

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Il paradosso EPR e il teorema di Bell

Relatore:
Prof.ssa Elisa Ercolessi

Presentata da:
Claudio Zambrella

Anno Accademico 2022/2023

Indice

Introduzione	2
1 Il problema della misura in meccanica quantistica	4
1.1 Il determinismo in meccanica classica	4
1.2 L'esperienza della doppia fenditura	6
1.3 L'interpretazione di Copenaghen	10
1.3.1 Stati quantici e osservabili	11
1.3.2 Sistemi a due stati: i qubit	14
1.3.3 Sistemi separabili e sistemi entangled	17
2 Il paradosso EPR	19
2.1 L'articolo di Einstein, Podolski e Rosen	21
2.2 La variante di Aharonov e Bohm	25
3 Il teorema di Bell	28
3.1 La disuguaglianza di Bell	29
3.2 La disuguaglianza CHSH	34
4 Gli esperimenti sulla correlazione quantistica	40
4.1 L'esperimento di Alain Aspect	41
4.2 The BIG Bell Test	44
4.3 La non località quantistica	45

Introduzione

In tutto il panorama scientifico, la meccanica quantistica emerge come una fra le teorie più ambiziose e rivoluzionarie di tutti i tempi. Capace di descrivere il comportamento delle particelle subatomiche con un formalismo unico e coerente, la teoria quantistica ha lasciato un segno indelebile nella storia del XX secolo, trascinandoci con sé nuovi paradigmi di pensiero che impongono un completo distacco dal senso comune di intendere la realtà. Concetti basilari della teoria come indeterminazione, probabilismo e sovrapposizione degli stati, hanno generato negli anni accese discussioni scientifiche e filosofiche, lasciando questioni aperte che, ancora oggi, suscitano diverse perplessità sulla reale comprensione dei fenomeni microscopici. L'inizio di questo dibattito affonda le sue radici nei primi trent'anni del XX secolo, in cui si è assistito ad uno dei più importanti duelli intellettuali tra due colossi della fisica moderna: Albert Einstein e Niels Bohr. L'argomento centrale di questo dibattito è il fenomeno dell'*entanglement* (una terminologia coniata per la prima volta da Schrödinger che significa "groviglio" o "intreccio") secondo cui, quando due sistemi quantici interagiscono, non possono essere più considerati come entità separate ma rappresentano un sistema unico e indivisibile. Secondo Einstein, l'*entanglement* rappresentava una possibile violazione dei principi della relatività speciale, permettendo alle due particelle di comunicare istantaneamente e indipendentemente dalla loro distanza reciproca. Inoltre, mentre Bohr credeva che i fenomeni "non esistono" finché non sono osservati, Einstein non si rassegnò mai all'idea di una realtà oggettiva e indipendente dalla presenza di un osservatore. Per questi motivi, Albert Einstein, Boris Podolski e Nathan Rosen, nel 1935 formularono un celebre esperimento mentale noto come *paradosso EPR*. Facendo appello ai principi considerati irrinunciabili del realismo e di località, i tre scienziati dimostrarono come l'esistenza dell'*entanglement* implicasse l'incompletezza della meccanica quantistica, ponendo in risalto la necessità di una teoria più ampia che comprendesse al suo interno le cosiddette "*variabili nascoste*". Una possibile risposta alle obiezioni di Einstein è giunta circa trent'anni dopo grazie ai lavori di John Bell che, con semplici argomenti di teoria della probabilità, ha elaborato uno schema teorico e pratico per affrontare la questione. Ulteriori cinquant'anni sono stati necessari per riprodurre in maniera fedele e accurata i vincoli sperimentali imposti dalle *disuguaglianze di Bell*. La discussione tra Einstein e Bohr, nonostante possa sembrare una semplice divergenza di opinioni filosofiche, ha avuto dei risvolti notevolmente pratici:

in tempi moderni si utilizza il fenomeno dell'entanglement per trasferire gli stati quantici in punti dello spazio arbitrariamente lontani, in maniera più efficiente rispetto a quanto previsto dall'informazione classica. Il teorema formulato da Bell ha aperto le strade alla nuova area di studio dell'*informazione quantistica*, con svariate applicazioni alle tecnologie emergenti (*computer quantistici*), alla sicurezza delle comunicazioni (*crittografia quantistica*) oppure alla realizzazione di strumenti di misura ad altissima risoluzione e sensibilità (*metrologia quantistica*), con future e promettenti conseguenze in ogni campo della fisica teorica e sperimentale.

La tesi è organizzata nel modo seguente:

Nel capitolo 1 si esplorano i punti chiave che hanno portato all'interpretazione dominante della meccanica quantistica, mettendo in evidenza le principali differenze rispetto alla fisica classica.

Nel capitolo 2 si analizza la critica di Einstein a tale interpretazione, con particolare attenzione al paradosso EPR che solleva dubbi sulla completezza della teoria.

Nel capitolo 3 è presentata una dimostrazione del teorema di Bell, che fornisce criteri teorici e sperimentali per giudicare l'esito del dibattito tra Einstein e Bohr.

Nel capitolo 4, si discute l'esperimento condotto da Alain Aspect, il più importante tra i primi Bell test sull'entanglement quantistico. Infine, si forniscono alcuni cenni all'interpretazione di Bohm per approfondire la nuova caratteristica *non locale* introdotta dalla meccanica quantistica.

Capitolo 1

Il problema della misura in meccanica quantistica

"Those who are not shocked when they first come across quantum theory cannot possibly have understood it"
Niels Bohr

L'aspetto controverso della meccanica quantistica che si vuole trattare in questo capitolo è il *problema della misura*. Una misura è un'operazione sperimentale che assegna un valore numerico alle proprietà di un sistema utilizzando un'apposita strumentazione. Ogni misura è caratterizzata da una certa variabilità quantificata dagli errori sperimentali, dovuti a fenomeni di natura casuale, imperfezioni di tipo strumentale, e in generale a qualsiasi condizione "non ideale" del procedimento di misura. Se nello studio dei sistemi macroscopici della fisica classica, migliorando le metodologie e la strumentazione, è sempre possibile ridurre gli errori di misura fino a renderli arbitrariamente piccoli, nel mondo microscopico le cose funzionano diversamente: pur raffinando le procedure sperimentali, ogni particella microscopica, quando misurata, subisce un "disturbo" irreversibile che rende impossibile conoscerne con precisione lo stato presente. Per introdurre e discutere i punti critici del problema della misura, è necessario iniziare delineando la questione in ottica storica, a partire dal determinismo della meccanica classica fino ad arrivare all'indeterminismo caratteristico del mondo quantistico.

1.1 Il determinismo in meccanica classica

Le leggi che regolano il moto e l'equilibrio dei sistemi macroscopici, furono formalizzate per la prima volta da Newton nei Principia (1687) con l'introduzione dei tre principi della dinamica che, insieme al principio di relatività di Galileo, costituiscono i fondamenti della meccanica classica. In particolare, riveste un ruolo fondamentale la II legge di Newton,

poichè contiene al suo interno una formulazione del *principio di causalità*: le cause, le forze, anticipano sempre gli effetti, cioè una variazione dello stato di moto del sistema. In meccanica [1], lo stato di un sistema è rappresentato dalle coppie di posizione \vec{x} e velocità \vec{v} , identificato dal vettore $(\vec{x}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Considerando l'incertezza sulle misure di posizione $\Delta\vec{x}$ e velocità $\Delta\vec{v}$, lo stato del sistema si può esprimere nella forma più generale:

$$(\vec{x} \pm \Delta\vec{x}, \vec{v} \pm \Delta\vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad (1.1)$$

Assumendo una particella di massa costante m , su cui agisce un campo di forze $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$, l'equazione di Newton per la particella si può esprimere in forma differenziale:

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) = m \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \quad (1.2)$$

Un'equazione differenziale del tipo (1.2), nell'ipotesi che \vec{F} sia una funzione sufficientemente regolare, ammette $(\infty^3 \times \infty^3)$ soluzioni possibili al variare delle condizioni iniziali $(\vec{x}_0, \vec{v}_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Tuttavia, imponendo una conoscenza precisa dello stato iniziale, si può dimostrare con il teorema di esistenza e unicità che l'equazione di Newton ammette una soluzione unica $\vec{x}(t)$, ovvero il moto della particella. Ne consegue una delle proprietà più sorprendenti della meccanica classica: conoscendo lo stato presente con precisione (quindi trascurando gli errori sperimentali: $\Delta\vec{x}_0, \Delta\vec{v}_0 \approx 0$) e la soluzione del moto $\vec{x}(t)$, è possibile prevedere lo stato finale della particella $(\vec{x}(t), \vec{v}(t)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ per ogni arbitrario istante di tempo t .

Nel 1814, Laplace ha ripreso questo concetto ideando un esperimento mentale: egli immagina un intelletto (il cosiddetto *demone di Laplace*) che fosse a conoscenza di "tutte le forze che mettono in moto la natura" e "tutte le posizioni di tutti gli elementi di cui la natura è composta":

"Possiamo considerare lo stato presente dell'Universo come l'effetto del suo passato e la causa del suo futuro. Un intelletto che ad un certo momento conoscesse tutte le forze che mettono in moto la natura, e tutte le posizioni di tutti gli elementi di cui la natura è composta, se questo intelletto fosse anche abbastanza vasto per sottoporre questi dati all'analisi, abbraccerebbe in un'unica formula i movimenti dei corpi più grandi dell'Universo e quelli dell'atomo più piccolo; per un tale intelletto nulla sarebbe incerto e il futuro così come il passato potrebbero essere presenti davanti ai suoi occhi."

Pierre S. Laplace [2], 1814.

Questa interpretazione delle leggi della meccanica classica è nota come *determinismo causale* (o *laplaciano*): ad una conoscenza precisa dello stato presente corrisponde una conoscenza precisa di tutti gli stati passati e futuri del sistema.

Se in meccanica classica si poteva immaginare l'Universo come un sistema consequenziale, causativo e univoco, con l'introduzione della meccanica quantistica è impossibile darlo per scontato, dal momento che fenomeni basilari del mondo microscopico appaiono, al contrario, indefiniti e imprevedibili.

1.2 L'esperimento della doppia fenditura

Alla fine dell' '800, grazie ai lavori sperimentali di Young e alla teoria delle equazioni di Maxwell, appariva chiaro alla comunità scientifica che la luce si comportasse come un'onda. Ad inizio '900, i lavori di Planck [3] ed Einstein [4] sembravano creare contraddizioni, in quanto alcuni esperimenti potevano essere spiegati solo ipotizzando che la luce fosse composta di particelle, i cosiddetti *fotoni*. Questo dualismo fu generalizzato dall'ipotesi di De Broglie (1924) per cui non solo la luce, ma tutta la materia, classicamente pensata composta di corpuscoli (ad esempio gli elettroni) manifestasse la doppia natura di onda e particella. Negli anni successivi furono compiuti diversi tentativi di verificare l'ipotesi di De Broglie sperimentalmente, realizzando una variante moderna dell'esperienza di Young detta *esperimento della doppia fenditura*. Richard Feynman [5] era solito dire che questo esperimento "...è impossibile, assolutamente impossibile da spiegare in modo classico, e sta al cuore della meccanica quantistica. In realtà ne contiene l'unico mistero ..."

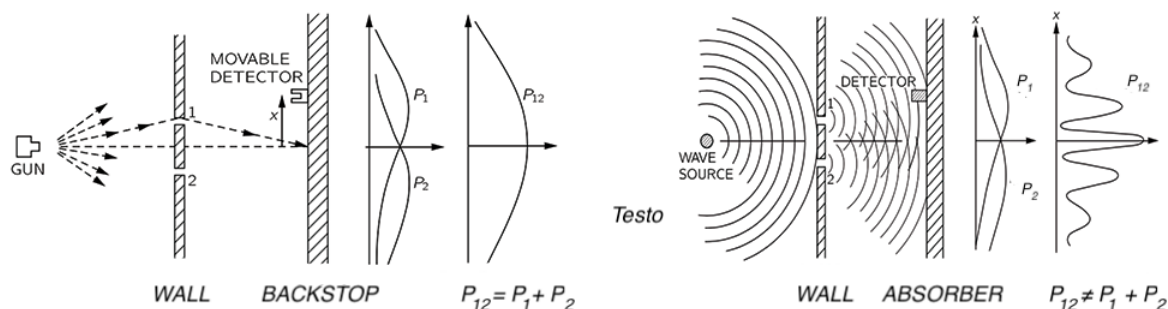


Figura 1.1: Schema dell'esperimento di Young [5], con una sorgente di particelle (a sinistra) oppure onde (a destra).

L'apparato sperimentale è composto da una sorgente di onde (o particelle), ed uno schermo d'assorbimento (o d'arresto) posto sullo sfondo. Tra i due si dispone una bar-

riera opaca con due aperture parallele di larghezza opportuna, come mostrato in figura 1.1. Sullo schema dell'esperimento di Young, si consideri una sorgente che emette in direzione casuale un fascio di particelle, intese nel senso classico di corpuscoli. Inoltre, si assuma che la sorgente sia il più possibile "ideale", contenente particelle indistruttibili e capaci di "rimbalzare" sulla barriera. La probabilità P_1 che la particella attraversi la fenditura 1 può essere stimata effettuando l'esperimento in assenza della fenditura 2. Il risultato che si ottiene è una distribuzione di probabilità P_1 che assume il massimo valore in corrispondenza della posizione dell'apertura 1; ragionando allo stesso modo si ottiene un risultato analogo per P_2 . Dal momento che ogni particella attraversa una singola fenditura, ripetendo l'esperimento con entrambe le aperture la distribuzione di probabilità congiunta P_{12} osservata può essere stimata dalla formula $P_{12} = P_1 + P_2$: l'effetto con entrambi i fori aperti è uguale alla somma degli effetti con un foro aperto alla volta.

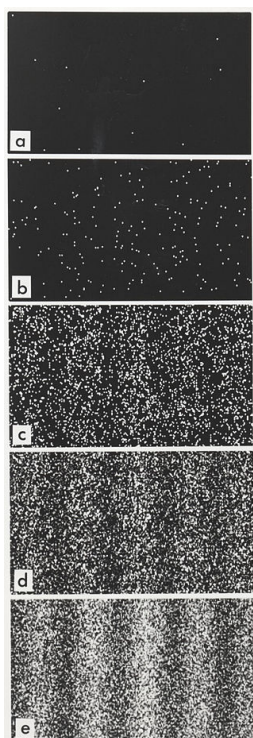


Figura 1.2: Esperimento della doppia fenditura con elettroni singoli [6]. Le immagini sono prese dopo l'invio di (a) 10, (b) 100, (c) 3.000, (d) 20.000, (e) 70.000 elettroni.

