Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

La Disuguaglianza Isodiametrica

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Vittorio Martino

Presentata da:
Giulia Guglielmi

Anno Accademico 2022-2023

IV Sessione

A te mimi, piccolo e grande faro

Introduzione

Felix Hausdorff (1868-1942) è stato un matematico tedesco, noto per i suoi importanti contributi alla topologia, alla teoria degli insiemi e all'analisi funzionale. Definì e studiò gli spazi e le dimensioni che oggi portano il suo nome.
In questo elaborato approfondiremo il concetto di misura e dimensione di Hausdorff, richiamando anche nozioni base della misura, in particolare la misura di Lebesgue.
L'obiettivo di questa tesi è quello di dimostrare che ogni insieme in $\mathbb{R}^n$ soddisfa la disuguaglianza isodiametrica, e utilizzeremo poi questo risultato per provare che la misura di Hausdorff è equivalente a quella di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$; mostreremo infatti che la misura di Hausdorff è una generalizzazione di quella di Lebesgue. Si studierà inoltre la simmetrizzazione di Steiner, strumento necessario alla dimostrazione della disuguaglianza isodiametrica. Mostreremo che gli unici insiemi isodiametrici, cioè quelli che verificano l'uguaglianza nella disuguaglianza citata, sono le palle in $\mathbb{R}^n$; in altre parole queste hanno volume maggiore rispetto a qualunque altro insieme in $\mathbb{R}^n$, a parità di diametro. Tramite il teorema della simmetrizzazione, Steiner diede una prima soluzione del problema isoperimetrico, cioè dimostrò che, fissato il perimetro, se esiste una curva chiusa sul piano che massimizza l'area da essa delimitata, questa è la circonferenza.
Infine, nella prima appendice, presenteremo una dimostrazione alternativa della disuguaglianza isodiametrica nel caso bidimensionale e, nella seconda appendice, grazie alle definizioni e proprietà della misura di Hausdorff trat-

tate, vedremo un esempio di frattale matematico: l'insieme di Cantor, e ne calcoleremo la misura di Lebesgue e la dimensione di Hausdorff in modo esplicito.

Per una trattazione più completa si vedano le seguenti monografie [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10].

Indice

Elenco delle figure

Per le figure ho consultato le seguenti fonti:

- `https://www.scientificast.it/`
- `https://new.qq.com/rain/a/20211027A07WLY00`
- `https://francescopolizzi.blogspot.com/`
- vedi [12]
- `https://folk.ntnu.no/hanche/blog`
- `https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/mrodperv/fractales/fractales-lineales/`

Capitolo 1

Richiami di teoria della misura

In questo capitolo richiamiamo alcuni concetti fondamentali della teoria della misura, per poter introdurre in seguito la misura di Hausdorff.

1.1 Definizione di misura

Definizione. Sia S un insieme qualsiasi, chiamiamo **insieme delle parti** di S e indichiamo $\mathcal{P}(S)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di S

$$\mathcal{P}(S) = \{A \,|\, A \subseteq S\}.$$

Definizione. Sia X un insieme non vuoto. Un'applicazione $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ si dice **misura esterna** se:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)\, se\, A \subseteq B \subseteq X$ $(Monotonia)$,
3. $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ $allora$ $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ $(Subadditività)$.

Definizione. Sia μ^* una misura esterna su X e sia A $\subseteq$ X. A si dice μ^*- **misurabile** se $\forall E \subseteq X$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Indichiamo con $\mathcal{M}(X)$ gli insiemi misurabili di X.

Definizione. Chiamiamo **misura** μ la restrizione di μ^* ai sottoinsiemi misurabili di X, ovvero $\mu : \mathcal{M}(X) \to [0, +\infty]$.

1.2 Misura metrica

Sia (X, d) uno spazio metrico, cioè uno spazio su cui è definita una distanza o metrica d, e μ una misura su X. Poichè una distanza induce sempre una topologia sullo spazio X, è di nostro interesse studiare la misurabilità dei sottoinsiemi chiusi (o equivalentemente aperti) di X. Introduciamo innanzitutto il concetto di distanza tra insiemi.

Definizione. Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di X. Si chiama **distanza** tra A e B il numero reale

$$d(A, B) \;=\; \inf\{d(x, y) \mid x \in A\,,\, y \in B\}.$$

Analogamente si definisce la distanza tra $x \in X$ e $A \subseteq X$

$$d(x, A) \;=\; \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Definizione. Sia μ una misura su (X, d). μ si dice **misura metrica**, rispetto alla distanza d, se

$$\mu(A \cup B) \;=\; \mu(A) + \mu(B), \quad \forall\, A, B \subseteq X \;:\; d(A, B) > 0.$$

Teorema 1.1. *Se μ è una misura metrica su (X, d), ogni sottoinsieme chiuso di X è μ-misurabile.*

Per dimostrare questo teorema ci serve il seguente lemma:

Lemma 1.2. *Sia μ una misura metrica su (X, d). Per ogni successione $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di X, tali che*

1. $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} F_k) < \infty$,

2. $d(F_k, F_{k+2}) > 0, \;\; \forall k \in \mathbb{N}$,

risulta

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) \;=\; \lim_{p\to+\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{p} F_k).$$

Dimostrazione. Poniamo $F \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ e $\forall p \in \mathbb{N}$

$$S_p = \bigcup_{k=1}^{p} F_k, \quad R_p = \bigcup_{k=p+1}^{\infty} F_k.$$

Risulta $S_p \subseteq F \subseteq S_p \cup R_p$, quindi si ha

$$\mu(S_p) \le \mu(F) \le \mu(S_p) + \mu(R_p).$$

Notiamo che $\mu(R_p) \to 0$ per $p \to \infty$ e inoltre μ è subadditiva, dunque

$$\mu(R_p) \le \sum_{k=p+1}^{\infty} \mu(F_k).$$

Basta quindi provare la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k)$.
Per ipotesi, qualunque sia $k \in \mathbb{N}$

$$d(F_{2k}, F_{2k+2}) > 0\,,\; d(F_{2k-1}, F_{2k+1}) > 0$$

allora la serie converge, in quanto, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \mu(F_k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mu(F_{2k}) + \sum_{k=1}^{n} \mu(F_{2k-1}) \;=$$

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} F_{2k}) + \mu(\bigcup_{k=1}^{n} F_{2k-1}) \le \mu(F) + \mu(F) < +\infty$$

□

Ora possiamo quindi dimostrare il teorema 1.1.

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme chiuso di $(X.d)$. Dimostriamo che $\forall\, E \subseteq X$ vale:

$$\mu(E) \;\ge\; \mu(E \cap A) \;+\; \mu(E \cap A^c)$$

(la disuguaglianza inversa si ottiene dalla subadditività di μ), da cui segue la misurabilità di A. Se $\mu(E)$ non fosse finita, la disuguaglianza sarebbe banalmente verificata. Supponiamo quindi che $\mu(E) < +\infty$ e per k intero si ponga $E_k = \{x \in E \,|\, (\frac{1}{2})^{k+1} < d(x, A) \leq (\frac{1}{2})^k\}$. A è chiuso per ipotesi, dunque si ha

$$E \cap A^c = \{x \in E \,|\, d(x, A) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k.$$

Inoltre, $\forall t \in \mathbb{N}$ si ha

$$d(E \cap A, \bigcup_{k=-t}^{t} E_k) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} > 0,$$

ed essendo μ metrica

$$\mu(E) \geq \mu((E \cap A) \cup (\bigcup_{k=-t}^{t} E_k)) = \mu(E \cap A) + \mu(\bigcup_{k=-t}^{t} E_k).$$

Ma $\forall k \in \mathbb{Z}$ vale

$$d(E_k, E_{k+2}) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} > 0$$

poichè se $x \in E_k$ e $y \in E_{k+2}$

$$d(x, y) \geq d(x, A) + d(y, A) > \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}.$$

Allora, dato che $\mu(\bigcup_k E_k) \leq \mu(E) < +\infty$, per il lemma 1.2

$$\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k) = \lim_{t \to +\infty} \mu(\bigcup_{k=-t}^{t} E_k).$$

Passando ora al limite per $t \to +\infty$ si ottiene

$$\mu(E) \geq \mu((E \cap A) + (\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k)) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c),$$

da cui la tesi.

