

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Astronomia

**Emissione di Compton Inverso  
e applicazioni astrofisiche**

Tesi di Laurea

Presentata da:  
Giulio Di Santo

Relatrice:  
Chiar.mo Prof.  
Marcella Brusa

---

Anno accademico 2022-2023

## Sommario

In questo trattato verrà approfondito un particolare processo di diffusione, chiamato *Compton Inverso*.

Si parla di diffusione, o di scattering, quando due o più particelle, inclusi i fotoni, interagiscono tra loro, guadagnando o perdendo energia, e venendo poi deflesse in altre direzioni. Analizziamo brevemente alcuni di questi fenomeni. In primo luogo, si parla di diffusione *Thompson* quando un fotone poco energetico colpisce un elettrone fermo, il quale acquisterà dell'energia, iniziando ad oscillare. Dopo un certo tempo libera tale energia, rilasciando un fotone. La diffusione *Compton* si ha quando un fotone energetico interagisce con la materia, che acquisterà energia cinetica. Il fotone verrà diffuso poi a frequenze minori. È bene evidenziare la forte dipendenza dall'angolo di scattering. Il *Compton Inverso*, che verrà esaminato in modo approfondito in questo trattato, è, come suggerito dal nome, il contrario del processo Compton: sarà l'elettrone, dunque, a interagire con il fotone, che si diffonderà ad energie più elevate.

Verranno poi trattate alcune applicazioni astrofisiche del Compton Inverso, come il *Synchrotron Self-Compton*, in cui gli stessi fotoni creati dal Sincrotrone vengono diffusi alle alte energie, e la cosiddetta *Comptonizzazione*, in cui lo spettro di emissione di una sorgente viene alterato dai molti scattering Compton e Compton Inverso. Infine sarà analizzato l'effetto *Sunyaev-Zeldovich*, in cui i fotoni della Radiazione Cosmica di Fondo vengono diffusi a frequenze più alte quando attraversano regioni estese di plasma caldo.

Osservando quindi il cielo alle alte energie, si troveranno numerosi fenomeni astrofisici che interesseranno il processo di diffusione di *Compton Inverso*, a differenza di altri processi di emissione, come l'emissione di Sincrotrone, la quale ha il picco di emissione nelle onde Radio o IR.

## Indice

<b>1</b>	<b>Emissione di Compton Inverso</b>	<b>1</b>
1.1	Singola interazione . . . . .	1
1.2	Spettro d'emissione e potenza emessa . . . . .	3
1.3	Compton Inverso e Sincrotrone . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Applicazioni astrofisiche del Compton Inverso</b>	<b>6</b>
2.1	Synchrotron Self-Compton e catastrofe Compton . .	6
2.2	Comptonizzazione . . . . .	8
2.3	Effetto Sunyaev - Zeldovich . . . . .	11
	<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>15</b>

# 1 Emissione di Compton Inverso

## 1.1 Singola interazione

Quando un elettrone relativistico possiede un'elevata energia cinetica rispetto a quella di un fotone, ed essi interagiscono, si ha un trasferimento di energia dall'elettrone al fotone: questo effetto prende il nome di *Compton Inverso*, spesso abbreviato in IC. Visto che si è in regime relativistico, bisognerebbe trattare tale interazione tra elettrone e fotone attraverso l'uso della sezione d'urto di *Klein-Nishina*  $\sigma_{kn}$ . Tale accorgimento tiene in considerazione il fatto che in regime relativistico lo scattering risulta poco efficiente. Tuttavia, se ci si pone nel sistema di riferimento dell'elettrone, esso sarà in quiete, e quindi sarà possibile utilizzare la sezione d'urto *Thompson*  $\sigma_T$ , semplificando così anche i calcoli di tale trattazione. Si consideri quindi due sistemi di riferimento:  $S'$ , in cui l'elettrone è a riposo, e  $S$ , quello dell'osservatore (o laboratorio).

- In  $S$  si ha:
  - $\epsilon = h\nu$ : energia del fotone incidente;
  - $\epsilon_1 = h\nu_1$ : energia del fotone dopo lo scattering.
- In  $S'$  si ha:
  - $\epsilon' = h\nu'$ : energia del fotone incidente;
  - $\epsilon'_1 = h\nu'_1$ : energia del fotone dopo lo scattering.

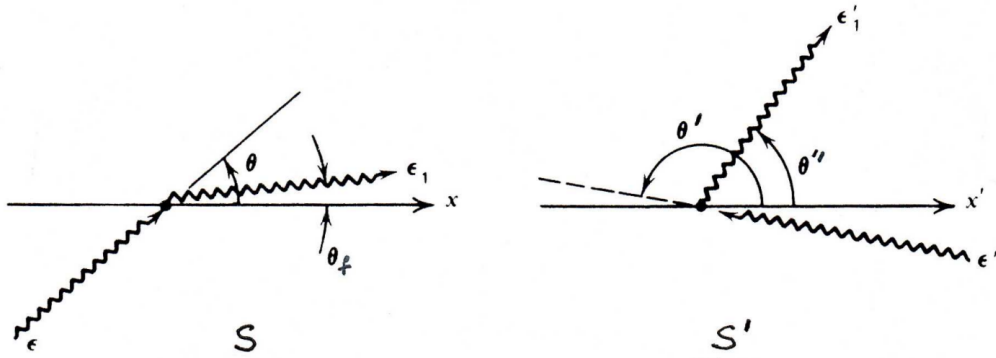


Figura 1: Geometria dell'effetto Compton Inverso nei due sistemi di riferimento considerati. Con  $\epsilon$  e  $\epsilon'$  sono indicati i fotoni incidenti, e con  $\epsilon_1$  e  $\epsilon'_1$  i fotoni diffusi. In  $S$ , il fotone incide con un angolo  $\theta$  e viene diffuso con un angolo  $\theta_f$ . In  $S'$ , il fotone incide con un angolo  $\theta'$  e viene diffuso con un angolo  $\theta''$  (G. B. Rybicki - A. P. Lightman, *Radiative processes in astrophysics*, pag. 198).