Adesso si consideri una sorgente contenente onde classiche, come le onde del mare o le onde sonore. Nel caso in cui l'esperimento è effettuato con una sola fenditura alla volta, si ottiene un risultato simile a quello corpuscolare, con probabilità P_1 e P_2 che assumono il valore massimo in corrispondenza dell'apertura 1 e 2. Tuttavia, effettuando l'esperimento con entrambe le fenditure aperte, si possono osservare i fenomeni di diffrazione ed interferenza tipici del comportamento ondulatorio: sullo sfondo si ottiene un'alternanza di massimi e minimi, che rappresentano il caso in cui le onde interferiscono costruttivamente (massimi) o distruttivamente (minimi). Le osservazioni sperimentali suggeriscono che, nel caso ondulatorio, la probabilità congiunta $P_{12} \neq P_1 + P_2$: l'effetto con entrambi i fori aperti è diverso dalla somma degli effetti con un foro aperto alla volta, poichè l'onda riesce ad attraversare entrambe le fenditure interagendo in ogni punto dello spazio tra la barriera e lo schermo. Young effettuò questo esperimento nel 1801 con una sorgente di luce,

osservando un'alternanza di bande chiare e scure sullo sfondo e concludendo la natura ondulatoria della radiazione elettromagnetica. Con l'innovazione delle tecnologie e delle

procedure sperimentali, si è ripetuto lo stesso esperimento con particelle microscopiche, come gli elettroni. I risultati sperimentali confermano incredibilmente l'ipotesi di De Broglie: non solo la luce, ma anche la materia esibisce lo stesso dualismo onda-particella. Il fascio elettronico rivela la sua natura puntiforme all'impatto con la lastra fotografica, tuttavia, nello spazio tra le fenditure, sembra propagarsi come un'onda, attraversando entrambe le aperture e dando origine al profilo di interferenza sullo schermo. Si potrebbe pensare che gli elettroni interagiscano nel moto collettivo dalla sorgente verso lo schermo, il che spiegherebbe il fenomeno di interferenza.

Si è ripetuto lo stesso procedimento con fasci di elettroni o fotoni a bassissima intensità, capaci di emettere *una singola particella alla volta*. Il primo esperimento *a singolo elettrone* [7] fu realizzato nel 1974 a Bologna da Pier Giorgio Merli, Gian Franco Missiroli e Giulio Pozzi, ed i risultati ottenuti furono confermati dagli esperimenti condotti negli anni successivi, come l'esperimento di Akira Tonomura del 1989 [6]. Inizialmente le particelle sembrano impattare in modo casuale la lastra tuttavia, trascorso abbastanza tempo, sullo sfondo apparivano effettivamente le bande di interferenza, indice di un chiaro comportamento ondulatorio come mostrato in figura 1.2.

Le considerazioni precedenti sollevano il problema: come determinare da quale delle due fenditure sia passata l'onda-particella? Con riferimento alla figura 1.3, si potrebbe attuare un esperimento del tipo "which-way", ovvero porre dei rivelatori di posizione in corrispondenza delle aperture. Procedendo ad inviare una singola particella alla volta, la figura di interferenza scompare, a favore del comportamento corpuscolare classico.

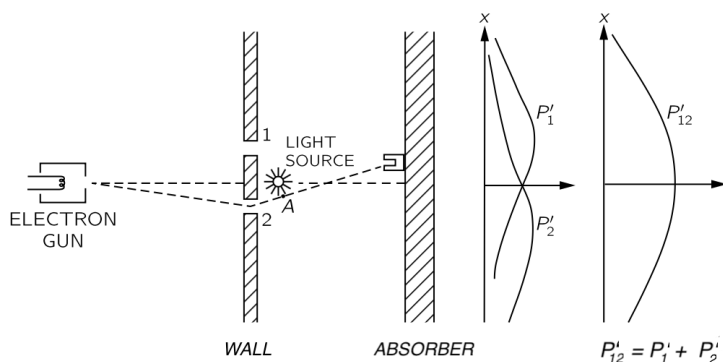


Figura 1.3: Esperimento del tipo "which-way" [5]: posizionando una sorgente luminosa per osservare quale fenditura attraversa l'elettrone, sullo sfondo si osserva una distribuzione di probabilità analoga al caso corpuscolare classico.

”Una volta si pensava che l’elettrone si comportasse come una particella e si scoprì poi che, sotto molti aspetti, si comporta come un’onda. Cosicché in realtà non si comporta in nessuno dei due modi. Ora abbiamo lasciato perdere. Diciamo: ‘non è né l’una né l’altra cosa’. Fortunatamente c’è uno spiraglio: gli elettroni si comportano esattamente come la luce. Il comportamento quantistico degli oggetti atomici (elettroni, protoni, neutroni e così via) è lo stesso per tutti, sono tutti ‘onde-particelle’, o qualunque altro nome vi piaccia dar loro.”
Richard P. Feynman, [5], 1965.

Sulla scia di tali risultati, molti scienziati tentarono di trovare un’ipotesi formale per descrivere le osservazioni sperimentali. Nel 1926, Erwin Schrödinger pubblicò un’equazione [8] che descrivesse il propagarsi dell’onda di materia di De Broglie, derivata dalle leggi classiche dell’ottica geometrica. Lo scienziato austriaco ottenne un’equazione differenziale in grado di descrivere la dinamica di una particella di materia, rappresentando l’analogo della II legge di Newton in meccanica classica:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Phi(\vec{x}, t) \quad (1.3)$$

dove \hat{H} è l’operatore hamiltoniano della particella. Le soluzioni di (1.3), le funzioni d’onda $\Phi(\vec{x}, t)$, descrivono il moto di una particella di materia in modo deterministico, analogamente alla fisica classica. Tuttavia, se in meccanica classica è possibile stabilire univocamente il moto (o traiettoria) $\vec{x}(t)$ del sistema conoscendo lo stato iniziale, in meccanica quantistica il concetto di traiettoria perde significato, dal momento che la dinamica della particella è piuttosto assimilabile a quella di un’onda $\Phi(\vec{x}, t)$ che attraversa entrambe le fenditure, apparendo delocalizzata nello spazio. Soltanto l’atto della misura, come l’impatto sulla lastra fotografica o un rivelatore posto su una fenditura, costringe il sistema a localizzarsi rivelando la sua natura corpuscolare. La discontinuità tra la dinamica della particella e il processo di misura non è prevista dal modello di Schrödinger, il che lascia le seguenti due questioni aperte:

- I) Dove si trova la particella prima di impattare la lastra fotografica?
- II) Qual’è il ruolo che riveste la misura nell’esperimento della doppia fenditura?

1.3 L'interpretazione di Copenaghen

Numerosi fisici si sono posti a queste due domande elaborando diverse interpretazioni della meccanica quantistica. La più diffusa, nonché la prima ad essersi sviluppata, è l'interpretazione di Copenaghen (talvolta detta interpretazione ortodossa), che risponde alle due questioni nel modo seguente:

I) La funzione d'onda $\Phi(\vec{x}, t)$ soluzione di (1.3) contiene informazioni sulla particella che sono *probabilistiche*. Non si può prevedere la posizione esatta della particella, ma soltanto la probabilità che la particella "sceglia" una fra le infinite traiettorie possibili. La densità di probabilità $\rho(\vec{x})$ di misurare la particella nel volume infinitesimo $d\vec{x}$ all'istante t_0 è espressa dalla *regola di Born*:

$$\rho(\vec{x}) = |\Phi(\vec{x}, t_0)|^2$$

Di conseguenza, la probabilità di trovare la particella nella regione dello spazio di volume V è data da:

$$P(V) = \int_V |\phi(\vec{x}, t_0)|^2 d\vec{x}$$

II) L'atto della misura è interpretato come una perturbazione che obbliga la particella a rivelare le sue proprietà. Tale assunto è noto come *postulato del collasso, o riduzione del pacchetto d'onda*. Inoltre, l'osservazione di una grandezza fisica comporta inevitabilmente un "disturbo" sulla particella, limitando la possibilità di conoscere simultaneamente un'altra grandezza *coniugata* alla prima. Un esempio importante di grandezze coniugate è quello di posizione \vec{x} ed impulso \vec{p} , i cui limiti di misura sono espressi dal *principio di indeterminazione di Heisenberg* [9] del 1927:

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar \tag{1.4}$$

secondo cui l'incertezza Δx sulla posizione e Δp_x sull'impulso non possono essere rese piccole a piacere: aumentando la risoluzione sulla posizione, diminuisce la risoluzione sull'impulso e viceversa. Utilizzando la definizione di impulso ($p_x = mv_x$), la relazione (1.4) può essere riscritta:

$$\Delta x \Delta v_x \approx \hbar/m \tag{1.5}$$

Riprendendo la definizione classica di stato (1.1) ed utilizzando (1.5), si può apprezzare come le incertezze sperimentali su posizione e velocità non possono essere rese trascurabili, essendo in relazione di proporzionalità inversa. Il principio di Heisenberg ha rappresentato storicamente il declino della prospettiva deterministica in favore di una nuova visione nota come *indeterminismo*, secondo cui *lo stato presente non può essere completamente definito*.

”Nella formulazione netta del principio di causalità: ”se conosciamo in modo preciso il presente, possiamo prevedere il futuro”, non è falsa la conclusione, bensì la premessa. In linea di principio noi non possiamo conoscere il presente in tutti i suoi dettagli. [...] Siccome tutti gli esperimenti sono soggetti alle leggi della meccanica quantistica e quindi all’equazione $\Delta x \Delta p_x \approx \hbar$, mediante la meccanica quantistica viene stabilita definitivamente la non validità del principio di causalità”.

Werner K. Heisenberg, [9] 1927.

1.3.1 Stati quantici e osservabili

L’avvento della meccanica quantistica ha innescato una radicale revisione di alcuni concetti fondamentali in fisica. Si è resa necessaria una reinterpretazione dell’idea di *stato* di un sistema, una ridefinizione del significato di grandezze fisiche *osservabili* e, soprattutto, una riconsiderazione sostanziale del processo di *misura*.

Stati quantici

Ad ogni sistema fisico si associa uno spazio di Hilbert separabile H , uno spazio vettoriale in cui è definito un prodotto scalare denotato con il simbolo $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Lo stato della particella, ossia la sua funzione d’onda, può essere identificato da un vettore di modulo unitario in tale spazio, denotato con:

$$|\Phi\rangle$$

In uno spazio di Hilbert ogni vettore può essere espresso come combinazione lineare degli elementi di una base. Se $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots\}$ è una base ortonormale di H , lo stato $|\Phi\rangle$ si può sviluppare come:

$$|\Phi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle + c_3|\phi_3\rangle + \dots \quad (1.6)$$

con $c_i = \langle \phi_i | \Phi \rangle \in \mathbb{C}$ e tali che $\sum_i |c_i|^2 = 1$, $\forall i = 1, 2, \dots$

La proprietà (1.6) è nota come *principio di sovrapposizione*: similmente alle onde classiche, gli stati quantici interferiscono reciprocamente dando come risultato un altro stato quantico.

Osservabili

A ciascuna grandezza osservabile A è associato un operatore lineare ed autoaggiunto denotato con \hat{A} .

Definizione (autostato). *Dato un osservabile \hat{A} , se la sua misura restituisce sempre lo stesso valore α (con certezza, quindi probabilità uguale a 1), il sistema si trova in uno stato denotato $|\alpha\rangle$, che si dice autostato del sistema relativo all'operatore \hat{A} .*

Ogni operatore può essere rappresentato come una matrice rispetto ad una base, la cui scelta è completamente arbitraria [10]. Sia $\hat{A} : V \rightarrow W$ un operatore lineare ed autoaggiunto tra due spazi di Hilbert complessi $V \subset \mathbb{C}^m$ e $W \subset \mathbb{C}^n$. Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ è una base di V e $\{w_1, \dots, w_n\}$ è una base di W , allora esistono n numeri complessi A_{1j}, \dots, A_{nj} tali che:

$$\hat{A}(|v_j\rangle) = \sum_{i=1}^n A_{ij} |w_i\rangle, \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

La matrice di elementi A_{ij} è detta *rappresentazione matriciale* dell'operatore \hat{A} . Se la matrice che rappresenta \hat{A} è diagonale, e gli elementi sulla diagonale sono reali, per il teorema spettrale esiste una base ortonormale di autostati dell'operatore \hat{A} tale che:

$$\hat{A}|\alpha_i\rangle = \alpha_i|\alpha_i\rangle$$

dove $|\alpha_i\rangle$ rappresenta l' i -esimo autostato dell'operatore \hat{A} , e α_i l'autovalore associato all'autovettore $|\alpha_i\rangle$.

La meccanica quantistica postula che lo *spettro* di \hat{A} , ovvero la collezione di tutti gli autovalori α_i , siano anche tutti i risultati possibili di una misura dell'osservabile \hat{A} . Inoltre, secondo il formalismo è sempre possibile scomporre ogni stato in una combinazione lineare di autostati di un dato osservabile. Applicando la proprietà (1.6), il generico stato $|\Phi\rangle$ può essere sviluppato nella base di autostati $|\alpha_i\rangle$ dell'operatore \hat{A} :

$$|\Phi_A\rangle = c_1|\alpha_1\rangle + c_2|\alpha_2\rangle + c_3|\alpha_3\rangle + \dots \quad (1.7)$$

con $c_i = \langle \phi_i | \Phi \rangle \in \mathbb{C}$ e tali che $\sum_i |c_i|^2 = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots$

I coefficienti c_i sono detti *ampiezza di probabilità*. La *probabilità* di osservare il sistema nell' i -esimo autostato $|\alpha_i\rangle$ con risultato α_i è espressa da $|c_i|^2$.

Applicando le definizioni della statistica, si può dimostrare che il valore medio della misura di \hat{A} sullo stato $|\Phi_A\rangle$ è definito da:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Phi_A | \hat{A} | \Phi_A \rangle \quad (1.8)$$

Dalla formula (1.8), segue un'espressione per la varianza associata alla misura di \hat{A} :

$$\sigma_A^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \quad (1.9)$$

Essendo l'operatore \hat{A} una grandezza arbitraria, il generico stato $|\Phi\rangle$ può essere sviluppato nella base di autostati di una grandezza osservabile qualsiasi. L'interpretazione di Copenaghen sostiene che la funzione d'onda contiene una descrizione *completa* del sistema quantistico, dal momento che è possibile prevedere la probabilità delle misure di ogni grandezza (osservabile) fisica.

Riduzione (o collasso) del pacchetto d'onda

Si misura l'osservabile \hat{A} sullo stato $|\Phi_A\rangle$, sviluppato nella base di autostati di \hat{A} come in (1.7). L'osservazione restituisce un risultato α_k , con probabilità $|c_k|^2 = |\langle \alpha_k | \Phi_A \rangle|^2$ di verificarsi. Dopo la misura lo stato del sistema è completamente definito, collassando istantaneamente nell'autostato $|\Phi_A\rangle \rightarrow |\alpha_k\rangle$. Una successiva misura di \hat{A} sullo stato $|\Phi_A\rangle$ restituisce come risultato sempre α_k con probabilità 1, dal momento che il sistema è collassato in un autostato di \hat{A} a seguito della misura.

Principio di indeterminazione di Heisenberg

Nella sua forma più generale, dati due osservabili \hat{A} e \hat{B} , le rispettive deviazioni standard σ_A e σ_B definite in (1.9) devono rispettare il vincolo:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

dove $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ è detto *commutatore* tra \hat{A} e \hat{B} .

Se due operatori \hat{A}, \hat{B} sono tali che $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ si dice che gli operatori \hat{A}, \hat{B} non commutano. Due osservabili di questo tipo devono rispettare i vincoli imposti dal principio di Heisenberg e si dicono *incompatibili*, dal momento che solo un osservabile alla volta

può assumere valore definito. Un esempio di osservabili incompatibili sono gli operatori posizione \hat{x} e impulso \hat{p} , legati dalle relazioni di commutazione:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}\hat{1}$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker con $i, j = x, y, z$.