□

1.3 Boreliani

Definizione. Sia X un insieme arbitrario. Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice **σ-algebra** se:

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c \in \mathcal{A}$,
3. $A_k \in \mathcal{A}$ per $k = 1, \dots$ allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$.

Definizione. Sia $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ una qualunque famiglia di sottoinsiemi non vuota di X, la **σ-algebra generata da** C, si scrive $\sigma(C)$, è la più piccola σ-algebra contenente C.

Definizione. La **σ-algebra di Borel** su $\mathbb{R}^n$ è la più piccola σ-algebra su $\mathbb{R}^n$ che contiene tutti i sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$.

Definizione. Una misura μ su $\mathbb{R}^n$ si dice **boreliana** se ogni insieme di Borel è μ-misurabile.

Definizione. Una misura μ su X è **regolare** se per ogni $A \subseteq X$ esiste un insieme B μ-misurabile, tale che $A \subseteq B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.

Definizione. Una misura μ su $\mathbb{R}^n$ si dice **boreliana regolare** se μ è di Borel e se per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ esiste un insieme B μ-misurabile, tale che $A \subseteq B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.

Teorema 1.3 (Primo teorema di Caratheodory)**.** *Sia* $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ *una misura esterna. Sia* $\mathcal{M} = \{E \subseteq X \mid \mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c),\ \forall A \subseteq X\}$. *Allora* $\mathcal{M}$ *è una* σ*-algebra detta dei misurabili, e* μ *ristretta a* $\mathcal{M}$ *è una misura.*

Dimostrazione. La prova si trova in [11].

□

Teorema 1.4 (Secondo teorema di Caratheodory)**.** *Sia* μ *una misura esterna su uno spazio metrico* (X, d). *Se* μ *è una misura metrica, allora i boreliani di* X *sono misurabili.*

Dimostrazione. La prova si trova in [11].

□

1.4 Misura di Lebesgue

Richiamiamo ora la misura di Lebesgue n-dimensionale, e denotiamola μ_n.

Definizione. Chiamiamo **intervallo compatto** di $\mathbb{R}^n$ un insieme del tipo

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ tali che $a_j \leq b_j$, con $j = 1, \ldots, n$.

Definizione. Sia I un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$, la **misura di** I è il numero reale non negativo

$$mis(I) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Definizione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, un **ricoprimento lebesguiano** $(r.\,l.)$ di A è una famiglia finita o numerabile di intervalli compatti di $\mathbb{R}^n$, $(I_k)_{k\in\mathcal{I}}$ con $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$, tale che $A \subseteq \bigcup_{k\in\mathcal{I}} I_k$.

Definizione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si chiama **misura esterna di Lebesgue** di A il numero reale esteso

$$\mu_n^*(A) \ = \ \inf\{\sum_{k\in\mathcal{I}} mis(I_k) \,|\, (I_k)_{k\in\mathcal{I}} \ r.\,l.\,di\ A\}.$$

Notazione. Gli insiemi misurabili secondo la misura esterna di Lebesgue si dicono Lebesgue-misurabili. D'ora in avanti indicheremo con $\mu_n(A)$ la misura esterna di Lebesgue di un qualunque sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$, sia esso misurabile o meno secondo Lebesgue.

Capitolo 2

Misura di Hausdorff

In questo capitolo introduciamo la misura di Hausdorff α-dimensionale, con α reale non negativo, di un qualsiasi sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$.

2.1 Definizione di misura di Hausdorff

Sono necessarie alcune nozioni preliminari.

Definizione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo **diametro** e **raggio** di A i seguenti

- $diam(A) = \sup\{|x-y| \,|\, x, y \in A\}$,
- $r(A) = \frac{diam(A)}{2}$.

Definizione. Sia $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un **δ-ricoprimento** di A è una famiglia $(B_k)_{k\in\mathcal{A}}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, tale che:

1. $\mathcal{A}$ è finito o numerabile,
2. $diam(B_k) \leq \delta$, $\forall k \in \mathcal{A}$,
3. $A \subseteq \bigcup_{k\in\mathcal{A}} B_k$.

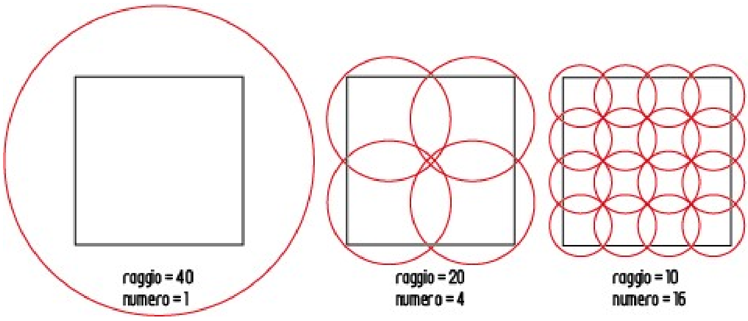

Figura 2.1: δ-ricoprimento di un quadrato di lato 40 al diminuire di δ

Innanzitutto, per ogni α reale non negativo poniamo

$$\omega_\alpha = \frac{\pi^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)},$$

dove $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$, $s > 0$, è la **funzione Gamma di Eulero**.

Osservazione 2.1. Il numero reale ω_n, se n è un numero naturale, è la misura di Lebesgue n-dimensionale della palla di raggio unitario in $\mathbb{R}^n$.

Definizione. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \leq \alpha < \infty$, $0 < \delta \leq \infty$, allora

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, B_k}{2}\Big)^\alpha \,|\, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,\, diam\, B_k \leq \delta\}.$$

La **misura di Hausdorff α-dimensionale** su $\mathbb{R}^n$ è definita come

$$\mathcal{H}^\alpha(A) := \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta .$$

Osservazione 2.2. La seconda uguaglianza è giustificata dal fatto che $\mathcal{H}^\alpha_\delta(A)$ è monotona decrescente in δ, infatti se $\delta_1 < \delta_2$, ogni δ_1-ricoprimento di A è anche un δ_2-ricoprimento di A, quindi $\mathcal{H}^\alpha_{\delta_1}(A) \geq \mathcal{H}^\alpha_{\delta_2}(A)$.

