ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Triennale in Matematica

IL TEOREMA DI WHITEHEAD

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Dott.
MARCO MORASCHINI

Presentata da:
IRENE ALTERINI

Anno Accademico 2022-2023

Introduzione

La topologia è una branca della matematica che studia le proprietà delle figure e, in generale, degli oggetti matematici che non cambiano quando viene effettuata una deformazione senza "strappi", "sovrapposizioni" o "incollature". Formalmente, due spazi sono topologicamente equivalenti se esiste un omeomorfismo fra loro: in questo caso sono detti omeomorfi e sono, ai fini topologici, esattamente identici. L'idea profonda è che alcuni problemi geometrici non dipendano dalla forma esatta degli oggetti in esame, ma dalla loro "classe di omeomorfismo". Lo scopo quindi è quello di individuare degli invarianti topologici, ossia delle proprietà di uno spazio che valgano per tutti gli spazi topolgici ad esso omeomorfi. Esiste una nozione di equivalenza più debole dell'omeomorfismo, detta omotopia che permette di trasformare gli oggetti l'uno nell'altro in modo leggermente più libero. Molte delle proprietà invarianti per omeomorfismo sono, in verità, invarianti anche per omotopia. Uno dei primi invarianti che ci permette di studiare la forma di un oggetto e di tradurlo in forma algebrica è il *gruppo fondamentale.* Importante per lo studio di quest'ultimo è il concetto di omotopia tra funzioni, la quale permette di portare in modo "continuo" una funzione continua in un'altra, ovvero permette di spostare funzioni nello spazio topologico in esame in modo continuo. Gli elementi del gruppo fondamentale di uno spazio X sono cammini chiusi in X che iniziano e terminano in un punto base $x_0 \in X$, e due cammini di questo tipo sono considerati "equivalenti" se sono omotopi, ossia se deformabili in modo continuo l'uno nell'altro mantenendo gli estremi fissi. Grazie allo studio del gruppo fondamentale siamo in grado di mostrare che alcuni spazi topologici, come S^1 e S^k, con $k > 1$, non sono tra loro omeomorfi. Tuttavia, ci sono ancora alcune domande alle quali non sappiamo rispondere. Ad esempio, non possiamo mostrare che per $k \neq l$, con $k, l > 2$, le sfere S^k e S^l non sono omeomorfe. Il problema del gruppo fondamentale è che "studia" uno spazio topologico X solo tramite cammini chiusi. L'idea successiva è quindi quella di passare dall'utilizzo di mappe da S^1 a X allo studio di mappe da S^n a X per $n \geq 2$. Studieremo quindi i *gruppi di omotopia di ordine superiore* di uno spazio topologico X, indicati dal simbolo $\pi_n(X)$, che sono la generalizzazione, in dimensione superiore, del gruppo fondamentale. I gruppi di omotopia di ordine superiore hanno usi pragmatici nella caratterizzazione di vari spazi topologici, offrendo al contempo un contesto soddisfacente per studiare l'intreccio naturale dei campi dell'algebra e della topologia. Pur essendo molto difficili da calcolare, hanno una grande importanza teorica. Uno dei motivi principali, e argomento principale della tesi, è il Teorema di Whitehead. Riassumendo, tale teorema afferma quanto segue: se esiste una mappa tra due *CW-complessi* che induce isomorfismo fra tutti i gruppi di omotopia, allora i due spazi sono omotopicamente equivalenti. Questo risultato fu dimostrato da J.H.C. Whitehead in due lavori fondamentali del 1949 e fornisce una giustificazione all'introduzione del concetto di CW-complesso. Per apprezzare appieno il teorema, è opportuno avere una comprensione dei CW-complessi, ossia di quegli spazi topologici costruiti "fondendo" insieme certi blocchi basilari chiamati celle. Il Teorema di Whitehead è un risultato "modello" della topologia algebrica, in cui il comportamento di certi invarianti algebrici (in questo caso, i gruppi di omotopia) determinano una proprietà topologica di una mappa. Conoscendo il modo in cui le mappe agiscono sui gruppi di omotopia superiore, si riceve immediatamente una quantità significativa di informazioni sugli spazi in questione. Ciò è particolarmente potente perché molti spazi studiati in topologia sono omotopicamente equivalenti a un CW-complesso, quindi questo teorema ha ampia applicabilità, evidenziando l'importanza pratica della comprensione dei gruppi di omotopia superiore. L'affermazione più forte che due CW-complessi con gruppi di omotopia isomorfi sono omotopicamente equivalenti, tuttavia, è falsa in generale. Uno dei casi in cui un CW complesso ha il tipo di omotopia determinato univocamente dai suoi gruppi di omotopia è quando ha un solo gruppo di omotopia non banale. Tali spazi, conosciuti come spazi di Eilenberg–MacLane, risultano svolgere un ruolo fondamentale in topologia algebrica.

Struttura della tesi

La tesi è suddivisa in *quattro capitoli*: uno contenente i preliminari, uno riguardante i gruppi di omotopia di ordine superiore, uno sui CW-complessi ed uno sul Teorema di Whitehead. Più precisamente, nella *prima parte preliminare* di questa tesi spiegheremo cosa si intende per omotopia e ne enunceremo alcune proprietà. La *seconda sezione preliminare* è dedicata allo studio del gruppo fondamentale e alle sue principali proprietà. L'*ultima sezione preliminare* avrà come obiettivo principale quello di richiamare brevemente i risultati fondamentali riguardanti la teoria dei rivestimenti. I concetti di omotopia e la costruzione della struttura di gruppo nel gruppo fondamentale permetteranno di comprendere al meglio la struttura dei gruppi di omotopia di ordine superiore. Il *secondo capitolo* della tesi è totalmente incentrato sulla presentazione dei gruppi di omotopia di ordine superiore e le loro proprietà, con una particolare attenzione ai gruppi di omotopia relativi. Nella *prima sezione del terzo capitolo* daremo la definizione di CW-complesso e mostreremo alcune proprietà ed esempi utili. Nella *seconda sezione* ci concentreremo sulla proprietà di estensione dell'omotopia, ed enunceremo alcuni risultati utili per la dimostrazione del Teorema di Whitehead. Nel *quarto, ed ultimo capitolo*, enunceremo e dimostremo il Teorema di Whitehead, per poi fare alcuni esempi ad esso correlati. Termineremo il capitolo parlando degli spazi di Eilenberg-MacLane.

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Omotopia

In topologia, due funzioni continue da uno spazio topologico X ad un altro Y sono dette *omotope* se una delle due può essere “deformata con continuità” nell'altra, e tale trasformazione è detta omotopia fra le due funzioni.

Un uso importante dell'omotopia è nella definizione dei gruppi di omotopia (il più importante fra questi è il gruppo fondamentale), invarianti molto importanti per distinguere spazi topologici non omeomorfi e per formalizzare rigorosamente nozioni intuitive quali “il numero di buchi” di uno spazio. In questa sezione daremo alcune definizioni e risultati notevoli riguardanti l'omotopia.

Definizione 1.1.1 (Coppia di spazi)**.** Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme. Definiamo *coppia di spazi* (X, A) il dato di X e A assieme. Dati, inoltre, uno spazio topologico Y ed un sottoinisieme $B \subseteq Y$ indicheremo con $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ una funzione continua tale che $f(A) \subseteq B$.

Se $A = \{x_0\}$, allora la coppia di spazi (X, x_0) è detta *spazio puntato* e si denota con $(X, \{x_0\})$. Come conseguenza, una funzione tra spazi puntati $f\colon X \to Y$ è una funzione continua tale che $f(x_0) = y_0$.

Definizione 1.1.2 (Omotopia tra funzioni)**.** Dati due spazi topologici X e Y e date due funzioni continue $f, g \colon X \to Y$, un'*omotopia* tra f e g è una funzione $H \colon X \times [0,1] \to Y$ tale che, per tutti i punti x in X, $H_0 = H(x,0) = f(x)$ e $H_1 = H(x,1) = g(x)$. Diremo che f è *omotopa* a g se esiste un'omotopia tra f e g, e in tal caso scriveremo $f \sim g$.

Se pensiamo al parametro t di H come il "tempo", allora H descrive una deformazione continua della funzione $f \colon X \to Y$ al variare del tempo $t \in [0,1]$.

Definizione 1.1.3 (Spazi omotopicamente equivalenti)**.** Dati due spazi topologici X e Y, diciamo che sono *omotopicamente equivalenti* se esistono due funzioni $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to X$ tali che $g \circ f$ è omotopa alla funzione identità id_X su X e $f \circ g$ è omotopa alla funzione identità id_Y su Y.

Intuitivamente, due spazi X e Y sono omotopicamente equivalenti se possono essere trasformati l'uno nell'altro con operazioni di deformazione, contrazione ed espansione. Ad esempio, una palla è omotopicamente equivalente ad un punto, mentre $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ è omotopicamente equivalente alla circonferenza unitaria S^1.

Esempio 1.1.4. Il cilindro

$$C = \left\{ (x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1, \ \ -1 < z < 1 \right\}$$

e il cerchio

$$S^1 = \left\{ (x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1, \ \ z = 0 \right\}$$

sono omotopicamente equivalenti. Infatti siano $r \colon C \to S^1$, $r(x,y,z) = (x,y,0)$ e $i \colon S^1 \to C$ l'inclusione naturale. Allora $r \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ e $\mathrm{id}_C \sim i \circ r$. La prima ugualianza è immediata. Per dimostrare che $\mathrm{id}_C \sim i \circ r$ definiamo l'applicazione continua $F \colon C \times I \to C$, $F(x,y,z) = (x,y,(1-t)z)$. Allora

$$F(x,y,z,0) = \mathrm{id}_C(x,y,z)$$

e

$$F(x,y,z,1) = (i \circ r)(x,y,z).$$

Definizione 1.1.5 (Spazio contraibile)**.** Uno spazio topologico si dice *contraibile* se è omotopicamente equivalente ad un punto.

