

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

STUDIO DEL FENOMENO DI GIBBS

Tesi di Laurea in Complementi di Analisi

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Annamaria Montanari

Presentata da:
Caterina Valli

Anno Accademico 2022-2023

Indice

Introduzione	1
1 Analisi di Fourier	3
1.1 Polinomi e serie di Fourier	3
1.2 Convergenza puntuale delle serie di Fourier	7
1.3 Integrazione termine a termine della serie di Fourier	11
1.4 Convergenza uniforme delle serie di Fourier	12
1.5 Convergenza della serie di Fourier in L^2	14
2 Il fenomeno di Gibbs	17
2.1 Onda quadra	17
2.2 Onda a dente di sega	23
2.3 Studio generale del fenomeno di Gibbs	25
3 Una soluzione al fenomeno di Gibbs	27
3.1 Serie di Fejér	27
3.2 Nucleo di Fejér	29
3.3 Convergenza della serie di Fejér	31
3.4 Eliminazione dell'effetto Gibbs	32
4 Appendice: codici Matlab	37

Introduzione

In questo elaborato si fornisce, in termini matematici, una spiegazione del fenomeno di Gibbs. Il fenomeno di Gibbs prende il nome dal matematico statunitense Josiah Willard Gibbs che ne diede una descrizione precisa nel 1898 sulla rivista *Nature*. Non fu, però, il primo matematico a studiare questo problema. Infatti precedentemente, nel 1848, il matematico inglese Henry Wilbraham notò la presenza di forti oscillazioni nei polinomi di Fourier di una funzione che presenta punti di discontinuità di prima specie. Si osserva che le anomalie causate da questo fenomeno sono presenti in prossimità dei punti di discontinuità e non tendono a diminuire nemmeno aumentando il grado del polinomio di Fourier con cui si va ad approssimare la funzione. Questo fa pensare che la serie non converga alla funzione sviluppata. Questo fenomeno, però, scompare se si utilizzano altri polinomi trigonometrici, ovvero quelli di Fejér. Nonostante questi ultimi facciano scomparire questo effetto di sovraoscillazioni, spesso si preferisce comunque utilizzare i polinomi di Fourier per rappresentare una funzione perché sono i polinomi trigonometrici che meglio approssimano la funzione in norma quadratica.

Questo fenomeno è tutt'ora molto studiato in analisi dei segnali e in ingegneria, in quanto nella ricostruzione di onde sonore che presentano interruzioni, e quindi punti di discontinuità, tramite i polinomi di Fourier non è possibile ricostruire in modo accurato il segnale e quindi la precisione di approssimazione viene influenzata da tale effetto.

La trattazione di questo fenomeno nell'elaborato presentato è stata divisa in tre capitoli. Il primo capitolo è suddiviso in quattro sezioni. Nella prima si vanno a definire i polinomi di Fourier e si dimostra che tra tutti i polinomi trigonometrici sono quelli che minimizzano l'errore in norma quadratica. Si fornisce successivamente la rappresentazione integrale dei polinomi di Fourier tramite la definizione del nucleo di Dirichlet. Nella seconda sezione si studia la convergenza puntuale delle serie di Fourier grazie al teorema di localizzazione di Riemann e alla definizione delle funzioni regolari a tratti. Nella terza sezione viene studiata l'integrazione termine a termine della serie di Fourier tramite la definizione delle funzioni a variazione limitata. Successivamente nella quarta e nella quinta sezione si parla rispettivamente di convergenza uniforme delle serie di Fourier passando attraverso la definizione di funzione assolutamente continua e di convergenza di queste serie nello spazio L^2 . Nel secondo capitolo si studia il fenomeno di Gibbs considerando inizialmente due funzioni: l'onda quadra e l'onda semitriangolare, per poi dare una spiegazione più generale di tale fenomeno. Nel terzo ed ultimo capitolo viene data una soluzione al fenomeno di Gibbs definendo le

somme di Fejér, grazie alle quali l'effetto di sovraoscillazione in prossimità dei punti di discontinuità scompare. Viene definito il nucleo di Fejér tramite il quale si possono scrivere i polinomi di Fejér in forma integrale e viene poi studiata la convergenza di tali somme definendo la convergenza secondo Cesaro. Si arriva così alla conclusione in cui si dimostra, in termini matematici, che il fenomeno di Gibbs non si presenta se si utilizzano tali somme.

Nell'appendice dell'elaborato sono riportati alcuni dei codici Matlab che sono stati utilizzati per creare i grafici presenti.

Capitolo 1

Analisi di Fourier

1.1 Polinomi e serie di Fourier

Prima di dare la definizione di polinomio di Fourier richiamiamo le definizioni di polinomio trigonometrico e di serie trigonometriche che risultano estremamente utili nell'analisi di fenomeni periodici.

Definizione 1. Diciamo che una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è un *polinomio trigonometrico* se la possiamo scrivere come combinazione lineare di seni e coseni, ovvero se

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right)$$

dove $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Diciamo che f ha grado n se a_n e b_n non sono entrambi nulli.

Per $k \rightarrow +\infty$ si definisce

$$s_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right)$$

una *serie trigonometrica*.

Definizione 2. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Definiamo il *polinomio di Fourier* di f di grado $n \in \mathbb{N}$, il polinomio trigonometrico reale

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right)$$

dove i coefficienti a_0, a_k e b_k dipendono da f e sono definiti nel modo seguente:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$$

Questi sono detti *coefficienti di Fourier* e si ricavano dalla definizione di polinomio trigonometrico tramite le formule di addizione e di prostaferesi trigonometriche. Osserviamo che tali coefficienti sono ben definiti siccome la funzione f è sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ e $|\cos kt| \leq 1$ e $|\sin kt| \leq 1$, quindi l'integrale risulta essere $< +\infty$.

La seguente disuguaglianza, che prende il nome di disuguaglianza di Bessel, ci permette di dimostrare che tra tutti i polinomi trigonometrici quello che meglio approssima una funzione $f \in L^2([-\pi, \pi])$ è il polinomio di Fourier.

Teorema 1 (Disuguaglianza di Bessel). *Sia f 2π -periodica e $f \in L^2([-\pi, \pi]) \implies \|S_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$*

Si ha come conseguenza di questa disuguaglianza il seguente teorema:

Teorema 2. *Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$, $\forall p \in T_n$ ¹ vale*

$$\|S_n(f) - f\|_2 \leq \|p - f\|_2$$

Dimostrazione

Sia $U = \{1, \cos kt, \sin kt | k = 1, \dots, n\}$ un insieme che costituisce una base ortogonale per T_n , siccome i suoi elementi sono a due a due ortogonali. Allora sia

$$U^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

una base ortonormale di T_n .

$$\text{Sia } S_n(f) = \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle e_k \quad \text{con } e_k \in U^*$$

$$\forall p \in T_n \text{ poniamo } p = \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k \quad \text{con } c_k \in \mathbb{R} \implies$$

$$\begin{aligned} \text{Ricordiamo che } \|p\|_2^2 &= \left\langle \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k, \sum_{m=0}^{2n} c_m e_m \right\rangle = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{m=0}^{2n} c_k c_m \langle e_k, e_m \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 \end{aligned}$$

$$\text{e che } \langle p, f \rangle = \sum_{k=0}^{2n} c_k \langle e_k, f \rangle$$

Allora consideriamo

$$\|p - f\|_2^2 = \|p\|_2^2 - 2 \langle p, f \rangle + \|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \langle e_k, f \rangle + \|f\|_2^2 \quad (1.1)$$

e

$$\|S_n(f) - f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{2n} (\langle f, e_k \rangle)^2 \quad (1.2)$$

¹ T_n indica l'insieme dei polinomi trigonometrici $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di grado $\leq n$

Confrontiamo l'equazione (1.1) con l'equazione (1.2) e si ha:

$$\sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \langle e_k, f \rangle + \|f\|_2^2 \geq \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{2n} (\langle f, e_k \rangle)^2$$

Questo si ha $\iff \sum_{k=0}^{2n} (c_k^2 - 2 \langle e_k, f \rangle + (\langle f, e_k \rangle)^2) \geq 0$

Ma $\sum_{k=0}^{2n} (c_k - \langle f, e_k \rangle)^2 \geq 0$ vale sempre. \square

Quindi com'è stato dimostrato dai teoremi precedenti, tra tutti i polinomi trigonometrici, i polinomi di Fourier minimizzano l'errore in norma quadratica.

Vogliamo ora dare una rappresentazione integrale dei polinomi di Fourier e per farlo si deve definire il nucleo unitario di Dirichlet.