Teorema 2.3. *Per ogni α tale che $0 \leq \alpha < \infty$, $\mathcal{H}^\alpha$ è una misura boreliana regolare in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Prima di tutto proviamo che $\mathcal{H}_\delta^\alpha$ è una misura. Consideriamo una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ tali che $A_k \subseteq \cup_{j=1}^\infty B_j^k$, con $diam\, B_j^k \leq \delta$. Allora $\{B_j^k\}_{j,k=1}^\infty$ è un ricoprimento per $\cup_{k=1}^\infty A_k$. Segue che

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(\bigcup_{k=1}^\infty A_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, B_j^k}{2}\Big)^\alpha$$

e prendendo l'estremo inferiore,

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(\bigcup_{k=1}^\infty A_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}_\delta^\alpha(A_k).$$

Ora per provare che $\mathcal{H}^\alpha$ è una misura, scegliamo una famiglia $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}^n$. Vale

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(\bigcup_{k=1}^\infty A_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}_\delta^\alpha(A_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^\alpha(A_k).$$

Per $\delta \to 0$ si ottiene quello che volevamo provare.
Mostriamo che $\mathcal{H}^\alpha$ è una misura boreliana.
Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che la loro distanza sia maggiore di 0. Si scelga $0 < \delta < \frac{1}{4} dist(A,B)$ e si supponga che $A \cup B \subseteq \cup_{k=1}^\infty B_k$, con $diam\, B_k \leq \delta$. Siano $\mathcal{A} := \{B_j \,|\, B_j \cap A \neq \emptyset\}$ e $\mathcal{B} := \{B_j \,|\, B_j \cap B \neq \emptyset\}$. Allora $A \subseteq \cup_{B_j \in \mathcal{A}} B_j$ e $B \subseteq \cup_{B_j \in \mathcal{B}} B_j$ e sappiamo che $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $B_i \in \mathcal{A}, B_j \in \mathcal{B}$. Segue che

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^\infty \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, B_j}{2}\Big)^\alpha &\geq \sum_{B_j \in \mathcal{A}} \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, B_j}{2}\Big)^\alpha + \sum_{B_j \in \mathcal{B}} \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, B_j}{2}\Big)^\alpha \\ &\geq \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) + \mathcal{H}_\delta^\alpha(B).\end{aligned}$$

Perciò si vede che $\mathcal{H}_\delta^\alpha(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) + \mathcal{H}_\delta^\alpha(B)$ e per $\delta \to 0$ otteniamo $\mathcal{H}^\alpha(A \cup B) \geq \mathcal{H}^\alpha(A) + \mathcal{H}^\alpha(B)$. Quindi abbiamo che $\forall\, A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, tali che $dist(A,B) > 0$, $\mathcal{H}^\alpha$ è di Borel perchè $\mathcal{H}^\alpha(A \cup B) = \mathcal{H}^\alpha(A) + \mathcal{H}^\alpha(B)$.
Infine si dimostra che $\mathcal{H}^\alpha$ è una misura boreliana regolare. Infatti, osserviamo prima di tutto che il diametro di un qualsiasi insieme C è uguale al diametro della sua chiusura. Dunque

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = \inf\{\sum_{j=1}^\infty \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, C_j}{2}\Big)^\alpha \,|\, A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty C_j,\ diam\, C_j \leq \delta,\ C_j\, chiusi\}.$$

Sia ora $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con misura di Hausdorff α-dimensionale $< \infty$, allora $\forall\, \delta > 0$ anche $\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) < \infty$. Consideriamo la famiglia di sottoinsiemi chiusi $\{C^k_j\}_{j=1}^\infty$ con $diam\, C^k_j \leq \frac{1}{k}$, $k \geq 1$ e tali che $A \subseteq \cup_{j=1}^\infty C^k_j$, si ha

$$\sum_{j=1}^{\infty} \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, C^k_j}{2}\Big)^\alpha \leq \mathcal{H}^\alpha_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Prendiamo quindi $A_k := \cup_{j=1}^\infty C^k_j$, $B := \cap_{k=1}^\infty A_k$; B è un boreliano. Inoltre $A \subseteq A_k$, $\forall k$, e allora $A \subseteq B$ e vale

$$\mathcal{H}^\alpha_{\frac{1}{k}}(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, C^k_j}{2}\Big)^\alpha \leq \mathcal{H}^\alpha_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Mandando $k \to \infty$ troviamo $\mathcal{H}^\alpha(B) \leq \mathcal{H}^\alpha(A)$ ma $A \subseteq B$ quindi $\mathcal{H}^\alpha(A) = \mathcal{H}^\alpha(B)$ e questo conclude la prova.

□

2.2 Proprietà della misura di Hausdorff

Definizione. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $n, m \geq 1$, si dice **lipschitziana** se esiste una costante reale $c > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

per ogni $x, y \in A$.

Lemma 2.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ $\mathcal{H}^\alpha$-misurabile. Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una funzione lipschitziana con costante c, allora*

$$\mathcal{H}^\alpha(f(A)) \leq c^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A).$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ e sia $\{A_i\}$ un ricoprimento di A tale che:

1. $diam(A_i) \leq \delta$,
2. $\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) + \epsilon \geq \sum_{i=1}^\infty \omega_\alpha (\frac{diam\, A_i}{2})^\alpha$.

Allora, siccome $diam(f(A_i)) = \sup\{|f(x)-f(y)|\, t.c.\, x, y \in A_i\} \leq c \sup\{|x-y|\, t.c.\, x, y \in A_i\} = c\, diam(A_i)$ e $\{f(A_i)\}$ è un ricoprimento di $f(A)$, si ha:

$$\mathcal{H}^\alpha_{c\delta}(f(A)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, f(A_i)}{2}\Big)^\alpha$$

$$\leq c^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, A_i}{2}\Big)^\alpha \leq c^\alpha (\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) + \epsilon),$$

da cui al limite per $\delta \to 0^+$ e per $\epsilon \to 0^+$ la tesi.

□

Teorema 2.5 (Proprietà della misura di Hausdorff)**.** *La misura di Hausdorff gode delle seguenti proprietà:*

1. $\mathcal{H}^0$ *è la misura discreta;*

2. $\mathcal{H}^1 = \mu_1$ *in* $\mathbb{R}^1$*;*

3. $\mathcal{H}^\alpha = 0, \forall\, \alpha > n$ *in* $\mathbb{R}^n$*;*

4. $\mathcal{H}^\alpha(\lambda A) = \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A), \forall\, \lambda > 0,\ A \subseteq \mathbb{R}^n$*;*

5. $\mathcal{H}^\alpha(L(A)) = \mathcal{H}^\alpha(A)$ *con* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *è un'isometria affine e* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*.*

Dimostrazione. Innanzitutto per dimostrare il punto 1 osserviamo che $\omega_0 = 1$ quindi $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$, da cui segue la tesi.
Si consideri ora $A \subseteq \mathbb{R}^1$ e $\delta > 0$, allora

$$\mu_1(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} diam\, B_j \,|\, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\}$$

$$\leq \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} diam\, B_j \,|\, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, diam\, B_j \leq \delta\}$$

$$= \mathcal{H}^1_\delta(A),$$

e questo vale perchè $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ quindi $\omega_1 = 2$. Dunque $\mu_1(A) \leq \mathcal{H}^1(A)$. Per provare la disuguaglianza nel verso opposto definiamo $I_k := [k\delta, (k+1)\delta]$ con k intero. Segue che $diam(B_k \cap I_k) \leq \delta$ e

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} diam\,(B_j \cap I_k) \leq diam\, B_j.$$