Proposizione 1.1.6. Sia $\mathcal{C}(X,Y)$ l'insieme delle funzioni contnue tra due spazi topologici X e Y. Allora la relazione d'omotopia è una relazione di equivalenza nell'insieme $\mathcal{C}(X,Y)$.

Esempio 1.1.7. Sia $f\colon S^n \to S^n$ l'applicazione antipodale, ossia $f(x) = -x$. Se n è dispari allora f è omotopa all'identità: sia infatti $n = 2k-1$, con $k \in \mathbb{Z}$, possiamo scrivere $S^n = S^{2k-1} = \{z \in \mathbb{C}^k : ||z|| = 1\}$ ed un omotopia è data da:

$$F\colon S^n \times I \to S^n, \quad (z,t) \to ze^{i\pi t}.$$

Se n è pari f non è omotopa all'identità, ma questo è molto più difficile da dimostrare, [7].

Definizione 1.1.8 (Retrazione)**.** Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio $Y \subset X$ si dice un *retratto* di X se esiste un'applicazione continua $r\colon X \to Y$, detta *retrazione*, tale che $r(y) = y$ per ogni $y \in Y$. In altre parole, $r \circ i = \mathrm{id}_Y$ dove $i\colon Y \hookrightarrow X$ è l'inclusione.

Esempio 1.1.9. Siano $A, B \subset \mathbb{R}^2$ due circonferenze tangenti in un punto p. Allora l'applicazione

$$r\colon A \cup B \to A \quad r(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in A \\ p & \text{se } x \in B \end{cases}.$$

è una retrazione.

Definizione 1.1.10 (Retratto per deformazione)**.** Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio topologico $Y \subset X$ si dice un *retratto per deformazione* di X se esiste un'applicazione continua $R\colon X \times I \to X$, detta *deformazione* di X su Y tale che:

1. $R(x,0) \in Y$ e $R(x,1) = x$ per ogni $x \in X$.

2. $R(y,t) = y$ per ogni $y \in Y$ e $t \in I$.

Equivalentemente, $Y \subset X$ è un retratto per deformazione di X se esiste una retrazione $r\colon X \to Y$ tale che $i \circ r \sim \mathrm{id}_X$ relativamente a Y.

Osservazione 1.1.11. La seconda condizione data nella definizione viene talvolta omessa per dare la definizione di retratto per deformazione. A differenza del libro *'Algebraic Topology'* di Hallen Hatcher [2], molti testi la ultilizzano per dare la definizione di *retratto forte di deformazione*.

Esempio 1.1.12. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme stellato rispetto ad un punto $p \in A$. Allora p è un retratto per deformazione di A: si ha ad esempio la deformazione

$$R\colon A \times I \to A, \quad R(x,t) = tx + (1-t)p.$$

Esistono omotopie, come nella definizione di retratto per deformazione, che mantengono fissi gli elementi di un sottospazio perciò diamo la seguente definizione:

Definizione 1.1.13 (Omotopia relativa)**.** Siano X, Y spazi topologici, siano $f, g\colon X \to Y$ funzioni continue e sia $A \subseteq X$. Le funzioni f e g sono dette *omotope relativamente ad* A se esiste un'omotopia F tra f e g tale che $F(a,t) = f(a) = g(a)$ per ogni $t \in [0,1]$ e per ogni $a \in A$. In tal caso scriveremo $f \sim g$ rel A.

1.2 Gruppo fondamentale

In questa sezione, dopo aver esposto alcune nozioni preliminari, introdurremo il concetto di *gruppo fondamentale* e ne studieremo le principali proprietà. Molti risultati verranno utilizzati per lo studio dei *gruppi di omotopia di ordine superiore*, perciò il lettore o la lettrice interessati possono approfondire tali argomenti in diversi libri di topologia, come ad esemepio: *'Algebraic topology'* di Allen Hatcher [2] e *'Topologia'* di Marco Manetti [1].

Definizione 1.2.1 (Cammino o arco)**.** Sia X uno spazio topologico, chiamiamo *cammino o arco* una funzione continua $\gamma\colon I \to X$. Il punto finale dell'arco è $f(1)$, il punto iniziale dell'arco è $f(0)$.

Definizione 1.2.2 (Cammino chiuso o laccio)**.** Un cammino $\gamma\colon I \to X$ è detto *chiuso* o *laccio* se $\gamma(0) = \gamma(1)$. In particolare il punto $x = \gamma(0) = \gamma(1)$ si chiama *punto base* di γ.

Sia X uno spazio topologico, e siano $x_0, x_1 \in X$. Indicheremo con $\Omega(X, x_0, x_1)$ l'insieme dei cammini in X con punto iniziale x_0 e punto finale x_1. Indicheremo con $\Omega(X, x_0) = \Omega(X, x_0, x_0)$ l'insieme dei lacci nello spazio topologico X con punto base x_0.

Definizione 1.2.3 (Prodotto tra cammini)**.** Siano $f, g\colon I \to X$ due cammini tali che $f(1) = g(0)$. Definiamo il *prodotto tra cammini*, che indicheremo con il simbolo $*$, nel seguente modo:

$$(f * g) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

.

I cammini di uno spazio topologico X sono funzioni da I in X, quindi per essi si può definire la relazione di omotpia come fatto per le funzioni tra spazi topologici in generale.

Definizione 1.2.4 (Cammini equivalenti)**.** Dati due cammini $f, g\colon I \to X$, diremo che essi sono *cammini equivalenti* se sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$. In tal caso scriveremo $f \sim g$.

Per la Proposizione 1.1.6 $\sim$ è una relazione di equivalenza in $\Omega(X, x_0, x_1)$. Perciò, in generale possiamo considerare $[f]$, ossia la classe di equivalenza del cammino f. Possiamo anche definire il prodotto tra due classi $[f] \cdot [g] = [f * g]$ che risulta ben definito, come mostra la seguente proposizione.

Proposizione 1.2.5. Dati quattro cammini f_0, g_0, f_1, g_1 in X tali che $f_0(1) = g_0(0)$ e $f_1(1) = g_1(0)$. Se $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$, allora $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.

Dimostrazione. Siano $F\colon f_0 \sim f_1$ e $G\colon g_0 \sim g_1$ due omotopie, definiamo $H\colon I \times I \to X$ come:

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(2t-1, s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Poichè $F(1,s) = f_0(1) = g_0(0) = G(0,s)$, H è un'omotopia tra $f_0 * g_0$ e $f_1 * g_1$. □

Forniamo alcune proposizioni senza dimostrazioni, le quali possono essere trovate nel libro *'Topologia'* di Marco Manetti [1].

La prossima proposizione mostra che il prodotto tra due classi risulta associativo.

Proposizione 1.2.6 ([1, Proposizione 11.4])**.** Siano f, g, h tre archi in X tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$, allora $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.

Fissato un cammino f, definiamo il cammino $\bar{f}$ come $\bar{f}(t) := f(1-t)$. Si può verificare che due cammini f e g sono equivalenti se e solo se $\bar{f}$ e $\bar{g}$ lo sono. Dato un punto $x \in X$, denotiamo con ϵ_x il cammino costante in x.

La seguente proposizione mostra che ϵ_x si comporta come "l'elemento neutro", e $\bar{f}$ come l'inverso di f.

Proposizione 1.2.7 ([1, Proposizione 11.6])**.** Dato uno spazio topologico X, due punti $x, y \in X$, e un cammino $f\colon I \to X$ tale che $f(0) = x$ e $f(1) = y$, allora valgono le seguenti:

1. $\epsilon_x * f \sim f \sim f * \epsilon_y$;

2. $f * \bar{f} \sim \epsilon_x$ e $\bar{f} * f \sim \epsilon_y$.

Grazie alle precedenti osservazioni siamo finalmente in grado di dare la seguente definizione:

Definizione 1.2.8 (Gruppo fondamentale)**.** Sia X uno spazio topologico e sia dato un punto $x_0 \in X$. L'insieme $\Omega(X, x_0)/\sim$ delle classi di equivalenza dei cammini chiusi con punto base $x_0 \in X$ viene denotato con $\pi_1(X, x_0)$, ed è detto *gruppo fondamentale di X con punto base x_0*.

Teorema 1.2.9. Dato uno spazio topologico X ed un punto $x_0 \in X$, l'insieme $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo.

Dimostrazione. La dimostrazione è conseguenza immediata delle Proposizioni 1.2.6 e 1.2.7: il prodotto è $*$, l'elemento neutro la classe $[\epsilon_x]$, l'inverso è dato da $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ e vale la proprietà associativa. □

Notiamo che $\pi_1(X, x_0)$ dipende soltanto dalla componente connessa per archi di X in x_0.

Cosa succede al gruppo fondamentale se cambiamo il punto base? Chiaramente, se due punti a e b appartengono a diverse componenti connesse per archi di X, non c'è alcuna relazione tra $\pi_1(X, a)$ e $\pi_1(X, b)$. Viceversa vale:

Lemma 1.2.10. ([1, Lemma 11.13]) Sia X uno spazio topologico, e siano $a, b \in X$ due punti. Sia $\gamma\colon I \to X$ un cammino tale che $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$, definiamo

$$\gamma_*\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b), \quad \gamma_*([\alpha]) = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma].$$

Allora γ_* è ben definito ed è un isomorfismo di gruppi.