Se \hat{A}, \hat{B} sono tali che $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ si dice che gli operatori \hat{A}, \hat{B} commutano. Due osservabili di questo tipo si dicono *compatibili*, poichè il principio di Heisenberg non è applicabile ed entrambe le grandezze possono essere misurate con precisione arbitraria: $\sigma_A\sigma_B \approx 0$. In tal caso è sempre possibile estrarre una base ortonormale di autostati $|\alpha_i, \beta_i\rangle$ simultanea per entrambi gli operatori \hat{A} e \hat{B} , tale che valgono le equazioni:

$$\hat{A}|\alpha_i, \beta_i\rangle = \alpha_i|\alpha_i, \beta_i\rangle$$

$$\hat{B}|\alpha_i, \beta_i\rangle = \beta_i|\alpha_i, \beta_i\rangle$$

con autovalori α_i, β_i che rappresentano tutti i possibili risultati della misura simultanea di \hat{A} e \hat{B} .

1.3.2 Sistemi a due stati: i qubit

Ogni particella quantistica può essere classificata in base ad una proprietà che non ha nessuna analogia con le proprietà classiche, detta momento angolare intrinseco o *spin*. Lo spin è rappresentato da un'operatore dal simbolo \hat{S} [11], che soddisfa le relazioni di commutazione:

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{S}_k \quad (1.10)$$

$$[\hat{S}^2, \hat{S}_i] = 0 \quad (1.11)$$

dove $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$, e ϵ_{ijk} è il simbolo di Levi-Civita con $i, j, k = x, y, z$.

La relazione (1.10) afferma che le componenti dello spin sono incompatibili lungo due direzioni differenti: la misura dello spin lungo la direzione i influenza la misura dello spin lungo j , con i limiti imposti dal principio di Heisenberg.

La relazione (1.11) afferma che le osservabili di spin \hat{S}^2 e \hat{S}_i sono compatibili lungo una generica direzione i , che di solito, per convenzione è denotata "z". Per cui esiste una base ortonormale $|s, s_z\rangle$, che è anche una base di autostati simultanea degli operatori \hat{S}^2 e \hat{S}_z . Lo spettro di tutti i valori misurabili è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\hat{S}^2|s, s_z\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|s, s_z\rangle \\ \hat{S}_z|s, s_z\rangle &= \hbar s_z|s, s_z\rangle\end{aligned}$$

L'autovalore s è un numero semi-intero $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ e rappresenta il modulo del momento angolare di spin.

L'autovalore s_z può variare nell'intervallo $-s, -s+1, \dots, 0, \dots, +s-1, +s$ e rappresenta la proiezione dello spin lungo la direzione z . Per ogni valore di s , l'autovalore s_z può assumere $2s+1$ valori detti *molteplicità di spin* M_s :

$$M_s = 2s + 1 \tag{1.12}$$

I lavori sperimentali di Stern e Gerlach hanno dimostrato che gli elettroni possiedono un momento angolare intrinseco di spin che può assumere due valori opposti lungo z . Ponendo nell'equazione (1.12) molteplicità di spin pari a 2:

$$2 = 2s + 1$$

Da cui si ottiene il modulo dello spin dell'elettrone $s = 1/2$, con due proiezioni possibili $s_z = \pm 1/2$ lungo z .

Si può quindi associare all'elettrone uno stato di spin $|\Phi_S\rangle$ che appartiene ad uno spazio di Hilbert H di dimensione 2. Nella base $\{|1/2, 1/2\rangle, |1/2, -1/2\rangle\}$ simultanea di \hat{S}^2 e \hat{S}_z , lo stato di spin più generale è espresso dal principio di sovrapposizione (1.6):

$$|\Phi_S\rangle = \alpha|1/2, 1/2\rangle + \beta|1/2, -1/2\rangle \tag{1.13}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e tali che $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Un sistema del tipo (1.13) è detto *sistema a due stati*, oppure in informazione quantistica, un *qubit*. Un altro importante esempio di qubit è lo stato di polarizzazione di un singolo fotone, che può essere orizzontale o verticale.

Ogni componente dell'operatore di spin $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ agisce nello spazio delle matrici 2×2 lineari e autoaggiunte, proiettando $|\Phi_S\rangle \rightarrow |1/2, 1/2\rangle$ con probabilità $|\alpha|^2$ oppure $|\Phi_S\rangle \rightarrow |1/2, -1/2\rangle$ con probabilità $|\beta|^2$ a seguito della misura, e restituendo due autovalori pari a $+\hbar/2$ oppure $-\hbar/2$ rispettivamente. Una rappresentazione matriciale di $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ è solitamente espressa nella forma:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_x \quad \text{con autovettori} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_y \quad \text{con autovettori} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z \quad \text{con autovettori} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sono dette *matrici di Pauli*.

L'operatore \hat{S}^2 restituisce sempre lo stesso autovalore, risultando proporzionale alla matrice identità I 2×2 :

$$S^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4} I \quad \text{con autovettori} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Come detto finora, \hat{S}^2 e \hat{S}_z hanno una base simultanea di autovettori (autostati), che nello spazio dei vettori 2-dimensionali assumono la rappresentazione dei versori canonici degli assi cartesiani:

$$|1/2, 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I due autostati, per comodità di notazione, sono solitamente denotati $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, oppure $|0\rangle$ e $|1\rangle$ in informazione quantistica, in analogia con i bit classici.

1.3.3 Sistemi separabili e sistemi entangled

Si considerino due sistemi A e B , con spazi di Hilbert associati H_A e H_B . Lo stato del sistema complessivo è definito nello spazio di Hilbert dato dal prodotto tensoriale $H_A \otimes H_B$ [10]. Siano Θ_A, Θ_B due osservabili, con basi di autostati $|i\rangle_A$ per il sistema A e $|j\rangle_B$ per il sistema B . Nel caso più generale, lo stato del sistema si esprime:

$$|\Phi\rangle_{AB} = \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$$

Se i sistemi A e B non sono interagenti, lo stato del sistema complessivo può essere fattorizzato negli stati $|\Phi\rangle_A \in H_A$ e $|\Phi\rangle_B \in H_B$ per un opportuna scelta dei coefficienti a_i, b_j tali che $c_{ij} = a_i b_j$, da cui:

$$|\Phi\rangle_{AB} = \left(\sum_i a_i |i\rangle_A \right) \otimes \left(\sum_j b_j |j\rangle_B \right) = |\Phi\rangle_A \otimes |\Phi\rangle_B$$

Uno stato di questo tipo si dice *separabile*. Nel caso di due qubit, si può sviluppare lo stato $|\Phi\rangle_A$ nella base di autostati $\{|\uparrow_z\rangle_A, |\downarrow_z\rangle_A\} \subset H_A$ e lo stato $|\Phi\rangle_B$ nella base $\{|\uparrow_z\rangle_B, |\downarrow_z\rangle_B\} \subset H_B$. Un esempio di stato separabile si ottiene nel caso in cui $a_i = b_j = 1/\sqrt{2}$ per ogni i, j :

$$|\Phi\rangle_{AB} = \frac{(|\uparrow_z\rangle_A + |\downarrow_z\rangle_A) \otimes (|\uparrow_z\rangle_B + |\downarrow_z\rangle_B)}{\sqrt{2}}$$

Una misura sul sistema A nella base $\{|\uparrow_z\rangle_A, |\downarrow_z\rangle_A\}$ agisce esclusivamente sullo stato $|\Phi\rangle_A$. Di conseguenza, una misura di spin restituisce come autovalore $+\hbar/2$ (oppure $-\hbar/2$), e lo stato del sistema A collassa in $|\Phi\rangle_A \rightarrow |\uparrow_z\rangle_A$ (oppure $|\Phi\rangle_A \rightarrow |\downarrow_z\rangle_A$) con la stessa probabilità, pari a $(1/\sqrt{2})^2 = 1/2$. Le misure di spin su B nella base $\{|\uparrow_z\rangle_B, |\downarrow_z\rangle_B\}$ agiscono allo stesso modo, quindi restituendo come autovalore $+\hbar/2$ (oppure $-\hbar/2$) e provocando le riduzioni $|\Phi\rangle_B \rightarrow |\uparrow_z\rangle_B$ (oppure $|\Phi\rangle_B \rightarrow |\downarrow_z\rangle_B$) con probabilità $1/2$. Si deduce che le misure di spin effettuate su B risultano *indipendenti* da quelle effettuate in precedenza su A , e viceversa.

Nel caso di due sistemi interagenti A e B , lo stato del sistema non può essere fattorizzato in due contributi indipendenti di H_A e H_B ; in tal caso lo stato si dice *non separabile* o *entangled*. Nel caso di due qubit, è necessario sviluppare lo stato del sistema nella base più generale $\{|\uparrow_z\rangle_A, |\downarrow_z\rangle_A\} \otimes \{|\uparrow_z\rangle_B, |\downarrow_z\rangle_B\} \subset H_A \otimes H_B$.

Un esempio importante di stato entangled è quello che, per ragioni storiche, è spesso chiamato *stato di singoletto*:

$$|\Phi\rangle_{AB} = \frac{|\uparrow_z\rangle_A \otimes |\downarrow_z\rangle_B - |\downarrow_z\rangle_A \otimes |\uparrow_z\rangle_B}{\sqrt{2}}$$

Una misura sul sistema A nella base $\{|\uparrow_z\rangle_A, |\downarrow_z\rangle_A\}$ agisce sullo stato del sistema complessivo $|\Phi\rangle_{AB}$. Di conseguenza, sono possibili due situazioni differenti:

- I) Una misura di spin su A restituisce autovalore $+\hbar/2$. Pertanto lo stato del sistema composto collassa in $|\Phi\rangle_{AB} \rightarrow |\uparrow_z\rangle_A \otimes |\downarrow_z\rangle_B$. Le successive misure sul sistema B nella base $\{|\uparrow_z\rangle_B, |\downarrow_z\rangle_B\}$ restituiscono sempre come autovalore $-\hbar/2$, dal momento che il sistema B è collassato nell'autostato $|\downarrow_z\rangle_B$ a seguito della misura su A .
- II) Una misura di spin su A restituisce autovalore $-\hbar/2$. Pertanto lo stato del sistema composto collassa in $|\Phi\rangle_{AB} \rightarrow |\downarrow_z\rangle_A \otimes |\uparrow_z\rangle_B$. Le successive misure sul sistema B nella base $\{|\uparrow_z\rangle_B, |\downarrow_z\rangle_B\}$ restituiscono sempre come autovalore $+\hbar/2$, dal momento che il sistema B è collassato nell'autostato $|\uparrow_z\rangle_B$ a seguito della misura su A .

Si deduce che le misure di spin effettuate su B risultano *dipendenti* da quelle effettuate in precedenza su A , e viceversa. Questo aspetto peculiare dei sistemi entangled assume un ruolo centrale nella trattazione del paradosso EPR.

Capitolo 2

Il paradosso EPR

"Quantum mechanics: real black magic calculus"
Albert Einstein

L'interpretazione probabilistica dell'equazione di Schrödinger segnò storicamente un punto di svolta. In particolare, le predizioni con assoluta precisione dello spettro dell'atomo di idrogeno rappresentarono il più grande successo della teoria dei quanti, che iniziò presto una rapida espansione in ogni campo della fisica teorica. In questo contesto, l'avanzamento della teoria introdusse idee innovative nella fisica, scatenando obiezioni da parte di chi credeva profondamente alla visione classica della realtà. Tra le personalità di spicco coinvolte in questo dibattito, Albert Einstein è senza dubbio uno dei nomi più rilevanti; la sua critica non era rivolta alla capacità predittiva della teoria, quanto al significato assegnato alla funzione d'onda dall'interpretazione di Copenaghen, dovuta principalmente ai contributi di Werner K. Heisenberg e Niels Bohr nella capitale danese. Secondo Einstein, l'idea che la realtà, in ultima analisi, sia fondata sul probabilismo risultava inconcepibile. Il fisico tedesco, in una lettera al London Times, introdusse una distinzione tra quelle che chiamava *"teorie costruttive"* e *"teorie dei principi"* [12]. Come viene solitamente inteso, la distinzione è tra le teorie che descrivono il comportamento macroscopico direttamente osservabile di un sistema, con l'aiuto di principi fenomenologici che vengono elevati allo status di postulati (teorie dei principi), e teorie che descrivono il comportamento di un sistema a partire dai suoi costituenti microscopici (teorie costruttive). Questa interpretazione si adatta bene agli esempi forniti da Einstein dei due tipi di teorie: la teoria cinetica, da un lato, che deriva il comportamento dei gas da un modello microscopico, e la termodinamica classica, dall'altro, che si basa su principi fenomenologici ed empiricamente verificabili, ad esempio l'impossibilità di realizzare il moto perpetuo nell'esperienza ordinaria [13]. Secondo Einstein, la stessa relazione tra termodinamica e teoria cinetica dei gas doveva sussistere anche per descrivere i fenomeni quantici: la meccanica quantistica si configura come una teoria costruttiva,

tuttavia mancante di un'analogia controparte in forma di teoria dei principi. Einstein era profondamente convinto dell'esistenza di tale (ipotetica) teoria, capace di racchiudere i fenomeni microscopici in un quadro deterministico. In questo senso, la concezione di probabilismo assumerebbe le caratteristiche di una proprietà *emergente* della teoria, ovvero un comportamento che si manifesta solo nel limite in cui il numero di costituenti del sistema tende a infinito, e non irriducibile come sostenuto dall'interpretazione ortodossa, secondo cui il probabilismo è una caratteristica propria ed indivisibile dei sottosistemi microscopici. Come scrisse lo stesso Einstein in una lettera a Max Born:

“La meccanica quantistica è molto degna di rispetto. Ma una voce interiore mi dice che, dopo tutto, non è l'originale. La teoria offre molto ma difficilmente ci si avvicina al segreto del Vecchio. In ogni caso, sono convinto che lui non giochi a dadi”

Albert Einstein, 1926.

Un altro punto di rottura che Einstein non accettava era l'assunto della teoria per cui qualcosa esiste solo quando osservato. Einstein sosteneva che la realtà (fatta di materia, radiazione, etc...) sia un elemento oggettivo, che esiste indipendentemente dalla presenza di un osservatore e indipendentemente dalle interazioni che può avere con altra materia o radiazione. Bohr, al contrario, sosteneva che la realtà si manifesta solo nel momento in cui è osservata, poichè in linea di principio non esiste un modo per osservare i fenomeni senza effettuare misure. È famosa la domanda di Einstein rivolta proprio a Bohr: *“Allora lei sostiene che la Luna non esiste quando nessuno la osserva?”*

Inoltre, Einstein era profondamente convinto che i fenomeni assumono una corretta rappresentazione solo se è possibile delinearne le relazioni di causa-effetto nello spazio e nel tempo con *continuità*; in tal senso, la critica è rivolta al postulato di riduzione, che prevede una discontinuità istantanea tra la dinamica della particella, descritta dall'equazione di Schrödinger, ed il processo di misura. Inoltre, per sistemi composti da due o più particelle, l'atto di misura in un punto dello spazio sembra generare effetti su sottosistemi distanti, in evidente contrasto con il concetto di continuità spazio-temporale. Einstein era particolarmente tormentato da questi risvolti della teoria, tant'è che negli anni successivi è tornato sulla questione descrivendo l'entanglement come una *“spaventosa azione a distanza”*.

2.1 L'articolo di Einstein, Podolski e Rosen

Le perplessità verso i nuovi progressi della fisica portarono Einstein ad una revisione critica dei fondamenti della teoria quantistica. L'argomentazione più significativa è contenuta nell'articolo EPR del 1935, dalle iniziali dei tre autori Einstein, Podolsky e Rosen, intitolato: “*Può la descrizione quantistica della realtà considerarsi completa?*” [14]. In questo articolo gli autori si occupano di dimostrare la non completezza della funzione d'onda, intesa come descrizione della realtà fisica, facendo appello a dei principi considerati indispensabili in qualsiasi teoria.