Allora è vero che

$$\mu_1(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} diam\, B_j \,|\, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\}$$

$$\geq \inf\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} diam\,(B_j \cap I_k) \,|\, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\}$$

$$\geq \mathcal{H}^1_\delta(A).$$

Questo prova che $\mu_1 = \mathcal{H}^1_\delta$, $\forall\, \delta > 0$ e allora anche $\mu_1 = \mathcal{H}^1$ in $\mathbb{R}^1$ (secondo punto).
Per il punto 3 si fissi un intero $m \geq 1$. Sia $\mathcal{Q}$ il cubo di lato unitario in $\mathbb{R}^n$, esso può essere decomposto in m^n cubi e questi avranno lato $\frac{1}{m}$ e diametro pari a $\frac{\sqrt{n}}{m}$. Inoltre

$$\mathcal{H}^\alpha_{\frac{\sqrt{n}}{m}}(\mathcal{Q}) \leq \sum_{i=1}^{m^n} \omega_\alpha \Big(\frac{\sqrt{n}}{m}\Big)^\alpha = \omega_\alpha n^{\frac{\alpha}{2}} m^{n-\alpha};$$

e l'ultimo termine per $m \to \infty$ va a 0 se $\alpha > n$. Questo vuol dire che $\mathcal{H}^\alpha(\mathcal{Q}) = 0$, da cui segue che $\mathcal{H}^\alpha(\mathbb{R}^n) = 0$ per ogni $\alpha > n$.
Dimostriamo ora il punto 4. La funzione $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, è lipschitziana con costante di Lipschitz λ, pertanto, dal lemma 2.4:

$$\mathcal{H}^\alpha(\lambda A) \leq \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A) = \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(\frac{\lambda A}{\lambda}) \leq \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^\alpha} \mathcal{H}^\alpha(\lambda A).$$

Analogamente, se L è un'isometria, allora

$$|L(x) - L(y)| = |x - y|,$$

quindi sia L che L^{-1} sono funzioni lipschitziane con costante $c = 1$, perciò si ha, grazie al lemma 2.4:

$$\mathcal{H}^\alpha(L(A)) \leq \mathcal{H}^\alpha(A) = \mathcal{H}^\alpha(L^{-1}(L(A))) \leq \mathcal{H}^\alpha(L(A))$$

e così abbiamo dimostrato anche il quinto punto.

$\square$

Lemma 2.6. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *se* $\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) = 0$ *per qualche* $0 < \delta < \infty$ *, allora* $\mathcal{H}^\alpha(A) = 0$.

Dimostrazione. La prova è banale per $\alpha = 0$ perciò si supponga $\alpha > 0$.
Si fissi $\epsilon > 0$. Sappiamo che esiste una famiglia di insiemi $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ tale che $A \subseteq \cup_{j=1}^\infty B_j$, e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, B_j}{2}\Big)^\alpha \leq \epsilon.$$

In particolare $\forall\, i$, si ha

$$diam\, B_i \leq 2\Big(\frac{\epsilon}{\omega_\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}} =: \delta(\epsilon).$$

Quindi

$$\mathcal{H}^\alpha_{\delta(\epsilon)}(A) \leq \epsilon.$$

Mandando $\epsilon \to 0$ anche $\delta(\epsilon)$ tende a 0 e si ottiene la tesi.

$\square$

2.3 Dimensione di Hausdorff

In conclusione a questo capitolo definiamo la dimensione di Hausdorff di un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Per farlo, enunciamo e dimostriamo un importante lemma.

Lemma 2.7. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $0 \leq \alpha < t < \infty$.

1. $\mathcal{H}^\alpha(A) < \infty \Longrightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$,

2. $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^\alpha(A) = +\infty$.

Dimostrazione. Proviamo il primo punto.
Supponiamo $\mathcal{H}^\alpha(A) < \infty$ e $\delta > 0$. Esiste $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ con $diam\, B_j \leq \delta$, $A \subseteq \cup_{j=1}^\infty B_j$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, B_j}{2}\Big)^\alpha \leq \mathcal{H}_\delta^\alpha(A) + 1 \leq \mathcal{H}^\alpha(A) + 1.$$

Da questo segue:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\delta^t(A) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \omega_t \Big(\frac{diam\, B_j}{2}\Big)^t \\ &= \frac{\omega_t}{\omega_\alpha} 2^{\alpha-t} \sum_{j=1}^{\infty} \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, B_j}{2}\Big)^\alpha (diam\, B_j)^{t-\alpha} \\ &\leq \frac{\omega_t}{\omega_\alpha} 2^{\alpha-t} \delta^{t-\alpha} (\mathcal{H}^\alpha(A) + 1).\end{aligned}$$

Per $\delta \to 0$ possiamo concludere che $\mathcal{H}^t(A) = 0$. Abbiamo così provato il primo punto, da cui segue facilmente il secondo.

□

Definizione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si chiama **dimensione di Hausdorff** di A il seguente

$$dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{0 \leq \alpha < \infty \,|\, \mathcal{H}^\alpha(A) = 0\}.$$

Osservazione 2.8. Dalla terza proprietà della misura di Hausdorff 2.5 segue che $dim_{\mathcal{H}}(A) \leq n$. Sia $s = dim_{\mathcal{H}}(A)$. Allora, grazie al lemma 2.7, $\mathcal{H}^t(A) = 0$ per qualsiasi $t > s$ e $\mathcal{H}^t(A) = +\infty$ per ogni $t < s$. Notiamo che $\mathcal{H}^s(A)$ può assumere qualsiasi valore tra 0 e $+\infty$ inclusi.

Esempio. Nel 1967 è stato pubblicato un articolo intitolato *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*, scritto dal matematico Benoît Mandelbrot. Tale articolo esamina il paradosso della linea costiera, ovvero il fatto che la lunghezza di tale linea dipenda fortemente dal metodo utilizzato per misurarla, ed empiricamente questa aumenta quando si riduce l'ampiezza dell'unità di misura di riferimento. Mandelbrot quindi descrive varie curve, tra cui la linea costiera della Gran Bretagna, e ne calcola la dimensione di Hausdorff. La linea costiera bretone ha dimensione di Hausdorff uguale a 1.25. Mandelbrot mostra che la dimensione di Hausdorff è prossima al valore 2 quanto più la curva della linea costiera è irregolare.

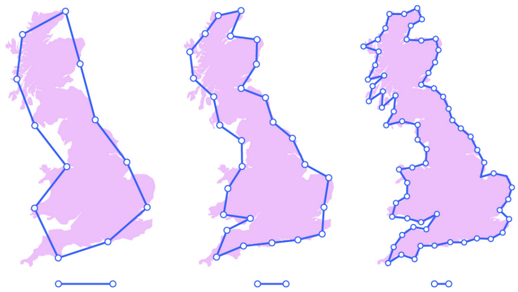

Figura 2.2: Costa bretone

Nella figura 2.2 è possibile vedere il ricoprimento della costa bretone al diminuire di δ

Capitolo 3

Disuguaglianza Isodiametrica

In questo capitolo vogliamo dimostrare la disuguaglianza isodiametrica e provare che la misura di Hausdorff coincide con quella di Lebesgue n-dimensionale in $\mathbb{R}^n$. Per fare ciò introduciamo un importante strumento: la simmetrizzazione di Steiner.

3.1 Simmetrizzazione di Steiner

Notazione. Fissiamo a, b in $\mathbb{R}^n$, con $|a| = 1$ e definiamo

$$L_b^a := \{b + ta \mid t \in \mathbb{R}\}$$

la retta passante per b con direzione a, e

$$P_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot a = 0\},$$

il piano passante per l'origine, perpendicolare ad a; dove $\cdot$ denota il prodotto scalare.