Grazie al Lemma 1.2.10 è possibile dire che il gruppo fondamentale di uno spazio topologico connesso per archi è, a seconda dei casi, isomorfo o non isomorfo ad un dato gruppo G, senza specificare la scelta del punto base. Se uno spazio topologico è connesso per archi denoteremo con $\pi_1(X)$ la *classe di isomorfismo* del suo gruppo fondamentale, calcolato rispetto ad un qualsiasi punto base.

Osservazione 1.2.11. E' importante osservare che il gruppo fondamentale di uno spazio topologico non è necessariamente abeliano, come accade nel caso dello spazio formato da due circonferenze tangenti $X = C_1 \cup C_2$ con $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 = 1\}$ e $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2+y^2 = 1\}$. La dimostrazione rigorosa di questo fatto si trova nella Sezione 12.6 di [1].

Definizione 1.2.12 (Spazio topologico semplicemente connesso)**.** Sia X uno spazio topologico. Diremo che è *semplicemente connesso* se è connesso per archi e possiede gruppo fondamentale banale, ossia costituito da un solo elemento.

Esempio 1.2.13. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio convesso, esso è semplicemente connesso. Allora per ogni $a \in X$ vale $\pi_1(X, a) = 0$. Infatti, se α è un laccio in X con punto base a, allora

$$F\colon I^2 \to X, \quad F(t,s) = sa + (1-s)\alpha(t),$$

è un'omotopia tra α e il cammino costante ϵ_a. Quindi ogni cammino chiuso in X è omotopo al cammino costante.

Uno degli strumenti principali per il calcolo del gruppo fondamentale di uno spazio topologico è il *teorema di Seifert-Van Kampen*. Il teorema afferma che se uno spazio topologico X è unione di due aperti A e B che verifichino certe proprietà di connessione allora la struttura del suo gruppo fondamentale è esprimibile in termini dei gruppi fondamentali di A, B e dell'intersezione di A e B. In tal modo il teorema permette di calcolare il gruppo fondamentale di uno spazio complicato partendo da gruppi fondamentali di spazi più semplici. Chi volesse approfondire le numerose applicazioni di questo teorema può consultare il quattordicesimo capitolo del libro *'Topologia'* di Marco Manetti [1]. La costruzione del gruppo fondamentale di uno spazio topologico X può essere "variata" sostituendo i lacci con sfere di dimensione k arbitraria. L'oggetto che ne risulta è sempre un gruppo, detto *gruppo di omotopia superiore di ordine k*. Studieremo questo oggetto nel primo capitolo.

1.3 Rivestimenti

Uno degli strumenti più potenti nell'ambito della topologia è sicuramente la teoria dei rivestimenti. Essa svolge un ruolo molto importante nello studio degli spazi topologici ed è strattamente collegata al gruppo fondamentale.

In questa sezione daremo la definizione di *rivestimento* di uno spazio topologico e analizzeremo le principali propietà caratterizzanti tali oggetti.

Definizione 1.3.1 (Rivestimento di uno spazio topologico)**.** Sia X uno spazio topologico connesso per archi e localmente connesso per archi. Un *rivestimento* di X è il dato di uno spazio topologico Y e di una funzione continua e suriettiva $p\colon Y \to X$ tale che per ogni $x \in X$ esiste intorno aperto U di x tale che $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ con $V_i \subset Y$ aperti disgiunti e tali che $p_{|V_i}\colon V_i \to U$ sia un omeomorfismo. In tal caso diremo che U è un *aperto banalizzante* di p.

Se Y è connesso e semplicemente connesso, $p\colon Y \to X$ è detto *rivestimento universale*.

Osservazione 1.3.2. Se U è un aperto banalizzante di $p\colon Y \to X$, allora anche un aperto V contenuto in U è un aperto banalizzante di p.

Esempio 1.3.3. Sono importanti i seguenti esempi:

1. Dato uno spazio qualsiasi X, la funzione identità $\mathrm{id}\colon X \to X$ è un rivestimento banale di X.

2. La mappa $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, dove per S^1 intendiamo la circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$, tale che $p(t) = (\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t))$ è un rivestimento. A livello intuitivo è possibile immaginare questa funzione come un avvolgimento della retta reale attorno alla circonferenza in cui ciascun intervallo $[n, n+1]$ viene mappato su S^1. Poiché $\mathbb{R}$ è semplicemente connesso, questo è anche un rivestimento universale di S^1. Vedremo che se il rivestimento universale esiste, questo è anche unico, quindi possiamo dire che $\mathbb{R}$ è il rivestimento universale di S^1.

3. Consideriamo $p\colon X \times Y \to X$ la proiezione al primo fattore. Se Y è uno spazio discreto allora p è un rivestimento di X. Infatti, fissato un punto $x \in X$ e un suo intorno aperto U, sappiamo che

   $$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{y \in Y} U \times \{y\}.$$

   Poichè Y è discreto ogni suo punto è aperto, pertanto p è un rivestimento.

Per i rivestimenti valgono alcune propretà che seguono direttamente dalla definizione e non dimostreremo:

Proposizione 1.3.4. ([1, Proposizione 12.12]) Sia $p\colon Y \to X$ un rivestimento. Allora:

1. La fibra su x, cioè l'insieme $p^{-1}(x)$, ha la stessa cardinalità per qualsiasi x appartenente ad X.

2. X ha la topologia quoziente rispetto p, p è aperta e le fibre sono discrete.

Diamo la seguente definizione:

Definizione 1.3.5 (Omeomorfismo locale)**.** Un'applicazione continua tra due spazi topologici $f\colon X \to Y$ si dice *omeomorfismo locale* se ogni punto x di X ha un intorno aperto U tale che $f(U)$ è aperto in Y e $f|_U\colon U \to f(U)$ è un omeomorfismo.

In generale un rivestimento è un omeomorfismo locale, ma non è vero il viceversa, come mostra il seguente esempio:

Esempio 1.3.6. Se consideriamo la mappa p dell'Esempio 1.3.3, in quanto rivestimento è un omeomorfismo locale. Se consideriamo la restrizione di p all'aperto $(0, 2)$ è ancora un omeomorfismo locale poichè è la restrizione di un omeomorfismo locale ad un aperto. D'altra parte, p non è un rivestimento in quanto il punto $1 \in S^1$ non ammette un intorno che sia un aperto banalizzante. Infatti, se U fosse un tale intorno, allora per l'Osservazione 1.3.2 esisterebbero $V \subseteq U$ aperto banalizzante di S^1 che contiene 1 e $\epsilon > 0$ tali che $f^{-1}(V) = (0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \cup (2 - \epsilon, 2)$. Ma l'aperto $(0, \epsilon)$ così come $(2 - \epsilon, 2)$ non può essere omeomorfo a V tramite f in quanto non contiene nessun punto la cui immagine sia 1.

Poichè ogni fibra ha la stessa cardinalità possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 1.3.7 (Grado di un rivestimento)**.** Dato un rivestimento $p\colon Y \to X$ diremo che p è un *rivestimento di grado* d se ogni fibra ha cardinalità d.

Esempio 1.3.8. Consideriamo le coordinate polari (ρ, θ) del piano $\mathbb{R}^2$. La circonferenza di raggio unitario è definita dalla condizione $\rho = 1$. Fissato un $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definiamo una funzione $p_n \colon S^1 \to S^1$ data dalla seguente equazione: $p_n(1, \theta) = (1, n\theta)$. Segue che p_n è un rivestimento di S^1: la funzione p_n avvolge la circonferenza su se stessa n volte. Poichè $p^{-1}((1,0)) = \left\{ \frac{2k\pi}{n} \mid k = 0, 1, .., n-1 \right\}$ tale rivestimento avrà grado n.

Per quanto riguarda i rivestimenti universali vale la seguente propretà, anticipata nell'Esempio 1.3.3.

Proposizione 1.3.9. (Proprietà universale del rivestimento universale [1, Proposizione 13.30]). Sia $u \colon \tilde{X} \to X$ un rivestimento univesale. Allora, per ogni rivestimento $p \colon E \to X$ ed ogni coppia di punti $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $e \in E$, tali che $u(\tilde{x}) = p(e)$, esiste un unico morfismo di rivestimenti $\phi \colon \tilde{X} \to E$ tale che $\phi(\tilde{x}) = e$. In particolare, i rivestimenti universali di uno spazio topologico X sono tutti isomorfi tra loro.

Un'ulteriore proprietà fondamentale dei rivestimenti è quella data dal teorema di unicità del sollevamento dei cammini.

Definizione 1.3.10 (Sollevamento)**.** Sia $p \colon Y \to X$ un rivestimento e $f \colon Z \to X$ una funzione continua. Un *sollevamento* di f è una funzione continua $\tilde{f} \colon Z \to Y$ tale che $f = p \circ \tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Il seguente teorema mostra che, fissato il punto iniziale, se un sollevamento esiste, è unico.

Teorema 1.3.11. (Unicità del sollevamento [2, Proposizione 1.34]). Siano $p \colon Y \to X$ un rivestimento, Z uno spazio topologico connesso e $f \colon Z \to X$ un'applicazione continua. Siano inoltre $g, \tilde{g} \colon Z \to Y$ due sollevamenti di f. Se esiste z_0 in Z tale che $g(z_0) = \tilde{g}(z_0)$ allora $g(z) = \tilde{g}(z)$ per ogni z in Z.