Si osservi il sistema di riferimento  $S'$ . In tale configurazione, è possibile trattare l'interazione tra elettrone e fotone come una normale interazione Compton, visto che l'elettrone risulta fermo. Effettuando uno studio su tale processo, omesso in questo trattato, si ricava la seguente formula:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \phi) \quad (1.1.1)$$

dove  $\phi$  è l'angolo di diffusione del fotone rispetto alla direzione incidente. Tale importantissima formula può essere riscritta nella seguente forma:

$$h\nu_f = \frac{h\nu_i}{1 + \frac{h\nu_i}{m_e c^2}(1 - \cos \phi)} \quad (1.1.2)$$

Nel limite in cui  $h\nu_i \ll m_e c^2$ , che viene soddisfatto in  $S'$ , la formula (1.1.2) si semplifica in:

$$\nu'_f \approx \nu'_i \left(1 - \frac{h\nu_i}{m_e c^2}(1 - \cos \phi)\right) \quad (1.1.3)$$

Attraverso l'uso di proprietà geometriche, si ricava:

$$\cos \phi = \cos \theta' \cos \theta'' + \sin \theta' \sin \theta'' \cos(\phi' - \phi'') \quad (1.1.4)$$

ove  $\phi'$  e  $\phi''$  sono gli angoli azimutali del fotone. La frequenza  $\nu'$  del fotone incidente, misurata in  $S'$ , è legata alla frequenza  $\nu$  misurata dall'osservatore dalla formula dell'effetto Doppler relativistico:

$$\nu' = \nu \gamma (1 - \beta \cos \theta) \quad (1.1.5)$$

dove  $\gamma$  è il fattore di Lorenz:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.1.6)$$

Per l'ipotesi fatta, in  $S'$  si ha diffusione Thomson, per cui il fotone viene re-irradiato alla stessa frequenza  $\nu'$ . Nel sistema dell'osservatore, a causa nuovamente dell'effetto Doppler, la frequenza del fotone diviene:

$$\nu'' = \nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta'') \quad (1.1.7)$$

Inserendo la (1.1.5) nella (1.1.7) si ottiene:

$$\nu'' = \nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta) = \nu \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)(1 + \beta \cos \theta'') \quad (1.1.8)$$

Si nota come per  $\theta = \pi$  e  $\theta'' = 0$  si ha, nel sistema di riferimento dell'elettrone, un urto frontale, nella quale il fotone viene blue-shiftato e guadagna la massima energia pari a  $\epsilon_{max} = 4\gamma^2\epsilon$ . Invece, se  $\theta = 0$  e  $\theta'' = \pi$  si ha un urto posteriore, in cui il fotone viene red-shiftato e guadagna la minima energia. In generale, per orientazioni isotrope dei fotoni e degli elettroni, gli angoli  $\theta$  e  $\theta''$  sono uguali a  $\frac{\pi}{2}$ . Di conseguenza, i termini tra parentesi sono dell'ordine dell'unità, per cui i fotoni diffusi da elettroni relativistici hanno una frequenza, e quindi una energia, che è  $\sim \gamma^2$  volte maggiore rispetto a quella posseduta dai fotoni incidenti. È possibile evincere come il processo di Compton Inverso sia molto efficiente per trasferire energia da un elettrone relativistico a un fotone poco energetico. Il fotone guadagna, quindi, un fattore  $\gamma$  nel passaggio dal sistema di riferimento  $S$  a  $S'$ , e successivamente guadagna uno stesso fattore  $\gamma$  tornando da  $S'$  a  $S$ . Si hanno perciò tre differenti stati del fotone. Si noti, però, che nello stato intermedio, quando il fotone si trova in  $S'$ , l'energia in suo possesso non deve essere troppo alta. Se la condizione  $\epsilon' = h\nu' \ll m_e c^2$  non è più soddisfatta, la sezione d'urto si riduce e l'efficienza dell'intero processo diminuisce. In tal caso, il processo torna ad essere Compton con l'utilizzo, tuttavia, della sezione d'urto di *Klein-Nishina*  $\sigma_{kn}$ .

## 1.2 Spettro d'emissione e potenza emessa

Analizziamo tale discussione con un'altra trattazione. Consideriamo ora una distribuzione isotropa di fotoni ed elettroni che interagiscono tra loro attraverso IC. Sia  $\varepsilon_{ph}$  l'energia media posseduta dai fotoni in un volume di spazio  $V$ . Sia  $n_{ph}$  la densità di quest'ultimi nel sistema di riferimento dell'osservatore,  $S$ . Dunque, la densità di energia di radiazione sarà pari a:

$$u_{ph} = n_{ph}\varepsilon_{ph} \quad (1.2.1)$$

Si noti che è possibile esprimere il flusso di energia attraverso una superficie unitaria come  $cu_{ph}$ . Nel sistema di riferimento  $S'$ , la densità di energia del campo di radiazione aumenta di un fattore  $[\gamma(1 - \beta \cos \theta)]^2$ , con  $\beta = v/c$ , rispetto a quella misurata nel sistema di riferimento dell'osservatore,  $S$ . Il primo fattore  $\gamma(1 - \beta \cos \theta)$  deriva dall'effetto Doppler, che incrementa così l'energia dei fotoni, ed il secondo è dovuto alla contrazione relativistica delle lunghezze, per cui il volume  $V$  risulta contratto nella direzione del moto, ed in  $S'$  si ha quindi un aumento del numero di fotoni per unità di volume. Attraverso la media su tutti gli angoli, si ottiene  $\langle \cos \theta \rangle = 0$  e  $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/3$ . Perciò si ha:

$$u'_{ph} = u_{ph}\gamma^2(1 - \beta \cos \theta)^2 = u_{ph}\gamma^2(1 + \frac{1}{3}\beta^2) \quad (1.2.2)$$

Per ipotesi, nel sistema di riferimento  $S'$ , è possibile utilizzare la diffusione Thompson, e, ricordando che l'intensità di radiazione di un'onda elettromagnetica si può descrivere come valor medio del vettore di Poynting  $\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} \langle E_{rad}^2 \rangle$ , si può esprimere:

$$\frac{\langle E_{rad}^2 \rangle}{8\pi} = u'_{ph} = n_{ph}\varepsilon_{ph}\gamma^2(1 + \frac{1}{3}\beta^2) \quad (1.2.3)$$

Si calcoli ora la potenza totale emessa nella regione di scattering, ricordando che è un'invariante relativistico, ossia è indipendente dal sistema di riferimento considerato. Si ottiene:

$$\frac{d\varepsilon_{out}}{dt} = c\sigma_T\gamma^2 u_{ph}(1 + \frac{1}{3}\beta^2) \quad (1.2.4)$$

Il tasso di diminuzione dell'energia totale iniziale dei fotoni si può scrivere come:

$$\frac{d\varepsilon_{in}}{dt} = c\sigma_T u_{ph} \quad (1.2.5)$$

Considerando ora i due contributi, si ottiene il valore dell'energia persa dagli elettroni per unità di tempo, che viene convertita in radiazione:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{I.C.} = \frac{d\varepsilon_{out}}{dt} - \frac{d\varepsilon_{in}}{dt} = \left[\gamma^2\left(1 + \frac{1}{3}\beta^2\right) - 1\right]c\sigma_T\beta^2 u_{ph} \quad (1.2.6)$$