Definizione. Sia $a \in \mathbb{R}^n$ tale che $|a| = 1$, e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si definisce **simmetrizzazione di Steiner** di A rispetto al piano P_a il seguente insieme

$$S_a(A) := \bigcup_{\substack{b \in P_a \\ A \cap L_b^a \neq \emptyset}} \{b + ta \mid |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)\}.$$

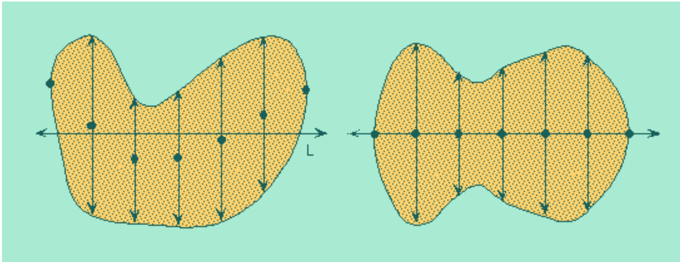

Figura 3.1: Simmetrizzazione di Steiner

Teorema 3.1 (Proprietà della simmetrizzazione di Steiner)**.** *La simmetrizzazione di Steiner gode di due proprietà:*

- $diam\, S_a(A) \le diam\, A$,
- *se* A *è Lebesgue-misurabile, allora anche* $S_a(A)$ *lo è; in particolare* $\mu_n(S_a(A)) = \mu_n(A)$.

Dimostrazione. Supponiamo $diam\, A < \infty$, altrimenti la prova del primo punto è triviale. Inoltre non è restrittivo supporre che A sia chiuso. Fissiamo $\epsilon > 0$ e scegliamo $x, y \in S_a(A)$ in modo che

$$diam\, S_a(A) \le |x - y| + \epsilon.$$

Se $b := x - (x \cdot a)a$ e $c := y - (y \cdot a)a$, allora b, c appartengono a P_a. Si ponga

$$r := \inf\{t \,|\, b + ta \in A\},$$

$$s := \sup\{t \,|\, b + ta \in A\},$$

$$u := \inf\{t \,|\, c + ta \in A\},$$

$$v := \sup\{t \,|\, c + ta \in A\}.$$

Possiamo assumere $v - r \ge s - u$ senza perdere di generalità. Allora

$$\begin{aligned} v - r &\ge \frac{1}{2}(v - r) + \frac{1}{2}(s - u) \\ &= \frac{1}{2}(s - r) + \frac{1}{2}(v - u) \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) + \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_c^a).$$

Sappiamo che $|x \cdot a| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)$ e $|y \cdot a| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_c^a)$. Perciò otteniamo

$$v - r \geq |x \cdot a| + |y \cdot a| \geq |x \cdot a - y \cdot a|.$$

Quindi

$$(diam\, S_a(A) - \epsilon)^2 \leq |x - y|^2$$

$$= |b - c|^2 + |x \cdot a - y \cdot a|$$

$$\leq |b - c|^2 + (v - r)^2$$

$$= |(b + ra) - (c + va)|^2$$

$$\leq (diam\, A)^2,$$

perchè essendo A chiuso, $b + ra$, $c + va \in A$. Dalla catena di disuguaglianze segue quindi che $diam\, S_a(A) - \epsilon \leq diam\, A$.

Per la seconda proprietà, prima di tutto osserviamo che la misura di Lebesgue n-dimensionale è invariante per rotazioni, quindi si può assumere per comodità $a = e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Allora $P_a = P_{e_n} = \mathbb{R}^{n-1}$. Sapendo dal capitolo precedente che $\mathcal{H}^1 = \mu_1$ su $\mathbb{R}^1$, applichiamo il teorema di Fubini alla mappa μ_{n-1}-misurabile $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^1$ definita come $f(b) = \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)$ e vale $\mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)db$. Ridefiniamo quindi $S_a(A)$ come

$$S_a(A) := \{(b, y) \mid \frac{-f(b)}{2} \leq y \leq \frac{f(b)}{2}\} - \{(b, 0) \mid L_b^a \cap A = \emptyset\}.$$

Esso è Lebesgue-misurabile e si ha

$$\mu_n(S_a(A)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)db = \mu_n(A)$$

da cui la tesi.

□

3.2 Disuguaglianza isodiametrica

Teorema 3.2 (Disuguaglianza Isodiametrica). $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mu_n(A) \le \omega_n\Big(\frac{diam\, A}{2}\Big)^n.$$

Dimostrazione. La prova è banale per $diam\, A = \infty$, perciò supponiamo $diam\, A < \infty$. Scegliamo la base canonica $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ su $\mathbb{R}^n$. Chiamiamo $A_1 := S_{e_1}(A)$, $A_2 := S_{e_2}(A_1), \ldots,$ $A_n := S_{e_n}(A_{n-1})$ e poniamo $A^* = A_n$. Dividiamo la dimostrazione in tre passi. Prima di tutto ci proponiamo di dimostrare che A^* è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Chiaramente A_1 è simmetrico rispetto a P_{e_1} per come è definito. Sia $1 \le k < n$, e supponiamo che A_k sia simmetrico rispetto a $P_{e_1}, \ldots, P_{e_k}$. Allora in questo caso avremmo anche che $A_{k+1} = S_{e_{k+1}}(A_k)$ è simmetrico rispetto a $P_{e_{k+1}}$. Fissiamo ora $1 \le j \le k$ e sia $S_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la riflessione attraverso il piano P_{e_j}. Sia b un elemento del piano $P_{e_{k+1}}$. Sapendo che $S_j(A_k) = A_k$,

$$\mathcal{H}^1(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathcal{H}^1(A_k \cap L_{S_j b}^{e_{k+1}});$$

da cui segue che

$$\{t \,|\, b + te_{k+1} \in A_{k+1}\} = \{t \,|\, S_j b + te_{k+1} \in A_{k+1}\}.$$

Quindi $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$ cioè A_{k+1} è simmetrico rispetto al piano P_{e_j}. Questo prova che $A^* = A_n$ è simmetrico rispetto a $P_{e_1}, \ldots, P_{e_n}$, perciò anche rispetto all'origine.

Nel secondo passo vogliamo mostrare che $\mu_n(A^*) \le \omega_n\Big(\frac{diam\, A^*}{2}\Big)^n$.

Scegliamo $x \in A^*$. Allora per il passo precedente $-x \in A^*$, questo implica che $diam\, A^* \ge 2|x|$. Quindi $A^* \subseteq B(0, \frac{diam\, A^*}{2})$ e conseguentemente

$$\mu_n(A^*) \le \mu_n\Big(B\Big(0, \frac{diam\, A^*}{2}\Big)\Big) = \omega_n\Big(\frac{diam\, A^*}{2}\Big)^n.$$

Infine proviamo che $\mu_n(A) \le \omega_n\Big(\frac{diam\, A}{2}\Big)^n$.

$\overline{A}$ è Lebesgue-misurabile, e per il teorema 3.1

$$\mu_n((\overline{A})^*) = \mu_n(\overline{A}),\ diam(\overline{A})^* \le diam\, \overline{A}.$$

Ora, per quanto provato al passo 2,

$$\mu_n(A) \leq \mu_n(\overline{A}) = \mu_n((\overline{A})^*) \leq \omega_n\Big(\frac{diam(\overline{A})^*}{2}\Big)^n$$

$$\leq \omega_n\Big(\frac{diam\,\overline{A}}{2}\Big)^n = \omega_n\Big(\frac{diam\,A}{2}\Big)^n$$

e questo conclude la dimostrazione.

□

Osservazione 3.3. Si noti che l'insieme A non deve necessariamente essere contenuto in una palla di diametro pari a $diam(A)$. Il teorema infatti vale per un qualsiasi insieme $A \in \mathbb{R}^n$.