Principio del realismo: *Una grandezza fisica è detta elemento di realtà se è possibile prevederla con certezza il valore senza perturbare il sistema a cui si riferisce.*

A partire da questo principio si può chiarire cosa intende EPR con il termine *completezza* della funzione d'onda e, in generale, di una teoria fisica. Quando si elabora per la prima volta una teoria, il punto di partenza è sempre l'approccio sperimentale. A partire dai risultati ottenuti dagli esperimenti, è possibile assegnare dei simboli matematici ad ogni grandezza che caratterizza il sistema e mettere in relazione tali simboli mediante formule matematiche. Se tali formule riescono a replicare correttamente i risultati sperimentali, il puro formalismo matematico diventa una *legge fisica*, mentre i simboli che rappresentano le grandezze fisiche empiriche possono essere chiamati gli *elementi di una teoria* [15]. Pertanto, se tramite le leggi fisiche e le procedure sperimentali è possibile prevedere il valore di una grandezza senza perturbare il sistema (elemento di realtà), tramite deduzioni logico-matematiche sarà possibile risalire a tutti gli altri *elementi della teoria*. Il problema è se tali elementi della teoria dedotti matematicamente rappresentano degli elementi di realtà, ovvero delle proprietà che il sistema possiede oggettivamente e indipendentemente dall'atto di misura. Nell'interpretazione di EPR, solo una teoria capace di riconoscere *tutti* gli elementi di realtà può dirsi *completa*. Ad esempio, in meccanica quantistica, una particella che si trova in un autostato dell'impulso \hat{p} possiede autovalore definito p_0 . Ciò significa che una misura di impulso \hat{p} sul sistema restituisce sempre l'autovalore p_0 , che rappresenta quindi un elemento di realtà. Per una particella in questo stato, la meccanica quantistica prevede solo la probabilità che la misura della posizione \hat{x} dia come risultato un autovalore x compreso nell'intervallo $x \pm \Delta x$, dove Δx è l'incertezza sulla posizione che rispetta i vincoli imposti dal principio di indeterminazione. Di conseguenza, se per l'elemento della teoria \hat{p} esiste un corrispondente elemento di realtà (l'autovalore p_0) e viceversa, per l'elemento della teoria \hat{x} non esiste un corrispondente elemento di realtà, poichè il risultato di una misura di posizione subisce una sorta di fluttuazione casuale. Secondo EPR, una teoria capace di prevedere solo le probabilità di una misura, deve necessariamente essere incompleta: potrebbero esistere altri elementi di realtà "nascosti" che la teoria non è in grado di riconoscere, ed è solo per questo che la posizione della particella appare indeterminata. Utilizzando le parole di

EPR: "qualunque sia il significato assegnato al termine *completezza*, il seguente requisito per una teoria completa sembra essere necessario":

Criterio di completezza: *Una teoria è detta completa se ogni elemento della realtà fisica ha una controparte nella teoria, mediante la quale può essere dedotto.*

Oltre a questi due assunti, gli autori sottintendono un terzo principio ritenuto irrinunciabile:

Principio di località: *Due sistemi spazialmente separati non possono influenzarsi istantaneamente.*

Il principio di località è da intendersi nella connotazione di Einstein di *causalità relativistica*. La teoria della relatività impone dei vincoli sul principio di causalità, per cui è vietata qualsiasi forma di comunicazione superluminale (più veloce della luce) tra due sistemi. Se ciò fosse possibile, implicherebbe un'inversione del rapporto di causa-effetto tra gli eventi, generando situazioni paradossali in cui gli effetti anticipano le cause.

Stabiliti questi concetti di base, Einstein, Podolsky e Rosen procedono con un ragionamento che mette in luce il paradosso con una logica disarmante, partendo proprio dai presupposti della teoria quantistica. In particolare, riveste un ruolo fondamentale il *principio di indeterminazione di Heisenberg*, che in base alle definizioni di EPR può essere parafrasato come segue: due osservabili che non commutano (incompatibili) non hanno realtà simultanea, in quanto rispettano i vincoli imposti dal principio secondo cui una sola grandezza alla volta può assumere valore definito. Due osservabili che commutano (compatibili) hanno realtà simultanea, per cui si può estrarre lo spettro di tutti i valori misurabili. Il ragionamento di Einstein, Podolski e Rosen si basa sul dimostrare che soltanto una tra le due proposizioni può essere vera:

- I) La descrizione della realtà, fornita dalla funzione d'onda, è incompleta.
- II) Due osservabili incompatibili non hanno realtà simultanea.

Ragionando per assurdo, si può negare la proposizione II), ipotizzando che esistono due operatori \hat{A}, \hat{B} incompatibili che hanno realtà simultanea. Di conseguenza, per la condizione di realtà, entrambe le grandezze A, B dovrebbero avere valori definiti, rientrando nella descrizione completa fornita della funzione d'onda. Tuttavia, se così fosse, il valore delle grandezze A, B sarebbe prevedibile con certezza, contraddicendo il principio di indeterminazione di Heisenberg secondo cui, per due osservabili incompatibili, solo una grandezza alla volta può assumere valore definito.

Si può ipotizzare allora di negare I), per cui la funzione d'onda contiene una descrizione completa della realtà. Partendo da questi presupposti, gli autori costruiscono un ragionamento per dimostrare che, anche in questo caso, si giunge ad un assurdo.

Si considerino due sistemi I e II , descritti rispettivamente dalle variabili x_1 e x_2 , e si supponga che essi interagiscano dall'istante $t = 0$ all'istante $t = T$. Poichè gli stati dei due sistemi prima della loro interazione sono noti, è possibile descrivere, tramite la funzione d'onda $\Phi(x_1, x_2)$, lo stato del sistema composto $I+II$ per ogni tempo t , e quindi anche per $t > T$ nonostante, dopo l'interazione, non sia più possibile ricavare lo stato di I o di II separatamente. In pratica, gli autori considerano due particelle *entangled*, dette anche *coppie EPR*.

Si consideri una grandezza \hat{A} relativa al sistema I , tale che abbia autovalori a_1, a_2, \dots e autofunzioni $u_1(x_1), u_2(x_1), \dots$. Lo stato del sistema, per $t > T$, si può descrivere con il pacchetto d'onda:

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_1) \phi_n(x_2) \quad (2.1)$$

dove le funzioni d'onda $\phi_n(x_2)$ sono da intendere come semplici coefficienti dell'espansione di $\Phi(x_1, x_2)$ nelle autofunzioni ortogonali $u_n(x_1)$. All'istante $t_0 > T$ si misura il valore di \hat{A} sul sistema I , ottenendo autovalore a_k . Per il postulato di riduzione, il pacchetto collassa nello stato:

$$u_k(x_1) \phi_k(x_2) \quad (2.2)$$

Adesso si consideri di ripetere lo stesso procedimento di misura, considerando un'altra grandezza \hat{B} relativa al sistema I , tale che abbia autovalori b_1, b_2, \dots e autofunzioni $\theta_1(x_1), \theta_2(x_1), \dots$

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \theta_s(x_1) \nu_s(x_2)$$

dove le funzioni d'onda $\nu_s(x_2)$ sono da intendersi come i nuovi coefficienti dell'espansione di $\Phi(x_1, x_2)$. All'istante $t_0 > T$ si decide di misurare \hat{B} sul sistema I , ottenendo autovalore b_j . Pertanto lo stato del sistema collassa in:

$$\theta_j(x_1) \nu_j(x_2)$$

A seguito delle misure di \hat{A} e \hat{B} sul sistema I , il sistema II può precipitare in due stati diversi:

$$\phi_k(x_2) \quad e \quad \nu_j(x_2)$$

Inoltre, dal momento che il sistema II non è perturbato dalla misura, si conclude che è possibile assegnare due diverse funzioni d'onda, $\phi_k(x_2)$ e $\nu_j(x_2)$, allo stesso elemento di realtà, ovvero il sistema II . A questo punto, per dimostrare l'assurdo, è necessario dimostrare che le due funzioni d'onda $\phi_k(x_2)$ e $\nu_j(x_2)$ sono proprio autofunzioni di osservabili con autovalore definito, nonostante i rispettivi operatori non commutano.

Per farlo, Einstein, Podolski e Rosen considerano un sistema di due particelle, separate da una distanza nota x_0 , tale che $x_2 = x_1 + x_0$, e con impulso totale nullo $p_1 + p_2 = 0$. Si noti che uno stato di questo tipo può essere preparato con precisione poichè $[\hat{x}_2 - \hat{x}_1, \hat{p}_1 + \hat{p}_2] = 0$. Dal momento che le osservabili posizione e impulso hanno spettro continuo, un sistema di questo tipo è descritto dal pacchetto d'onda:

$$\Phi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ip}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)} dp \quad (2.3)$$

Si supponga che la grandezza \hat{A} relativa al sistema I sia l'impulso \hat{p}_1 , descritto dall'operatore $\hat{p}_1 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}$. Misurando \hat{p}_1 si ottiene autovalore \bar{p}_1 , allora lo stato della particella I collassa in:

$$u(x_1) = e^{\frac{i\bar{p}_1}{\hbar} x_1}$$

Di conseguenza, il pacchetto d'onda (2.3) è separabile nei contributi $u(x_1)\phi(x_2)$, con lo stato della particella II descritto dalla funzione d'onda:

$$\phi(x_2) = e^{-\frac{i\bar{p}_1}{\hbar}(x_2 - x_0)} \quad (2.4)$$

La funzione d'onda (2.4) rappresenta proprio l'autofunzione dell'operatore $\hat{p}_2 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_2}$ con autovalore $\bar{p}_2 = -\bar{p}_1$. Di conseguenza, **l'impulso della particella II è un elemento di realtà.**

Analogamente, si può assumere che \hat{B} sia la posizione \hat{x}_1 del sistema I , dove l'operatore posizione agisce moltiplicando lo stato per la variabile indipendente x . Se una misura di \hat{x}_1 restituisce autovalore \bar{x}_1 , lo stato della particella I collassa in:

$$\theta(x_1) = \delta(x_1 - \bar{x}_1)$$

dove δ rappresenta la delta di Dirac. Di conseguenza, il pacchetto d'onda (2.3) è separabile nei contributi $\theta(x_1)\nu(x_2)$, con lo stato della particella *II* descritto dalla funzione d'onda:

$$\nu(x_2) = \delta(x_2 - \bar{x}_1 - x_0) \quad (2.5)$$

La funzione (2.5) è proprio l'autofunzione dell'operatore \hat{x}_2 della particella *II*, con autovalore $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + x_0$. Di conseguenza, **la posizione della particella *II* è un elemento di realtà.**

Assumendo che la funzione d'onda contenga una descrizione completa della realtà, si giunge ad un assurdo: è possibile associare dei valori definiti alle osservabili nonostante i rispettivi operatori non commutano, che nell'esempio di EPR sono \hat{x}_2 e \hat{p}_2 . In altre parole, il principio di indeterminazione può essere "aggirato" effettuando misure sul primo sistema e lasciando imperturbato il secondo. Per Einstein, Podolski e Rosen, assumendo come punti fermi il principio del realismo e di località, l'unica conclusione possibile è l'incompletezza della meccanica quantistica. L'idea di fondo è che la teoria possa essere completata con l'introduzione di parametri aggiuntivi (le cosiddette "*variabili nascoste*") che consentano di prevedere con certezza i risultati delle misure, recuperando la visione deterministica del mondo in cui ad ogni grandezza fisica è possibile associare un elemento di realtà.

2.2 La variante di Aharanov e Bohm

Nel 1951, Aharanov e Bohm [16] hanno ideato una variante equivalente del paradosso, più semplice e vicina alle realizzazioni sperimentali successive. Anziché considerare due particelle in movimento come EPR, essi considerano due sistemi *A* e *B* che si trovano nel singoletto di spin:

$$|\Phi\rangle_{AB} = \frac{|\uparrow_z\rangle_A \otimes |\downarrow_z\rangle_B - |\downarrow_z\rangle_A \otimes |\uparrow_z\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (2.6)$$

Adesso si supponga di allontanare i due sottosistemi *A* e *B* in due destinazioni fra loro distanti, in cui sono presenti due sperimentatori, Alice, in possesso della particella *A*, e Bob, in possesso della particella *B*. Si potrebbe considerare come grandezza relativa

al sistema A la componente z dello spin \hat{S}_z^A . In tal caso Alice misura nella base $\{|\uparrow_z\rangle_A, |\downarrow_z\rangle_A\}$, con due possibili esiti $[\hbar/2, -\hbar/2]$ entrambi con probabilità $1/2$. Nel primo caso, lo stato del sistema A collassa nell'autostato:

$$|\uparrow_z\rangle_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per cui lo stato del sistema complessivo (2.6) collassa in $|\uparrow_z\rangle_A \otimes |\downarrow_z\rangle_B$, ed il sistema B si trova nello stato definito da:

$$|\downarrow_z\rangle_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Lo stato (2.7) rappresenta proprio l'autostato relativo all'operatore \hat{S}_z^B con autovalore $-\hbar/2$. Il secondo caso è del tutto analogo a patto di scambiare autovalori e autofunzioni per i due sistemi. Pertanto, **lo spin \hat{S}_z^B è un elemento di realtà per il sistema B** , dal momento che qualsiasi misura successiva di Bob sul sistema restituisce sempre l'autovalore opposto a quello ottenuto sul sistema A con probabilità 1.

Si può ripetere il procedimento, nel caso in cui la grandezza relativa al sistema A è la componente dello spin \hat{S}_x^A lungo x . In tal caso Alice misura nella base $\{|\uparrow_x\rangle_A, |\downarrow_x\rangle_A\}$, con due possibili esiti $[\hbar/2, -\hbar/2]$ entrambi con probabilità $1/2$. Nel primo caso, lo stato del sistema A collassa nell'autostato:

$$|\uparrow_x\rangle_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per cui lo stato del sistema complessivo (2.6) collassa in $|\uparrow_x\rangle_A \otimes |\downarrow_x\rangle_B$, ed il sistema B si trova nello stato definito da:

$$|\downarrow_x\rangle_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Lo stato (2.8) rappresenta proprio l'autostato relativo all'operatore \hat{S}_x^B con autovalore $-\hbar/2$. Il secondo caso è del tutto analogo a patto di scambiare autovalori e autofunzioni per i due sistemi. Per gli stessi motivi di prima, **lo spin \hat{S}_x^B è un elemento di realtà per il sistema B** . Si è riusciti a dimostrare che le grandezze S_z^B e S_x^B ammettono valori definiti nonostante i rispettivi operatori \hat{S}_z^B e \hat{S}_x^B non commutano, come specificato in (1.10), ottenendo la stessa conclusione di EPR.

La variante di Aharonov e Bohm mette in risalto il ruolo che riveste il principio di località all'interno del paradosso: una misura sul primo sistema sembra generare effetti istantanei sul secondo, indipendentemente da quanto siano tra loro distanti, come se la scelta di quale misura eseguire sul primo oggetto riuscisse ad influenzare la funzione d'onda del secondo oggetto. Si può approfondire questo aspetto considerando il caso in cui Alice misura lungo z , ovvero nella base $\{|\uparrow_z\rangle_A, |\downarrow_z\rangle_A\}$, e Bob misura lungo x , quindi nella base $\{|\uparrow_x\rangle_B, |\downarrow_x\rangle_B\}$. In tal caso è impossibile per Bob predire il suo risultato con certezza. Infatti, un calcolo diretto mostra che i due sistemi di autostati sono legati dalle relazioni:

$$|\uparrow_x\rangle_B = \frac{|\uparrow_z\rangle_A + |\downarrow_z\rangle_A}{\sqrt{2}}; \quad |\downarrow_x\rangle_B = \frac{|\uparrow_z\rangle_A - |\downarrow_z\rangle_A}{\sqrt{2}} \quad (2.9)$$

Da cui, sostituendo le espressioni (2.9) in (2.6) si dimostra che, a prescindere dalla misura di Alice, Bob può ottenere come risultati $[+\hbar/2, -\hbar/2]$ entrambi con probabilità $1/2$: in tal caso risulta impossibile prevedere con certezza l'esito della misura sul sistema B . Tuttavia, non appena Bob configura il suo dispositivo per misurare lungo la stessa direzione di Alice, il risultato diventa immediatamente definito e sempre opposto a quello misurato sul sistema A . Questo fenomeno suggerisce l'apparente propagazione istantanea di un'informazione tra il sistema A e il sistema B , come se un'interazione stesse viaggiando più velocemente della luce per garantire che la seconda particella assuma il corretto valore di spin lungo l'appropriato asse.