Ricordando che  $\gamma^2 - 1 = \gamma^2\beta^2$ , si ottiene il seguente risultato:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{I.C.} = \frac{4}{3}c\sigma_T\beta^2\gamma^2 u_{ph} \quad (1.2.7)$$

Dall'equazione (1.2.7) si osserva che la perdita di energia da parte degli elettroni per Compton Inverso è proporzionale a  $\gamma^2$  moltiplicato per la densità di energia di radiazione iniziale  $u_{ph}$ . Ricordando che  $u_{ph} = n_{ph}\varepsilon_{ph}$ , è quindi possibile riscrivere l'equazione

(1.2.7) in termini di energia, utilizzando il fatto che  $c\sigma_T u_{ph}$  è l'energia per unità di tempo assorbita e riemessa dall'elettrone. Considerando  $\beta \sim 1$ , si ottiene quindi che:

$$\bar{\varepsilon}_1 \approx \frac{4}{3}\gamma^2\varepsilon \quad (1.2.8)$$

con  $\bar{\varepsilon}_1$  l'energia media acquisita dai fotoni diffusi. È possibile riscrivere suddetta equazione in termini di frequenze:

$$\nu_1 \approx \frac{4}{3}\gamma^2\nu \quad (1.2.9)$$

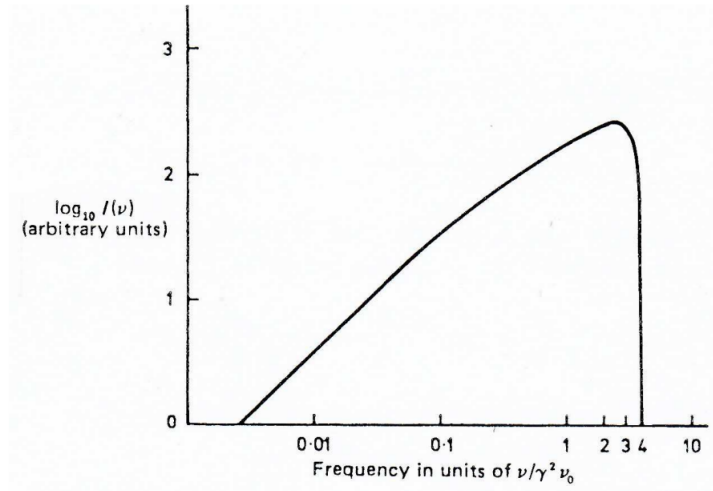


Figura 2: Distribuzione di energia dei fotoni con frequenza iniziale  $\nu_0$  diffusi da elettroni con un dato fattore di Lorenz  $\gamma$ . La radiazione incidente si è assunta isotropa e monocromatica. Si osservi come alle basse energie  $I(\nu)$  sia direttamente proporzionale a  $\nu$ , ed alle alte frequenze sia presente un cut-off in corrispondenza della massima energia guadagnata dal fotone pari a  $4\gamma^2 h\nu_0$  (M. S. Longair, *High Energy Astrophysics, Third Edition*, pag. 242).

Sono presenti numerosi casi di interesse astrofisico. Le più importanti sono le interazioni tra elettroni ultrarelativistici, con un fattore di Lorenz  $\gamma > 10^3$ , e fotoni:

- stellari:  $T \sim 10^4 K$

$$\varepsilon_{ph} \approx k_B T \approx 1eV \quad (1.2.10)$$

$$\rightarrow \varepsilon_{I.C.} \approx \gamma^2 \varepsilon_{ph} > 10^6 eV \quad (1.2.11)$$

ossia l'energia tipica posseduta dai raggi  $\gamma$ ;

- della CMB:  $T \sim 3K$

$$\varepsilon_{ph} \approx k_B T \approx 10^{-3} eV \quad (1.2.12)$$

$$\rightarrow \varepsilon_{I.C.} \approx \gamma^2 \varepsilon_{ph} > 10^3 eV \quad (1.2.13)$$

ossia l'energia tipica posseduta dai raggi X.

Dato che l'energia a riposo dell'elettrone è  $\sim 0.5 MeV$ , l'ipotesi  $\gamma\varepsilon_{ph} \ll m_e c^2$ , nel sistema di riferimento dell'elettrone, è verificata in entrambi i casi. È quindi corretto utilizzare la diffusione *Thompson*. Come accennato nel paragrafo precedente, se tale ipotesi risultasse sbagliata, ossia  $\gamma\varepsilon_{ph} > m_e c^2$ , diventerebbe necessario l'utilizzo della sezione d'urto di *Klein-Nishina*  $\sigma_{kn}$ .

### 1.3 Compton Inverso e Sincrotrone

Analizzando l'emissione di Sincrotrone, non trattata in questo elaborato, è possibile trovare delle analogie con l'emissione di Compton Inverso. Considerando le espressioni per la potenza emessa, esse sono molto simili:

$$-\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{I.C.} = \frac{4}{3}c\sigma_T\beta^2\gamma^2u_{ph} \quad (1.3.1)$$

$$-\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{Synch} = \frac{4}{3}c\sigma_T\beta^2\gamma^2u_{mag} \quad (1.3.2)$$

dove  $u_{mag} = H^2/8\pi$  è la densità di energia del campo magnetico. In una sorgente dove coesistono entrambi i processi, gli elettroni perderanno energia sia per Sincrotrone che per Compton Inverso, e le perdite energetiche, dunque, si sommeranno. È però evidente come, per una sorgente compatta, il processo di Compton Inverso risulti essere il più efficiente, cioè il responsabile principale delle perdite energetiche degli elettroni relativistici. Considerando il rapporto tra le emissioni di Sincrotrone e di Compton Inverso, si ha:

$$\frac{\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{Synch}}{\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{I.C.}} = \frac{u_{mag}}{u_{ph}} \quad (1.3.3)$$