3.3 Misura di Lebesgue e misura di Hausdorff n-dimensionali

Teorema 3.4. $\mathcal{H}^n \equiv \mu_n$ *in* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Step 1: proviamo che $\mu_n(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$ per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Fissato $\delta > 0$, scegliamo una famiglia di insiemi $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ in modo che $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} B_j$ e $diam\,B_j \leq \delta$. Grazie al teorema 3.2 sulla disuguaglianza isodiametrica, vale la seguente

$$\mu_n(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \omega_n\Big(\frac{diam\,B_j}{2}\Big)^n.$$

Prendendo l'estremo inferiore, si ottiene $\mu_n(A) \leq \mathcal{H}^n_\delta(A)$, quindi anche $\mu_n(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$.
Ma dalla definizione di μ_n, sappiamo che $\mu_n = \mu_1 \times \cdots \times \mu_1$. Si ha dunque, $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$,

$$\mu_n(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\mathcal{Q}_i) \,|\, \mathcal{Q}_i\, cubi,\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{Q}_i,\ diam\,\mathcal{Q}_i \leq \delta\},$$

dove i cubi $\mathcal{Q}_i$ sono paralleli agli assi in $\mathbb{R}^n$.

Step 2: $\mathcal{H}^n$ è assolutamente continua rispetto a μ_n.

Si scelga $B_n := \omega_n(\frac{\sqrt{n}}{2})^n$. Allora per ogni cubo $\mathcal{Q}$ in $\mathbb{R}^n$ vale

$$\omega_n\Big(\frac{diam\,\mathcal{Q}}{2}\Big)^n = B_n\mu_n(\mathcal{Q}).$$

Segue che

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\omega_n\Big(\frac{diam\,\mathcal{Q}_i}{2}\Big)^n \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{Q}_i,\, diam\,\mathcal{Q}_i \leq \delta\} = B_n\mu_n(A),$$

con $\mathcal{Q}_i$ cubi.

Si mandi $\delta \to 0$.

Step 3: $\mathcal{H}^n(A) \leq \mu_n(A)$ per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Fissiamo $\delta, \epsilon > 0$. Possiamo considerare la famiglia di cubi $\{\mathcal{Q}_i\}_{i=1}^{\infty}$ tali che $A \subseteq \cup_{i=1}^{\infty}\mathcal{Q}_i$, tale che il diametro di ogni cubo sia minore di δ, e

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n(\mathcal{Q}_i) \leq \mu_n(A) + \epsilon.$$

Sia $\overset{o}{\mathcal{Q}}_i$ l'interno di $\mathcal{Q}_i$, $\forall i$. Si può verificare che in $\overset{o}{\mathcal{Q}}_i$, $\forall i$, esiste una famiglia di palle $\{B^i_k\}_{k=1}^{\infty}$ disgiunte e contenute in esso, tale che

$$diam\,B^i_k \leq \delta,$$

$$\mu_n\Big(\mathcal{Q}_i - \bigcup_{k=1}^{\infty}B^i_k\Big) = \mu_n\Big(\overset{o}{\mathcal{Q}}_i - \bigcup_{k=1}^{\infty}B^i_k\Big) = 0.$$

Dal passo precedente allora $\mathcal{H}^n(\mathcal{Q}_i - \cup_{k=1}^{\infty}B^i_k) = 0$. Dunque si ha

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^n_\delta(\mathcal{Q}_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^n_\delta\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}B^i_k\Big)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}^n_\delta(B^i_k) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\omega_n\Big(\frac{diam\,B^i_k}{2}\Big)^n$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(B^i_k) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}B^i_k\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\mathcal{Q}_i) \leq \mu_n(A) + \epsilon.$$

Si conclude la dimostrazione mandando $\delta, \epsilon \to 0$.

$\square$

Osservazione 3.5. Nell'appendice B è possibile trovare un esempio di insieme con misura di Lebesgue nulla e dimensione di Hausdorff non intera.

3.4 Insiemi isodiametrici

Nel capitolo sulla Disuguaglianza Isodiametrica abbiamo dimostrato, servendoci della simmetrizzazione di Steiner, che ogni insieme $A \in \mathbb{R}^n$ soddisfa la disuguaglianza

$$\mu_n(A) \leq \omega_n \Big(\frac{diam\, A}{2}\Big)^n,$$

in altre parole il volume di un qualsiasi insieme A è minore o uguale al volume della palla in $\mathbb{R}^n$. Il problema isodiametrico è la ricerca degli insiemi di $\mathbb{R}^n$ che soddisfino l'uguaglianza nella disuguaglianza isodiametrica.
Introduciamo innanzitutto la disuguaglianza di Brunn-Minkowski.

Definizione. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, si chiama **somma di Brunn-Minkowski** il seguente

$$rA + sB = \{rx + sy \,|\, x \in A,\, y \in B\}$$

$$\forall\, r, s > 0,\, r, s \in \mathbb{R}.$$

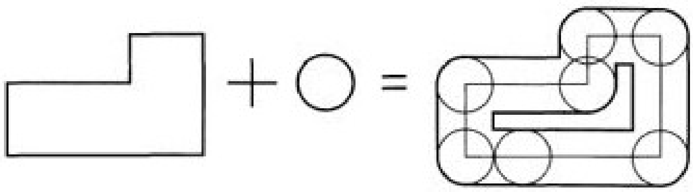

Figura 3.2: Somma di Brunn-Minkowski

Teorema 3.6 (Disuguaglianza di Brunn-Minkowski). *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi non vuoti, misurabili e limitati tali che $A + B$ è ancora insieme misurabile. Allora vale la disuguaglianza di Brunn-Minkowski*

$$(\mu_n(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq (\mu_n(A))^{\frac{1}{n}} + (\mu_n(B))^{\frac{1}{n}}.$$

Dimostrazione. La prova si trova in [6, 12]

□

Definizione. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ μ_n-misurabile con $diam\, A < +\infty$, si dice **insieme isodiametrico** se

$$\mu_n(A) = \omega_n\Big(\frac{diam\, A}{2}\Big)^n,$$

cioè è soluzione del problema isodiametrico.

Osservazione 3.7. Se A in $\mathbb{R}^n$ è una palla, allora banalmente A soddisfa l'uguaglianza, quindi è un insieme isodiametrico.

Vogliamo ora dimostrare che gli insiemi isodiametrici sono tutte e sole le palle in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.8. *Siano $a \in \mathbb{R}^n$, tale che $|a| = 1$, e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme isodiametrico, tale che la sua simmetrizzazione di Steiner rispetto al piano P_a sia una palla in $\mathbb{R}^n$. Allora A è una palla, a meno di insiemi di misura di Lebesgue nulla.*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre A insieme compatto tale che $diam\, A \leq 1$ e $S_a(A) = \overline{B(0, \frac{1}{2})}$ palla chiusa di centro l'origine e raggio pari a $\frac{1}{2}$. Consideriamo $\tilde{A}$ il simmetrico di A rispetto all'origine in $\mathbb{R}^n$, e poniamo

$$M := \frac{A + \tilde{A}}{2},$$

la somma di Brunn-Minkowski di A e $\tilde{A}$.

Notiamo che M è un insieme compatto, con centro di simmetria nell'origine. Inoltre, essendo $diam\, A \leq 1$, anche $diam\, M \leq 1$, dunque $M \subset \overline{B(0, \frac{1}{2})}$ e si ha

$\mu_n(M) \leq \mu_n(S_a(A))$. Per il teorema 3.6 e le proprietà della simmetrizzazione di Steiner teorema 3.1,

$$\mu_n(M) \geq \mu_n(A) = \mu_n(S_a(A)) = \mu_n\Big(\overline{B\Big(0, \frac{1}{2}\Big)}\Big).$$

Segue che

$$\mu_n(M) = \mu_n\Big(\overline{B\Big(0, \frac{1}{2}\Big)}\Big).$$

Gli insiemi $A, \tilde{A}$, compatti e non vuoti, sono quindi convessi e uguali, a meno di traslazioni e dilatazioni in $\mathbb{R}^n$. Allora A è un insieme simmetrico. Chiamiamo c_A il suo centro di simmetria. Sapendo che $A \subset \overline{B(c_A, \frac{1}{2})}$ e che $\mu_n(A) = \mu_n\Big(\overline{B\Big(0, \frac{1}{2}\Big)}\Big)$, si conclude che $A = \overline{B(0, \frac{1}{2})}$.