Definizione 3. Definiamo come *n-esimo nucleo di Dirichlet* il polinomio trigonometrico di grado n:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Andando ad integrare questo polinomio trigonometrico nell'intervallo $[0, \pi]$ otteniamo:

$$\int_0^\pi D_n(t) dt = \int_0^\pi \frac{1}{2} dt + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos kt dt = \frac{\pi}{2}$$

Vediamo quindi alcune proprietà di cui gode il nucleo di Dirichlet:

- è un nucleo unitario, infatti $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) dt = 1$;
- è 2π - periodico ed è pari;
- si può scrivere anche in forma chiusa $\forall t \in]0, \pi[$ e risulta

$$D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}$$

Dimostriamo che questa scrittura sia ben definita, consideriamo

$$D_n(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos kt =$$

utilizzando le formule di prostaferesi si ottiene

$$= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\sin((k+1)t) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)t\right) \right) =$$

si semplificano tutti i termini tranne l'ultimo, quindi si ha

$$= \frac{1}{2} \left(\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \right)$$

□

Osserviamo nelle figure che seguono come varia il nucleo di Dirichlet per n fissati:

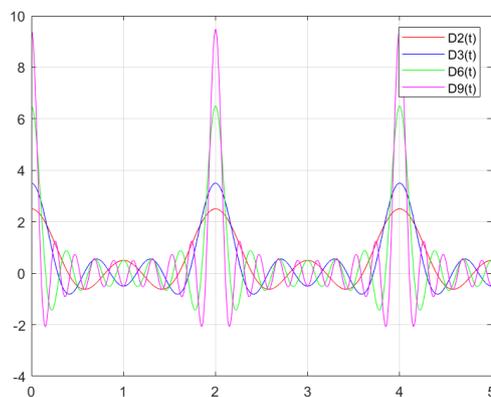


Figura 1.1: Grafico del nucleo di Dirichlet

Ora grazie alla definizione precedente e alla seguente proposizione possiamo scrivere i polinomi di Fourier in forma integrale

Proposizione 1. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1([-\pi, \pi]) \implies$

$$S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Questo risultato sarà molto utile quando parleremo di convergenza puntuale delle serie di Fourier.

Notiamo che per passare dal polinomio di Fourier di grado n a quello di grado $n+1$, è semplicemente necessario aggiungere due termini alla sommatoria:

$$a_{n+1} \cos((n+1)t) + b_{n+1} \sin((n+1)t)$$

Infatti la successione (S_n) dei polinomi di Fourier si presenta in modo naturale come una serie.

Definizione 4. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1([-\pi, \pi])$, si definisce *serie di Fourier di f* la serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Si presenta di conseguenza il problema di sapere se la serie di Fourier di una data funzione f converga, e in che modo, alla funzione che l'ha generata, cioè ci si chiede se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0$. Passiamo quindi allo studio della convergenza delle serie di Fourier.

1.2 Convergenza puntuale delle serie di Fourier

In questo paragrafo andremo inizialmente a studiare il concetto di convergenza puntuale per le serie di Fourier, poi in seguito affronteremo il concetto di convergenza uniforme.

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica con $f \in L^1([-\pi, \pi])$ e sia $S_n(f)(t)$ il polinomio di Fourier di f . Diciamo che:

- se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t)$ la serie di Fourier *converge puntualmente* in $t \in \mathbb{R}$;
- f è *svilupabile in serie di Fourier* nel punto $t \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = f(t)$.

Osserviamo che il concetto di convergenza puntuale della serie di Fourier di una funzione f assegnata è differente da quello di svilupabilità di f in serie di Fourier. Infatti se la serie di Fourier converge per ogni $t \in [-\pi, \pi]$, essa converge di conseguenza per ogni x reale siccome le somme parziali sono funzioni 2π -periodiche. In particolare si avrà che la somma $S(f)(t)$ sarà tale che $S(f)(-\pi) = S(f)(\pi)$ siccome anch'essa è 2π -periodica. Non è detto, però, che la somma sia la funzione assegnata f perchè se non soddisfa la condizione $f(-\pi) = f(\pi)$ non c'è possibilità che la serie di Fourier converga ad f nei punti $t = -\pi$ e $t = \pi$. Notiamo che la serie di Fourier di f non cambia se f stessa viene alterata in un insieme di punti che abbia misura di Lebesgue nulla. Questo perchè una tale alterazione non muta gli integrali che definiscono i coefficienti di Fourier di f e quindi non si modifica la serie di Fourier.

Da qui si deduce che la convergenza puntuale della serie di Fourier, in caso di convergenza, dipende dal comportamento locale di f , quindi in un intorno del punto t . Quindi vogliamo ricavare delle condizioni che ci garantiscano la convergenza puntuale della serie di Fourier. Per fare ciò ricorre utile il seguente teorema.

Teorema 3 (di localizzazione di Riemann). *Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica con $f \in L^1([-\pi, \pi])$.*

Supponiamo che $\exists c \in]0, \pi[/ g(s) = \left(\frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{1}{s}$ con $g \in L^1(]0, c[)$
 $\implies S_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Dimostrazione

Fissiamo $c \in]0, \pi[/ g \in L^1(]0, c[)$. Scriviamo la serie di Fourier in forma integrale rappresentando il nucleo di Dirichlet in forma chiusa:

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) - \lambda &= \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{2 \sin\left(\frac{s}{2}\right)} ds = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \left(\frac{1}{2 \sin\left(\frac{s}{2}\right)} - \frac{1}{s} \right) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds = \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Vediamo che $I_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ perchè si ha che

$$\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda$$

è $L^1([-\pi, \pi])$ siccome $f \in L^1([-\pi, \pi])$ e la quantità

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)s} - \frac{1}{s} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$$

Vediamo che

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi \frac{2}{\pi} g(s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) s ds = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^c g(s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds + \int_c^\pi g(s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds \right) \end{aligned}$$

Entrambi gli integrali tendono a zero per $n \rightarrow \infty$ per il Lemma di Reimann-Lebesgue,

ovvero che se $f \in L^1(]a, b[) \implies \exists \lim_{|M| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(Mt) dt = 0$ \square

Ora vogliamo trovare un valore di λ dando condizioni direttamente su f in modo tale che la funzione g , definita come nell'enunciato del teorema precedente, sia sommabile vicino all'origine.

Definizione 5. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Definiamo la *media del limite* da destra e da sinistra di f in $t \in \mathbb{R}$ il valore

$$f^*(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

dove

$$f(t^+) = \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t + s)$$

e

$$f(t^-) = \lim_{s \rightarrow 0^-} f(t - s)$$

Allora ponendo $\lambda := f^*(t)$ vogliamo far vedere che

$$g(s) = \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{1}{s}$$

sia sommabile vicino all'origine. La quantità tra parentesi si comporta come s^α con $0 < \alpha \leq 1$. Allora $g(s)$ si comporta come $\frac{1}{s^{1-\alpha}}$ che sappiamo essere sommabile vicino all'origine. Enunciamo allora il seguente teorema.

Teorema 4 (di Dini). Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica con

$f \in L^1([-\pi, \pi])$. Supponiamo che $\exists f^*(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$. Inoltre supponiamo che

$\exists c > 0 / G(s) = \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{1}{s} \in L^1(]0, c[)$

$$\implies S_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^*(t) \tag{1.3}$$

Notiamo che se f è continua e verifica (1.3) allora si ha che $f^*(t) = f(t)$.

Dimostrazione

Si applica semplicemente il teorema di localizzazione di Riemann ponendo $\lambda = f^*(t)$. \square

Il seguente criterio ci fornirà una condizione aggiuntiva che, nel caso fosse verificata, ci garantisce che la serie di Fourier di un'assegnata funzione f converge a $f^*(t)$.

Criterio 1 (di Hölder). Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1([-\pi, \pi])$ e sia $t \in \mathbb{R}$ e richiediamo che $\exists \sigma > 0, \alpha \in]0, 1[$ e $M > 0/$

$$|f(t+s) - f(t+\sigma)| \leq M|s - \sigma|^\alpha \quad (1.4)$$

$$\forall s, \sigma \in]t - \delta, t[\quad \forall s, \sigma \in]t, t + \delta[$$

\implies la serie di Fourier di f converge nel punto t e la sua somma è $f^*(t)$

Osserviamo che per $\alpha = 1$ equivale alla condizione di Lipschitz.

Dimostrazione

Facciamo vedere come prima cosa che le ipotesi del teorema di Dini siano verificate.

Sia $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, con $\sigma_n > 0$

$$|f(t + \sigma_n) - f(t + \sigma_m)| \leq M|\sigma_n - \sigma_m|^\alpha \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

quindi $f(t + \sigma_n)$ è una successione di Cauchy \implies

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \sigma_n) = f(t^+)$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(t - \sigma_n) = f(t^-)$$

e quindi $\exists f^*(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Consideriamo } |G(s)| &= \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\frac{f(t+\sigma) + f(t-\sigma)}{2} \right) \frac{1}{s} \right| \\ &\leq \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left(\left| \frac{f(t+s) - f(t+\sigma)}{2} \right| + \left| \frac{f(t-s) - f(t-\sigma)}{2} \right| \right) \frac{1}{s} \\ &\leq \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \left(\frac{M}{2}|s - \sigma|^\alpha + \frac{M}{2}|s - \sigma|^\alpha \right) \frac{1}{s} \\ &= M \frac{|s|^\alpha}{s} = \frac{M}{s^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Siccome $0 < \alpha < 1 \implies G(s) \in L^1(]t, t + \delta[)$

\implies per il teorema di Dini $S_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^*(t)$

□

La condizione data dal teorema di Dini è estremamente generale. Vediamo un caso particolare in cui tale condizione è soddisfatta in ogni punto.