Questo risultato ci permette di capire che gli stessi elettroni relativistici che emettono per Sincrotrone possono fare diffusione Compton, in particolare Compton Inverso se la sorgente è compatta. Tale fenomeno sarà trattato nel capitolo successivo. Questa espressione, inoltre, ci fornisce informazioni sul campo magnetico: misurando la luminosità nella banda Radio, dove sono presenti in maggior quantità emissioni per Sincrotrone, la luminosità nella banda X, dove troviamo emissione di Compton Inverso, ed infine  $u_{ph}$  nella regione di spettro in cui i fotoni aumentano la propria energia, passando dalla banda Radio a quella X, è possibile calcolare  $u_{mag}$ , e quindi il valore del campo magnetico. Tali fenomeni sono stati osservati negli hot spots e nelle strutture estese delle radiosorgenti doppie. In suddetto caso, si è scoperto che la sorgente dominante per la produzione di fotoni poco energetici è la Radiazione Cosmica di Fondo, la quale pervade tutto l'Universo, facendo risultare irrilevanti, in numero, i fotoni prodotti per Sincrotrone da strutture estese. Calcoliamo ora la somma delle perdite energetiche di Sincrotrone e di Compton Inverso, visto che gli stessi elettroni relativistici possono emettere per entrambi i fenomeni. Si ha:

$$-\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{I.C.+Synch} = \frac{4}{3}c\sigma_T\beta^2\gamma^2(u_{ph} + u_{mag}) \quad (1.3.4)$$

Poichè  $u_{mag} = H^2/8\pi$  ed  $\varepsilon = mc^2\gamma$ :

$$-\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{I.C.+Synch} = \frac{4}{3}\frac{\sigma_T\beta^2\varepsilon^2}{m^2c^3}\left(u_{ph} + \frac{H^2}{8\pi}\right) = C_s\varepsilon^2(8\pi u_{ph} + H^2) \quad (1.3.5)$$

dove si è introdotto  $C_s = \frac{4}{3}8\pi\frac{\sigma_T\beta^2\varepsilon^2}{m^2c^3}$ . Calcoliamo ora il tempo di raffreddamento della sorgente. Esso sarà dato dalla seguente espressione:

$$t^* = \frac{\varepsilon}{d\varepsilon/dt} \quad (1.3.6)$$



Visto che sono presenti entrambi i fenomeni di Compton Inverso e di Sincrotrone, dobbiamo calcolare il tempo di raffreddamento considerando i contributi di entrambi i processi. Si ha quindi:

$$t_{I.C.+Synch}^* = \frac{1}{C_s \varepsilon (8\pi u_{ph} + H^2)} \approx \frac{645}{\varepsilon (8\pi u_{ph} + H^2)} \quad (1.3.7)$$

Utilizzando ora unità di misure più convenevoli si ottiene:

$$t_{I.C.+Synch}^* \approx \frac{7.5 \cdot 10^9}{(8\pi u_{ph} + H^2) [eV cm^{-3}]} \cdot \frac{1}{\varepsilon [GeV]} yr \quad (1.3.8)$$

Consideriamo i fotoni della CMB. La Radiazione Cosmica di Fondo possiede una temperatura  $T \sim 3K$ , e corrisponde ad avere una  $u_{ph} \sim 0.25 eV cm^{-3}$ . Dunque la sola esistenza della Radiazione Cosmica di Fondo comporta, per gli elettroni relativistici, una vita finita, che per  $H = 0$  è pari a:

$$t_{I.C.+Synch}^* \approx \frac{1.2 \cdot 10^9}{\varepsilon [GeV]} yr \quad (1.3.9)$$

Da suddetto risultato si evince come le radiosorgenti che osserviamo sono più giovani dell'età dell'Universo. Per esempio:

$$\gamma = 10^4 \implies \varepsilon \sim 5 GeV \implies t_{I.C.+Synch}^* = 2 \cdot 10^8 yr \quad (1.3.10)$$

È bene evidenziare come sia presente anche una dipendenza dal redshift. Se si utilizza  $H_{CMB} \sim 3.28(1 + z^2)$ , all'aumentare di  $z$  il tempo di vita medio delle radiogalassie diminuisce. Anche attraverso lo studio della cinematica dei lobi presenti nelle radiogalassie è possibile ottenere dei tempi di vita medi  $< 10^8$  anni. In conclusione, in prima approssimazione si ottengono vite medie che vanno da  $10^6$  anni per le radiogalassie più potenti, fino a  $10^8 - 10^9$  anni per quelle di bassa luminosità radio. Se ne deduce che il termine *radiogalassia* indichi solamente una fase temporanea possibile durante il processo evolutivo delle galassie.

## 2 Applicazioni astrofisiche del Compton Inverso

### 2.1 Synchrotron Self-Compton e catastrofe Compton

Come accennato nel capitolo precedente, in caso di sorgenti compatte con alta densità di fotoni, è possibile che questi, prodotti dall'emissione di Sincrotrone, siano diffusi per Compton Inverso, aumentando la loro energia fino alla banda X e  $\gamma$ . Tale fenomeno prende il nome di Synchrotron Self-Compton (SSC).

Si consideri una regione sferica riempita di plasma ultrarelativistico magnetizzato di raggio  $R$ , posta ad una distanza  $d$  dall'osservatore. Poichè la sorgente è compatta, è possibile utilizzare l'approssimazione di Corpo Nero per calcolare il flusso:

$$F(\nu) = 2kT_e \frac{\nu^2}{c^2} \Omega \quad (2.1.1)$$

ove  $\Omega \approx R^2/d^2$  è l'angolo solido sotteso alla sorgente, e  $T_e$  è la temperatura posseduta da un elettrone relativistico con energia  $\gamma m_e c^2 = 3kT_e$ . È bene ricordare che per sorgenti autoassorbite la temperatura di brillantezza è uguale alla temperatura degli elettroni relativistici,  $T_b = T_e$ . La luminosità in banda Radio della sorgente può essere riscritta come:

$$L(\nu) = 4\pi d^2 F(\nu) \approx 4\pi d^2 2kT_e \frac{\nu^2 R^2}{c^2 d^2} = \frac{8\pi k T_b \nu^2 R^2}{c^2} \quad (2.1.2)$$

Per ordini di grandezza, possiamo affermare che la luminosità bolometrica sia  $L = L(\nu)\nu$ . La densità di energia dell'emissione di Sincrotrone nella banda Radio sarà quindi pari a:

$$u_{ph} = \frac{4\pi}{c} B = \frac{4\pi}{c} \frac{F}{d\Omega} = \frac{4\pi}{c} \frac{L(\nu)\nu}{d\Omega 4\pi R^2} = \frac{L(\nu)\nu}{4\pi c R^2} \quad (2.1.3)$$

in cui si è indicata con  $B$  l'intensità specifica. Inserendo il valore della luminosità ottenuto nell'equazione (2.1.2) in (2.1.3), si ottiene:

$$u_{ph} \approx \frac{8\pi k T_b \nu^2 R^2 \nu}{4\pi c^3 R^2} = \frac{2k T_b \nu^3}{c^3} \quad (2.1.4)$$