In altre parole, o i due sollevamenti coincidono ovunque oppure sono distinti per ogni z in Z.

Teorema 1.3.12. (Proprietà di sollevamento dell'omotopia [2, Proposizione 1.30]). Dato un rivestimeto $p\colon \tilde{X} \to X$, e siano $F\colon Y \times I \to X$, e una mappa $\tilde{f}_0$ che solleva $f_0 = f\big|_{Y\times\{0\}}$, esiste un'unica omotopia $\tilde{F}\colon Y \times I \to \tilde{X}$ tale che:

1. $p \circ \tilde{F} = F$;
2. $\tilde{F}(-,0) = \tilde{f}_0$.

Osservazione 1.3.13. Ora consideriamo due casi particolari:

1. Se Y è un punto la proposizione mi dà la proprietà del *sollevamento di un cammino*: dato un rivestimento $p\colon \tilde{X} \to X$, per ogni cammino $\gamma\colon I \to X$ e per ogni sollevamento $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ del punto base $\gamma(0) = x_0$, esiste un unico cammino $\tilde{\gamma}\colon I \to \tilde{X}$ che solleva f:

   (a) $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

   (b) $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x_0}$.

   In particolar modo,l'unicità del sollevamento implica che ogni sollevamento di un cammino costante è costante.

2. Se $Y = [0,1]$ e $F\colon I \times I \to X$ omotopia di cammini, il teorema dà che esiste $\tilde{F}\colon I \times I \to \tilde{X}$ tale che $p \circ \tilde{F} = F, \tilde{F}(0,t) = \tilde{\gamma}(t)$,dove $\tilde{\gamma}(t)$ è un sollevamento di $\gamma(t) = F(0,t)$.

Consideriamo un rivestimento $p\colon E \to X$, uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi Y e un'applicazione continua $f\colon Y \to X$. Vogliamo determinare una condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un sollevamento di f. La risposta è nel seguente teorema:

Teorema 1.3.14. (Esistenza del sollevamento [2, Proposizione 1.33]). Sia Y uno spazio topologico connesso per archi e localmente connesso per archi e sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Sia $f\colon Y \to X$ un'applicazione continua. Allora esiste un sollevamento $g\colon (Y, y_0) \to (E, e_o)$ di f se e solo se $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Capitolo 2

Gruppi di omotopia

2.1 Definizioni e risultati preliminari

In questo capitolo diamo la definizione di *n-esimo gruppo di omotopia* e presentiamo alcuni risultati preliminari che serviranno nei prossimi capitoli.

Sia I^n il cubo n-dimensionale dato da n copie dell'intervallo $I = [0, 1]$. Indichiamo con ∂I^n il bordo di I^n, ovvero il sottospazio formato da punti che hanno almeno una coordinata uguale a 0 o a 1.

Sia (X, x_0) uno spazio topologico puntato e consideriamo l'insieme delle funzioni continue $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. Indichiamo tale spazio con $\mathcal{C}_n(X, x_0)$. Per la Definizione 1.1.13 date f e g in $\mathcal{C}_n(X, x_0)$ un'omotopia tra f e g relativa a ∂I^n è una funzione continua $F\colon I^n \times I \to X$ tale che:

$$F(t_1, .., t_n, t) = \begin{cases} f(t_1, .., t_n) & \text{se } t = 0 \\ g(t_1, .., t_n) & \text{se } t = 1 \\ x_0 & \text{se } (t_1, .., t_n) \in \partial I^n \end{cases}$$

Se esiste un'omotopia tra f e g relativa a ∂I^n, diremo che f è *omotopa* a g *relativamente* a ∂I^n. La relazione di omotopia è una relazione d'equivalenza. Definiamo ora il concetto di gruppo di omotopia usando lo spazio $\mathcal{C}_n(X, x_0)$.

Definizione 2.1.1 (Gruppo d'omotopia)**.** Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'*n-esimo gruppo di omotopia* di X con punto base

x_0 è definito come l'insieme delle classi d'omotopia relative a ∂I^n di $\mathcal{C}_n(X, x_0)$ e lo indichiamo con $\pi_n(X, x_0)$.

Osservazione 2.1.2. Per $n = 0, \pi_0(X, x_0)$ consiste nell'insieme delle componenti connesse per archi di X. Infatti I^0 è un punto e $\partial I^0 = \emptyset$, dunque $\pi_0(X, x_0)$ non dipende da x_0 e consiste nelle classi di omotopia di funzioni da un punto allo spazio X. Quindi due funzioni sono omotope se e solo se hanno immagine nella stessa componente connessa.
Per $n = 1$, il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ coincide con il *gruppo fondamentale* di X con punto base x_0.

Poichè a priori $\pi_n(X, x_0)$ è solo un insieme, affinchè la definizione precedente abbia senso, dobbiamo dotarlo di una struttura di gruppo che per $n = 1$ coincida con quella usata per il gruppo fondamentale nella Definizione 1.2.8.

Dati f, g due rappresentanti di due classi $\alpha, \beta \in \pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$, definiamo

$$(f+g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, \dots, t_n) & \text{se } t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } t_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

La spiegazione "intuitiva" di questa definizione è la seguente: consideriamo $C = [0,2] \times [0,1]^{n-1}$ unione dei due cubi $[0,1] \times [0,1]^{n-1}$ e $[0,1] \times [0,1]^{n-1}$, definiamo una funzione continua $h \colon C \to X$ tale che nel cubo di sinistra valga $h = f$, mentre in quello di destra valga $h = g$. Le due funzioni f e g coincidono nella parte in comune $\{1\} \times [0,1]^{n-1}$ che viene mandata in x_0 e quindi h risulta continua.
A questo punto "riscaliamo" C per ottenere un altro cubo unitario tramite la mappa:

$$s \colon [0,1]^n \to C, \quad s(t_1, \dots, t_n) = (2t_1, t_2, \dots, t_n).$$

E quindi abbiamo $f + g$ come $h \circ s$.

Proposizione 2.1.3. ([5, Proposizione 71.1]) Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$. Per ogni intero $n \geq 2$ $(\pi_n(X, x_0), +)$ è un gruppo.

Dimostrazione. Possiamo verificare, ricordando la Dimostrazione 1.2.5, che date $f \sim f'$, $g \sim g'$, allora $f+g \sim f'+g'$. Quindi l'operazione di $\pi_n(X, x_0)$ è ben definita ponendo $[f+g] = [f]+[g]$. L'operazione ha come elemento neutro la mappa costante C_{x_0} che manda tutto il cubo unitario I^n in x_0. Infatti per ogni $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ abbiamo che $C_{x_0}+f \sim f$ dove l'omotopia è data da:

$$F(t_1, \ldots, t_n, t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } t_1 \leq \frac{1-t}{2} \\ f(\frac{2t_1+t-1}{1+t}, t_2, \ldots, t_n) & \text{se } t_1 \geq \frac{1-t}{2}. \end{cases}$$

Infatti $F(t_1, ..., t_n, 0) = (C_{x_0} + f)(t_1, \ldots, t_n)$ e $F(t_1, ..., t_n, 1) = f(t_1, \ldots, t_n)$. Analogamente vale che $f + C_{x_0} \sim f$.

Come inversa abbiamo $-f(t_1, .., t_n) = f(-t_1, t_2, .., t_n)$. Infatti, vale che $f + (-f) \sim C_{x_0}$ dove l'omotopia è data da:

$$F(t_1, \ldots, t_n, t) = \begin{cases} f(2(t_1 - \frac{t}{2}), \ldots, t_n) & \text{se } \frac{t}{2} \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ f(2 - 2(t_1 + \frac{t}{2}), .., t_n) & \text{se } \frac{1}{2} < t_1 \leq 1 - \frac{t}{2} \\ x_0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Infatti $F(t_1, \ldots, t_n, 0) = (f+(-f))(t_1, \ldots, t_n)$ e $F(t_1, \ldots, t_n, 1) = C_{x_0}(t_1, \ldots, t_n)$. Inoltre per tale operazione vale anche la proprietà associativa. □

Possiamo osservare che i metodi usati e le formule finali sono uguali a quelli ricorrenti nella costruzione del gruppo fondamentale mostrate nel capitolo dei preliminari, ossia per il caso $n = 1$, con i dovuti cambiamenti e lavorando sulla prima coordinata di I^n.

Esempio 2.1.4. C'è uno spazio topologico per il quale siamo in grado di calcolare immediatamente i gruppi di omotopia superiore. Se consideriamo lo spazio costituito da un unico punto $X = \{P\}$, l'unica mappa $I^n \to P$ è quella costante quindi $\pi_n(\{P\}) = 0$ per ogni $n \geq 1$.

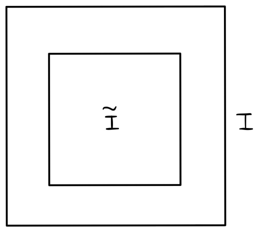
I gruppi di omotopia superiore sembrano molto più complicati del gruppo fondamentale, in reltà la loro struttura algebrica è più semplce. Nell' Osservazione 1.2.11 avevamo mostrato che il gruppo fondamentale non è sempre abeliano, ciò che cambia dal caso $n = 1$ è esposto nel seguente:

Teorema 2.1.5 (Abelianità dei gruppi d'omotopia)**.** Dato uno spazio topologico puntato (X, x_0), il suo n-simo gruppo di omotopia, $\pi_n(X, x_0)$ è un gruppo abeliano per ogni $n \geq 2$.

