} N(\varepsilon, t) \right) + \frac{N(\varepsilon, t)}{T_{conf}} = Q(\varepsilon, t) . \quad (2.27)$$

Il primo termine rappresenta il flusso di particelle attraverso il volume; il secondo termine rappresenta le perdite energetiche dovute all'emissione di radiazione; il terzo termine è detto *leakage*, la perdita di particelle per dispersione, in cui T_{conf} è il tempo di confinamento; il membro di destra rappresenta il tasso con cui vengono immesse nuove particelle.

2.5.1 Caso di un'unica iniezione di particelle

Gli elettroni sono immessi nella sorgente in un unico evento al tempo $t=0$ e non ci sono perdite per dispersione, per cui si ha:

$$N(\varepsilon, 0) = N_0\varepsilon^{-\delta}; \quad Q(\varepsilon, t) = 0; \quad T_{conf} = \infty; \quad (2.28)$$

e quindi

$$\frac{\partial N(\varepsilon, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} N(\varepsilon, t) \right) = 0. \quad (2.29)$$

Utilizzando la (1.14) e integrando si ottiene:

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0 C H^2 \sin^2(\theta) t}. \quad (2.30)$$

L'energia delle particelle ad un tempo t è direttamente proporzionale all'energia totale ε_0 .

Il tempo di raffreddamento è dato dal rapporto fra l'energia iniziale e le perdite radiative

$$t^* = \frac{\varepsilon_0}{d\varepsilon/dt} = \frac{1}{C\varepsilon_0 H^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.31)$$

Combinando le due equazioni (2.30) e (2.31) si ha

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_0}{1 + t/t^*}. \quad (2.32)$$

Più energetica è una particella, più rapidamente perde la sua energia. Si può però anche considerare il ragionamento inverso, ovvero che particelle con energia inferiore a una certa energia di soglia, che chiameremo energia di *cut-off*, hanno mantenuto invariata, o quasi, la loro energia iniziale dopo un certo tempo t dall'istante iniziale. L'energia di *cut-off* è:

$$\varepsilon^* = \frac{1}{C H^2 \sin^2(\theta) t}. \quad (2.33)$$

Per energie ε al di sotto di ε^* lo spettro di energia mantiene la sua forma iniziale, per energie ε superiori viene invece modificato in quanto le particelle migrano ad energie inferiori. Inoltre ε^* si sposta col tempo ad energie sempre più basse. La soluzione all'equazione di continuità (2.29) è:

$$N(\varepsilon, t) = \begin{cases} 0 & \varepsilon > \varepsilon^* \\ \frac{N_0 \varepsilon^{-\delta}}{(1 - \varepsilon/\varepsilon^*)^{2-\delta}} & \varepsilon \leq \varepsilon^* \end{cases} \quad (2.34)$$

All'energia di *cut-off* si può associare una frequenza di *cut-off*. Come per lo spettro di energia, per frequenze superiori a ν^* lo spettro di frequenza si riduce a zero; tuttavia la diminuzione non è così rapida come nel caso dell'energia in quanto la potenza irradiata non è monocromatica ma ha una coda esponenziale alle alte frequenze.

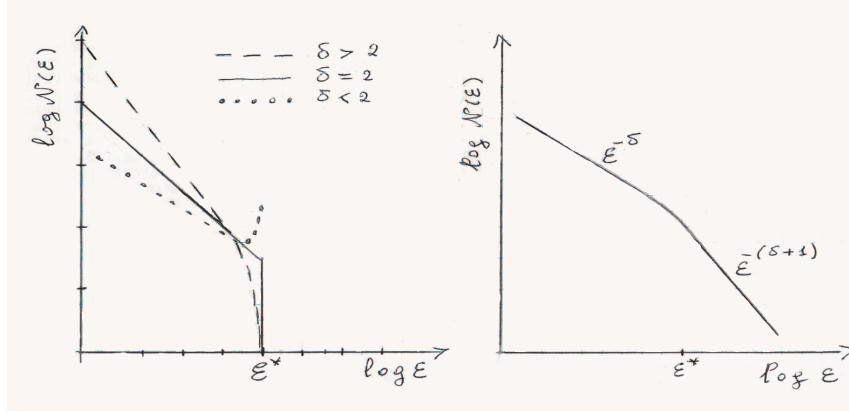


Figura 2.3: Spettro modificato a causa di perdite radiative, senza iniezione di particelle (sinistra) e con iniezione di particelle (destra) (Fanti & Fanti [3]).