Nel capitolo precedente si è già calcolato il rapporto tra la potenza emessa di Sincrotrone e quella di Compton Inverso. Utilizziamo, quindi, l'equazione (1.3.3) e la invertiamo, definendo:

$$\chi \equiv \frac{\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{I.C.}}{\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{Synch}} \quad (2.1.5)$$

$\chi$  è quindi il rapporto tra le perdite energetiche per Compton Inverso e per Sincrotrone di un elettrone ultra-relativistico in presenza di un campo di radiazione e di un campo magnetico. Inserendo l'equazione (2.1.4) nella (2.1.5), si ha:

$$\chi = \frac{u_{ph}}{u_{mag}} = \frac{2k T_b \nu^3}{c^3 H^2 / 8\pi} = \frac{16\pi k T_b \nu^3}{c^3 H^2} \quad (2.1.6)$$

Dalla suddetta equazione è evidente che per  $\chi > 1$  le perdite energetiche degli elettroni per Compton Inverso siano superiori a quelle dovute al Sincrotrone. In altre parole, i fotoni radio generati da processi di Sincrotrone fungono da fotoni "seme" per processi di Compton Inverso. Così facendo, suddetti fotoni vengono diffusi alle alte frequenze dagli stessi elettroni relativistici che li hanno generati. È bene notare come  $\chi$  dipenda proporzionalmente dalla temperatura di brillantezza  $T_b$ . Nello specifico, riscrivendo l'equazione (2.1.6), utilizzando un'espressione alternativa per il campo magnetico, e ponendo  $\chi = 1$ , si ottiene:

$$T_b = 10^{12} \left( \frac{1GHz}{\nu} \right)^{1/5} K \quad (2.1.7)$$

Dunque, se la temperatura di una radiosorgente compatta è superiore a  $T_b \approx 10^{12} K$ , come detto precedentemente, la potenza emessa da Compton Inverso prevarrà su quella di Sincrotrone, che dominerà completamente i processi radiativi oltre questa temperatura limite. Tale fenomeno prende il nome di Catastrofe Compton. Ciò implica che il tempo di vita medio degli elettroni sia molto breve, e la radiosorgente si raffredderà, dunque, molto rapidamente.

Sono state osservate, tuttavia, sorgenti compatte con  $T_b > 10^{12} K$  dalle quali si sarebbe aspettato un'emissione "catastrofica" nelle bande X e  $\gamma$ . Ciò, però, non si è osservato. Queste sorgenti, note come AGN (Nuclei Galattici Attivi), espellono materiale a velocità prossime a quelle della luce. Di conseguenza, la temperatura di brillantezza misurata

viene amplificata di un fattore  $\alpha \gg 1 (T_{b.oss} = \alpha T_b)$ , cosicché il valore misurato possa essere maggiore di  $10^{12}K$ , senza però provocare alcuna Catastrofe Compton.

## 2.2 Comptonizzazione

Osservando lo spettro di emissione di una sorgente, esso risulterà modificato a causa delle numerose interazioni Compton e Compton Inverso tra fotoni ed elettroni. Tale fenomeno prende il nome di Comptonizzazione. Una condizione necessaria affinché esso avvenga è che il plasma debba essere sufficientemente rarefatto per far sì che altri processi radiativi, come la Bremsstrahlung o Sincrotrone, non aggiungano altri fotoni al sistema. Consideriamo, quindi, una distribuzione di fotoni in un plasma di elettroni non relativistici liberi, che interagiscono tra loro all'equilibrio termico ad una data temperatura  $T$ . Vale quindi  $\frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{3}{2}kT$ . Inoltre si suppone che  $h\nu \ll m_e c^2$ . Calcoliamo ora le perdite di energia da parte dei fotoni e degli elettroni.

Se i fotoni perdono energia e gli elettroni la guadagnano, si avrà effetto Compton. Si ricordi che:

$$\begin{aligned} h\Delta\nu &= h(\nu_i - \nu_f) = h\left(\frac{c}{\lambda_i} - \frac{c}{\lambda_f}\right) = hc\left(\frac{\lambda_f - \lambda_i}{\lambda_f \lambda_i}\right) = \\ &= \frac{hc}{\lambda_f \lambda_i} \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \approx \frac{h^2}{m_e \lambda_f \lambda_i} = \frac{h^2 \nu_i \nu_f}{m_e c^2} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Si ha quindi che l'energia persa dai fotoni mediata su tutti gli angoli per interazioni isotrope è:

$$\left\langle \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle_{ph} \approx -\frac{h\nu}{m_e c^2} \quad (2.2.2)$$

Considerando invece il caso in cui gli elettroni perdono energia, fondendola ai fotoni, si è in regime di Compton Inverso. Sia  $\gamma \sim 1$ , visto che non siamo in regime relativistico, e si consideri  $\beta \neq 1$ , per motivo analogo. Ricordando l'equazione (1.2.8) vista nel paragrafo 1.2, possiamo scrivere che:

$$\left\langle \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle_{el} \approx \frac{4}{3} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{4}{3} \frac{3kT}{m_e c^2} = \frac{4kT}{m_e c^2} \quad (2.2.3)$$

Nel caso da noi considerato, sono, dunque, presenti entrambe le perdite. L'energia netta traferita nel caso di multiple diffusioni è data, quindi, dalla somma dei due processi:

$$\left\langle \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle \approx \frac{4kT - h\nu}{m_e c^2} \quad (2.2.4)$$

Possiamo quindi evidenziare i tre possibili casi:

- Se  $4kT = h\nu$ , i due termini si annullano, ovvero tanta energia perdono i fotoni in favore degli elettroni, quanta quest'ultimi ne perdono in favore dei fotoni;
- Se  $4kT \ll h\nu$ , i fotoni perdono energia e gli elettroni del gas si riscaldano;
- Se  $4kT \gg h\nu$ , i fotoni guadagnano energia e gli elettroni del gas si raffreddano. Suddetto caso è quello in cui porremo la nostra attenzione.

Consideriamo una regione di plasma di dimensione  $D$  e di densità  $n_e$ , in cui vale  $4kT \gg h\nu$ . Ricordando la diffusione Thompson, possiamo definire  $\tau_e$  come l'opacità di tale regione, che sarà:

$$\tau_e = n_e \sigma_T D \quad (2.2.5)$$

con  $\sigma_T$  la sezione d'urto Thompson.