È fondamentale sottolineare che in questo esperimento non si verifica alcuna violazione dei principi della relatività speciale. Se i due amici si trovano in luoghi tra loro distanti e sono vietati i canali di comunicazione tradizionali, ciascuno dei due, dal proprio punto di vista, otterrà due possibili risultati con una certa probabilità, indipendentemente dall'allineamento degli assi di misura. In altre parole, l'apparente "spaventosa azione a distanza" si manifesta solo quando Alice e Bob possono comunicare in senso classico, confrontando i risultati ottenuti dagli esperimenti. Finchè i due amici sono tra loro "isolati", i risultati appaiono completamente random. Il principio di causalità relativistica è preservato poichè non esiste alcun modo per Alice e Bob di scambiare informazioni semplicemente manipolando gli assi di misura.

Capitolo 3

Il teorema di Bell

"What is proved by impossibility proof is lack of imagination"
John S. Bell

"Bell's theorem is the most profound discovery of science"
Henry P. Stapp

Dopo la pubblicazione dell'articolo EPR nel 1935, la comunità scientifica si trovò divisa tra due posizioni distinte. Da una parte c'erano i sostenitori delle idee proposte da EPR, che assecondavano la possibilità di una teoria delle variabili nascoste locali che potesse completare la descrizione dei fenomeni quantici in una prospettiva deterministica. Dall'altra c'erano i sostenitori dell'interpretazione ortodossa, che supportavano l'indeterminismo come caratteristica intrinseca ed irriducibile della teoria stessa. In questo contesto emerge il lavoro del fisico irlandese John Stewart Bell, il cui articolo del 1964 intitolato: *"Sul paradosso di Einstein, Podolski e Rosen"* [17] costituisce un momento decisivo. Fondando il suo ragionamento sui principi del realismo e di località, Bell si rese conto che qualsiasi teoria delle variabili nascoste dovesse confrontarsi con dei vincoli noti come *disuguaglianze di Bell*. Nonostante appoggiasse la visione della realtà proposta da Einstein, Bell dimostrò suo malgrado che le previsioni della meccanica quantistica, in particolari circostanze, eccedevano i vincoli imposti dalle disuguaglianze, concludendo un risultato di validità generale noto come *teorema di Bell*. Il grande merito di John Bell è stato esprimere la critica di EPR, di natura filosofica e concettuale, in una formulazione matematica precisa e, al contempo, sviluppare un approccio pratico per sottoporla a rigorose verifiche sperimentali.

3.1 La disuguaglianza di Bell

Il teorema di Bell può essere esposto come segue:

Nessuna teoria delle variabili nascoste locali è compatibile con le previsioni della meccanica quantistica

Per dimostrare il teorema di Bell, è necessario iniziare discutendo le disuguaglianze di Bell, ponendo particolare attenzione alle ipotesi su cui sono fondate.

Si definisca *definitezza controfattuale* il principio per cui le proprietà degli oggetti fisici sono considerate “pre-esistenti”, indipendenti dall’osservatore e non possono essere contraffatte durante il processo di misura, in linea con la visione di EPR. Spesso ci si riferisce all’intersezione tra i principi del realismo (inteso nel senso di definitezza controfattuale) e della località (di Einstein) con il nome di *realismo locale*.

Assumendo come ipotesi il realismo locale, la teoria auspicata da EPR si potrebbe definire una *teoria delle variabili nascoste locali deterministica*. La disuguaglianza di Bell a cui deve sottostare una teoria di questo tipo è data da:

$$P(A, B) + P(A, C) + P(B, C) \geq 1 \quad (3.1)$$

Di seguito si propone una dimostrazione estremamente semplice della disuguaglianza (3.1), tratta dall’articolo [18] ma concettualmente equivalente a quella di Bell del 1964.

Si considerino due oggetti fisici completamente identici, aventi le stesse proprietà A, B, C che possono assumere solo due valori (proprietà *binarie*). Ad esempio, se gli oggetti sono due monete, $A = 0$ potrebbe significare che la moneta è d’oro e $A = 1$ che la moneta è di rame (proprietà A : materiale); $B = 0$ potrebbe significare che la moneta è grande e $B = 1$ che la moneta è piccola (proprietà B : dimensione); $C = 0$ potrebbe significare che la moneta è brillante e $C = 1$ che la moneta è opaca (proprietà C : lucentezza). Si supponga che le monete sono custodite in due scatole, possedute da due amici Alice e Bob. I due amici non conoscono le proprietà delle monete, tuttavia, sanno che le scatole contengono due monete identiche: potrebbero essere due monete d’oro, piccole e brillanti ($A = 0, B = 1, C = 0$), oppure due monete d’oro, grandi e opache ($A = 0, B = 0, C = 1$) e così via... L’ignoranza di Alice e Bob sulle proprietà degli oggetti può essere quantificata dalla probabilità, ad esempio dall’aspettativa che hanno i due amici di ottenere la moneta che desiderano. In particolare, la disuguaglianza di Bell considera la probabilità congiunta che una proprietà del primo oggetto e una proprietà del

secondo oggetto assumono lo stesso valore. Considerando che Alice osserva la proprietà A e Bob osserva la proprietà B , con $P(A, B)$ si intende la probabilità che si verifichi l'evento $A = B$, quindi due monete d'oro grandi ($A = B = 0$) oppure due monete di rame piccole ($A = B = 1$). In formule:

$$P(A, B) = P(A_{Alice} = B_{Bob} = 0) + P(A_{Alice} = B_{Bob} = 1) \quad (3.2)$$

Ad esempio, se $P(A, B) = 1/2$ significa che c'è il 50% di probabilità che la proprietà A osservata da Alice e la proprietà B osservata da Bob sono tali che $A = B$. Inoltre, l'ipotesi per cui le due monete sono identiche implica la condizione:

$$P(A, A) = P(B, B) = P(C, C) = 1 \quad (3.3)$$

L'equazione (3.3) si riferisce al caso in cui Alice e Bob osservano la stessa proprietà. Considerando che i due amici osservano il materiale della moneta (proprietà A), l'equazione (3.2) diventa:

$$P(A, A) = P(A_{Alice} = A_{Bob} = 0) + P(A_{Alice} = A_{Bob} = 1) \quad (3.4)$$

Se Alice, aprendo la scatola, osserva una moneta d'oro, sicuramente sarà d'oro anche quella di Bob essendo le due monete identiche per ipotesi; in tal caso, il primo termine di (3.4) restituisce $P(A_{Alice} = A_{Bob} = 0) = 1$, mentre il secondo termine $P(A_{Alice} = A_{Bob} = 1) = 0$, da cui si ottiene $P(A, A) = 1$. Lo stesso è valido se i due amici osservano entrambi B o entrambi C ; qualunque sia l'esito dell'osservazione, uno dei termini di (3.2) si annulla mentre l'altro restituisce l'unità, dimostrando la condizione (3.3).

Similmente, si può immaginare di sostituire le due monete con due elettroni, che com'è noto sono tutti identici, e le tre proprietà binarie A, B, C (materiale, dimensione, lucentezza) con lo spin misurato lungo tre direzioni arbitrarie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Anche in questo caso, Alice e Bob non conoscono le proprietà degli elettroni, tuttavia sanno che tali proprietà "esistono" (ovvero hanno *definitezza controfattuale* per cui lo spin è già "up" oppure è già "down" anche se non è possibile osservarlo direttamente) e sono *locali*, per cui una misura di Alice non altera il risultato della misura ottenuto da Bob. A questo punto, Alice misura lo spin lungo \vec{a} ottenendo un risultato A , e Bob lungo \vec{b} ottenendo un risultato B . Si possono verificare due situazioni differenti, rappresentate nel caso (a) in figura 3.1:

- I) $A = B$, ovvero $(\uparrow_a \uparrow_b)$ oppure $(\downarrow_a \downarrow_b)$ con probabilità congiunta $P(A, B)$;
- II) $A \neq B$, ovvero $(\uparrow_a \downarrow_b)$ oppure $(\downarrow_a \uparrow_b)$ con probabilità congiunta $P(A, \bar{B})$.

Successivamente Bob misura lo spin lungo \vec{c} , ottenendo un risultato C . Si possono verificare quattro possibilità, riportate nel caso (b) di figura 3.1:

- I) $A = B = C$, ovvero $(\uparrow_a \uparrow_b \uparrow_c)$ oppure $(\downarrow_a \downarrow_b \downarrow_c)$ con probabilità congiunta $P(A, B, C)$;
- II) $A = B \neq C$, ovvero $(\uparrow_a \uparrow_b \downarrow_c)$ oppure $(\downarrow_a \downarrow_b \uparrow_c)$ con probabilità congiunta $P(A, B, \bar{C})$;
- III) $A = C \neq B$, ovvero $(\uparrow_a \downarrow_b \uparrow_c)$ oppure $(\downarrow_a \uparrow_b \downarrow_c)$ con probabilità congiunta $P(A, \bar{B}, C)$;
- IV) $A \neq B = C$, ovvero $(\uparrow_a \downarrow_b \downarrow_c)$ oppure $(\downarrow_a \uparrow_b \uparrow_c)$ con probabilità congiunta $P(A, \bar{B}, \bar{C})$.

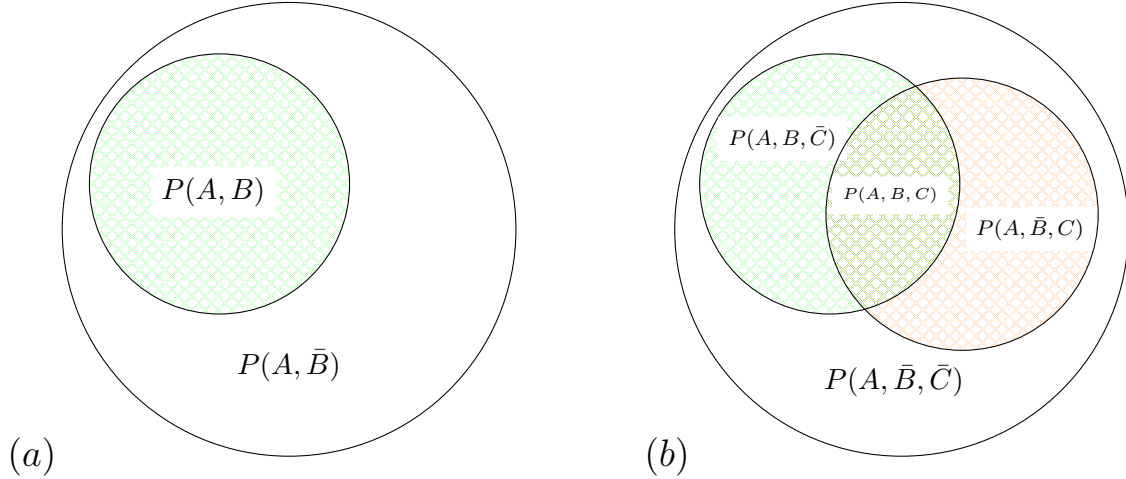


Figura 3.1: Probabilità rappresentate con dei diagrammi di Venn: a sinistra (caso (a)) è riportata la situazione dopo che Alice misura A e Bob misura B . Le due eventualità sono soggette alla condizione di normalizzazione $P(A, B) + P(A, \bar{B}) = 1$. A destra (caso (b)) è riportata la situazione dopo che Bob ha misurato C .

In quest'ultimo caso, le quattro eventualità sono soggette alla condizione di normalizzazione:

$$P(A, B, \bar{C}) + P(A, \bar{B}, C) + P(A, \bar{B}, \bar{C}) + P(A, B, C) = 1 \quad (3.5)$$

La probabilità congiunta di ottenere $A = B$, $A = C$ oppure $B = C$ è data rispettivamente da:

$$P(A, B) = P(A, B, C) + P(A, B, \bar{C})$$

$$P(A, C) = P(A, B, C) + P(A, \bar{B}, C)$$

$$P(B, C) = P(A, B, C) + P(A, \bar{B}, \bar{C})$$

Da cui è possibile calcolare la somma:

$$P(A, B) + P(A, C) + P(B, C) = P(A, B, \bar{C}) + P(A, \bar{B}, \bar{C}) + P(A, \bar{B}, C) + 3P(A, B, C) \quad (3.6)$$

Inserendo la condizione di normalizzazione (3.5) nell'espressione (3.6), segue la disuguaglianza (3.1) di Bell:

$$P(A, B) + P(A, C) + P(B, C) \geq 1$$

Bisogna notare che il precedente ragionamento non è valido se si rinuncia alla *definitezza controfattuale*: non è possibile dedurre la proprietà del secondo elettrone solo perchè si è misurato la *stessa* proprietà sul primo elettrone, anche se è noto per ipotesi che le due particelle sono identiche: senza definitezza controfattuale non è proprio possibile assegnare una proprietà al secondo elettrone finchè non è misurata. Il ragionamento fallisce anche se le proprietà sono *non locali*; ad esempio, se una misura dei valori di B o C sul secondo oggetto altera il valore di A misurato sul primo oggetto.