□

Teorema 3.9. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme isodiametrico, allora A è una palla in $\mathbb{R}^n$, a meno di insiemi di misura di Lebesgue nulla.*

Dimostrazione. Riprendendo l'idea nella dimostrazione del teorema 3.2, scegliamo la base canonica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ su $\mathbb{R}^n$ e definiamo $A_1 := S_{e_1}(A)$, $A_2 := S_{e_2}(A_1), \dots, A_n := S_{e_n}(A_{n-1})$, poi poniamo $A^* = A_n$. Basta dimostrare che A^* è una palla in $\mathbb{R}^n$ e grazie al teorema 3.8 si ottiene la tesi.
Per ipotesi A è un insieme isodiametrico, perciò vale

$$\mu_n(A) = \omega_n\Big(\frac{diam\, A}{2}\Big)^n,$$

da cui

$$diam\, A = diam\, (\overline{A})^*.$$

Segue che

$$\mu_n(A) = \omega_n\Big(\frac{diam\, (\overline{A})^*}{2}\Big)^n = \mu_n((\overline{A})^*).$$

Ma A^* è simmetrico, quindi $A^* \subseteq B(0, \frac{diam\, A^*}{2})$ e si ha

$$\mu_n(A^*) = \mu_n\Big(B\Big(0, \frac{diam\, A^*}{2}\Big)\Big).$$

Si conclude che A^* è una palla in $\mathbb{R}^n$ centrata nell'origine, che era ciò che volevamo provare.

□

Appendice A

Disuguaglianza Isodiametrica nel piano

In questa appendice vediamo una dimostrazione alternativa del teorema sulla disuguaglianza isodiametrica, nel caso bidimensionale.
Abbiamo preliminarmente definito il diametro di un corpo come l'estremo superiore delle distanze tra due punti del corpo. Ci basta dimostrare la disuguaglianza isodiametrica sui corpi convessi, dal momento che la chiusura convessa di un insieme non aumenta il diametro e non diminuisce l'area dell'insieme. Inoltre possiamo ruotare e traslare il corpo in $\mathbb{R}^2$, affinchè questo si trovi nel semipiano delle ordinate positive e che la sua frontiera sia tangente all'origine degli assi. Ora, in coordinate polari, abbiamo che la frontiera è descritta da una funzione f che rappresenta la distanza di un punto dall'origine, in termini dell'angolo θ, cioè

$$f(\theta)\,,\, 0\,\leq\,\theta\,\leq\,\pi$$

dove θ è l'angolo che una semiretta passante per l'origine crea con il semiasse positivo delle ascisse.
Allora, dal cambiamento di variabili in coordinate polari nel piano, segue che l'area del corpo X è

$$A\,=\,\frac{1}{2}\int_0^\pi f(\theta)^2 d\theta.$$

Ora, dividiamo il nostro integrale in due metà e, con un cambio di variabili, si ha

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(f(\theta)^2 + f\Big(\theta + \frac{\pi}{2}\Big)^2\Big) d\theta.$$

La funzione integranda non è altro che il quadrato dell'ipotenusa di un triangolo che ha per cateti esattamente $f(\theta)$ e $f(\theta + \frac{\pi}{2})$ (si veda figura A.1), e vale

$$f(\theta)^2 + f\Big(\theta + \frac{\pi}{2}\Big)^2 \leq (diam\, X)^2,$$

cioè l'ipotenusa del triangolo inscritto non supera mai il diametro del corpo che lo contiene.
Quindi si ha

$$A \leq \pi\Big(\frac{diam\, X}{2}\Big)^2.$$

Questo è effettivamente ciò che volevamo provare, poichè abbiamo mostrato che l'area di un qualunque insieme X è sempre minore o uguale dell'area della palla in $\mathbb{R}^2$, a parità di diametro.

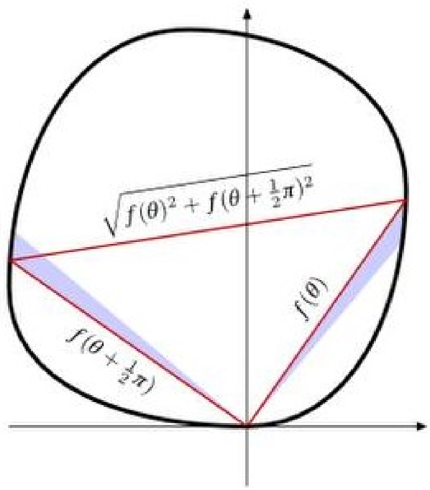

Figura A.1: Corpo X e triangolo inscritto

Appendice B

L'insieme di Cantor

In questa appendice vogliamo calcolare la misura di un particolare insieme di $\mathbb{R}^n$: *l'insieme di Cantor*, utilizzando la teoria presentata finora. Questo insieme, più precisamente, è un **frattale**. Un frattale è un oggetto geometrico dotato di omotetia interna, in altre parole, si ripete nella sua forma allo stesso modo su scale diverse, dunque ingrandendo una qualunque sua parte, si ottiene una figura simile all'originale.

L'insieme di Cantor è un esempio di sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ avente dimensione di Hausdorff non intera e misura di Lebesgue nulla.
Procediamo quindi costruendo tale insieme.
Consideriamo l'intervallo chiuso reale $[0, 1]$ e, definiamo l'insieme di Cantor C come

$$C := \bigcap_{k \geq 0} C_k, \; k \in \mathbb{Z}$$

dove $(C_k)_{k\geq 0}$ è una successione di plurintervalli chiusi definita per ricorrenza come segue:

- C_0 è l'intervallo iniziale chiuso $[0, 1]$,

- C_1 è $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, ottenuto rimuovendo da C_0 l'intervallo aperto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$,

- $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, ottenuto rimuovendo dal centro dei due intervalli che compongono C_1, un intervallo aperto di lunghezza $(\frac{1}{3})^2$.

Generalizzando quindi, l'iterato C_{k+1} si ottiene rimuovendo dal centro di ogni intervallo componente C_k, un intervallo aperto di lunghezza $(\frac{1}{3})^{k+1}$.

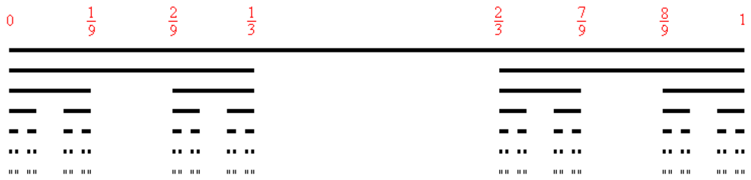

Figura B.1: Insieme di Cantor

Osservazione B.1. L'insieme di Cantor è un frattale, infatti consideriamo ad esempio due insiemi di Cantor, il primo nell'intervallo $[0, 1]$ e il secondo nell'intervallo $[2, 3]$. Ora contraendo l'intervallo $[0, 3]$ di un fattore $\frac{1}{3}$, si ottiene nuovamente l'insieme di Cantor. Questo procedimento si può iterare infinite volte.