Tale formula può essere riscritta attraverso l'uso del Libero Cammino Medio, indicato con  $\lambda = 1/(n_e \sigma_T)$  :

$$\tau_e = \frac{D}{\lambda} \quad (2.2.6)$$

Un fotone, prima di uscire dalla regione, effettuerà un numero di collisioni  $N$  pari a:

$$N = \left(\frac{D}{\lambda}\right)^2 = \tau_e^2 \quad (2.2.7)$$

che risulta vera per  $\tau_e \gg 1$ . Nel caso in cui  $\tau_e \ll 1$ , si ha che  $N = \tau_e$ .

L'energia totale guadagnata dal fotone in un intervallo di tempo  $dt$  può essere scritta, dunque, come:

$$\left\langle \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle \approx \frac{4kT}{m_e c^2} \eta dt = \frac{4kT}{m_e c^2} dN \quad (2.2.8)$$

dove  $\eta = n_e c \sigma_T$  è il numero di collisioni nell'intervallo di tempo. Si calcola quindi l'energia media dei fotoni, la quale, dopo un tempo  $t$ , sarà pari a:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{4y} \quad (2.2.9)$$

nella quale è stato definito il Parametro Compton:

$$y = \frac{kTN}{m_e c^2} = \frac{kT n_e^2 \sigma_T^2 D^2}{m_e c^2} \quad (2.2.10)$$

che indica l'efficienza di trasferimento di energia dal plasma ai fotoni. È bene evidenziare come  $y \propto T n_e^2 D^2$ . Si nota quindi che per avere una sostanziale modifica dello spettro bisogna far sì che  $y > 1/4$ .

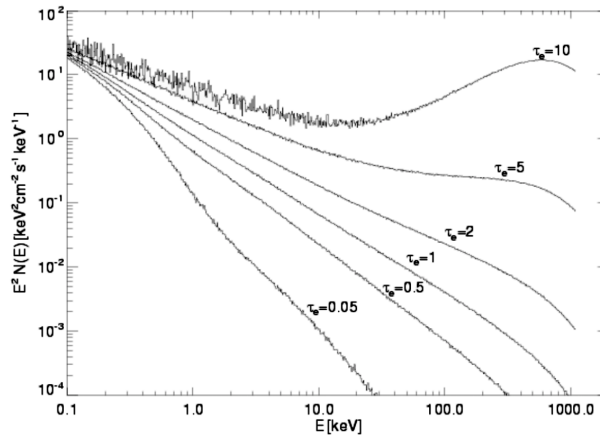


Figura 3: Spettro modificato di una sfera con  $kT \approx 360 \text{ KeV}$ . Si nota come all'aumentare di  $\tau_e$  lo spettro viene completamente alterato alle alte energie (*dispense di Processi di Radiazione e MHD, Cap. 5, slide 45*).

Possiamo quindi distinguere i due casi limite:

- Se  $y \ll 1 \rightarrow \tau_e \ll 1$  e si è in regime otticamente sottile, dovuto alla bassa densità degli elettroni o alle dimensioni eccessive della regione considerata. In questa condizione lo spettro viene modificato solo leggermente;
- Se  $y \gg 1 \rightarrow \tau_e \gg 1$  e si è in regime otticamente spesso, dovuto alla densità elevata degli elettroni o alle dimensioni contenute della regione. Lo spettro, dunque, viene modificato sostanzialmente.

Utilizzando il Parametro Compton, è possibile trovare il valore dell'opacità quando si è all'equilibrio, vale a dire quando  $4kT = h\nu$ . Si ottiene:

$$4kT = \epsilon_0 e^{4y} \quad (2.2.11)$$

Passando ai logaritmi, si ha:

$$y = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{4kT}{\epsilon_0} \right) \quad (2.2.12)$$

e il valore dell'opacità all'equilibrio sarà pari a:

$$\tau_e = \left[ \frac{mc^2}{4kT} \ln \left( \frac{4kT}{\epsilon_0} \right) \right]^{0.5} \quad (2.2.13)$$

Se tale condizione è soddisfatta, lo spettro seguirà la distribuzione di Bose-Einstein, in quanto i fotoni sono bosoni:

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{(h\nu/kT)+\mu} - 1} \quad (2.2.14)$$

che è simile alla distribuzione di Planck ma con l'aggiunta di un termine esponenziale  $\mu$ , detto *potenziale chimico*. Esso tiene conto del fatto che sarà presente una differenza nel numero di fotoni rispetto alla legge di Planck che si ottiene considerando la stessa temperatura (infatti per  $\mu = 0$  si ottiene la legge di Planck).

Analizziamo ora i casi limite di tale distribuzione:

- Se  $\frac{h\nu}{kT} + \mu \gg 1$ , si ha  $u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-(h\nu/kT)} e^{-\mu}$ , che è analoga alla legge di Wien con l'aggiunta di un termine moltiplicativo  $e^{-\mu}$ ;
- Se  $\frac{h\nu}{kT} + \mu \ll 1$ , si ha:
  - $u(\nu)d\nu \propto \nu^2$  se  $\mu = 0$ ;
  - $u(\nu)d\nu \propto \nu^3$  se  $\mu \neq 0$ .

Per una trattazione più generale sulla modifica dello spettro si fa uso dell'equazione di *Kompaneets*, di cui viene riportata la formula senza alcuna derivazione:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x} \right) \right] \quad (2.2.15)$$

dove  $x = h\nu/kT$  ed  $n = u(\nu)c^3/8\pi h\nu^3$ . Essa descrive l'evoluzione temporale della distribuzione di fotoni dovuta ai ripetuti scattering non relativistici di Compton Inverso. Il termine  $\partial n/\partial x$  indica l'aumento o la diminuzione del numero di fotoni a seguito dell'effetto Doppler, il termine  $n$  rappresenta il raffreddamento Compton dovuto al rinculo subito dai fotoni e dagli elettroni, mentre il termine  $n^2$  rappresenta l'emissione indotta dallo scattering.