La condizione di Hölder (1.4) sussiste anche per $\alpha = 1$ se la funzione è di classe $C^1([-\pi, \pi])$, ovvero se l'intervallo $[-\pi, \pi]$ può essere scomposto in un numero finito di sottointervalli mediante un numero finito di punti:

$$x_0 = -\pi < x_1 < \dots < x_n = \pi$$

in modo tale che la f sia continua, insieme alle sue derivate, in ciascuno dei sottointervalli $]x_{j-1}, x_j[$ con $j = 1, \dots, n-1$. Quindi osserviamo che per queste funzioni si possono avere solo punti di discontinuità di prima specie, siccome per definizione il limite destro e il limite sinistro in ogni punto esistono e sono finiti.

Definizione 6. La funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *regolare a tratti* in $[a, b]$ se valgono le seguenti proprietà:

- \exists un numero finito di punti $-\pi = x_0, x_1, \dots, x_n = \pi$ con $-\pi < x_1 < \dots < x_n = \pi$ tale che f sia di classe C^1 negli intervalli $]x_j, x_{j+1}[$ con $j = 1, 2, \dots, n-1$;
- nei punti x_1, \dots, x_n esistono finite le derivate destra e sinistra;
- nei punti x_1, \dots, x_n esistono finiti i limiti destro e sinistro.

Inoltre se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che è regolare a tratti in \mathbb{R} se lo è in ogni intervallo limitato $[a, b] \in \mathbb{R}$.

Il teorema di Dini non è l'unico ad assicurare la veridicità della condizione (1.3), infatti:

Criterio 2 (di Dirichlet). Se f è una funzione 2π -periodica e se ogni intervallo si può scomporre in un numero finito di sottointervalli in cui la funzione f è continua e monotona e nei punti di scomposizione ammette solo punti di discontinuità di prima specie, allora la (1.3) è valida $\forall t \in [-\pi, \pi]$.

Enunciamo il seguente corollario.

Corollario 1. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, regolare a tratti e $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Allora $\forall t \in [-\pi, \pi]$ la serie di Fourier di f converge a $f^*(t)$.

Dimostrazione

Per ipotesi sappiamo che f è regolare a tratti su $[-\pi, \pi] \implies \exists n+1$ punti

$$-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$$

tali che f sia di classe C^1 sugli intervalli $]x_{j-1}, x_j[$ con $j = 1, \dots, n+1$ ed esistano in ogni punto i limiti destro e sinistro e le derivate destra e sinistra.

Sia $t = x_j$ con $j = 0, \dots, n$ (consideriamo anche i valori $-\pi$ e π , perchè essendo f una funzione regolare e periodica sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ lo è anche su un intervallo del tipo $[-k\pi, k\pi]$ con $k \in \mathbb{R}$).

Sia $0 < \delta < \min\{|x_j - t|; |t - x_{j-2}|\}$. Per il teorema del valor medio di Lagrange $\forall s, u \in]t - \delta, t[\quad \forall s, u \in]t, t + \delta[\quad \exists \sigma \in]s, u[$ tale che

$$|f(s) - f(t)| = |f'(\sigma)| |s - u|$$

Si ha che f' è limitata su $]x_j, t[\cup]t, x_{j-1}[$ siccome f è regolare a tratti. Quindi possiamo dedurre che f' sia limitata su $]t - \delta, t[\cup]t, t + \delta[$. Allora si ha che $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$|f'(\sigma)| \leq M \quad \forall \sigma \in]t - \delta, t[\cup]t, t + \delta[$$

Di conseguenza si ha

$$|f(s) - f(t)| = M |s - u| \quad \forall s, u \in]t - \delta, t[\cup]t, t + \delta[$$

Se invece t non coincide con un estremo di un intervallo, ma $t \in]x_{j-1}, x_j[$ per $j = 1, \dots, n+1$ si procede in modo analogo cambiando semplicemente la scelta di δ , prendendolo quindi $0 < \delta < \min\{|t - x_{j-1}|, |x_j - t|\}$.

Vediamo quindi che la condizione di Hölder (1.4) è verificata $\forall t \in]-\pi, \pi[$ con $\alpha = 1$.

□

Osservazione 1. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1([-\pi, \pi])$ e regolare a tratti su $[-\pi, \pi]$. Se nei punti di discontinuità vale $f(t) = f^*(t)$ allora la serie di Fourier di f converge puntualmente a $f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Dimostrazione

Nei punti di continuità di una funzione vale $f(t) = f^*(t)$, quindi l'osservazione è provata dal corollario precedente. \square

1.3 Integrazione termine a termine della serie di Fourier

Definiamo inizialmente il concetto di funzione a variazione limitata (BV).

Definizione 7. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ una scomposizione dell'intervallo $[a, b]$. Definiamo la *variazione di f relativa a σ*

$$V(f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|.$$

Se $\sup V_b^a(f, \sigma) < +\infty$ diciamo che f è a *variazione limitata* e poniamo:

$$V_b^a f = \sup V_b^a(f, \sigma) = \text{variazione di } f \text{ su } [a, b].$$

Inoltre definiamo $BV([a, b]) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ con } f \text{ a variazione limitata su } [a, b]\}$.

Vediamo ora qualche proprietà riguardanti le funzioni a variazione limitata.

Teorema 5. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in BV([a, b]) \iff f = \varphi_1 - \varphi_2$ con φ_1, φ_2 monotone crescenti.

Teorema 6 (di Jordan per le serie di Fourier). Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1([-\pi, \pi])$ e $f \in BV([-\pi, \pi]) \implies S_n(f)(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f^*(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Possiamo fare vedere ora che una qualunque serie di Fourier può essere integrata termine a termine su ogni intervallo compatto della retta reale.

Teorema 7. Sia $f \in L^1([-\pi, \pi])$ e 2π -periodica con polinomio di Fourier

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Sia inoltre $F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt \implies F \in BV([-\pi, \pi])$ e $F \in C([-\pi, \pi])$.

Inoltre la funzione $G(x) = \int_{-\pi}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) dt$ gode delle seguenti proprietà:

- $G(x)$ è 2π -periodica;
- $G(x) \in BV([-\pi, \pi])$;
- $G(x)$ è continua;

- $G(x)$ è sviluppabile in serie di Fourier

$$S_n(G)(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

dove gli A_k, B_k sono i coefficienti di Fourier della funzione $G(x)$ e sono della forma:

$$A_0 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(-1)^k}{k}, \quad A_k = \frac{-b_k}{k}, \quad B_k = \frac{a_k}{k}$$

Questo teorema dà luogo ad alcune conseguenze.

Corollario 2. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1(] - \pi, \pi[)$ e dati a_0, a_k, b_k i coefficienti del polinomio di Fourier associato ad f , allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{b_k}{k} < +\infty.$$

Osservazione 2. Come conseguenza di questo teorema si ha che in generale dato un polinomio trigonometrico $p \in T_n$, le condizioni necessarie, ma non sufficienti, affinché $p(t)$ sia la serie di Fourier di una funzione sommabile, sono:

- per il lemma di Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$$

- per il corollario precedente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{b_k}{k} < +\infty.$$

1.4 Convergenza uniforme delle serie di Fourier

Per poter parlare di convergenza uniforme delle serie di Fourier è necessario introdurre il concetto di *funzione assolutamente continua*.

Definizione 8. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. f si dice *assolutamente continua* su $[a, b]$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 / \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e qualunque siano i sottointervalli di $[a, b], [\alpha_j, \beta_j]$ con $j = 1, \dots, n$ tali che $]\alpha_i, \beta_i[\cap]\alpha_j, \beta_j[= \emptyset$ con $i \neq j$, risulta

$$\sum_{j=1}^n (|f(\beta_j) - f(\alpha_j)|) < \varepsilon$$

purchè valga

$$\sum_{j=1}^n (|\beta_j - \alpha_j|) < \delta_\varepsilon$$

Altrimenti possiamo anche dire come conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale di Lebesgue che una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua su $[a, b]$ se $\exists f'$ definita quasi ovunque e sommabile quasi ovunque tale che

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Prima di enunciare un criterio sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier, ci è utile dare la definizione di *convergenza totale*.

Definizione 9. Sia $f_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni continua sull'intervallo $[a, b]$. Diremo che la serie $\sum_{k \geq 1} f_k(t)$, cioè quella avente come somme parziali le funzioni

$S_n(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)$, è *totalmente convergente* se è convergente la serie a termini positivi

$$\sum_{k \geq 1} \|f_k\|_{\infty}.$$

Osservazione 3. La totale convergenza implica convergenza uniforme, cioè la convergenza in norma.

Vediamo ora il criterio per la convergenza uniforme delle serie di Fourier.

Criterio 3. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1([-\pi, \pi])$ e supponiamo che f sia assolutamente continua e che anche $f' \in L^2([-\pi, \pi]) \implies S_n(f) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightrightarrows} f$, ovvero si ha la convergenza uniforme della serie di Fourier di f alla funzione stessa.