2.5.2 Caso di iniezione continua di particelle

La produzione di particelle non avviene in un unico momento, bensì è continuata nel tempo. Il termine che rappresenta l'immissione di particelle è:

$$Q(\epsilon, t) = A\epsilon^{-\delta} \implies \frac{\partial N(\epsilon, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} N(\epsilon, t) \right) = A\epsilon^{-\delta}. \quad (2.35)$$

Si suppone che il tempo di confinamento rimanga infinito. A basse energie lo spettro mantiene la legge di potenza già conosciuta, per $\epsilon \leq \epsilon^*$ inizia a irripidirsi e per $\epsilon > \epsilon^*$ si ha

$$N(\epsilon, t) \propto \epsilon^{-\delta-1} \quad (2.36)$$

che corrisponde a un cambio di pendenza, ma non comporta un crollo come nel caso della singola iniezione di particelle a $t=0$. In termini di frequenza si ha

$$J_S(\nu) \propto \nu^{-\frac{(\delta-1)}{2}} = \nu^{-\alpha} \quad \epsilon \ll \epsilon^* \quad (2.37)$$

$$J_S(\nu) \propto \nu^{-\delta/2} = \nu^{-(\alpha+1/2)} \quad \epsilon \geq \epsilon^* \quad (2.38)$$

L'indice spettrale aumenta di 0.5 .

Tempo di vita degli elettroni nella Nebulosa del Granchio

	Photon frequency ^a ν_{syn} (Hz)	Electron energy ^b U (eV)	Electron lifetime ^c τ (yr)
Radio (0.5 GHz)	5×10^8	3.05×10^8	109,000
Optical (600 nm)	5×10^{14}	3.05×10^{11}	109
X ray (4.1 keV)	1.0×10^{18}	1.37×10^{13}	2.4
Gamma ray (41 MeV)	1.0×10^{22}	1.37×10^{15}	0.024 (9 d)

Figura 2.4: Tabella che riporta valori di frequenza, energia e tempo di vita degli elettroni calcolati per la Nebulosa del Granchio. ν_{syn} è la frequenza caratteristica; τ è il tempo di raffreddamento (Bradt [1])

I tempi di vita incredibilmente corti per gli elettroni che emettono radiazione nell'ottico e nei raggi X nella Nebulosa del Granchio danno una chiara indicazione del fatto che ci sia una continua iniezione di elettroni ultrarelativistici. Se così non fosse, non dovremmo più ricevere una tale radiazione in quanto gli elettroni avrebbero già ceduto l'energia fornita dall'esplosione di supernova avvenuta più di novecento anni prima.

La pulsar presente all'interno della nebulosa ruota a circa 30 Hz alimentando l'energia degli elettroni.

Il campo magnetico considerato è di circa $500 \mu\text{G}$ ed è stato ricavato considerando l'energia di equipartizione.

2.6 *Synchrotron self-Compton*

Sappiamo che una popolazione di elettroni in una regione provvista di campo magnetico produce fotoni a basse energie. In sorgenti compatte gli elettroni sono anche responsabili dell'effetto detto *synchrotron self-Compton* che incrementa l'energia di questi fotoni per effetto Compton inverso. Quest'ultimo è un processo di scattering della radiazione che coinvolge elettroni ultrarelativistici con energia cinetica $K = (\gamma - 1)m_e c^2$ e fotoni di energia $h\nu \ll K$.

Le perdite energetiche sono pari a

$$P_{IC} = \left(-\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{IC} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_{ph}. \quad (2.39)$$

σ_T è la sezione d'urto Thomson ($\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{cm}^2$), U_{ph} è la densità di energia dei fotoni prima dello scattering.

Riscriviamo le perdite di energia per sincrotrone:

$$P_{syn} = \left(-\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{syn} = \frac{4}{3} c \sigma_T \gamma^2 \beta^2 U_H. \quad (2.40)$$

In sorgenti compatte il tempo di raffreddamento degli elettroni deve tenere conto anche delle perdite per Compton inverso, e risulta dunque accorciato rispetto a quello ricavato nella sezione 2.5. La (2.39) e (2.40) possono essere facilmente confrontate.

$$\frac{P_{IC}}{P_{syn}} = \frac{U_{ph}}{U_H} \quad (2.41)$$

Quando la densità di energia dei fotoni è paragonabile a quella del campo magnetico, può essere fatta una stima di U_{ph} a partire dalla luminosità di sincrotrone L_{syn} . Riprendendo la (2.41) riscriviamo

$$\frac{L_{IC}}{L_{syn}} \simeq \frac{S_{max} \nu_{max}}{\theta^2 c H^2}. \quad (2.42)$$

Riscrivendo S_{max} in termini di temperatura di brillantezza. Si ha la stima:

$$\frac{L_{IC}}{L_{syn}} \simeq \left(\frac{T_{B,max}}{10^{12} \text{K}} \right)^5 \left(\frac{\nu_{max}}{\text{GHz}} \right). \quad (2.43)$$