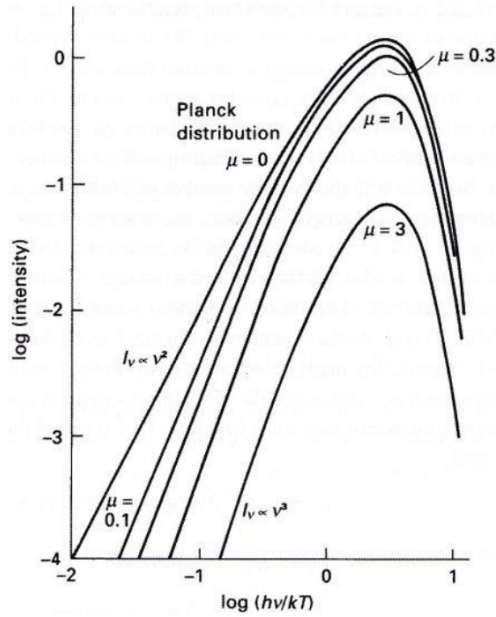


Figura 4: Spettro della distribuzione al variare del valore del potenziale chimico  $\mu$  (M. S. Longair, *High Energy Astrophysics, Third Edition*, pag. 247).

## 2.3 Effetto Sunyaev - Zeldovich

Una delle più importanti applicazioni del Compton Inverso in ambito astrofisico la si trova nell'effetto *Sunyaev-Zeldovich*. Esso è una diretta conseguenza della comptonizzazione, e si può suddividere in *'cinematico'*, dovuto all'effetto Doppler degli ammassi di galassie rispetto alla CMB, e *'termico'*, che analizzeremo più approfonditamente in questo capitolo. Prima di procedere oltre è bene ricordare alcuni concetti fondamentali della Radiazione Cosmica di Fondo.

Tutto l'Universo è pervaso da un fondo di radiazione microonde, uniforme in qualsiasi direzione lo si osservi, a meno di piccole fluttuazioni, le quali in prima approssimazione possiamo trascurare. Si ha dunque un fondo di radiazione isotropo con una temperatura pari a  $T_{CMB} = 2.73 K$ , che emette fotoni con energie dell'ordine di  $10^{-3} eV$ . Quando tali fotoni attraversano regioni estese di gas caldo, come ammassi o superammassi di galassie, con una temperatura  $T_e \gg T_{CMB}$ , essi saranno soggetti a Compton Inverso, sottraendo energia ad elettroni e diffondendosi a frequenze più alte. La curva di Corpo Nero della CMB risulterà, quindi, modificata: i fotoni a basse energie verranno portati a frequenze più alte, e il picco della distribuzione risulterà spostato (Fig. 5). Se, dunque, si osserva lo spettro della CMB attraverso un ammasso di galassie e lo si confronta con lo spettro inalterato della stessa, si noterà un difetto di fotoni alle basse frequenze, ed un eccesso di quest'ultimi alle alte energie; si ha, quindi, avuto un aumento complessivo dell'energia media dei fotoni della CMB che hanno interagito con il plasma caldo.

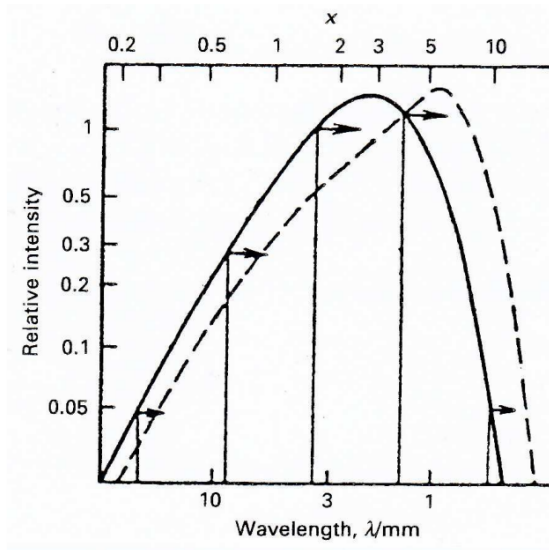


Figura 5: Spettro della CMB (linea continua) e spettro della CMB modificato a causa dell'effetto *Sunyaev-Zeldovich* (linea tratteggiata) (M. S. Longair, *High Energy Astrophysics, Third Edition*, pag. 258).

Attraverso la risoluzione dell'equazione di Kompaneets, Sunyaev e Zeldovich proposero una soluzione di prova  $n = (e^x - 1)^{-1}$ . In regime di Rayleigh-Jeans, ossia alle basse frequenze, ottennero il seguente risultato per la decrescita dell'intensità dello spettro:

$$\frac{\Delta I(\nu)}{I(\nu)} = -2y \quad (2.3.1)$$

in cui è stata utilizzata la definizione più rigorosa del Parametro Compton:

$$y = \frac{kT_e}{m_e c^2} \max(\tau_e, \tau_e^2) \quad (2.3.2)$$

Tale  $y$ , lungo la linea di vista con un ammasso di galassie, vale circa  $y \approx 10^{-4}$ . Osservando quindi in direzione di un ammasso, l'intensità della CMB sarà ridotta. In termini di temperatura, essa risulterà minore rispetto a quella misurata in una porzione di cielo privo di ammassi. Questo effetto porta ad una variazione della temperatura della CMB nella regione di Rayleigh-Jeans:

$$\frac{\Delta T_{CMB}}{T_{CMB}} = -2y \quad (2.3.3)$$

Per un ammasso di galassie si ha tipicamente una diminuzione di temperatura pari a  $-3.0 \cdot 10^{-4} K$  rispetto a  $T_{CMB}$ .

Analizzando più nello specifico lo spettro della radiazione di CMB modificato (Fig. 5), è possibile affermare le seguenti conclusioni. Come esaminato in precedenza, lo spettro risulta traslato a frequenze maggiori, e nel limite di Rayleigh-Jeans sarà attenuato, ma comunque descritto da una legge di potenza. Si vuole infine porre attenzione ad un dettaglio non trascurabile: visto che il numero di fotoni non viene alterato, l'integrale dello spettro modificato è uguale a quello di partenza. È possibile, dunque, attraverso la sola osservazione dello spettro, escludere che si tratti di una curva di Corpo Nero con una temperatura di  $T_{CMB} + \Delta T_{CMB}$ , visto che, in suddetto caso, il flusso di fotoni dovrebbe essere maggiore, e non conservarsi.

Analizziamo ora un'applicazione di tale fenomeno. Consideriamo l'ammasso di Abell 2319, osservato dal telescopio spaziale Planck (Fig. 6), il quale ha effettuato diverse misurazioni a differenti frequenze. È possibile osservare come alle basse frequenze ci sia un difetto di fotoni registrati. Infatti, fino a  $\nu = 217 \text{ GHz}$  si registra un decremento del segnale in direzione dell'ammasso. A tale frequenza, corrispondente ad una lunghezza d'onda pari a  $\lambda = 1.5 \text{ mm}$ , però, si ha un'inversione di tendenza, e il flusso misurato a frequenze maggiori risulterà superiore rispetto al fondo della CMB. Se si effettua un'osservazione ad una frequenza pari a  $\nu = 217 \text{ GHz}$ , l'oggetto osservato risulta "*invisibile*", e si registra un flusso di intensità pari al solo flusso dei fotoni della CMB. La presenza di questa *frequenza caratteristica* è una peculiarità univoca dell'effetto Sunyaev-Zeldovich.