Si consideri adesso il caso della meccanica quantistica prendendo in esame il singoletto di spin, nel caso in cui sia Alice che Bob misurano lo spin lungo la direzione \vec{a} :

$$|\phi\rangle_{AB} = \frac{|\uparrow_a\rangle_A \otimes |\downarrow_a\rangle_B - |\downarrow_a\rangle_A \otimes |\uparrow_a\rangle_B}{\sqrt{2}} \quad (3.7)$$

Per calcolare la probabilità congiunta $P(A, B)$ è necessario esprimere lo stato (3.7) in termini un'altra base orientata lungo la direzione \vec{b} . Per farlo, si utilizza l'invarianza rotazionale degli operatori di spin. Si può dimostrare che, se θ_{ba} è l'angolo tra i due vettori di base lungo le direzioni \vec{a} e \vec{b} , allora:

$$|\uparrow_a\rangle = \cos(\theta_{ba}/2)|\uparrow_b\rangle + \sin(\theta_{ba}/2)|\downarrow_b\rangle \quad (3.8)$$

$$|\downarrow_a\rangle = \sin(\theta_{ba}/2)|\uparrow_b\rangle - \cos(\theta_{ba}/2)|\downarrow_b\rangle \quad (3.9)$$

Sostituendo (3.8) e (3.9) nell'equazione (3.7), lo stato di singoletto si può esprimere:

$$|\phi\rangle_{AB} = \frac{\sin(\theta_{ba}/2)}{\sqrt{2}}(|\uparrow_a\rangle \otimes |\uparrow_b\rangle - |\downarrow_a\rangle \otimes |\downarrow_b\rangle) + \frac{\cos(\theta_{ba}/2)}{\sqrt{2}}(|\uparrow_a\rangle \otimes |\downarrow_b\rangle - |\downarrow_a\rangle \otimes |\uparrow_b\rangle)$$

Pertanto la probabilità congiunta $P(A, B)$ è data da:

$$P(A, B) = P(\uparrow_a \uparrow_b) + P(\downarrow_a \downarrow_b) = 2 \left| \frac{\sin(\theta_{ba}/2)}{\sqrt{2}} \right|^2 = \sin^2(\theta_{ba}/2)$$

Si può dimostrare che lo stesso risultato è valido per $P(BC)$ e $P(AC)$. Sostituendo nella disuguaglianza (3.1):

$$P(A, B) + P(A, C) + P(B, C) = \sin^2(\theta_{ba}/2) + \sin^2(\theta_{ac}/2) + \sin^2(\theta_{cb}/2)$$

Si possono scegliere tre vettori complanari $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tali che $\theta_{ba} = \theta_{ac} = \theta_{cb} = 2\pi/3$. In questo modo si ottiene una violazione della disuguaglianza (3.1):

$$P(A, B) + P(A, C) + P(B, C) = \frac{3}{4} \leq 1 \quad (3.10)$$

Assumendo le ipotesi del realismo locale di EPR, si deduce che risulta impossibile per una teoria delle variabili nascoste *locali deterministiche* replicare le previsioni quantistiche in tutti i casi possibili. Tuttavia, resta aperta la questione se una teoria delle variabili nascoste locali di natura *probabilistica* possa rendere conto delle predizioni della meccanica quantistica. Per dimostrarlo, nello spirito dell'articolo originale di Bell, si può alleggerire le ipotesi di *definitezza controfattuale* e *località di Einstein*; anziché supporre che le proprietà degli oggetti fisici siano pre-esistenti, si può ipotizzare che non siano completamente determinate, ma che esista una variabile nascosta λ tale che le proprietà degli oggetti emergono dalla distribuzione di probabilità $P(\lambda)$. Tale ipotesi di “*esistenza di variabili nascoste probabilistiche*” è più debole della definitezza controfattuale. Infatti,

se le proprietà fossero pre-esistenti, la distribuzione di probabilità sarebbe triviale: esiste un valore λ_0 che determina unicamente la proprietà, pertanto la distribuzione restituisce $P(\lambda_0) = 1$ oppure $P(\lambda_0) = 0$, rispettivamente nel caso in cui la proprietà dell'oggetto è osservata oppure no. L'ipotesi di località di Einstein può essere alleggerita assumendo il *principio di fattorizzabilità di Bell*, spesso chiamato *località di Bell*, che può essere esposto come segue:

Principio di località (di Bell): *Le probabilità dei risultati delle misure sono indipendenti per due sistemi separati da una distanza di tipo spazio.*

Secondo Bell, la località è da intendersi come *indipendenza statistica* di misura tra sistemi distanti, e la spaventosa azione a distanza che tormentava Einstein è da intendersi come *correlazione statistica* tra misure su sistemi entangled. E' evidente come l'ipotesi di località di Bell sia più debole di quella di Einstein, dal momento che non giustifica il comportamento delle coppie entangled in una logica di causa-effetto. Negli anni successivi, nel tentativo di restaurare il principio di causalità, lo stesso Bell deduce il principio di fattorizzabilità a partire da un principio più generale detto *principio di causalità locale*. In sostanza, secondo Bell un rapporto di causa-effetto tra due eventi implica necessariamente una correlazione, ma il viceversa non è vero in generale: potrebbero esistere correlazioni a distanza tra le misure senza possibilità per le particelle di scambiarsi informazioni a velocità maggiori della luce. Inoltre, l'origine della correlazione è da ricercarsi in una "*causa comune*", appartenente al passato in cui i due sottosistemi hanno interagito.

“Ora la mia nozione intuitiva di causalità locale è che gli eventi nella [regione spazio-temporale] 2 non dovrebbero essere “cause” di eventi nella [regione separata di tipo-spazio] 1, e viceversa. Ma questo non significa che i due eventi debbano essere incorrelati, poiché potrebbero avere cause comuni nella sovrapposizione dei loro coni di luce retrostanti”

John S. Bell, [19] 1975.

3.2 La disuguaglianza CHSH

Il vincolo a cui deve sottostare una teoria delle variabili nascoste locali (nel senso di Bell) probabilistiche [20] è data da:

$$|S| \leq 2 \tag{3.11}$$

$$S = C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}') + C(\vec{a}', \vec{b}') + C(\vec{a}', \vec{b}) \tag{3.12}$$

dove la funzione C è detta *correlazione* tra le osservabili, definita come:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda)$$

con λ variabile continua appartenente allo spazio delle variabili nascoste Λ , e $\rho(\lambda)$ è la distribuzione di probabilità associata, soggetta alla condizione di normalizzazione:

$$\int_{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda = 1 \quad (3.13)$$

La disuguaglianza (3.11) è detta disuguaglianza di Bell generalizzata da Clauser, Horny, Simony, Holt, talvolta abbreviata in *disuguaglianza CHSH*. Questa versione della disuguaglianza di Bell ha avuto un ruolo fondamentale soprattutto per le realizzazioni sperimentali successive. Di seguito si propone una dimostrazione della disuguaglianza CHSH dovuta allo stesso Bell (1971) [21], in cui si utilizzano le ipotesi di *località di Bell*, e si sostituisce la definitezza controfattuale con l'ipotesi di *variabili nascoste probabilistiche*.

Sullo schema di EPR-Bohm si considerino due sperimentatori Alice e Bob tra loro distanti, che misurano lo spin lungo due direzioni differenti, rispettivamente \vec{a} per Alice e \vec{b} per Bob. Come risultati della misura possono ottenere α e β , ognuno con due possibili esiti che, senza perdita di generalità, si può assumere $\alpha, \beta = [+1, -1]$. Si vuole valutare la funzione di probabilità congiunta tra le misure di α e β , condizionate dalle scelte di \vec{a}, \vec{b} e dalla variabile nascosta λ , denotata con:

$$P(\alpha, \beta | \vec{a}, \vec{b}, \lambda) \quad (3.14)$$

Il valore di aspettazione del prodotto tra gli esiti $\alpha\beta$ è definito da:

$$E(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) = \sum_{\alpha, \beta} \alpha\beta P(\alpha, \beta | \vec{a}, \vec{b}, \lambda) \quad (3.15)$$

A questo punto si può applicare il *principio di fattorizzabilità*: la probabilità di ottenere i risultati α e β dipende solo dalla scelta *locale* di \vec{a} e \vec{b} rispettivamente, e da λ . Di conseguenza, la probabilità (3.14) può essere fattorizzata nei contributi indipendenti:

$$P(\alpha, \beta | \vec{a}, \vec{b}, \lambda) = P(\alpha | \vec{a}, \lambda) P(\beta | \vec{b}, \lambda)$$

Da cui, il valore di aspettazione (3.15) può essere separato in:

$$E(\vec{a}, \vec{b}, \lambda) = \sum_{\alpha} \alpha P(\alpha|\vec{a}, \lambda) \sum_{\beta} \beta P(\beta|\vec{b}, \lambda) = A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda)$$

Dal momento che $\alpha, \beta = [+1, -1]$ e la probabilità è un numero non negativo, le funzioni A e B sono limitate da:

$$|A(\vec{a}, \lambda)| \leq 1 \quad (3.16)$$

$$|B(\vec{b}, \lambda)| \leq 1 \quad (3.17)$$

Bell definisce la funzione di *correlazione* tra le osservabili A e B come:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \quad (3.18)$$

La relazione (3.18) può essere interpretata come il valore di aspettazione del prodotto $A \cdot B$, mediato sulle variabili nascoste λ (poichè, appunto, "nascoste") e pesato sulla distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$. In pratica, nell'equazione (3.18) si sta sfruttando l'ipotesi di *variabili nascoste probabilistiche*.

In realtà, nella relazione (3.18) è sottintesa un'altra ipotesi, chiarificata solo successivamente da Bell nell'articolo [22]. Nel caso più generale, la densità di probabilità $\rho(\lambda)$ potrebbe essere condizionata dalla scelta dei settaggi sperimentali \vec{a}, \vec{b} . Bell, nell'articolo originale, assume implicitamente che le direzioni di misura possono essere considerate variabili "libere" o "random", per cui la distribuzione di probabilità risulta indipendente da \vec{a}, \vec{b} :

$$\rho(\lambda|\vec{a}, \vec{b}) = \rho(\lambda) \quad (3.19)$$

Dal momento che la distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$ non dipende dalla scelta delle direzioni di misura, l'ipotesi (3.19) è spesso chiamata "*ipotesi della libera scelta*" (talvolta detta ipotesi di "*indipendenza di misura*" oppure di "*non-cospirazione*").

Tornando alla dimostrazione, si consideri il caso in cui Alice ha a disposizione la scelta di due direzioni di misura \vec{a} e \vec{a}' , e similmente Bob può scegliere tra \vec{b} e \vec{b}' . Si può calcolare la seguente differenza:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}') = \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}', \lambda)] \quad (3.20)$$

Aggiungendo e sottraendo la stessa quantità, il secondo membro di (3.20) può essere riscritto:

$$\int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) [1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda)] - \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}', \lambda) [1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda)]$$

Si può estrarre il valore assoluto di entrambi i membri e, applicando la disuguaglianza triangolare, la quantità $|C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}')|$ può essere maggiorata da:

$$\left| \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) [1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda)] \right| + \left| \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}', \lambda) [1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda)] \right|$$

Essendo tutte le funzioni integrande definite positive, il valore assoluto può essere spostato sotto il segno di integrale:

$$\int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \left| A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \right| \left| 1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda) \right| + \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \left| A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}', \lambda) \right| \left| 1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \right|$$

Applicando le proprietà di limitatezza (3.16) e (3.17), si ottiene:

$$|C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}')| \leq \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \left| 1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda) \right| + \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) \left| 1 \pm A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \right|$$

Equivalente a:

$$|C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}')| \leq 2 \pm \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda)] + \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda)]$$

Applicando la condizione di normalizzazione (3.13), si ottiene:

$$|C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}')| \leq 2 \pm C(\vec{a}', \vec{b}') + C(\vec{a}', \vec{b})$$

Equivalente a:

$$|C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}')| \leq 2 - |C(\vec{a}', \vec{b}') + C(\vec{a}', \vec{b})|$$

Applicando nuovamente la disuguaglianza triangolare:

$$|C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}') + C(\vec{a}', \vec{b}') + C(\vec{a}', \vec{b})| \leq |C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}')| + |C(\vec{a}', \vec{b}') + C(\vec{a}', \vec{b})| \leq 2$$

Segue la disuguaglianza CHSH (3.11):

$$|S| \leq 2$$

$$S = C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}') + C(\vec{a}', \vec{b}') + C(\vec{a}', \vec{b})$$

Adesso si consideri il caso della meccanica quantistica, nell'ipotesi che le due particelle siano preparate nel solito singoletto di spin (3.7). Per rappresentare le funzioni $A(\vec{a}, \lambda)$ e $B(\vec{b}, \lambda)$ si possono utilizzare le matrici di Pauli, in quanto proporzionali agli operatori di spin con autovalori $[+1, -1]$, proiettate sulla rispettiva direzione di misura \vec{a} e \vec{b} :

$$\begin{aligned} A(\vec{a}, \lambda) &= \hat{\sigma}_A \cdot \vec{a} \\ B(\vec{b}, \lambda) &= \hat{\sigma}_B \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Se θ_{ba} è l'angolo formato dai vettori \vec{a} e \vec{b} , si può dimostrare che il valore di aspettazione del prodotto $(\hat{\sigma}_A \cdot \vec{a}) \otimes (\hat{\sigma}_B \cdot \vec{b})$ nelle previsioni della meccanica quantistica è dato da:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \phi_{AB} | (\hat{\sigma}_A \cdot \vec{a}) \otimes (\hat{\sigma}_B \cdot \vec{b}) | \phi_{AB} \rangle = -\cos(\theta_{ba}) \quad (3.21)$$

Sostituendo (3.21) nell'espressione (3.12), ed imponendo che gli angoli formati tra $\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}'$ siano $\theta_{ba} = \theta_{ab'} = \theta_{b'a'} = \gamma$, con la condizione $\theta_{ba'} = \theta_{ba} + \theta_{ab'} + \theta_{b'a'} = 3\gamma$, si può stimare la correlazione quantistica con la formula:

$$|S_{QM}(\gamma)| = |\cos(3\gamma) - 3\cos(\gamma)|$$

Scegliendo $\gamma = \pi/4$, si ottiene la massima violazione della disuguaglianza CHSH (3.11):

$$|S_{QM}(\pi/4)| = 2\sqrt{2} \approx 2.828 \geq 2$$

Si può concludere che nessuna teoria delle variabili nascoste, sia essa deterministica o probabilistica, riesce a replicare le previsioni della meccanica quantistica in tutti i casi possibili. Secondo il teorema di Bell, una teoria realista e locale deve essere collocata su un piano diverso rispetto alla meccanica quantistica e non può essere considerata come il suo completamento. Tuttavia, è importante evidenziare che le previsioni quantistiche superano i vincoli imposti dalle disuguaglianze di Bell solo in casi specifici. Pertanto, non si può escludere del tutto l'esistenza di una teoria delle variabili nascoste, a condizione di rinunciare ad almeno uno dei principi considerati "scontati" come il realismo e la località. Per questo motivo, è importante sottoporre le previsioni di Bell a rigorose verifiche sperimentali e confrontarle nuovamente con quelle della meccanica quantistica.

Capitolo 4

Gli esperimenti sulla correlazione quantistica

"An experiment is a question which science poses to Nature and a measurement is the recording of Nature's answer"

Max Planck

Nonostante gli esperimenti per verificare la disuguaglianza di Bell (comunemente detti *Bell test*) hanno quasi sempre riportato una violazione della disuguaglianza confermando la meccanica quantistica, diverse critiche sono state rivolte negli anni, le cosiddette "*scappatoie*" (dall'inglese "loophole"), che miravano a mettere in dubbio la significatività dei risultati a partire dalle ipotesi su cui gli esperimenti erano stati progettati. Nei primi tentativi, risalenti all'inizio degli anni '70, i rivelatori che misuravano le osservabili erano impostati con gli stessi parametri \vec{a}, \vec{b} fissi per tutta la durata della misurazione. Dal momento che la scelta del parametro è inclusa nell'atto di misurare, in questa configurazione gli apparati di misura potrebbero "mettersi d'accordo" in anticipo, invalidando l'ipotesi di località di Bell e quindi l'isolamento dei due processi di misura. Questa critica è conosciuta come "*scappatoia di località*". Un altro problema era quello relativo alla scarsa produttività di coppie entangled, che in alcuni casi hanno richiesto fino ad una settimana di misure continue per completare gli esperimenti.

Per risolvere la scappatoia di località, nel 1976 il fisico francese Alain Aspect pubblicò un articolo dal titolo "*Proposta di esperimento per testare la non separabilità della meccanica quantistica*" [23], in cui proponeva una procedura molto meticolosa che potesse essere il più possibile decisiva. Nel suo articolo Aspect sottolinea che, nel misurare la correlazione tra le misure, bisogna dimostrare che queste sono dovute ad effetti quantistici e non ad effetti di comunicazione classici a velocità minori della luce, cercando di avvicinarsi il più possibile allo schema proposto da John Bell per garantire un'elevata significatività

dei risultati sperimentali ottenuti. Inoltre, la sorgente di particelle entangled deve essere molto efficiente per garantire la durata minore possibile dell'esperimento. Nei suoi esperimenti, Aspect utilizza la cascata radiativa del calcio come sorgente di coppie entangled, migliorando di ordini di grandezza la produttività di fotoni rispetto ai tentativi precedenti. L'atomo di calcio è eccitato con un laser di Krypton e, tornando allo stato fondamentale, emette una coppia di fotoni entangled che si propagano in direzioni opposte. Il vantaggio principale di utilizzare i fotoni sta nel fatto che i rivelatori possono essere realizzati a partire da semplici filtri polaroid oppure fotomoltiplicatori. Inoltre, nell'elaborazione della procedura sperimentale, Aspect mette in pratica la proposta di John Bell (contenuta nell'articolo originale del 1964) secondo cui le direzioni di misura sono da selezionare immediatamente prima della rilevazione dei fotoni, così da impedire qualsiasi forma di comunicazione tra i due apparati di misura.