Dimostrazione

$$\text{Sia } f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Sappiamo che f è assolutamente continua quindi

$$f(x) - f(a) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt$$

Sappiamo inoltre che $f' \in L^2([-\pi, \pi])$ e siano A_k, B_k i coefficienti di Fourier di f' e per la disuguaglianza di Bessel si ha che

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A_k^2 + B_k^2) < \infty \quad A_k, B_k \in l^2$$

Ci chiediamo che relazione c'è tra gli A_k, B_k e gli a_k, b_k

$$a_k = \frac{-B_k}{k}$$

$$b_k = \frac{A_k}{k} \implies a_k, b_k \in l^2$$

Andiamo a vedere se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ converge totalmente

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (k|a_k| + k|b_k|) \frac{1}{k} = \\ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|A_k| + |B_k|) \frac{1}{k} & \\ \leq \frac{a_0}{2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|A_k|^2 + |B_k|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} &< \infty \end{aligned}$$

L'ultimo risultato si ha applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz siccome i coefficienti di Fourier di f' sono l^2 .

Allora la serie di Fourier converge totalmente a f e quindi uniformemente. \square

Corollario 3. *Sia f 2π -periodica e $f \in C([-\pi, \pi])$ e C^1 a tratti su $[-\pi, \pi]$, allora $S_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$*

Osservazione 4. Quindi abbiamo visto che non è sufficiente dire che la funzione f che stiamo considerando sia 2π -periodica e continua per garantire la convergenza uniforme della relativa serie di Fourier. Nel 1906 Lebesgue costruì una funzione continua che dà luogo ad una serie di Fourier convergente in ogni punto, ma non convergente uniformemente. Successivamente vedremo, quindi, una successione di polinomi trigonometrici distinti da quelli di Fourier di f che converge uniformemente ad f e si introdurrà il concetto di convergenza secondo Cesaro.

1.5 Convergenza della serie di Fourier in L^2

Teorema 8 (di Riesz). *Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$, 2π -periodica $\implies \|S_n(f)(t) - f\|_{L^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.*

Dimostrazione

Sappiamo che $C_0^\infty([-\pi, \pi])$ è denso in $L^2([-\pi, \pi])$. Allora consideriamo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \in C_0^\infty([-\pi, \pi]) / \|f - \varphi\|_{L^2} < \varepsilon$$

Vogliamo quindi dimostrare che $\|S_n(f) - f\|_{L^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - f\|_{L^2} &= \|S_n(f) - S_n(\varphi) + S_n(\varphi) - \varphi + \varphi - f\|_{L^2} \leq \\ &\leq \|S_n(f) - S_n(\varphi)\|_{L^2} + \|S_n(\varphi) - \varphi\|_{L^2} + \|\varphi - f\|_{L^2} = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Sappiamo che $I_3 < \varepsilon$.

Consideriamo I_2 , siccome $\varphi \in C_0^\infty([-\pi, \pi])$ possiamo passare al limite sotto il segno di integrale \implies

$$I_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(\varphi) - \varphi|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Siccome l'argomento dell'integrale converge uniformemente a φ per $n \rightarrow \infty$ allora si ha che l'integrale tende a zero per $n \rightarrow \infty$.

Allora $I_2 < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$

Infine consideriamo I_1 . Si ha che

$$S_n(f - \varphi) = S_n(f) - S_n(\varphi)$$

perchè è lineare rispetto a f .

Allora

$$I_1 = \|S_n(f - \varphi)\|_{L^2} \leq$$

per la disuguaglianza di Bessel

$$\leq \|f - \varphi\|_{L^2}$$

$$\implies \|S_n(f) - f\|_{L^2} < 3\varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_{L^2} = 0$$

□

Capitolo 2

Il fenomeno di Gibbs

Come già anticipato nell'introduzione, il fenomeno di Gibbs si presenta in prossimità di punti di discontinuità di una funzione periodica. Vediamo ora qualche esempio di funzioni periodiche in cui si manifesta questo fenomeno.

2.1 Onda quadra

L'onda quadra è un esempio di funzione periodica che presenta punti di discontinuità di prima specie ed è definita nel modo seguente:

$$q(x) = \begin{cases} 0 & x = -\pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = \pi \end{cases}$$

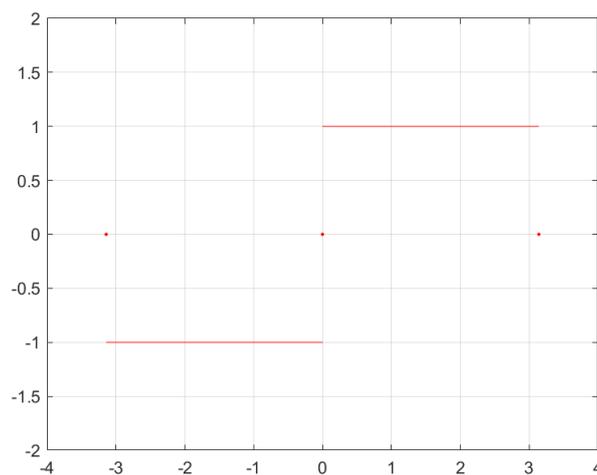


Figura 2.1: Grafico dell'onda quadra nell'intervallo $[-\pi, \pi]$

Ora andremo a studiare le serie di Fourier di $q(x)$ per mostrare le sovraoscillazioni che si creano in prossimità dei punti di discontinuità. Quasi'onda può essere estesa su tutto \mathbb{R} periodicamente, ma per comodità svolgo i calcoli sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. La funzione $q(x)$ è sommabile su questo intervallo quindi possiamo, per prima cosa, calcolare i suoi coefficienti di Fourier. Ci aspettiamo che gli a_k risultino uguali a zero siccome andremo ad integrare su intervallo simmetrico rispetto all'origine. Infatti:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(t) dt = 0$$

e

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} q(t) \cos kt dt = 0$$

mentre per i b_k si ha:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) \sin kt dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{4}{\pi k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Consideriamo ora il polinomio di Fourier di q per n dispari

$$\begin{aligned} S_{2n-1}(q)(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)t)}{(2k-1)} = \quad t \in \mathbb{R} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)} (\sin((2k-1)t) - \sin 0) \end{aligned}$$

ma si ha che

$$\begin{aligned} \sin((2k-1)t) - \sin 0 &= \int_0^t \cos((2k-1)x)(2k-1) dx \\ \Rightarrow S_{2n-1}(q)(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^t \cos((2k-1)x) dx \end{aligned}$$

scriviamo ora $S_{2n-1}(q)(t)$ in forma chiusa, portando la sommatoria dentro l'integrale e moltiplicando per $\sin t$ per poter utilizzare le formule di prostaferesi

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n \cos((2k-1)t) \right) \sin t &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2kt) - \sin((2k-1)t)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2nt - \sin 0) = \frac{\sin 2nt}{2} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)t) &= \frac{\sin 2nt}{2 \sin t} \quad \forall t \in]0, \pi[\\ \Rightarrow S_{2n-1}(q)(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2nx}{\sin t} dx \end{aligned}$$

Procediamo trovando i punti di **massimo relativo** e **minimo relativo**:

$$S'_{2n-1}(q)(t) = \frac{2 \sin 2nt}{\pi \sin t}$$

Ponendo $S'_{2n-1}(q)(t) = 0$ si ha che $t = \frac{k\pi}{2n}$ per $k \in \mathbb{N}$.

Considerando la funzione nell'intervallo $[0, \pi]$ i punti con ascissa della forma $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ per $k = 1, 2, \dots, (2n-1)$, che sono gli zeri di $S'_{2n-1}(q)(t)$, coincidono con le ascisse degli estremi relativi di $S_{2n-1}(q)(t)$ e quindi nessuno di questi punti è un punto di flesso, ma sono tutti estremali. Studiando la derivata seconda

$$S''_{2n-1}(q)\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{2n \cos(2n(\frac{k\pi}{2n})) \sin(\frac{k\pi}{2n}) - \sin(2n(\frac{k\pi}{2n})) \cos(\frac{k\pi}{2n})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n})} = \frac{-2n}{\sin(\frac{k\pi}{2n})} < 0$$

si ha che $\frac{k\pi}{2n}$ è un punto di massimo relativo per k dispari, nell'intervallo $[0, \pi]$. Possiamo quindi dire che i punti

$$x_k = \frac{k\pi}{2n} \quad k = 1, 3, \dots, (2n-1)$$

sono punti di massimo relativo. Per quanto riguarda i punti di minimo relativo studiando la derivata seconda

$$S''_{2n-1}(q)\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0$$

risulta essere positiva per valori di k pari, infatti

$$S''_{2n-1}(q)\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{2n \cos 2j\pi \sin(\frac{j\pi}{n}) - \sin 2j\pi \cos(\frac{j\pi}{n})}{\sin^2(\frac{j\pi}{n})} = \frac{2n}{\sin(\frac{j\pi}{n})} > 0$$

per $j = 1, 2, \dots, n-1$

. Quindi i punti

$$x_k = \frac{k\pi}{2n} \quad k = 2, 4, \dots, (2n-2)$$

sono punti di minimo relativo per q .

In generale quindi si ha che:

- $x_j = \frac{2j-1}{2n}\pi \quad j = 1, 2, \dots, n$ sono punti di massimo relativo.
- $x_j = \frac{j\pi}{n} \quad j = 1, 2, \dots, n-1$ sono punti di minimo relativo.