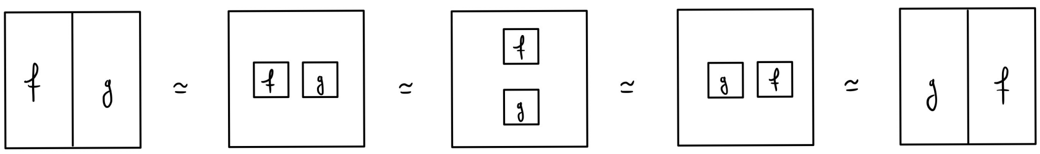
Dimostrazione. Per provarlo consideriamo $\tilde{I}^n$, ossia il retratto per deformazione di I^n (come nella Figura 2.1) con retrazione $r\colon I^n \to \tilde{I}^n$. Allora ogni funzione $f\colon I^n \to X$ è omotopa, relativamente a ∂I^n, ad una funzione $h\colon I^n \to X$ ottenuta nel modo seguente:

$$I^n \xrightarrow{r} \tilde{I}^n \xrightarrow{i} I^n \xrightarrow{f} X$$

da cui $f \sim h$, ovvero h "agisce" come f su $\tilde{I}^n$ e in $I^n \backslash \tilde{I}^n$ è la funzione costante x_0.



L'omotopia inizia rimpicciolendo i domini di f e g a cubi più piccoli di I^n, mandando la rimanente regione al punto base x_0. Da qui posso portare dove voglio i due elementi (all'interno di I^n fissando ∂I^n). Infine riallargo f e g ai loro domini originari, con le posizioni scambiate.



Questo lo posso fare perché l'omotopia usata risulta costante sui punti che non appartengono ai domini di f e g rimpiccioliti, quindi, quando riallargo per ottenere la tesi finale, mappo questi punti su x_0. $\square$

2.2 Un punto di vista alternativo.

Sappiamo che $I^n/\partial I^n \cong S^n$, dunque ad ogni funzione continua $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ è associata una funzione continua da S^n a X che manda il punto base $s_0 = \partial I^n/\partial I^n$ in x_0. Da ciò segue che l'insieme $\pi_n(X, x_0)$ può anche essere costruito partendo dalla coppia (S^n, s_0) al posto della coppia $(I^n, \partial I^n)$.

E' più facile visualizzare i gruppi di omotopia superiore sfruttando questa definizione, ma la struttura di gruppo è meno chiara.

Sotto questa identificazione definiamo l'operazione sull'insieme delle classi d'omotopia da $(\mathbb{S}^n, s_0)$ a (X, x_0) come segue: $[f] + [g] = [(f \wedge g) \circ c]$, dove $c\colon S^n \to S^n \wedge S^n$ è l'applicazione che collassa ad un punto un equatore S^{n-1} di S^n passante per s_0 e il wedge di f e g è un'applicazione dal bouquet di due S^n in X definita in modo naturale.

Osservazione 2.2.1. Analizziamo questo punto di vista in due casi facili:

1. Per $n = 1, I^n = I, \partial I^n = \{0, 1\}, S^1 = I/\{0, 1\}, s_0 = [0] = [1]$. L'operazione su $\pi_1(X, x_0)$ definita come sopra coincide con la definizione di prodotto di cammini per il gruppo fondamentale.

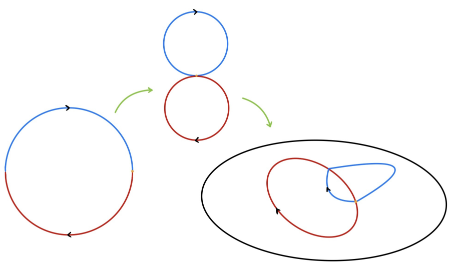


Figura 2.1: Somma di funzioni per $n = 1$.

2. Per $n = 2$, $I^n = I^2$, $S^2 = I^2/\partial I^2$, visivamente si ha ciò che accade nella Figura 2.

Da questo punto di vista segue che due funzioni sono omotope se deformabili l'una nell'altra tramite funzioni continue che mandano s_0 in x_0. Dalla

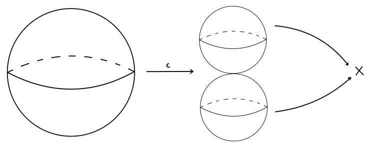


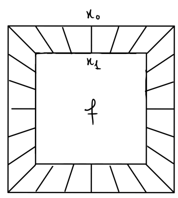
Figura 2.2: Somma di funzioni per $n = 2$.

Definizione 2.1.1 invece segue che due funzioni sono omotope se deformabili l'una nell'altra tramite funzioni che mandano il bordo di I^n in x_0.

2.3 Relazione tra $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(X, x_1)$

Sappiamo che se uno spazio topologico X è connesso per archi, allora i gruppi di omotopia non dipendono dalla scelta del punto base a meno di isomorfismi. Adesso vogliamo vedere se ciò accade anche per i gruppi di omotopia superiori al primo ordine.

Sia X uno spazio connesso per archi e consideriamo due punti x_0 e x_1 in X, con $x_1 \neq x_0$. Allora esiste un cammino $\gamma\colon I \to X$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Sia $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_1)$ un rappresentante di α in $\pi_n(X, x_1)$, il nostro obbiettivo è quello di associare ad f una mappa $\tilde{f}\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$.



Per fare questo restringiamo il dominio di f ad un cubo più piccolo $\tilde{I}^n$ dentro I^n. Preso $p \in \partial\tilde{I}^n$ possiamo considerare un cammino tra p e un punto sul bordo di I^n su cui applicare γ: sia r_p la semiretta uscente dall'origine passante per p, allora definiamo $\bar{p} := \delta I^n \cap r_p$. In questo modo associamo ad ogni punto sul bordo di I^n un unico punto sul bordo di $\tilde{I}^n$. Inoltre, applicando γ al segmento tra p e $\bar{p}$ otteniamo una funzione $(\gamma f)\colon (I^n, x_0) \to (X, x_0)$, che nel cubo $\tilde{I}^n$ coincide con f. Osserviamo che per $n = 1$ coincide con $[i(\gamma)\circ f\circ\gamma]$, dove $i(\gamma)\colon I \to X$ è il cammino inveso di γ, ossia tale che $i(\gamma)(t) = \gamma(1-t)$. Questa costruzione serve per la seguente proposizione:

Proposizione 2.3.1 (Cambiamento del punto base)**.** Siano X uno spazio topologico connesso per archi e siano $x_0, x_1 \in X$ due punti distinti. Allora $\pi_n(X, x_0)$ è isomorfo a $\pi_n(X, x_1)$ per ogni $n \geq 1$.

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che valgano le seguenti condizioni:

1. La mappa
$$\beta_\gamma\colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0)$$
$$[f] \mapsto [\gamma f]$$
che permette cambiamento del punto base è ben defnita;

2. la mappa β_γ è una biezione;

3. la mappa β_γ è un omomorfismo di gruppi.

Infatti vale:

1. Si può verificare facilmente che se f e f' sono due funzioni omotope che fissano il bordo (ossia $f(\partial I^n) = f'(\partial I^n) = x_1$), allora $[\beta_\gamma([f])] = [\beta_\gamma([f'])]$. Inoltre, se γ è omotopa a γ', allora $\beta_\gamma = \beta'_\gamma$.

2. Consideriamo $\bar{\gamma}$ il cammino dato da $\bar{\gamma}(s) = \gamma(1-s)$, è immediato verificare che la mappa $\beta_{\bar{\gamma}}$ è l'inversa di β_γ.

3. Date $f, g\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ vale che $\gamma(f+g) \sim \gamma f + \gamma g$. Per mostrare questa omotopia deformiamo f e g in modo che siamo costanti nella metà destra e nella metà sinistra di I^n rispettivamente. Questo produce due funzioni che possiamo chiamare $f+0$ e $0+g$ tali che $f+0 \sim f$ rel ∂I^n, $0+g \sim g$ rel ∂I^n. Esibiamo quindi un'omotopia H tra $\gamma(f+0)+\gamma(0+g)$ e $\gamma(f+g)$ relativa a I^n:
$$H_t(s_1, .., s_n) = \begin{cases} \gamma(f+0)((2-t)s_1, .., s_n) & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(0+g)((2-t)s_1 + t - 1, s_2, .., s_n) & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Vale che $H_0 = \gamma(f + 0) + \gamma(0 + g)$ e $H_1 = \gamma(f + g)$. Quindi abbiamo $\gamma(f + g) \sim \gamma(f + 0) + \gamma(0 + g) \sim \gamma f + \gamma g$.

□

Quindi, se uno spazio topologico X è connesso per archi, grazie alla proposizione precedente, possiamo scrivere semplicemente $\pi_n(X)$ senza specificare la scelta del punto base.

2.3.1 Un'interpretazione funtoriale di π_n.

Così come il gruppo fondamentale, anche i gruppi di omotopia di ordine superiore hanno proprietà funtoriali.