4.1 L'esperimento di Alain Aspect

L'esperimento più importante è stato condotto nel 1982, da Alain Aspect in collaborazione con J. Dalibard e G. Roger [24], realizzato assumendo lo stesso schema della disuguaglianza di CHSH, in cui ognuno dei due rivelatori può misurare lungo due direzioni differenti, \vec{a} e \vec{a}' oppure \vec{b} e \vec{b}' . L'idea brillante è stata progettare degli interruttori ottici con cui cambiare la direzione dei fotoni durante il volo, dirigendoli alternativamente verso i rivelatori $I(\vec{a}), I(\vec{a}'), II(\vec{b}), II(\vec{b}')$. L'apparato sperimentale utilizzato da Aspect è mostrato in figura 4.1:

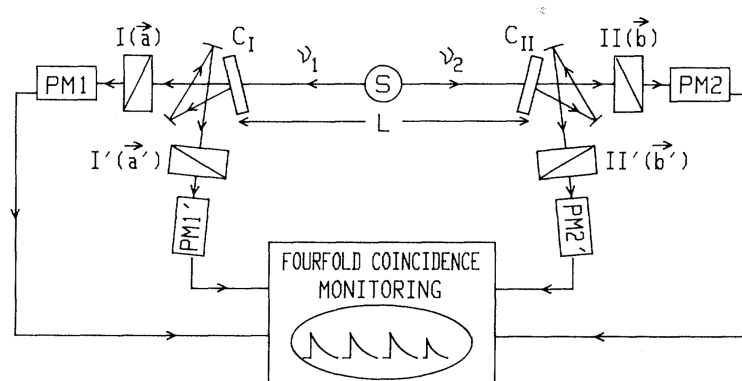


Figura 4.1: Schema dell'esperimento di Aspect [24]: In S è presente la sorgente di fotoni entangled ν_1, ν_2 . Entrambi si allontanano in direzioni opposte verso il corrispondente interruttore ottico C_I, C_{II} , che li dirige alternativamente verso due polarizzatori con asse orientato in diverse direzioni $I(\vec{a}), I(\vec{a}'), II(\vec{b}), II(\vec{b}')$. I fotoni che superano i test di polarizzazione sono quindi raccolti dai fotomoltiplicatori PM , che inviano un segnale al quadri-circuito di controllo delle coincidenze.

Ciascun interruttore ottico C_I, C_{II} si trova ad una distanza di $6m$ dalla sorgente, per cui il tempo richiesto ad un segnale per propagarsi alla velocità della luce da un interruttore all'altro è $L/c = 40ns$. Il funzionamento si basa sull'interazione dei fotoni con delle onde stazionarie prodotte in acqua. Due trasduttori elettroacustici posti agli estremi, generano due onde sonore in direzioni opposte ad una frequenza di $25MHz$, che interferiscono reciprocamente producendo onde stazionarie sulla superficie del liquido. I fotoni incidono nel dispositivo formando un angolo $\theta_B = 5 \cdot 10^{-3} rad$ rispetto ai fronti d'onda, che rappresenta l'angolo di Bragg per l'acqua. In questo modo, il fotone può procedere indisturbato se in quel punto l'ampiezza dell'onda è nulla, oppure essere deviato di un angolo $2\theta_B$ nel caso in cui l'ampiezza è massima. Queste due possibilità si alternano con un *tempo di commutazione* pari a $10ns$. Dal momento che la comunicazione tra gli apparati di misura impiega un tempo $L/c = 40ns$, molto maggiore sia del tempo di commutazione, sia della *vita media* della cascata radiativa (cioè la separazione temporale tra l'emissione dei due fotoni ν_1 e ν_2) pari a circa $5ns$, la rilevazione della prima particella e il corrispondente cambio di orientazione sulla seconda particella sono eventi separati da una distanza di tipo spazio, come previsto dal principio di località di Bell. Inoltre, i due interruttori ottici lavorano a due valori di frequenze leggermente diversi, in modo da ottenere una configurazione complessiva quasi-periodica e rendere pseudo-casuale la scelta delle direzioni di misura.

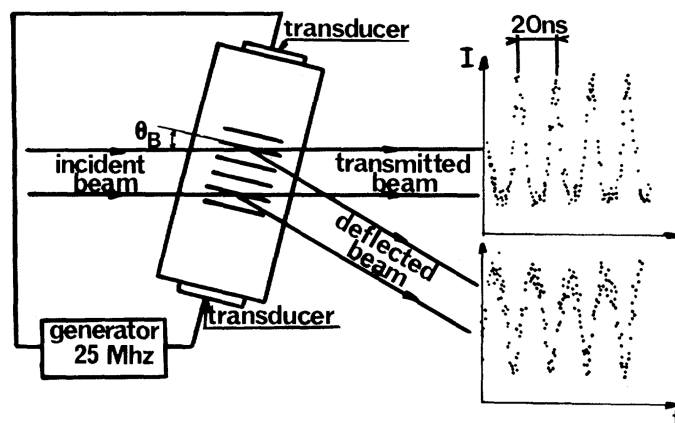


Figura 4.2: Interruttore ottico [24]: la luce incidente è commutata ad una frequenza doppia rispetto a quella acusto-elettrica, intorno ai $50MHz$, per diffrazione su un'onda ultrasonica stazionaria. A destra è riportata l'intensità di luce trasmessa e deflessa in funzione del tempo.

Dopo aver attraversato l'interruttore ottico, il fotone è sottoposto ad un test di polarizzazione; a valle di ogni filtro polarizzatore, un fotomoltiplicatore PM raccoglie i fotoni che hanno superato il test e produce un segnale destinato ad una successiva analisi da

parte del quadricircuito di controllo. Ogni canale del quadricircuito è progettato per contare le *coincidenze*, ovvero il numero di volte in cui i fotoni appartenenti alla stessa coppia sono rilevati nello stesso stato di polarizzazione, per ogni possibile combinazione di (\vec{a}, \vec{b}) , (\vec{a}', \vec{b}) , (\vec{a}, \vec{b}') , (\vec{a}', \vec{b}') .

L'esperimento di Aspect prevede il calcolo dei seguenti parametri, ognuno misurato in tre diverse configurazioni:

- (a) Esperimento con tutti e quattro i polarizzatori attivi. Il numero di coincidenze in questa configurazione è denotato $N(\vec{a}, \vec{b})$, $N(\vec{a}', \vec{b})$, $N(\vec{a}, \vec{b}')$, $N(\vec{a}', \vec{b}')$;
- (b) Esperimento con nessun polarizzatore attivo. Il numero di coincidenze in questa configurazione è denotato $N(\infty, \infty)$, $N(\infty', \infty)$, $N(\infty, \infty')$, $N(\infty', \infty')$;
- (c) Esperimento con un polarizzatore attivo su A e uno attivo su B. Il numero di coincidenze in questa configurazione è denotato $N(a, \infty)$, $N(\infty, b)$.

La disuguaglianza utilizzata da Aspect è una variante della disuguaglianza CHSH, riformulata per l'esperimento:

$$-1 \leq S \leq 0 \quad (4.1)$$

$$S = C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{b}') + C(\vec{a}', \vec{b}) + C(\vec{a}', \vec{b}') - C(\vec{a}) - C(\vec{b}) \quad (4.2)$$

I termini di (4.2) sono stimati come:

$$\begin{aligned} C(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{N(\vec{a}, \vec{b})}{N(\infty, \infty)}; & C(\vec{a}', \vec{b}) &= \frac{N(\vec{a}', \vec{b})}{N(\infty', \infty)}; & C(\vec{a}, \vec{b}') &= \frac{N(\vec{a}, \vec{b}')}{N(\infty, \infty')}; \\ C(\vec{a}', \vec{b}') &= \frac{N(\vec{a}', \vec{b}')}{N(\infty', \infty')}; & C(\vec{a}) &= \frac{N(\vec{a}, \infty)}{N(\infty, \infty)}; & C(\vec{b}) &= \frac{N(\infty, \vec{b})}{N(\infty, \infty)}. \end{aligned}$$

L'esperimento è stato eseguito scegliendo gli orientamenti dei polarizzatori in modo da massimizzare la violazione della disuguaglianza: $\theta_{ba} = \theta_{ab'} = \theta_{b'a'} = \pi/8$ con la condizione $\theta_{ba'} = \theta_{ba} + \theta_{ab'} + \theta_{b'a'} = 3\pi/8$. Il valore misurato sperimentalmente da Aspect è risultato essere:

$$S = 0.101 \pm 0.020 \quad (4.3)$$

Il risultato (4.3) contraddice la disuguaglianza (4.1) di 5 deviazioni standard. Inoltre, il valore atteso sulla base delle previsioni quantistiche è dato da $S_{QM} = 0.112$, compatibile con quello misurato sperimentalmente.

4.2 The BIG Bell Test

Nonostante l'esperimento di Aspect conduca a evidenze sperimentali convincenti, presenta almeno altre due scappatoie. La prima riguarda l'efficienza dei rivelatori, che sono effettivamente il punto debole della procedura; i filtri polaroid ed i fotomoltiplicatori utilizzati hanno una bassa efficienza, per cui solo una parte dei fotoni generati dalla sorgente è conteggiata realmente nell'analisi dati. Inoltre, non tutti i fotoni che attraversano il filtro raggiungono i fotomoltiplicatori posti a valle; in un'ipotesi remota ma non impossibile, la variabile nascosta potrebbe agire in modo tale che, mentre il sottoinsieme di fotoni rivelati manifesta correlazioni che violano la disuguaglianza di Bell, la totalità delle coppie generate continua ad essere descritta da una teoria realista e locale. Questo problema è noto come *"scappatoia di campionamento"*. La seconda scappatoia nel metodo sperimentale di Aspect riguarda la scelta delle direzioni di polarizzazione. Come detto, i due interruttori ottici sono impostati su frequenze leggermente diverse per rendere la configurazione asincrona, ma non realmente casuale; ciò significa che, ragionando in ottica deterministica, è teoricamente possibile conoscere la configurazione dei polarizzatori in un dato istante, se si conoscono le condizioni degli interruttori ottici all'inizio della raccolta dei dati. In un'eventualità molto remota ma non da escludersi, durante la preparazione dell'apparato sperimentale la sorgente di luce potrebbe scambiare informazioni sulla configurazione iniziale degli interruttori ottici; di conseguenza, i fotoni sarebbero "a conoscenza" delle direzioni di misura dei filtri polarizzatori in ogni istante successivo, comportando la perdita dell'indipendenza di Bell. Dal momento che ogni procedura di misura comprende al suo interno la scelta della direzione da selezionare, questo problema è spesso noto come *"scappatoia della libera scelta"*. Questa scappatoia sembrerebbe essere stata risolta nel 2016, grazie ad un'ampia collaborazione di gruppi scientifici di vari Paesi chiamata *"The BIG Bell Test"* [25], che ha reclutato oltre 100.000 partecipanti da tutto il mondo a prendere parte ad un videogioco online. L'obiettivo era incentivare i partecipanti a generare sequenze di numeri binari apparentemente casuali, trasmesse in tempo reale a 12 laboratori in cinque continenti, dove erano stati preparati 13 Bell test usando fotoni, atomi e dispositivi superconduttori. Il Big Bell Test è durato circa 12 ore, in cui sono state generate oltre 97 milioni di sequenze di bit casuali. I risultati hanno riportato nuovamente una violazione delle disuguaglianze di Bell in accordo con le previsioni della meccanica quantistica, facendo appello al libero arbitrio degli esseri umani per scegliere i parametri delle misure. Dopo il successo di questo progetto, è opinione diffusa che la scappatoia della libera scelta sia una questione definitivamente chiusa.

Tuttavia, vale la pena nominare che secondo alcuni fisici sostenitori del determinismo non esiste una soluzione a questa scappatoia: andando a ritroso nel tempo dal presente fino al Big Bang, tutte le particelle dell'Universo hanno potuto interagire condividendo una “*causa comune*” e violando l'ipotesi di indipendenza [26]. Secondo questa visione, l'Universo “conosce già” quale misura effettuerà lo sperimentatore e quale sarà il risultato. In tal caso, per ricondurre la meccanica quantistica al determinismo, il prezzo da pagare è la completa rinuncia al libero arbitrio; per questo ci si riferisce a tale visione con il nome di *super determinismo*. Come dichiarato da John Bell in un'intervista alla BBC:

”C'è un modo per sfuggire alle velocità superluminali e dell'azione spettrale a distanza, ma implica che il mondo sia super deterministico. Non solo la natura inanimata, ma noi sperimentatori che immaginiamo di poter scegliere di fare un esperimento piuttosto che un altro, siamo predeterminati. Se così fosse, allora ogni difficoltà creata dai risultati sperimentali, scompare.”

John S. Bell, [27] 1980.

4.3 La non località quantistica

A prescindere da qualsiasi tipo di obiezione, i risultati degli esperimenti parlano chiaramente. La scappatoia di località è stata risolta proprio grazie agli esperimenti di Aspect che, insieme a John Clauser e Anton Zeilinger, è stato insignito del Premio Nobel per la fisica nel 2022 “per esperimenti con fotoni entangled, stabilendo la violazione delle disuguaglianze di Bell e aprendo la strada alla scienza dell'informazione quantistica”. Nel 2013, un esperimento guidato da Anton Zeilinger [28] ha superato il problema della scappatoia di campionamento per i fotoni. Questo è stato possibile grazie all'utilizzo di rilevatori altamente efficienti che hanno garantito una rappresentazione accurata del campione di fotoni rilevati rispetto all'intero insieme di fotoni generati. Nel 2015 è stato realizzato il primo Bell test dichiarato “privo di scappatoie” [29], condotto da Bas Hensen in cui si misurava lo spin di elettroni separati da una distanza di $1.3km$. Numerosi esperimenti sono stati condotti negli anni, tuttavia dopo la violazione delle disuguaglianze riportate dal The Big Bell Test, la grande maggioranza della comunità scientifica ritiene che tutte le scappatoie siano state risolte, confermando sul piano fenomenologico la validità del teorema di Bell. Alla luce dei risultati sperimentali, ci si trova di fronte alla domanda fondamentale:

A quale tra le due ipotesi, del realismo e di località, è necessario rinunciare per replicare correttamente le previsioni della meccanica quantistica?