Consideriamo ora il punto di massimo relativo $x_1 = \frac{\pi}{2n}$. Il valore del polinomio di Fourier in questo punto è:

$$S_{2n-1}(q)\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx$$

Calcoliamo il limite di questa quantità per osservare come si comportano i polinomi di Fourier in prossimità dei punti di massimo e minimo relativo.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx$$

Scriviamo

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \sin(2nx) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{x} \sin(2nx) dx \right)$$

e chiamiamo

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \sin(2nx) dx \right)$$

e

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{x} \sin(2nx) dx \right)$$

Allora

$$|I_1| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left| \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right| dx \leq C \left(\frac{\pi}{2n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Riscriviamo ora l'integrale I_2 effettuando un cambio di variabile:

$$\begin{aligned} t = 2nx \Rightarrow x = \frac{t}{2n} \quad dx = \frac{dt}{2n} \\ \Rightarrow I_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nx)}{x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{2}{\pi} G \end{aligned}$$

Questa costante prende il nome di **costante di Wilbraham-Gibbs**.

Dimostriamo che $G > 1$ considerando il nucleo di Dirichlet per $n = 1$ e $\forall x \in]0, \pi[$.

Come si è detto in precedenza, il nucleo di Dirichlet può essere scritto anche in forma chiusa, quindi considerando $n = 1$ si ha:

$$D_n(x) = \frac{\sin(\frac{3}{2}x)}{2 \sin(\frac{x}{2})} \quad \forall x \in]0, \pi[$$

Essendo un nucleo unitario vale

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\frac{3}{2}x)}{2 \sin(\frac{x}{2})} dx$$

utilizzando le formule di addizione si ottiene

$$\sin(\frac{3}{2}x) = \sin x \cos(\frac{x}{2}) + \cos x \sin(\frac{x}{2})$$

dividendo entrambi i membri per $\sin(\frac{x}{2})$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\frac{3}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} &= \cos x + \sin x \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} = \cos x + \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \\ \Rightarrow 1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 \tan(\frac{x}{2})} dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{2} dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 \tan(\frac{x}{2})} dx \end{aligned}$$

Osserviamo che considerando un angolo $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ si ha che $\tan \alpha > \alpha$ quindi $2 \tan(\frac{x}{2}) > x$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{2 \tan(\frac{x}{2})} dx &< \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = G \\ &\Rightarrow G > 1 \end{aligned}$$

Per i punti di minimo si dimostra analogamente che il valore del limite per $n \rightarrow \infty$ si mantiene inferiore a -1 . Infatti, sfruttando ciò che è stato dimostrato per il primo punto di massimo che si incontra a destra dell'origine, considerando il primo punto di minimo che si trova a sinistra dell'origine si può calcolare il valore del limite di $S_{2n-1}(q)(t)$ in $x_k = -\frac{\pi}{2n}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1}(q)\left(-\frac{\pi}{2n}\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{-\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx = \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx = - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1}(q)\left(\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \end{aligned}$$

che per quanto dimostrato prima è uguale a G e quindi si ha che $G < -1$. Si osserva che il valore che assumono i polinomi di Fourier si assesta su un valore costante maggior di 1 per i punti di massimo e su un valore costante minore di -1 per i punti di minimo. In questo modo il salto della funzione viene enfatizzato e sembra che la serie di Fourier non converga vicino all'origine.

Osserviamo graficamente che in prossimità di un punto di discontinuità per la funzione q i polinomi di Fourier $S_{2n-1}(q)$ presentano un fenomeno di sovra-oscillazione, ovvero la differenza tra il massimo e il minimo di tali polinomi in un intorno del punto di discontinuità si mantiene maggiore del salto della funzione q nello stesso punto. Questo fenomeno continua a presentarsi anche al crescere di n e quindi non tende a scomparire.

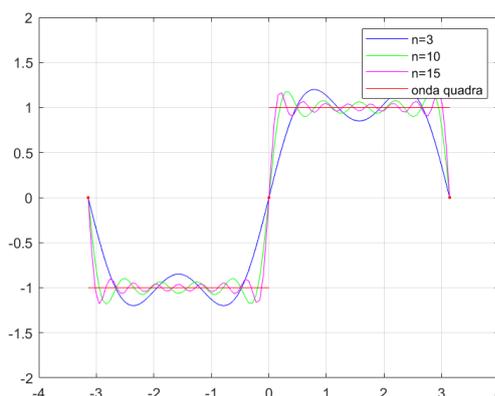


Figura 2.2: Grafico di $S_{2n-1}(q)(t)$ al variare di n

Vediamo più nel particolare al crescere di n come viene enfatizzato il salto della funzione.

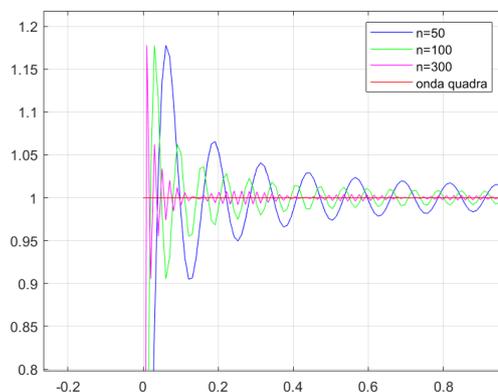


Figura 2.3: Dettaglio del salto della funzione

Questo comportamento è noto con il nome di fenomeno di Gibbs e si origina dalla mancanza di convergenza uniforme nei punti di discontinuità della funzione q . In questi punti, infatti, si ha solo la convergenza puntuale. Quest'ultima è garantita perché considerando intervalli I in cui

$$\max_I |S_{2n-1}(q)(t) - q(t)| \geq c \quad c \in \mathbb{R}$$

per un qualsiasi n , per $n \rightarrow +\infty$ la lunghezza di tali intervalli tende a 0 e si ha la convergenza puntuale.

Per poter stimare in modo più preciso l'errore che si ottiene approssimando q tramite i polinomi di Fourier, diamo la seguente definizione.

Definizione 10. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo il *salto della funzione* f nel punto $a \in \mathbb{R}$

$$\Delta(a) = f(a^+) - f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Nel caso dell'onda quadra si ha, per esempio considerando l'origine come punto di discontinuità, che $\Delta(0) = 2$. Calcolando poi più in generale il salto della funzione con $\Delta(S_{2n-1})$ possiamo dire che il salto della funzione viene aumentato di un fattore pari a $\frac{2}{\pi}G$. Infatti:

$$\Delta(S_{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |S_{2n-1}(q)(x_{M_n}) - S_{2n-1}(q)(x_{m_n})| = \left| \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \right|.$$

dove x_{M_n} è l' n -esimo punto di massimo di q e x_{m_n} è l' n -esimo punto di minimo di q . Questa quantità è $\sim 2.35796\dots$ Vediamo ora un altro esempio di funzione in cui si verifica l'effetto Gibbs.

2.2 Onda a dente di sega

Definiamo ora un'altra funzione che presenta punti di discontinuità di prima specie e che quindi, una volta approssimata tramite i suoi polinomi di Fourier, presenta anch'essa il fenomeno di Gibbs.

Definiamo

$$s(x) = \begin{cases} 0 & x = \pm\pi \\ x & x \in]-\pi, \pi[\end{cases}$$

La funzione $s(x)$ è una funzione 2π periodica che presenta punti di discontinuità di prima specie nei punti di ascissa $x_k = \pi + 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$.

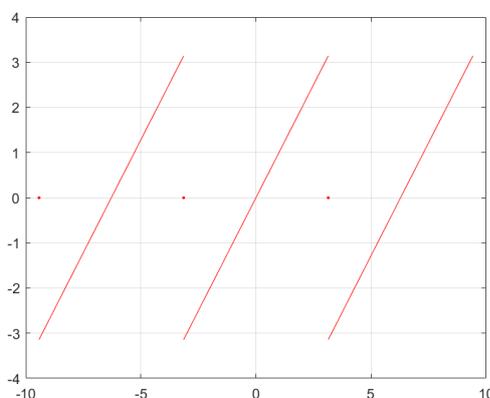


Figura 2.4: Onda a dente di sega nell'intervallo $[-\pi, \pi]$

Calcoliamo ora i coefficienti dei polinomi di Fourier di t nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, che poi si può estendere a tutto \mathbb{R} . Si ha:

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} s(t) dt = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(k\pi t) dt = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(k\pi t) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(k\pi t) dt = \\ &= -\frac{2[\cos(k\pi)]_0^{\pi}}{k} = -\frac{2(-1)^k}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Quindi il polinomio di Fourier di s è

$$S_n(s)(x) = -2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \sin(kt)}{k}.$$

Osserviamo anche in questo caso come si comportano graficamente i polinomi di Fourier nei punti di discontinuità di s .