Calcoliamo ora la misura di Lebesgue del frattale.
Osserviamo prima di tutto che il plurintervallo C_k è unione disgiunta di 2^k intervalli chiusi, ciascuno di lunghezza $(\frac{1}{3})^k$. Perciò ogni C_k ha lunghezza totale $(\frac{2}{3})^k$.
La misura di Lebesgue di C allora è

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$$

Essa è quindi nulla, pur non essendo vuoto l'insieme.
Calcoliamo ora la dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor.
Chiamiamo $\mathcal{I}_k = \{I_{k,j}\}_{j=1,\dots,2^k}$ la famiglia degli intervalli di lunghezza $(\frac{1}{3})^k$ che compongono C_k. $\mathcal{I}_k$ è un δ_k-ricoprimento per C_k con $\delta_k = (\frac{1}{3})^k$. $\forall \alpha \geq 0$

si ha

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\delta_k}(C) \le \sum_{j=1}^{2^k} \omega_\alpha \Big(\frac{diam\, I_{k,j}}{2}\Big)^{\alpha} = 2^k \omega_\alpha \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^k\Big)^{\alpha} = \omega_\alpha 2^{-\alpha} 2^k 3^{-k\alpha}.$$

Allora indicando con s il numero reale

$$s := \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

otteniamo

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\delta_k}(C) \le \omega_\alpha 2^{-\alpha} e^{k \ln 2} e^{-k\alpha \ln 3} = \omega_\alpha 2^{-\alpha} e^{k(s-\alpha)\ln 3}.$$

Abbiamo dunque che, $\forall\, \alpha > s$

$$\mathcal{H}^{\alpha}(C) = \lim_{k\to+\infty} \mathcal{H}^{\alpha}_{\delta_k}(C) = 0$$

e per $\alpha = s$

$$\mathcal{H}^{s}(C) = \lim_{k\to+\infty} \mathcal{H}^{s}_{\delta_k}(C) \le \omega_s 2^{-s} \le 1.$$

Per provare la disuguaglianza inversa $\mathcal{H}^s(C) \ge 1$, vogliamo mostrare che, se $\mathcal{I}$ è una collezione di intervalli che ricoprono C, allora vale

$$1 \le \sum_{I\in\mathcal{I}} |I|^s.$$

Ma questo è vero se $\mathcal{I}$ è una famiglia finita di intervalli chiusi, perchè basta usare la compattezza di C e allargare leggermente ogni suo intervallo.
Ora, non è restrittivo supporre che ogni $I \in \mathcal{I}$ sia il più piccolo intervallo che contiene una coppia, J e J', di intervalli che compongono C. (J e J' non devono necessariamente appartenere allo stesso C_k). Allora se J e J' sono gli intervalli maggiori tra questi, I sarà composto da J, seguito da un intervallo K nel complementare di C, seguito a sua volta da J'. Per costruzione di C_k, si ha

$$|J|, |J'| \le |K|.$$

Quindi

$$|I|^s = (|J| + |K| + |J'|)^s \ge (\frac{3}{2}(|J| + |J'|))^s$$

$$\geq 2(\frac{1}{2}|J|^s + \frac{1}{2}|J'|^s) = |J|^s + |J'|^s,$$

usando la concavità della funzione t^s e il fatto che $3^s = 2$. In questo modo, rimpiazzare I con i due sottointervalli J e J' non aumenta la sommatoria iniziale. Si procede così finchè, dopo un numero finito di passi, si trova un ricoprimento di C di intervalli tutti di lunghezza uguale a $(\frac{1}{3})^k$. Gli intervalli trovati devono necessariamente contenere tutti gli intervalli che compongono C_k, allora se $1 \leq \sum |I|^s$ vale per questo ricoprimento, vale anche per il ricoprimento iniziale $\mathcal{I}$.

Risulta quindi che $\mathcal{H}^s(C) = 1$ e che la dimensione di Hausdorff di C è proprio $s = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309\ldots$.

Bibliografia

[1] Evans L.C., Gariepy R.F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions, Stuedies in Advanced Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992

[2] Lanconelli E., *Lezioni di Analisi Matematica 2, Seconda parte*, Pitagora Editrice, Bologna, 1997

[3] Falconer K.J., *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985

[4] Wheeden R.L. Zygmund A., *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, CRC Press, 1977

[5] Apostol T.M., *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1974

[6] Gardner R.J., *The Brunn-Minkowski Inequality*, Bull. (New Series) Amer. Math. Soc., Vol. 39 no.3, 2002

[7] Schneider R., Convex Bodies: *The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, 1993

[8] Burago Yu.D., Zalgaller V.A., *Geometric Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988

[9] Falconer K.J., *Fractal Geometry*, John Wiley and Sons, 1990

[10] Littlewood, Edensor J., *Littlewood's Miscellany*, Cambridge University Press, 1986

[11] Folland G., *Real Analysis Modern techniques and their applications*, 2nd edition, Wiley-Interscience, New York, 1999

[12] Montiel S., Ros A., *Curves and Surfaces*, American Mathematical Society, 2005

Ringraziamenti

Non è facile realizzare di essere arrivata fino a qui. Sento di aver percorso tanta strada e di aver trovato diverse buche sul mio cammino. Voi sicuramente avete avuto la voglia e la forza di sostenermi e spesso anche di farmi saltare oltre quelle buche, per questo voglio ringraziarvi.

Prima di tutto, voglio ringraziare te Mimi, che hai sempre saputo ascoltarmi e che, con la tua meravigliosa forza, hai educato e accompagnato la piccola e la grande Giulia.

E dopo mamma, tocca proprio ai miei fratelli. A Simona, che mi ha guidata e continua ad essere un porto sicuro per me. A Stefania, da cui non mi sono mai sentita giudicata, fonte di ispirazione da quando ero bambina. A Marco, che sento accanto a me costantemente, gemello, compagno di gioco, confidente e il mio più grande amico.

Non sarei me, senza voi.

Ringrazio il prof. Martino per avermi aiutata a portare a termine questa tesi.

Ringrazio te Ginevra, che mi hai permesso di amare la matematica fin da piccola, di te porterò sempre un ricordo indelebile nel cuore.

Grazie a Stancarone, amico ancora prima di professore, per avermi fatto capire l'importanza di essere dispari.

Un gigantesco grazie alla mia seconda famiglia: i miei amici.

A te Vale, che da ormai sei anni mi vedi crescere, cresci con me, e con dolcezza mi hai presa per mano e l'hai stretta forte, senza mai lasciarla.

A voi Bi e Matti, mi avete fatto ridere e scoprire nuove parti di me, mi avete fatta commuovere e spesso rinascere.

Ai miei coinquilini di casa Vianello, Chiara Ele e Andrew, siete casa per me, grazie per farmi sentire sempre libera di essere me stessa.
A Gabri, Thomas e Matteo, siete stati i miei primi amici qui a Bologna, grazie per non avermi mai fatta sentire sola.
A Gaia, mi hai fatto conoscere me attraverso te, grazie per tutti i bei momenti passati insieme.
A voi, Erika e Alice, che mi conoscete dall'adolescenza e avete potuto assistere a tutte le mie fasi (e io alle vostre), sorrido perchè so che sarete sempre lì ad Andria, e non solo, ad accogliermi con un abbraccio.
A Gianlu, Carlotta e Elena, ragazzi siete tutto per me, grazie per le risate, le mistiche esperienze e le sedute psicologiche gratuite dei nostri interminabili caffè.
A te Bea, che hai il potere di farmi uscire dai miei stessi schemi e mi fai sentire tranquilla e al sicuro, grazie davvero.
A tutti i miei amici, che tra Bologna e Andria, mi hanno fatto immensamente bene, è anche grazie a voi se sono arrivata fino a qui.

Vi voglio bene, con tutta me.