Non esiste una risposta univoca a questa domanda, poiché dipende dall'interpretazione della meccanica quantistica che si decide di adottare. Ad esempio, la tradizionale interpretazione di Copenaghen rifiuta il principio del realismo (inteso nel senso di *definitività controfattuale*) poiché non assegna alcun valore pre-esistente a misure non effettuate. La funzione d'onda è considerata un ente puramente matematico, uno strumento di calcolo privo di realtà fisica con cui è possibile prevedere le probabilità di una misura. Inoltre, pur preservando il principio di località di Einstein, la meccanica quantistica prevede l'esistenza di forti correlazioni a distanza tra particolari sistemi entangled (come lo stato di singoletto, incluso tra quelli generalmente noti come *stati di Bell*) che non possono essere spiegate in alcun modo dai principi usuali dell'informazione classica: è in questo modo che si manifesta la nuova caratteristica *non locale* della meccanica quantistica. È interessante notare che il dibattito sull'azione a distanza affonda le sue radici in fisica fin dai tempi di Isaac Newton, con la legge di gravitazione Universale. Infatti, il modello di Newton prevede che la forza di gravità possa esercitare un'azione non locale. Come espresse in una lettera a Bentley:

"È inconcepibile che la materia inanimata possa, senza la mediazione di qualcos'altro, che non è materiale, operare e influenzare altra materia senza contatto reciproco... Che la gravità possa essere innata, inerente ed essenziale alla materia, in modo che un corpo possa agire su un altro a distanza attraverso il vuoto, senza la mediazione di qualcos'altro, attraverso cui l'azione e forza possono essere trasmesse dall'una all'altra, è per me un'assurdità così grande che credo nessun uomo che abbia facoltà di pensiero in questioni filosofiche, potrà mai accettare. La gravità deve essere causata da un agente che opera costantemente secondo determinate leggi; ma se questo agente sia materiale o immateriale, l'ho lasciato alla considerazione dei miei lettori."

Isaac Newton, [30] 1692.

Un esempio di interpretazione non locale della meccanica quantistica è quella dovuta a David Bohm, che nel 1952 ha ripreso la teoria dell'*onda pilota* sviluppata da De Broglie, successivamente abbandonata in favore della più diffusa interpretazione di Copenaghen. La teoria di De Broglie-Bohm descrive i fenomeni quantici in ottica deterministica, dimostrando esplicitamente come la nuova caratteristica introdotta dalla meccanica quantistica sia la *non località* [31]. I punti essenziali su cui è fondata l'interpretazione di De Broglie-Bohm sono i seguenti:

- I) Ogni particella ha una posizione \vec{x} *definita* in ogni istante di tempo t anche se non direttamente osservabile, svolgendo quindi il ruolo di *"variabile nascosta"*.

II) Ad ogni particella è associato un campo d'onda $\Phi(\vec{x}, t)$ soluzione dell'equazione di Schrödinger, che svolge un ruolo essenziale per capire cosa è una particella e come si comporta.

Bohm esprime il campo d'onda di Schrödinger $\Phi(\vec{x}, t)$ nella forma:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \sqrt{\rho(\vec{x}, t)} e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}$$

dove ρ ed S sono funzioni reali. Si può dimostrare che, per un sistema di singola particella (con spin nullo), l'equazione di Schrödinger può essere separata in due equazioni accoppiate:

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho(\vec{x}, t) \frac{\nabla S(\vec{x}, t)}{m} \right) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\nabla S^2(\vec{x}, t)}{m} + V(\vec{x}, t) + Q(\vec{x}, t) = 0 \quad (4.5)$$

dove V è il potenziale classico e Q è un nuovo "potenziale quantico", definito da:

$$Q(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla \left(\sqrt{\rho(\vec{x}, t)} \right)}{\sqrt{\rho(\vec{x}, t)}} \quad (4.6)$$

L'equazione (4.4) rappresenta l'equazione di continuità per la densità di probabilità, a cui è associata una densità di corrente di probabilità \vec{J} espressa da:

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \frac{\nabla S(\vec{x}, t)}{m}$$

Riprendendo la formula classica della densità di corrente $\vec{J} = \rho \vec{v}$, si può ricavare un'espressione del campo di velocità \vec{v} associato alla particella:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\nabla S(\vec{x}, t)}{m} \quad (4.7)$$

La (4.5) rappresenta una nuova versione dell'equazione di Hamilton-Jacobi. Nel limite classico ($\hbar \rightarrow 0$), il potenziale quantico (4.6) può essere trascurato, e quindi (4.5) si

riduce all'equazione classica di Hamilton-Jacobi per una particella sottoposta all'azione del potenziale ordinario V . La novità proposta da Bohm è che, più in generale, sulla particella agisce anche il potenziale quantico Q , che dipende dall'ampiezza ρ del campo di Schrödinger $\Phi(\vec{x}, t)$. Ad esempio, nel fenomeno di interferenza nell'esperimento della doppia fenditura, il fatto che nessun elettrone arrivi nei punti in cui la funzione d'onda è nulla, si spiega semplicemente con il valore infinito del potenziale (4.6), che respinge la particella allontanandola dai punti in cui $\rho = 0$. Una tale spiegazione è resa possibile semplicemente accostando al concetto di particella quello di campo ondulatorio $\Phi(\vec{x}, t)$, e mettendo in relazione questi due concetti attraverso il potenziale quantico Q . Anche se sono state introdotte alcune novità non classiche come il potenziale quantico, nel caso di singola particella non c'è ancora nulla di estraneo alla struttura concettuale della fisica classica, che coinvolge le nozioni di base quali spazio, tempo, causalità, localizzabilità della materia, etc. . . È solo cercando di comprendere un sistema a molte particelle che la meccanica quantistica mostra la necessità di una soluzione radicalmente nuova.

Considerando un sistema composto da N particelle descritte dalle coordinate $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ il nuovo campo di Schrödinger diventa $\Phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$, ovvero una funzione definita nello spazio delle coordinate multidimensionale di tutte le particelle del sistema. Il potenziale quantico diventa invece $Q(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$, dando origine ad una "forza a molti corpi", cioè un'interazione che non può essere ridotta ad una somma di termini, uno per ogni coppia; piuttosto, l'interazione tra due particelle qualsiasi dipende dall'interazione fra tutte le altre, per cui sistemi distanti possono ancora avere un'interconnessione forte e diretta. Inoltre, il potenziale quantico non può essere espresso come una funzione universalmente determinata delle coordinate $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$, ma dipende dall'ampiezza del campo d'onda $\Phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$, quindi dallo "stato quantico" del sistema nel suo complesso. Più in generale, questa relazione può dipendere dagli stati quantici di sistemi ancora più grandi, fino ad estendersi all'Universo nella sua totalità.

L'interpretazione di De Broglie-Bohm riesce a replicare correttamente i dati sperimentali al pari dell'interpretazione di Copenaghen. Inoltre, la meccanica bohmiana non prevede alcun "problema della misura": la regola di Born ed il postulato di riduzione sono condensate in un unico assunto detto *ipotesi di equilibrio quantico*. In figura 4.3 sono mostrate 100 possibili traiettorie di un elettrone nell'esperimento della doppia fenditura.

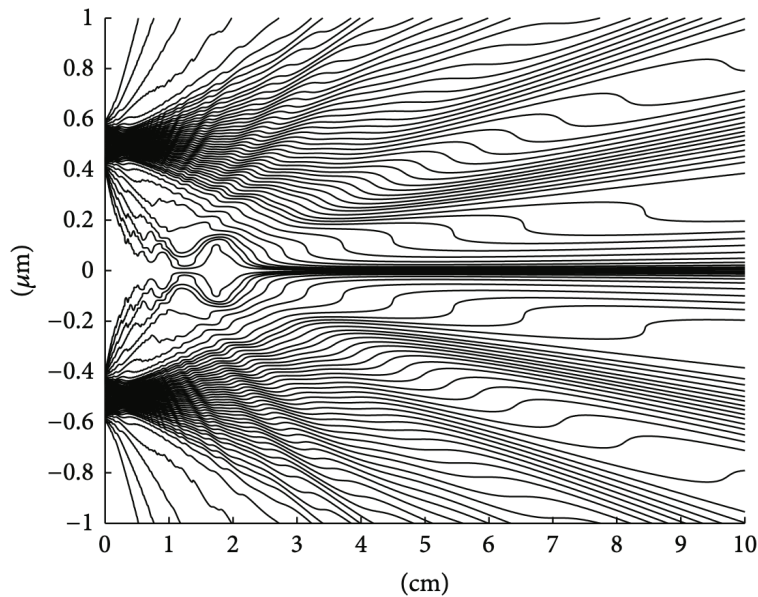


Figura 4.3: Simulazione numerica dell'esperimento della doppia fenditura [32], eseguito da Jönsson nel 1961.

John Bell rimase impressionato dall'approccio di Bohm, che fu tra le principali ispirazioni per dimostrare il suo omonimo teorema.

"Nel 1952 ho visto l'impossibile realizzarsi. Era negli articoli di David Bohm. Bohm mostrò esplicitamente come nuovi parametri possano essere introdotti nella meccanica ondulatoria non relativistica, con l'aiuto dei quali la descrizione indeterministica potrebbe essere trasformata in deterministica. Ancora più importante, a mio avviso, la soggettività della versione ortodossa, il necessario riferimento all'osservatore, potrebbe essere eliminato".

John S. Bell, [33] 1980.

A proposito della caratteristica esplicitamente non locale della teoria, John Bell dichiarava:

"Il fatto che l'onda guida, nel caso generale, si propaghi non nell'ordinario spazio tridimensionale ma in uno spazio a configurazione multidimensionale è l'origine della famigerata non-località della meccanica quantistica. È merito della versione di De Broglie-Bohm quello di far emergere questo punto in modo così esplicito da non poterlo ignorare."

John S. Bell, [34] 1982.

Bisogna chiarire che le considerazioni precedenti sull'interpretazione di Bohm valgono solo nel caso non relativistico: il tempo t nelle equazioni (4.5) e (4.4) è quello assoluto della fisica classica, ed è lo stesso per tutte le particelle. Le principali critiche rivolte alla meccanica bohmiana riguardano il fatto che la non località sia requisito molto esplicito della teoria, il che rende estremamente impegnativa la sua riconciliazione con i principi della relatività [35].

Per concludere, spesso si dice che Einstein sia uscito sconfitto nel dibattito contro Bohr, e in effetti il teorema di Bell esclude la possibilità di completare la teoria in termini di realismo e località. Tuttavia, è doveroso sottolineare che solo grazie al paradosso EPR è stato possibile evidenziare alcuni aspetti critici della meccanica quantistica, permettendo negli anni successivi di indagare e sviluppare una conoscenza più profonda della teoria. In particolare, l'articolo EPR ha spinto la comunità scientifica a esplorare se (e come) sia possibile conciliare la non località con i principi della relatività speciale. Oltre al principio di causalità locale formulato da Bell, nell'ambito dell'informazione quantistica sono stati ricavati formalmente i teoremi di *no-cloning* e *no-signaling*, che assicurano l'impossibilità di trasmettere informazioni a velocità superluminali sfruttando le correlazioni tra sistemi entangled. Attualmente, la meccanica quantistica è l'unica teoria in grado di gestire coerentemente i principi di causalità relativistica e non località, apparentemente inconciliabili. Inoltre, l'interpretazione di Bohm è il chiaro esempio di come una teoria delle variabili nascoste che riproduca le previsioni della meccanica quantistica (almeno nel caso non relativistico) sia, tuttavia, possibile.

Bibliografia

- [1] Lev Davidovich Landau and Evgenii Lifshits. *Mechanics*, volume 1. Butterworth-Heinenann, (1976).
- [2] Pierre-Simon Laplace. *A philosophical essay on probabilities*. Courier Corporation, (2012).
- [3] Max Planck. On the law of the energy distribution in the normal spectrum. *Ann. Phys*, 4(553):1–11, 1901.
- [4] Albert Einstein. Concerning an heuristic point of view toward the emission and transformation of light. *American Journal of Physics*, 33(5):367, 1965.
- [5] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. Feynman lectures on physics. Volume 3: Quantum mechanics. *Reading*, 1965.
- [6] Akira Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, and H. Ezawa. Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern. *American Journal of Physics*, 57(2):117–120, 1989.
- [7] Pier Giorgio Merli, Gian Franco Missiroli, and Giulio Pozzi. Electron interferometry with the Elmiskop 101 electron microscope. *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, 7(9):729, 1974.
- [8] Erwin Schrödinger. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical review*, 28(6):1049, 1926.
- [9] Werner Heisenberg. The actual content of quantum theoretical kinematics and mechanics. Technical report, 1983.
- [10] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, (2010).
- [11] Albert Messiah. *Quantum mechanics*. Courier Corporation, (2014).
- [12] Albert Einstein. Time, space, and gravitation. *Science*, 51(1305):8–10, 1920.

- [13] Mathias Frisch. Principle or constructive relativity. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 42(3):176–183, 2011.
- [14] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47(10):777, 1935.
- [15] Gerd Christian Krizek and Lukas Mairhofer. Notions of completeness in the EPR discussion. *Entropy*, 25(4):585, 2023.
- [16] David Bohm and Yakir Aharonov. Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. *Physical Review*, 108(4):1070, 1957.
- [17] John Stewart Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physica Physique Fizika*, 1(3):195, 1964.
- [18] Lorenzo Maccone. A simple proof of Bell’s inequality. *American Journal of Physics*, 81(11):854–859, 2013.
- [19] John Stewart Bell. The theory of local beables. Technical report, 1975.
- [20] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical review letters*, 23(15):880, 1969.
- [21] John Stewart Bell. Introduction to the hidden-variable question. Technical report, 1971.
- [22] John Stewart Bell. La nouvelle cuisine. In *Quantum Mechanics, High Energy Physics And Accelerators: Selected Papers Of John S. Bell (With Commentary)*, pages 910–928. World Scientific, 1995.
- [23] Alain Aspect. Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics. *Physical review D*, 14(8):1944, 1976.
- [24] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of Bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Physical review letters*, 49(25):1804, 1982.
- [25] C. Abellán, A. Acín, A. Alarcón, O. Alibart, C. K. Andersen, F. Andreoli, et al. Challenging local realism with human choices. *Nature*, 557(7704):212–216, 2018.
- [26] Natalie Wolchover et al. The universe is as spooky as Einstein thought. *The Atlantic*, 2017.

- [27] Paul Charles William Davies and Julian R. Brown. *The ghost in the atom: a discussion of the mysteries of quantum physics*. Cambridge University Press, (1993).
- [28] Marissa Giustina, Alexandra Mech, Sven Ramelow, Bernhard Wittmann, Johannes Kofler, Jörn Beyer, Adriana Lita, Brice Calkins, Thomas Gerrits, Sae Woo Nam, et al. Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption. *Nature*, 497(7448):227–230, 2013.
- [29] Bas Hensen, Hannes Bernien, Anaïs E. Dréau, Andreas Reiserer, Norbert Kalb, Machiel S. Blok, Just Ruitenberg, Raymond F.L. Vermeulen, Raymond N. Schouten, Carlos Abellán, et al. Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*, 526(7575):682–686, 2015.
- [30] I. Bernard Cohen. *Isaac Newton’s papers letters on natural philosophy and related documents*. Harvard University Press, (1978).
- [31] David J. Bohm and Basil J. Hiley. On the intuitive understanding of nonlocality as implied by quantum theory. *Foundations of Physics*, 5:93–109, 1975.
- [32] Michel Gondran and Alexandre Gondran. Measurement in the De Broglie-Bohm interpretation: double-slit, Stern-Gerlach, and EPR-B. *Physics Research International*, 2014, 2014.
- [33] John Stewart Bell. De Broglie-Bohm, delayed-choice, double-slit experiment, and density matrix. *International Journal of Quantum Chemistry*, 18(S14):155–159, 1980.
- [34] John Stewart Bell. On the impossible pilot wave. *Foundations of Physics*, 12:989–999, 1982.
- [35] Oliver Passon. Why isn’t every physicist a Bohmian? *Zentralinstitut für angewandte Mathematik Forschungszentrum Jülich*, 2004.