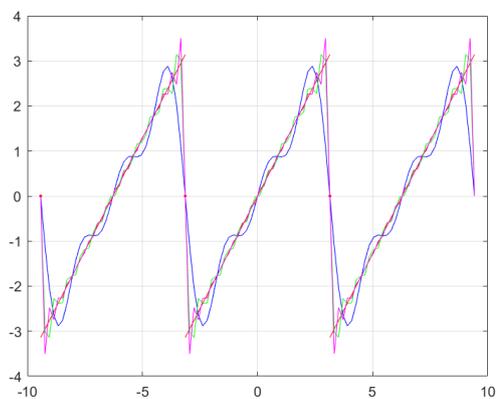


Figura 2.5: Polinomi di Fourier dell'onda a dente di sega per $n=3,10,15$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$

In questo esempio notiamo che il valore del massimo della discontinuità aumenta al crescere di n . Nonostante ciò la convergenza puntuale della serie di Fourier è assicurata dall'osservazione 1.

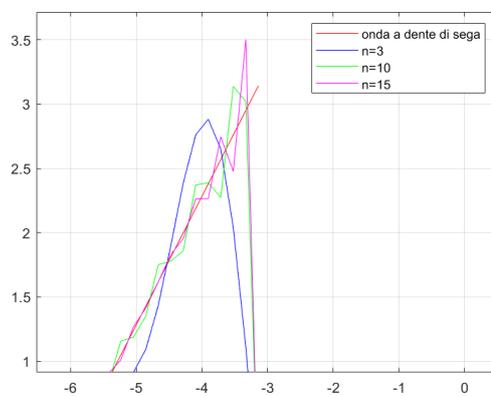


Figura 2.6: Dettaglio delle sovraoscillazioni dei polinomi di Fourier in un punto di massimo

2.3 Studio generale del fenomeno di Gibbs

Nei due paragrafi precedenti abbiamo osservato e studiato due esempi di funzioni che presentano punti di discontinuità di prima specie che provocano l'effetto Gibbs mediante approssimazione tramite i loro polinomi di Fourier. Vediamo come possiamo descrivere questo fenomeno più in generale, per tutte le funzioni periodiche e regolari a tratti che presentano punti di discontinuità di prima specie.

Lemma 1. *Sia $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$ tali che $g_n \rightrightarrows g$ uniformemente su tale intervallo ad una funzione g che quindi risulta essere continua. Sia inoltre $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione sempre in $[a, b]$ tale che $c_n \rightarrow c$. Allora la successione $\{g_n(c_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $g_n(c_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(c)$.*

Dimostrazione Siccome per ipotesi g_n converge uniformemente a g nell'intervallo $[a, b]$ si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad / \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_\varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

e in particolare $|g_n(c) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Poiché g è continua in c in quanto è limite uniforme di funzioni continue e poiché $c_n \rightarrow c$ si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad / \quad |g(c_n) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > \bar{n}_\varepsilon.$$

Prendendo $\bar{n} > \max \bar{n}_\varepsilon, n_\varepsilon$ si ottiene che

$$|g_n(c_n) - g(c)| \leq |g_n(c_n) - g(c_n)| + |g(c_n) - g(c)| < \varepsilon \quad \forall n > \bar{n}$$

□

Teorema 9. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti e $2L$ -periodica. Sia a un punto di discontinuità di prima specie per f con salto $\Delta(a)$. Allora posto $x_n = \frac{L}{2n}$ vale che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1}(f)(a \pm x_n) = f^*(a) \pm \frac{\Delta(a)}{\pi} G. \quad (2.1)$$

Ponendo invece i punti di massimo e minimo della funzione $x_{M_n} = \frac{L}{2n}$ e $x_{m_n} = -\frac{L}{2n}$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_{2n-1}(f)(a \pm x_{M_n}) - S_{2n-1}(f)(a \pm x_{m_n}) \right) = \Delta(a) \frac{2}{\pi} G. \quad (2.2)$$

Dimostrazione Definiamo $\tilde{q} = q\left(\frac{x-a}{L}\pi\right)$, che non è altro che l'onda quadrata deformata e traslata in modo da avere periodo $2L$ e discontinuità in a .

Osserviamo che non è limitativo eventualmente ridefinire il valore di $f(a)$ supponendo che $f(a) = f^*(a)$.

Definiamo $\varphi(x) = f(x) - f^*(a) - \frac{\Delta(a)}{2}\tilde{q}(x)$ e osserviamo che è $2L$ -periodica, regolare a tratti e continua in a , infatti:

$$\varphi(a) = f(a) - f^*(a) - \frac{\Delta(a)}{2}\tilde{q}(a) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{2f(x) - f(a^+) - f(a^-)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2} \tilde{q}(x) = \frac{\Delta(a)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{2f(x) - f(a^+) - f(a^-)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2} \tilde{q}(x) = -\frac{\Delta(a)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2}(-1) = 0.$$

Sia $I = [a - \delta; a + \delta]$ un intervallo fissato che contiene come unica discontinuità a . Risulta che φ è continua in I . Siccome φ è continua e C^1 a tratti allora si ha che $S_n(\varphi) \rightrightarrows \varphi$ uniformemente su I .

Consideriamo ora $x_n = \frac{L}{2n}$ allora data

$$S_{2n-1}(\tilde{q})(a \pm x_n) = S_{2n-1}(q)(\pm \frac{x_n}{L} \pi)$$

si può scrivere

$$S_{2n-1}(f)(a \pm x_n) = S_{2n-1}(\varphi)(a \pm x_n) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} S_{2n-1}(q)(\pm \frac{x_n}{L} \pi).$$

Per il lemma precedente e per il comportamento di $S_{2n-1}(q)$ vicino all'origine e per il fatto che $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, da questa espressione risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1}(f)(a \pm x_n) &= \varphi(a) + f^*(a) \pm \frac{\Delta(a)}{2} \frac{2}{\pi} G = \\ &= f^*(a) \pm \frac{\Delta(a)}{\pi} G. \end{aligned}$$

Così si ha che l'uguaglianza (2.1) è verificata e quindi segue

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_{2n-1}(f)(a + x_{M_n}) - S_{2n-1}(f)(a + x_{m_n}) \right) &= \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{\pi} G - f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{\pi} G \right) &= \\ = \Delta(a) \frac{2}{\pi} G. \end{aligned}$$

e quindi anche l'uguaglianza (2.2) è dimostrata. \square

Il teorema è stato dimostrato per $\Delta(a) > 0$, il caso per $\Delta(a) < 0$ è analogo considerando $-f$.

Quindi a seguito di questi risultati che sono stati dimostrati, possiamo affermare che il fenomeno di Gibbs si verifica ogni volta che si approssimano mediante polinomi di Fourier, funzioni che presentano punti di discontinuità di prima specie.

Nel capitolo successivo studieremo un nuovo tipo di convergenza per le successioni trigonometriche, estendendo il concetto di convergenza secondo Cesaro, definita per le serie numeriche, anche alle serie di funzioni.

In questo modo sarà possibile eliminare l'effetto Gibbs attraverso questo nuovo tipo di convergenza.

Capitolo 3

Una soluzione al fenomeno di Gibbs

3.1 Serie di Fejér

Iniziamo con il dare la definizione di *polinomio di Fejér* per poi studiarne alcune proprietà.

Definizione 11. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica con $f \in L^1([-\pi, \pi])$ e sia $S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ il polinomio di Fourier di f calcolato nel punto $t \in \mathbb{R}$. Allora definiamo il *polinomio di Fejér di f* come:

$$\sigma_n(f)(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} S_k}{n}$$

dove $S_0 = a_0$.

Definizione 12. Diciamo, inoltre, che f è *svilupabile in serie di Fejér* nel punto $t \in \mathbb{R}$ se

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(t) = f(t)$$

Diamo ora la definizione di *convergenza secondo Cesaro di una serie numerica*.

Definizione 13. Sia $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ una successione numerica in \mathbb{R} e sia $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ la successione delle somme parziali. Allora sappiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{R}.$$

Allora diciamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge secondo Cesaro* ad S se

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S \in \mathbb{R}$$

con $\sigma_n = \frac{\sum_{k=1}^n S_k}{n}$ che è la successione delle medie aritmetiche di S_n .

Proposizione 2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ secondo Cesaro.

Dimostrazione

Sia quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ dove $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Siccome per ipotesi si ha la convergenza ad S abbiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / |S_n - S| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$

Consideriamo $\sigma_n = \frac{\sum_{k=1}^n S_k}{n} \implies$

$$\sigma_n - S = \sigma_n - \frac{n}{n} S = \frac{\sum_{k=1}^n (S_k - S)}{n}$$

Allora

$$\begin{aligned} |\sigma_n - S| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_k - S| = \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |S_k - S| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^n |S_k - S| \right) \end{aligned}$$

L'argomento della seconda sommatoria sappiamo essere $< \varepsilon$. Allora

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{n} \max \{ |S_k - S|, k = 1, \dots, n_\varepsilon \} n_\varepsilon + \frac{1}{n} \varepsilon (n - n_\varepsilon) \\ &\leq C \frac{n_\varepsilon}{n} + \varepsilon \\ &\implies |\sigma_n - S| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon \\ &\implies \sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S \end{aligned}$$

□

Osservazione 5. Notiamo che il viceversa non vale, infatti se consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ con $x \neq 1$. Consideriamo la serie geometrica $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$. Allora calcoliamo il polinomio di Fejér di tale serie di Fourier.