Proposizione 2.3.2 (π_n è un funtore covariante)**.** Sia $n \geq 1$. Denotiamo con **Top** la categoria degli spazi topologici puntati (ossia dotati di un punto base e i morfismi sono mappe continue che mandano il punto base nel punto base), e con **Grp** quella dei gruppi. Allora esiste un funtore $\pi_n \colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Grp}$ definito sugli oggetti come:

$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}(\mathbf{Top}) &\to \mathrm{Obj}(\mathbf{Grp}) \\ (X, x_0) &\mapsto \pi_n(X, x_0) \end{aligned}$$

e sui morfismi come

$$\begin{aligned} \mathrm{Morph}(\mathbf{Top}) &\to \mathrm{Morph}(\mathbf{Grp}) \\ (f \colon (X, x_0) \to (Y, f(x_0))) &\mapsto (f_* \colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Segue direttamente dalla definizione che

$$\pi_n(\mathrm{id}_{(X,x_0)}) = \mathrm{id}_{\pi_n(X,x_0)}$$

per ogni spazio puntato (X, x_0), e che

$$\pi_n(g \circ f) = \pi_n(g) \circ \pi_n(f)$$

per ogni morfismo $f \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $g \colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$.

□

Proposizione 2.3.3. Siano X e Y spazi topologici e sia $x_0 \in X$ un punto base. Allora per ogni intero $n \geq 1$ una funzione continua $\phi\colon X \to Y$ induce un omomorfismo di gruppi

$$\phi_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, \phi(x_0))$$

definito da $\phi_*([f]) = [\phi \circ f]$.

Dimostrazione. Proviamo che ϕ_* è ben definita: se $f \sim g$, allora $\phi \circ f \sim \phi \circ g$. Infatti, se H è un'omotopia tra f e g, allora $\phi \circ H$ è un'omotopia tra $\phi \circ f$ e $\phi \circ g$. Dalla definizione di operazione di gruppo di omotopia vale

$$\phi_*([f+g]) = [\phi \circ (f+g)] = [\phi \circ f + \phi \circ g] = [\phi \circ f] + [\phi \circ g] = \phi_*([f]) + \phi_*([g]).$$

Pertanto ϕ_* è un omomorfismo di gruppi. □

Come per il gruppo fondamentale, se abbiamo un'equivalenza omotopica questa induce un isomorfismo fra tutti i gruppi d'omotopia.

Corollario 2.3.4. ([2, Proposizione 1.18]). Siano X e Y spazi topologici e siano $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ due punti base. Se $\phi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ è un'equivalenza omotopica, allora $\phi_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, \phi(x_0))$ è un isomorfismo per $n \geq 1$.

Esempio 2.3.5. Consideriamo $\mathbb{R}^n$. Abbiamo che $\pi_n(\mathbb{R}^n) = 0$ per ogni intero $n \geq 1$ poichè $\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente ad un punto.

Una proprietà molto interessante dei gruppi di omotopia superiori al primo è legata ai rivestimenti; infatti si ha la seguente:

Proposizione 2.3.6. Un rivestimeto $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ induce un isomorfismo $p_*\colon \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ per ogni intero $n \geq 2$.

Dimostrazione. Abbiamo già mostrato che p_* è un omomorfismo nella Proposizione 2.3.3. Adesso mostriamo che p_* è suriettiva: sia f un rappresentate di α in $\pi_n(X, x_0)$. Poichè $\pi_1(S^n, s_0)$ è banale per $n \geq 2$, come mostreremo nel terzo capitolo, si ha che $f_*(\pi_1(S^n), s_0) = 0 \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$ per ogni $n \geq 2$.

Per il Teorema 1.3.14, sappiamo che f si può sollevare e quindi otteniamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (S^n, s_0) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Ne segue che $p_*([\tilde{f}]) = [p \circ \tilde{f}] = [f] = \alpha$, quindi p_* è suriettiva. Adesso vogliamo mostrare l'iniettività: sia $[\tilde{f}] \in \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ tale che $p_*([\tilde{f}]) = [p \circ \tilde{f}] = 0$. Definiamo $f = p \circ \tilde{f}$. Allora per costruzione f è omotopa alla mappa costante tramite un'omotopia F relativa a x_0. Per il Teorema 1.3.12 ,F si solleva ad un'omotopia $\tilde{F}$ tra $\tilde{f}$ e un sollevamento della mappa costante, che è ancora costante. Dunque p_* è anche iniettiva. □

Osservazione 2.3.7. Se X ammette rivestimento universale contraibile allora il gruppo di omotopia $\pi_n(X, x_0)$ è nullo per ogni $n \geq 2$.

Vediamo alcuni esempi del calcolo dei gruppi di omotopia di spazi noti:

Esempio 2.3.8. Conisderiamo i seguenti esempi:

1. S^1 ha come rivestimento universale $\mathbb{R}$, quindi $\pi_i(S^1) = 0$ per ogni $i \geq 2$, dato che $\mathbb{R}$ è contraibile.

2. Il toro n-dimensionale T^n ammette come rivestimento universale $\mathbb{R}^n$, quindi $\pi_i(T^n) = 0$ per ogni $i \geq 2$.

Sappiamo che il gruppo fondamentale di uno spazio topologico prodotto è isomorfo al prodotto diretto dei gruppi fondamentali che compongono lo spazio. Nel caso dei gruppoi di omotopia di ordine superiore al primo tale risultato rimane vero. Infatti, in generale, si ha la seguente:

Proposizione 2.3.9. ([2, Proposizione 4.2]). Sia $\{X_\alpha\}_\alpha$ una collezione di spazi topologici connessi per archi. Allora $\pi_n\big(\prod_\alpha X_\alpha\big) \simeq \prod_\alpha \pi_n\big(X_\alpha\big)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Diamo qui un'idea di dimostrazione: considerare un'applicazione $f\colon Y \to \left(\prod_\alpha X_\alpha\right)$ è la stessa cosa di considerare una collezione di applicazioni $f_\alpha\colon Y \to X_\alpha$. Prendendo Y come S^n e $S^n \times I$ otteniamo il risultato. $\square$

2.4 Gruppi di omotopia relativi

Un'utile generalizzazione dei gruppi di omotopia sono i *gruppi di omotopia relativi.*

Prima di dare la definizione consideriamo $I^{n-1} = \{(s_1, .., s_n) \in I^n | s_n = 0\}$ ossia la faccia del cubo I^n con l'ultima coordinata nulla, e sia $J^{n-1} = \partial I^n \setminus I^{n-1}$ l'unione delle rimanenti facce di I^n.

Date due coppie di spazi $(X, A), (Y, B)$ e due sottoinsiemi $U \subseteq A, V \subseteq B$, indichiamo con $\mathcal{C}_n((X, A, U), (Y, B, V))$ l'insieme delle funzioni continue $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ tali che $f(U) \subseteq V$. Se consideriamo un'omotopia $H : f \sim g$ come una mappa:

$$H\colon (X, A, U) \times I \to (Y, B, V)$$

che soddisfa $H(-, 0) = f$ $H(-, 1) = g$, $H_t(A) \subseteq B$ e $H_t(U) \subseteq V$. Allora possiamo definire

$$[(X, A, U), (Y, B, V)] = \mathcal{C}_n((X, A; U), (Y, B, V))/\sim,$$

dove $\sim$ è la relazione di omotopia. Ossia indichiamo con $[(X, A; U), (Y, B, V))]$ l'insieme formato dalle classi d'omotopia di funzioni di triple $f\colon (X, A, U) \to (Y, B, V)$.

Definizione 2.4.1 (Gruppo di omotopia relativo)**.** Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X, x_0 \in A$. Definiamo l' *n-esimo gruppo di omotopia della coppia* (X, A) con punto base x_0 come $\pi_n(X, A, x_0) = [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)]$.

Osserviamo che se $A = \{x_0\}$, allora $\pi_n(X, A, x_0) = \pi_n(X, x_0)$, dunque i gruppi di omotopia sono casi speciali di gruppi di omotopia relativi.

In $\pi_n(X, A, x_0)$ la somma è definita dalle stesse formule per $\pi_n(X, x_0)$, eccetto per la coordinata s_n. Come visto per i gruppi d'omotopia, collassando J^{n-1} ad un punto otteniamo un diagramma commutativo:

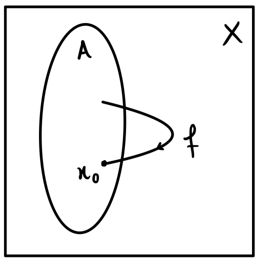
$$\begin{tikzcd}
(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & (X, A, x_0) \\
& (D^n, S^{n-1}, s_0) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

dove g è la funzione che collassa J^{n-1} ad un punto s_0. Possiamo quindi dare una definizione alternativa a quella data precedentemente:

$$\pi_n(X, A, x_0) = \{g\colon (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)\}/\sim = [(D^n, S^{n-1}, s_0), (X, A, x_0)],$$

con $\sim$ relazione di omotopia della coppia relativa al punto base x_0. Il vantaggio di questa definizione risiede nel fatto che chiarisce meglio l'operazione di gruppo. Con questo punto di vista, la somma si fa tramite la funzione $c\colon D^n \to D^n \times D^n$ facendo collassare $D^{n-1} \subseteq D^n$ ad un punto.

Osservazione 2.4.2. Nel caso $n = 1$ questa definizione non è applicabile. Consideriamo $\pi_1(X, A, x_0) = [(I, \{0, 1\}, \{1\}), (X, A, x_0)]$, tale gruppo contiene le classi di omotopia di cammini che partono da un punto in A e finiscono in x_0, quindi non sempre possiamo concatenare due cammini.



In generale vale la seguente:

Proposizione 2.4.3. ([6, Proposizione 4.1.2.]) Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X, x_0 \in A$. Allora, $(\pi_n(X, A, x_0), +)$ è un gruppo con l'usuale operazione di somma per $n \geq 2$. Inoltre, se $n \geq 3$, allora $\pi_n(X, A, x_0)$ è un gruppo abeliano.