Se la temperatura di brillanza di una radiosorgente fosse maggiore di $10^{12}K$ si avrebbe il fenomeno detto catastrofe Compton. Le perdite energetiche sarebbero dovute quasi interamente al processo di Compton inverso, risultando in un raffreddamento rapidissimo degli elettroni. Per questa ragione nessuna sorgente può avere temperature superiori ai $10^{12}K$. Si osservano però radiosorgenti compatte che superano questo limite, tuttavia non vengono rilevate emissioni di raggi X e γ , indicatori della cosiddetta catastrofe. La ragione è probabilmente da cercarsi nel beaming relativistico che causa una sovrastima della temperatura della sorgente.

2.6.1 Spettro della Nebulosa del Granchio

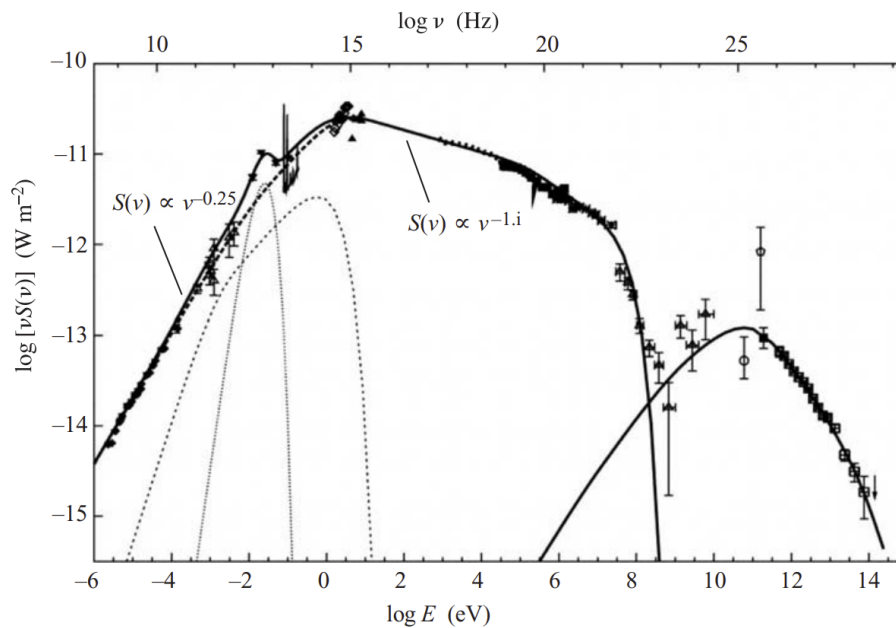


Figura 2.5: Spettro della Nebulosa del Granchio modellato secondo i dati raccolti da HEGRA (High Energy Gamma Ray) tra l'anno 1997 e l'anno 2002 (Bradt [1]).

Gli elettroni della banda radio emessi per sincrotrone a frequenze circa 1 GHz vengono mandati a frequenze di circa 10^{27} Hz corrispondenti ad energie di 10 TeV, nei raggi γ . Il modello utilizzato per fare il fit dei dati, la linea nera solida nella figura 2.5, tiene conto di un campo magnetico di circa $160 \mu\text{G}$.

Per quanto riguarda lo spettro di sincrotrone, i dati a basse energie sono coerenti con un modello che tiene conto del fenomeno di *synchrotron self-Compton* e della presenza di polveri. Il fit dei dati nella regione autoassorbita ha pendenza $S(\nu) \propto \nu^{0.3}$, nella regione di emissione di sincrotrone ha pendenza $S(\nu) \propto \nu^{-1.1}$ fino al *cut-off* a ~ 100 MeV.

Bibliografia

- [1] Bradt H., 2008, *Astrophysics Processes*. Cambridge University Press
- [2] Dallacasa D., 2022, *Processi di radiazione e MHD*. Appunti e slide del corso
- [3] Fanti C., Fanti R., 2012, *Una finestra sull'Universo "Invisibile"*, <https://www.ira.inaf.it/Library/e-books/Fanti&Fanti-Papers.pdf>.
- [4] Ghisellini G., 2013, *Radiative Processes in High Energy Astrophysics*. Springer International Publishing
- [5] Longair M., 2011, *High Energy Astrophysics*. Cambridge University Press
- [6] Rybicki G. B., Lightman A. P., 1979, *Radiative Processes in Astrophysics*. John Wiley and Sons, Inc.
- [7] Shu F. H., 1991, *The Physics of Astrophysics. Volume I: Radiation*. University Science Books