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{\sum_{k=0}^n S_k}{n} = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n} = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{1}{n} \frac{1}{1-x} \left(n - \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} \right) = \\
&= \frac{1}{n} \frac{1}{1-x} \left(n - x \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = \frac{1}{n} \frac{1}{1-x} \left(n - x \frac{(1-x^n)}{1-x} \right)
\end{aligned}$$

Sceglio $x = -1 \implies$

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \frac{1}{2} \left(n + \frac{(1-(-1)^n)}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \left(\frac{1-(-1)^n}{2} \right)$$

Quindi si ha che $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$ secondo Cesaro, ma questa non è una serie regolare secondo Cauchy.

3.2 Nucleo di Fejér

Ora vogliamo scrivere i polinomi di Fejér di una data funzione f in forma integrale. Per poterlo fare è necessario definire una certa quantità che prende il nome di *nucleo di Fejér*.

Definizione 14. Sia $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$ il *nucleo di Fejér* dove $D_k(t)$ è il nucleo di Dirichlet che abbiamo definito precedentemente nel primo capitolo. Vogliamo ora scriverlo in forma chiusa.

Consideriamo

$$\begin{aligned}
\sin \frac{t}{2} F_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{t}{2} D_k(t) = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{t}{2} \sin((k + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}}
\end{aligned}$$

per le formule di prostaferesi si ha

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos kt - \cos((k+1)t)}{2} = \\
&= \frac{1}{4n} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} (1 - \cos nt) = \frac{1}{2n} \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \left(\sin^2 \left(\frac{n}{2} t \right) \right) \\
\implies F_n(t) &= \frac{1}{n} \frac{\sin^2 \left(\frac{n}{2} t \right)}{2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)} \quad \forall t \in]0, \pi[
\end{aligned}$$

Vediamo ora una rappresentazione grafica del nucleo di Fejér per alcuni n fissati:

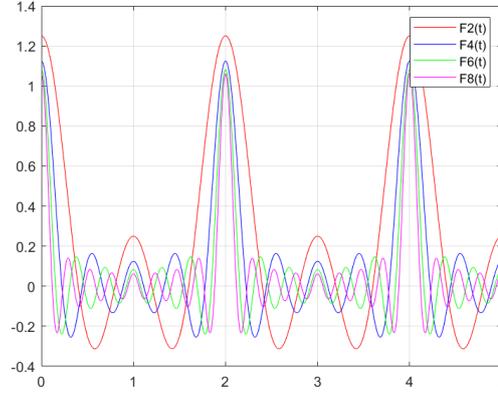


Figura 3.1: Grafico del nucleo di Fejér per $n=2,3,6,9$

Vediamo le **proprietà** di questo nucleo:

- F_n è 2π -periodico, siccome è una somma di funzioni 2π -periodiche;
- F_n è pari;
- $\forall t \in]0, \pi[$ $F_n(t)$ definito in forma chiusa è sempre ≥ 0 ;
- $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_n(s) ds = 1$ quindi è un nucleo unitario.

Scriviamo ora i polinomi di Fejér in funzione del nucleo di Fejér appena definito
 \Rightarrow sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1([-\pi, \pi])$.

Il suo polinomio di Fejér calcolato nel punto $t \in \mathbb{R}$ è $\sigma_n(f)(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(t)}{n}$.

Per come abbiamo definito i polinomi di Fourier in forma integrale si ha che:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f)(t) &= \frac{1}{n} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} D_k(s) \right) ds = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds \end{aligned}$$

3.3 Convergenza della serie di Fejér

Teorema 10 (di Fejér). Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica con $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Se $\exists f^*(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$ allora $\sigma_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^*(t)$ e inoltre se f è continua in $[-\pi, \pi]$ allora $\sigma_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$. Quindi si ha convergenza uniforme in $[-\pi, \pi]$.

Dimostrazione

Per ipotesi $\exists f^*(t)$ con t fissato. Allora

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{s \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \\ \implies & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon, t} > 0 / \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| < \varepsilon \quad \forall s \in]0, \delta_{\varepsilon, t}[\end{aligned}$$

Quindi si ha che

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(t) - f^*(t)| &= \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) F_n(s) ds \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta_{\varepsilon, t}} \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| F_n(s) ds + \frac{2}{\pi} \int_{\delta_{\varepsilon, t}}^\pi \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| F_n(s) ds = \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

- $I_1 \leq \varepsilon \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta_{\varepsilon, t}} F_n(s) ds \leq \varepsilon \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_n(s) ds = \varepsilon;$
- $I_2 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \int_{\delta_{\varepsilon, t}}^\pi g_t(s) \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}s\right)}{2 \sin^2\left(\frac{s}{2}\right)} ds.$

$$\text{Dove } g_t(s) = \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right|$$

$$\implies I_2 \leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \frac{1}{2} \sup_{[\delta_{\varepsilon, t}, \pi]} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{s}{2}\right)} \int_{\delta_{\varepsilon, t}}^\pi g_t(s) ds$$

L'integrale risulta essere una costante che chiamiamo C ed essendo $\frac{1}{\sin^2\left(\frac{s}{2}\right)}$ una funzione monotona decrescente il sup si ha quando $s = \delta_{\varepsilon, t}$.

$$\implies I_2 \leq \frac{1}{n\pi} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta_{\varepsilon, t}}{2}\right)} C \leq \frac{1}{n} C_{\delta_{\varepsilon, t}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Allora $\sigma_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^*(t)$.

Così abbiamo dimostrato la prima parte dell'enunciato del teorema.

Vediamo ora se $f \in C([-\pi, \pi])$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 / \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| < \varepsilon \quad \forall s \in]0, \delta_\varepsilon[$$

Quindi ora abbiamo che δ_ε è lo stesso $\forall t$.

$$\begin{aligned} &\implies I_1 \leq \varepsilon \\ I_2 &\leq \frac{2}{\pi} 2 \sup_{[-\pi, \pi]} |f| \int_{\delta_\varepsilon}^{\pi} \frac{1}{n 2 \sin^2\left(\frac{s}{2}\right)} ds \\ &\leq \frac{2}{\pi} 2 \sup_{[-\pi, \pi]} |f| \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)} \frac{1}{n} \pi \\ &\leq C_{\delta_\varepsilon} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Abbiamo eliminato la dipendenza da t quindi

$$\sigma_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \tag{3.1}$$

□

3.4 Eliminazione dell'effetto Gibbs

Dimostriamo ora che approssimando funzioni che presentano punti di discontinuità di prima specie con le somme di Fejér, l'effetto Gibbs scompare.

Dimostriamo per prima cosa qualche osservazione.

Osservazione 6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica con $f \in L^1(] - \pi, \pi[)$. Se esistono $C, c \in \mathbb{R}$ tali che $c \leq f(t) \leq C$ per quasi ogni $t \in [-\pi, \pi]$ allora

$$c \leq \sigma_n(f)(t) \leq C \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

Dimostrazione

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds$$

poiché $c \leq f(t) \leq C$ per quasi ogni $t \in [-\pi, \pi]$ si ha che

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2c}{2} F_n(s) ds \leq \sigma_n(f)(t) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2C}{2} F_n(s) ds.$$

e quindi dal fatto che il nucleo di Fejér è unitario segue che

$$\pi = \int_0^\pi F_n(s) ds$$

allora si ha la tesi. □

Osservazione 7. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti e $2L$ -periodica e sia a un punto di discontinuità di prima specie per f con salto $|\Delta(a)|$. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una qualsiasi successione di numeri reali tali che $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$. Allora non si presenta il fenomeno di Gibbs e vale

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) \leq |\Delta(a)|.$$

Dimostrazione Utilizziamo le stesse notazioni che avevamo definito per dimostrare il teorema sulle generalità del fenomeno di Gibbs nella terza sezione del secondo capitolo. Consideriamo in questo caso le somme di Fejér al posto di quelle di Fourier.

$$\sigma_n(f)(a \pm x_n) = \sigma_n(\varphi)(a \pm x_n) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} \sigma_n(q)\left(\pm \frac{x_n}{L} \pi\right).$$

Dall'osservazione 6 si ha che

$$-1 \leq q(t) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sigma_n(q)(t) \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

allora

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(\varphi)(x_n) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q)\left(\frac{x_n - a}{2} \pi\right)$$

per (3.1)

$$\begin{aligned} &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q)\left(\frac{x_n - a}{2} \pi\right) \\ &\leq \varphi(a) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} (1) = \\ &= f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} \end{aligned}$$

vediamo ora che per il limite inferiore si ha

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q)\left(\frac{x_n - a}{2} \pi\right) \\ &\geq \varphi(a) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} (-1) = \\ &= f^*(a) - \frac{\Delta(a)}{2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(x_n) \leq |\Delta(a)|$$

□

Osserviamo graficamente come cambia il comportamento delle somme di Fejér in prossimità dei punti di discontinuità di prima specie delle funzioni che abbiamo studiato nel capitolo precedente.