La dimostrazione di questi due fatti è simile a quelle della sezione precedente sui gruppi d'omotopia. Usando lo stesso ragionamento, possiamo anche mostrare che valgono le stesse proprietà viste sui gruppi d'omotopia (le proprietà funtoriali e il fatto che una funzione continua tra una coppia di spazi induce un omomorfismo tra gruppi omotopia relativi per $n \geq 2$).

Il seguente teorema illustra cosa signifca essere l'elemento neutro nel gruppo $\pi_n(X, A, x_0)$:

Teorema 2.4.4 (Criterio di compressione)**.** Sia (X, A) una coppia di spazi con $x_0 \in A$. Una funzione continua $f\colon (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ rappresenta l'elemento neutro in $\pi_n(X, A, x_0)$ se e solo se è omotopa, relativamente a S^{n-1}, ad una funzione con immagine contenuta in A.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Sia g una funzione tale che $f \sim g$ relativamente a S^{n-1} e $Im(g) \subseteq A$. Sia $r\colon D^n \to s_0$ una retrazione per deformazione del disco al punto $s_0 \in S^n$. La composizione $g \circ r$ fornisce un'omotopia tra g e la funzione costante ϵ_{x_0}, $H = g \circ r\colon D^n \times I \to X$ definita da $H(x, t) = g(ts_0 + (1 - t)x)$, ovvero $g \sim \epsilon_{x_0}$. La retrazione r lascia fisso il punto s_0 e g ha immagine contenuta in A, con $g(s_0) = x_0$. Si ha quindi$[f] = [g] = [0]$.

($\Rightarrow$) Se $[f] = 0$, esiste un'omotopia $H\colon D^n \times I \to X$ che può essere ristretta ad una famiglia di n-dischi cominciando con $D^n \times \{0\}$ e, progressivamente considerare $(D^n \times \{t\}) \cup (S^{n-1} \times [0, t])$, terminando con $(D^n \times \{1\}) \cup (S^{n-1} \times I)$. Tutti questi dischi hanno lo stesso bordo S^{n-1}, dunque abbiamo un'omotopia che lascia fisso S^{n-1}, tra f ed una mappa con immagine contenuta in A, data dalla restrizione di r a $(D^n \times \{1\}) \cup (S^{n-1} \times I)$. Ricordiamo infatti che le omotopie che consideriamo sono relative al bordo del disco, che per ipotesi ha immagine, tramite f, contenuta in A.

□

Tornando alle proprietà, per i gruppi di omotopia non relativi abbiamo mostrato che se lo spazio topologico è connesso per archi, allora il gruppo di omotopia è indipendente dalla scelta del punto base. Un risultato simile vale per i gruppi di omotopia relativi, la cui dimostrazione è simile al caso precedentemente richiamato e dunque viene omessa. Per convenienza della lettrice o del lettore rimandiamo al libro ‘*‘Algebraic Topolgy’* di ‘Tammo tom Dieck [3] per la dimostrazione completa.

Terminiamo questo capitolo con un risultato imortante riguardante i gruppi di omotopia relativi.

Definizione 2.4.5 (Succesione esatta)**.** Una *successione esatta* di gruppi è una successione di gruppi e di loro omomorfismi in cui l'immagine dell'uno coincida con il nucleo del successivo.

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Proposizione 2.4.6. Siano (X, A) una coppia di spazi e $x_0 \in A$. Definiamo i seguenti omomorfismi di gruppi:

1. $i_*\colon \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ indotto dall'inclusione $i\colon (A, x_0) \to (X, x_0)$;

2. $j_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$ indotto dall'inclusione $j\colon (X, x_0, x_0) \to (X, A, x_0)$;

3. $\partial\colon \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ ottenuta restringendo $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ a I^{n-1}.

Allora la successione

$$... \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to ...$$

è esatta.

Dimostrazione. Prima di procedere alla dimostrazione puntualizziamo il fatto che i gruppi di omotopia relativi di grado 1 non hanno alcuna struttura di gruppo; l'esattezza però ha ancora senso in quanto l'immagine di una mappa è data dal ker della successiva, ovvero gli elementi mandati nella classe di omotopia della mappa costante. Si hanno le seguenti inclusioni:

- $\mathrm{Im}(i_*) \subseteq \ker(j_*)$: notiamo che $j_* \circ i_*$ è indotta da $j \circ i$ e queste sono entrambe inclusioni. Dunque se $[f] \in \pi_n(A, x_0)$, si ha che

$$(j_* \circ i_*)([f]) = [j \circ i \circ f].$$

  Quindi $j \circ i \circ f = f$ definisce una mappa che ha immagine contenuta in A. Per il Terorema 2.4.4 $(j_* \circ i_*)([f]) = 0$. Quindi $\mathrm{Im}(i_*) \subseteq \ker(j_*)$.

- $\ker(j_*) \subseteq \mathrm{Im}(i_*)$: supponiamo che $[f] \in \ker(j_*)$, allora

$$[j \circ f] = 0.$$

  Per il Teorema 2.4.4 $f \sim g'$ relativamente a S^{n-1} dove g' ha immagine contenuta in A. Poichè $x_0 \in S^{n-1}$, l'omotopia fissa il punto base, e g' ha immagine contenuta in A, la classe $[g'] \in \pi_n(A, x_0)$. Inoltre $i_*([g']) = [i \circ g'] = [f]$. Dunque $[f] \in \mathrm{Im}(i_*)$ e quindi $\ker(j_*) \subseteq \mathrm{Im}(i_*)$.

Dal fatto che $\mathrm{Im}(i_*) \subseteq \ker(j_*)$ e $\ker(j_*) \subseteq \mathrm{Im}(i_*)$ segue che $\ker(j_*) = \mathrm{Im}(i_*)$. Vale anche:

- $\mathrm{Im}(j_*) \subseteq \ker(\partial)$: la composizione $\partial \circ j_* = 0$, poichè la restrizione di una funzione $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, x_0, x_0)$ a I^{n-1} ha immagine x_0, e ciò rappresenta 0 in $\pi_{n-1}(A, x_0)$.

- $\ker(\partial) \subseteq \mathrm{Im}(j_*)$: supponiamo $[f] \in \ker(\partial)$. Da ciò segue che $f \sim g$ relativamente a ∂I^{n-1} con g funzione con immagine contenuta in A. Sia $F\colon I^{n-1} \times I \to X$ tale omotopia. Vale che $F(\partial I^{n-1}, t) = x_0$ per ogni $t \in I$. Consideriamo la funzione $H\colon (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ definita sull'incollamento dei domini di f e F lungo $f|_{I^{n-1}} = F_1$. Tale funzione vale $f(x)$ per i punti la cui ultima coordinata è minore o uguale a $1/2$, $F(x)$ altrove. Allora $H \sim f$ in $\pi_n(X, A, x_0)$ con un'omotopia che incolla il dominio di F al dominio di f. Dunque $[f] \in \mathrm{Im}(j_*)$.

Dal fatto che $\mathrm{Im}(j_*) \subseteq \ker(\partial)$ e $\ker(\partial) \subseteq \mathrm{Im}(j_*)$ segue che $\ker(\partial) = \mathrm{Im}(j_*)$.

- $\mathrm{Im}(\partial) \subseteq \ker(i_*)$: sia $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$. Allora $(i_* \circ \partial)([f]) \in \pi_{n-1}(X, x_0)$ è la classe che rappresenta $f|_{I^{n-1}}$ e questa è omotopa relativamente a J^{n-2} alla mappa costante ϵ_{x_0} tramite la stessa mappa f vista come omotopia. Ciò implica che $\mathrm{Im}(\partial) \subseteq \ker(i_*)$.

- $\ker(i_*) \subseteq \mathrm{Im}(\partial)$: sia $[f] \in \ker(i_*)$. Allora esiste un'omotopia tra f e una mappa costante ϵ_{x_0} attraverso un'omotopia $H\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ che ha immagine in X e manda ∂I^n in x_0. Dunque $H_0 = f$ ha immagine in A e H_1 ha immagine $\{x_0\}$ e H_t manda il bordo in $\{x_0\}$. Dunque $[H] \in \pi_n(X, A, x_0)$ e H induce $F\colon (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0)$ tale che $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$. Vale anche che $\partial([H]) = [f]$. Allora $\ker(i_*) \subseteq \mathrm{Im}(\partial)$.

Dal fatto che $\mathrm{Im}(\partial) \subseteq \ker(i_*)$ e $\ker(i_*) \subseteq \mathrm{Im}(\partial)$ segue che $\ker(i_*) = \mathrm{Im}(\partial)$.

□

Capitolo 3

CW-Complessi

La nozione di *complesso di celle* (o *CW-complesso* o *complesso cellulare*) venne introdotta da J.H.C. Whitehead per sopperire ad alcune necessità della teoria dell'omotopia. L'idea del complesso di celle è di costruire uno spazio topologico incollando delle "celle", ossia dei dischi n-dimensionali lungo il bordo.

3.1 Definizioni e proprietà

In questa sezione ci occuperemo di dare la definizione di complesso cellulare, e di fornire le prime proprietà e i primi esempi utili.

Definizione 3.1.1 (Cella n-dimensionale)**.** Una *cella n-dimensionale* è uno spazio topologico omeomorfo ad una palla n-dimensionale che indichiamo con $e^n = (D^n, \partial D^n) = (D^n, S^{n-1})$.