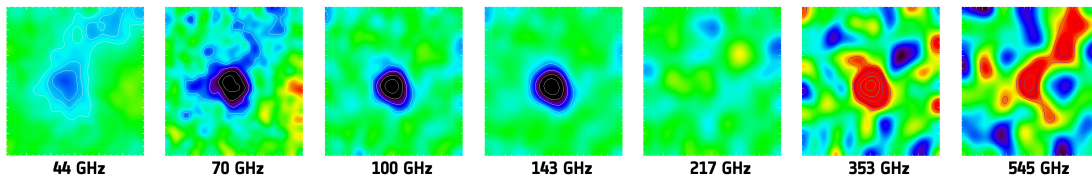


Figura 6: Osservazioni a diverse frequenze (da sinistra a destra: 44, 70, 100, 143, 217, 353, 545 GHz) dell'ammasso di Abell 2319 effettuate dal telescopio spaziale Planck. La scala di colori rappresenta l'intensità del segnale in scala crescente dal blu al rosso (<https://sci.esa.int/web/planck/-/47697-multi-band-observations-of-the-galaxy-cluster-abell-2319>).

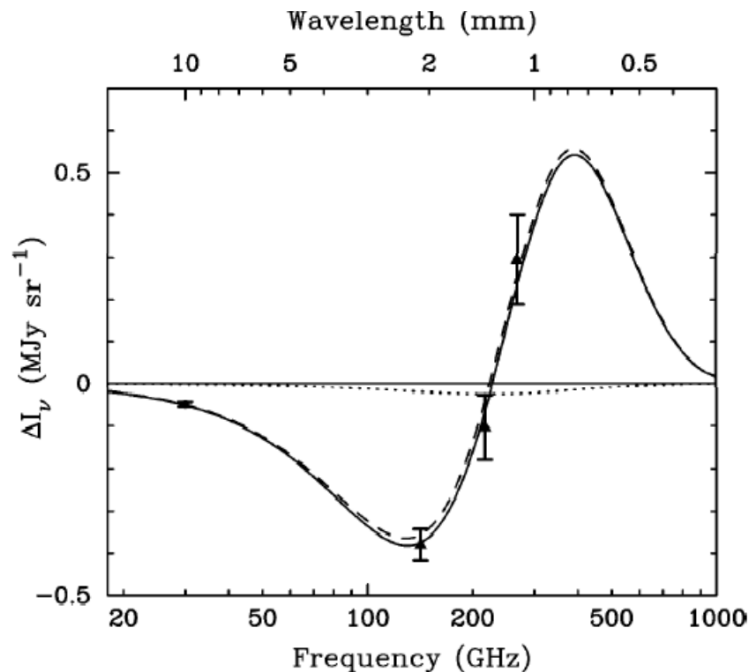


Figura 7: Grafico del rapporto tra la radiazione registrata proveniente dall'ammasso Abell 2319 e quella del fondo di CMB a diverse frequenze. Ad una frequenza  $\nu = 217 \text{ GHz}$ ,  $\Delta I_\nu = 0$ , e non si osserva più l'ammasso (Holzapfel et al. 1997, LaRoque et al. 2002).



Un'ulteriore applicazione di suddetto effetto la si può utilizzare in ambito cosmologico. L'effetto Sunyaev-Zeldovich risulta indipendente dalla distanza della sorgente osservata, quindi non è soggetto al redshift. Grazie a tale proprietà, si entra in possesso di un altro metodo per il calcolo della costante cosmologica di Hubble-Lemaître  $H_0$ . Si ricordi che essa può essere definita al primo ordine come:

$$v = H_0 d \quad (2.3.4)$$

in cui  $v$  è la velocità di recessione, la quale si può calcolare attraverso il redshift, e  $d$  è la distanza, che si può ricavare con l'utilizzo di una scala di distanza.

Il suo calcolo, però, nel corso dei decenni ha prodotto numerosi dibattiti sul proprio valore, il quale risultava spesso con errori troppo elevati. Solo negli ultimi anni si è ufficializzato il valore a:  $H_0 = 71.9 \pm 2.7 \text{ km/s/Mpc}$ .

Utilizziamo ora l'effetto Sunyaev-Zeldovic per ricavare  $H_0$ . Si ricordi che l'emissione di Bremsstrahlung di un plasma è pari a:

$$\epsilon(\nu) \propto T_e^{-1/2} n_e^2 e^{-h\nu/kT_e} \quad (2.3.5)$$

Esplicitando la (2.3.3), si ha:

$$\frac{\Delta T_{CMB}}{T_{CMB}} \approx -2 \frac{kT_e}{m_e c^2} \sigma_T n_e L \quad (2.3.6)$$

Visto che l'emissività è una quantità misurabile, è possibile ricavare  $T_e$  dalla (2.3.5) e sostituirla nella (2.3.6) per ottenere  $L$ , ossia la dimensione dell'ammasso. Ora, attraverso la formula della distanza angolare è banale trovare la distanza  $d$ :

$$d = L\theta \quad (2.3.7)$$

dove  $\theta$  è la dimensione angolare dell'ammasso.

Per il calcolo della velocità di recessione è sufficiente osservare le righe spettrali:

$$z = \frac{\lambda_{oss} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{v}{c} \quad (2.3.8)$$

Dunque si ottiene  $H_0$  dalla seguente formula:

$$H_0 = \frac{v}{d} = \frac{cz}{d} \quad (2.3.9)$$

Utilizzando questo procedimento è stato possibile, negli ultimi anni, calcolare in modo più accurato la distanza interposta tra noi e ammassi di galassie con un elevato redshift, e, inoltre, trovare un valore adeguato della costante di Hubble-Lemaître  $H_0$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] C. Fanti - R. Fanti, *Una finestra sull'Universo "Invisibile"*, (2012)
- [2] M. S. Longair, *High Energy Astrophysics, Third Edition*, (2011)
- [3] G. Ghisellini, *Radiative processes in high energy astrophysics*, (2012)
- [4] G. B. Rybicki - A. P. Lightman, *Radiative processes in astrophysics*, (1979)
- [5] D. Dallacasa, *appunti personali e dispense di Processi di Radiazione e MHD*, (A.A. 2022-2023)