1. Vediamo come l'effetto Gibbs scompare nell'**onda quadra**.

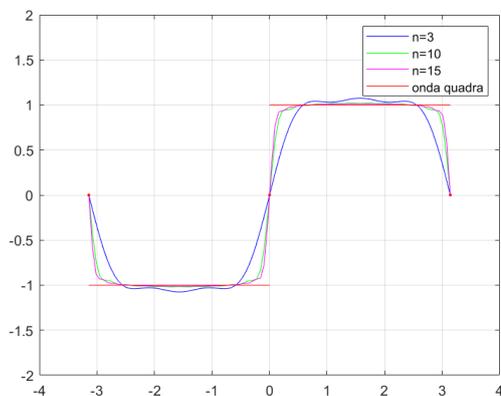


Figura 3.2: Grafico dell'onda quadra approssimata tramite somme di Fejér

In prossimità dei punti di discontinuità il salto dell'approssimazione con somme di Fejér si assesta ad un valore più basso del salto della funzione. Vediamo più nel dettaglio ciò che avviene.

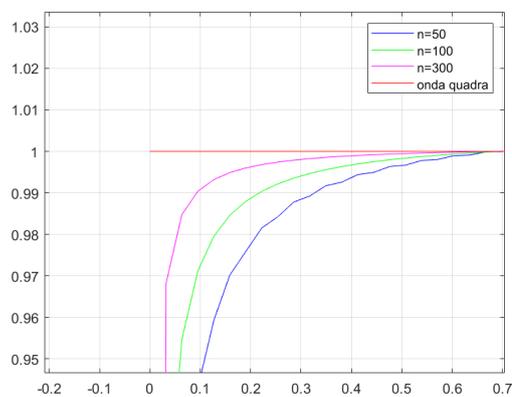


Figura 3.3: Grafico locale del comportamento delle somme di Fejér in prossimità dei punti di discontinuità

Di seguito riporto un confronto tramite grafici in 3D dei due tipi di approssimazione.

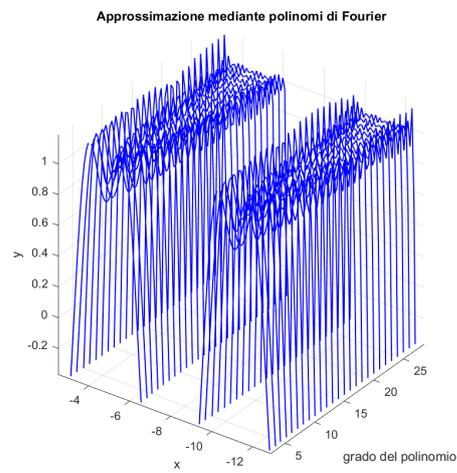


Figura 3.4: Grafico 3D approssimazione onda quadra con polinomi di Fourier per $n = 50$

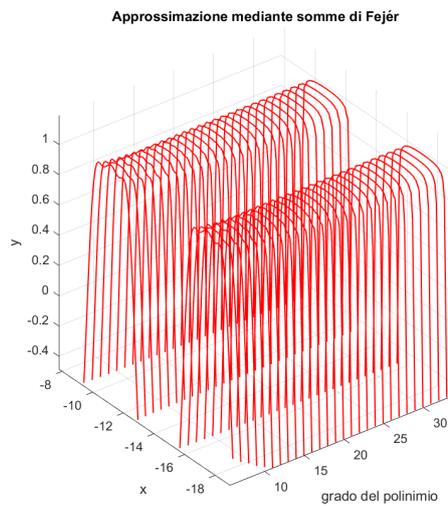


Figura 3.5: Grafico 3D approssimazione onda quadra con somme di Fejér per $n = 50$

2. Vediamo ora come l'effetto Gibbs scompare nel caso dell'**onda a dente di sega**. Vediamo tramite grafici 3D come anche per l'onda a dente di sega cambi l'approssimazione utilizzando prima i polinomi di Fourier e poi i polinomi di Fejér e che questi ultimi facciano effettivamente scomparire l'effetto Gibbs.

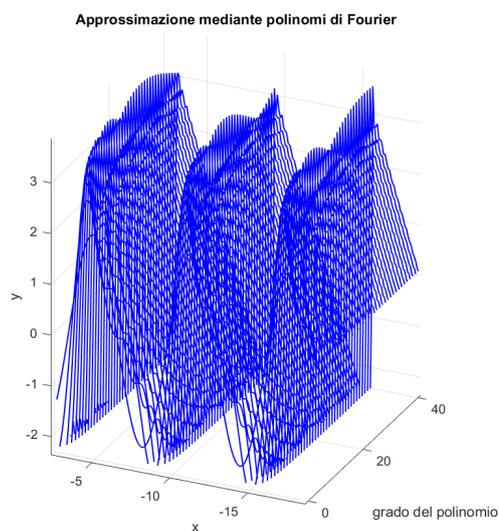


Figura 3.6: Grafico 3D approssimazione onda a dente di sega con polinomi di Fourier per $n = 50$

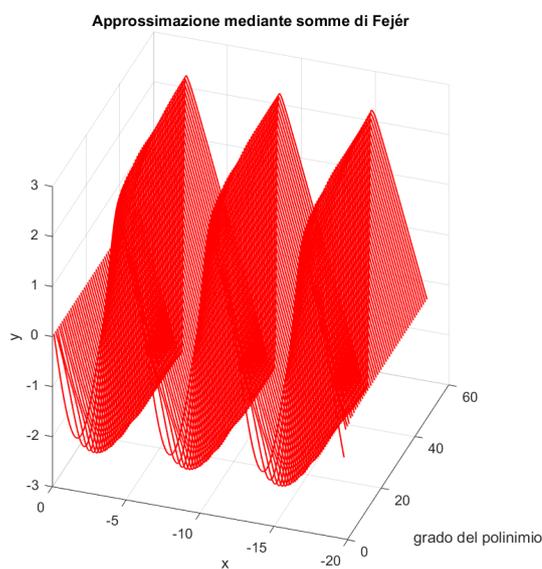


Figura 3.7: Grafico 3D approssimazione onda a dente di sega con somme di Fejér per $n = 50$

E' quindi evidente come scompaiano le sovraoscillazioni lavorando con le somme di Fejér.

Capitolo 4

Appendice: codici Matlab

Riporto di seguito alcuni dei codici Matlab utilizzati per creare i grafici presenti in questo elaborato.

Polinomi di Fourier di q

```
function [Sn]=fourierq(x,n)
Sn=zeros(1);
for k=1:n
Sn=Sn+4*sin((2*k-1)*x)/(pi*(2*k-1));
end
end
```

Polinomi di Fourier di s

```
function [Sn]=s(x,n)
Sn=zeros(1,length(x));
for k=1:n
if mod(k,2)==1
Sn=Sn+2.*(sin(k.*x)./k);
else
Sn=Sn-2.*(sin(k.*x)./k);
end
end
end
```

Grafici 3D polinomi di Fourier e somme di Fejér

```
clc
clear
close all
n=50;
choice=menu('scegli la funzione onda','quadra','dente di sega')
punti=200;
```

```
h=2*pi/punti;
for i=1:punti
ascisse(i)=-pi*(i-1)*h;
end
for i=1:n
xS(:,i)=ascisse;
z(:,i)=i*ones(1,punti);
end
if choice==1;
for i=1:n
ygibbs(:,i)=q(ascisse,i);
end
else
for i=1:n
ygibbs(:,i)=s(ascisse,i);
end
end
box=ygibbs;
yfej=ygibbs;
for i=2:n
for j=1:i-1
yfej(:,i)=yfej(:,i)+ygibbs(:,j);
end
yfej(:,i)=yfej(:,i)./i;
end
figure(1)
subplot(1,2,1)
plot3(z,xS,ygibbs,'b','LineWidth',1)
title('Approssimazione mediante polinomi di Fourier')
xlabel('grado del polinomio')
ylabel('x')
zlabel('y')
grid on
subplot(1,2,2)
plot3(z,xS,yfej,'r','LineWidth',1)
title('Approssimazione mediante somme di Fejér')
xlabel('grado del polinomio')
ylabel('x')
zlabel('y')
grid on
```

Bibliografia

- [1] Appunti del corso di Complementi di Analisi tenuto dalla professoressa Annamaria Montanari.
- [2] Pozzi, Gianni A. (2006/07), *Cenni sulle serie di Fourier*, <https://mate.unipv.it/giulio/linkedmaterial/camb08/fourier-pozzi.pdf>
- [3] Hewitt, Edwin e Robert (1979), *The Gibbs- Wilbraham Phenomenon: An Episode in Fourier Analysis*, The University of Washington Seattle and Lockheed Missiles and Space Company Sunnyvale, California.
- [4] Sneddon, I.N. (1969), *Fourier series*, Routledge and Kegan Paul.
- [5] Raeen, Kurosh (2008), *A study of the Gibbs Phenomenon in Fourier Series and Wavelets*, <https://math.unm.edu/crisp/students/kouroshMStthesis.pdf>
- [6] Guidi, Chiara (2012/13), *Il fenomeno di Gibbs*, tesi di laurea, <https://amslaurea.unibo.it/5668/1/guidichiaratesi.pdf>
- [7] Brozzi, Giulio Cesare (2014), *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*, Zanichelli, Bologna.