Osservazione 3.1.2. Diremo che un cella n-dimensionale è aperta se è omeomorfa ad una palla aperta n-dimensionale, analogamente diremo che è chiusa se omeomorfa ad una palla chiusa n-dimensionale.

Esempio 3.1.3. Gli esempi più banali di n-cella aperta e n-cella chiusa sono costituiti rispettivamente dalle palle aperte e chiuse di $\mathbb{R}^n$: così, sono 1-celle aperte gli intervalli aperti di $\mathbb{R}$, sono 1-celle chiuse gli intervalli chiusi di

$\mathbb{R}$, e così via. La seguente proposizione, di cui omettiamo per brevità la dimostrazione (la si può trovare in [4]), ci fornisce molti esempi di n-celle aperte e chiuse nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 3.1.4. Se $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio compatto e convesso di $\mathbb{R}^n$ con interno non vuoto, allora D è una n-cella chiusa e il suo interno è una n-cella aperta.

Il nostro scopo è quello quello di pensare ad un *complesso cellulare* come ad uno spazio ottenuto "incollando" progressivamente celle chiuse di dimensione crescente lungo i loro bordi. L'idea è la seguente: partendo da uno spazio discreto non vuoto X_0 e da uno spazio X_1, vogliamo attaccare X_1 a X_0 identificando i punti di un sottospazio $A \subseteq X_1$ con punti di X_0. Per fare ciò occorre una funzione $f\colon A \to X_0$ affinchè noi possiamo formare uno spazio quoziente di $X_0 \bigsqcup X_1$, identificando ogni punto $a \in A \subseteq X_1$ con la sua immagine $f(a) \in X_0$. Otterremo poi $X_0 \cup_f X_1$, ossia lo spazio formato da X_0 con X_1 incollato lungo A tramite f. Possiamo dare una formalizzazione matematica a questa intuizione.

Definizione 3.1.5 (CW-complesso)**.** Un *CW-complesso (o complesso si celle)* è uno spazio topologico X munito di una struttura aggiuntiva, la cui costruzione è data in maniera induttiva per $n \geq 0$:

1. Si definisce lo 0-*scheletro* X^0 come un insieme arbitrario di punti di X dotato della topologia discreta;

2. Avendo definito l'$(n-1)$-scheletro X^{n-1}, definiamo l'*n-scheletro* X^n tramite l'incollamento di n-celle $\{e^n\}_\alpha$ a X^{n-1} attraverso una famiglia di funzioni continue $\phi_\alpha\colon S^{n-1} \to X^{n-1}$ dette *funzioni di incollamento*. Si defisce quindi l'n-scheletro come lo spazio ottenuto dall'unione dell'$(n-1)$-scheletro e le n-celle, identificando ogni punto nel bordo di una n-cella con la sua immagine tramite le funzioni di incollamento. Ciò significa che lo spazio X^n è il quoziente, ottenuto tramite l'identificazione $x \sim \phi_\alpha(x)$ per ogni $x \in \partial D^n$, dell'unione disgiunta $X^{n-1} \bigsqcup \bigsqcup_\alpha D_n^\alpha$. Ovvero $X^n = (X^{n-1} \bigsqcup \bigsqcup_\alpha D_n^\alpha)/\sim = \bigcup_\alpha X^{n-1} \bigsqcup_{\phi_\alpha} {e^n}_\alpha$.

3. Ci si può fermare dopo un numero finito di passi ponendo $X^n = X$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, oppure si può continuare all'infinito ponendo $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$.

Successivamente definiremo la topologia su X. Ora possiamo dare la seguente definizione, sfruttando la costruzione fatta sopra:

Definizione 3.1.6. (K-scheletro) Il *k-scheletro* di un complesso cellulare è l'unione delle sue celle la cui dimensione non è superiore a k.

Esempio 3.1.7. Ecco alcuni esempi di complessi cellulari:

1. *La sfera S^n.* Una sua possibile struttura di CW complesso è data da una cella e^0 di dimensione 0 (ovvero un punto) ed una cella e^n di dimensione n. Considerando un punto s_0, incolliamo ad esso un disco chiuso $(D^n, \partial D^n)$ mediante la funzione di incollamento, ossia facendo collassare la circonferenza S^{n-1} della cella n-dimensionale nel punto s_0.

2. *L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.* Una possibile struttura di CW-complesso è la seguente: definiamo le 0-celle della decomposizione come gli interi $\mathbb{Z}$ e le 1-celle come gli intervalli $[n, n+1]$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

3. *Il disco D^n.* Una sua possibile struttura di CW-complesso è data prendendo come 0-cella un punto e attaccandole una cella $(n-1)$-dimensionale (D^{n-2}, S^{n-1}). Otteniamo perciò $X^{n-1} = S^{n-1}$. Infine attacchiamo una cella n-dimensionale (D^n, S^{n-1}) lungo il bordo S^{n-1}.

4. *Lo spazio proiettivo n-dimensionale.* Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è definito come lo spazio quoziente di $(\mathbb{R}^{n+1}) \setminus \{0\}$ secondo la relazione di equivalenza $v \sim \lambda v$ per scalari $\lambda \neq 0$. Esso è omeomorfo a $S^n/\sim$ dove la relazione $\sim$ identifica $v \in S^n$ con $-v \in S^n$ (ovvero i punti antipodali sulla sfera, e tale relazione solitamente si denomina con "relazione di antipodalità"). Inoltre si ha che tale spazio è omeomorfo al disco chiuso $D^n/\sim$, dove $\sim$ identifica i punti antipodali del bordo $\partial D^n = S^{n-1}$. Ma, seguendo il ragionamento fatto prima, $S^{n-1}/\sim \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Dunque

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si ottiene da $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ incollando una cella n-dimensionale tramite la mappa quoziente $\pi_n \colon S^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Per induzione si dimostra, quindi, che lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un CW complesso ottenuto dall'incollamento di celle di ogni dimensione compresa tra 0 e n.

5. *Lo spazio proiettivo infinito dimensionale* Poichè lo spazio $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è ottenuto da $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ attaccando una n-cella, l'unione infinita $\mathbb{P}^\infty = \bigcup_n \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ diventa un complesso cellulare con una cella in ogni dimensione.

In generale i CW-complessi non ammettono un'unica decomposizione cellulare :

Esempio 3.1.8. La sfera S^n può essere dotata della struttura descritta nell'Esempio 3.1.7, ma possiamo anche considerare S^n con una diversa struttura. Costruiamo in modo induttivo una decomposizione in celle: se $n = 0$, allora $S^0 = \{-1, 1\}$, quindi $\{\{-1\}, \{1\}\}$ è una decomposizione costituita da due 0-celle. Supponiamo che $n \geq 0$ e che S^{n-1} ammetta una decomposizione in celle costituita da due celle in ciascuna dimensione $0, ..., (n-1)$. Consideriamo la sfera S^n e immergiamo S^{n-1} in S^n considerandola come il sottospazio di S^n in cui $x_{n+1} = 0$. Allora i due emisferi aperti:

$$e_1 := \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} > 0\}$$
$$e_2 := \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} < 0\}$$

sono due n-celle aperte disgiunte tra loro e dalle celle di S^{n-1}. Pertanto l'unione di queste due nuove n-celle aperte con la vecchia decomposizione in celle di S^{n-1} ci restituisce una decomposizione in celle di S^n formata da due celle per ogni dimensione.

Una curiosità è l'uso delle lettere "CW" quando si indica un complesso di celle. Le lettere stanno ad indicare due proprietà soddisfatte dai CW-complessi. Spiegando quindi quale sia la topologia su un complesso di celle X, diamo un'altra definizione di complesso cellulare:

Definizione 3.1.9 (CW-complesso)**.** Un *complesso di celle* o *CW-complesso* è uno spazio di Hausdorff X dotato di una partizione in celle aperte (di dimensioni variabili) che soddisfa due proprietà:

1. *Closure-finiteness* (chiusura-finitezza): Per ogni cella n-dimensionale aperta C nella partizione di X, esiste una mappa continua f dalla palla n-dimensionale chiusa ad X tale che:

    - la restrizione di f all'interno della palla chiusa è un omeomorfismo sulla cella aperta C;
    - l'immagine del bordo della palla chiusa è contenuta nell'unione di un numero finito di celle aventi tutte dimensione inferiore ad n.

2. *Weak Topology* (topologia debole): Un sottoinsieme di X è chiuso se e soltanto se l'intersezione con la chiusura di ciascuna cella è un insieme chiuso.

Le due definizioni date di complesso di celle descrivono lo stesso oggetto ma in modo differente: mediante la prima definizione costruiamo uno spazio topologico "pezzo per pezzo"; mediante, invece, la seconda definizione forniamo una descrizione precisa dello spazio. Le due definizioni sono, in realtà, equivalenti (la dimostrazione di questo fatto si può trovare nell'Appendice di [2]).

Definizione 3.1.10 (Dimensione di un CW-complesso)**.** Sia X un complesso di celle. Se esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che tutte le celle di X abbiano dimensione al più n, X è detto finito-dimensionale; altrimenti, diremo che X è infinito-dimensionale. Se X è finito dimensionale, chiamiamo *dimensione* di X il più grande numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che X contenga almeno una n-cella.

Esempio 3.1.11. Consideriamo i seguenti esempi:

- Un CW-complesso 1-dimensionale $X = X^1$ è quello che chiamiamo *grafo* in topologia algebrica. E' caratterizzato da vertici (le 0-celle) a cui sono attaccati gli spigoli (le 1-celle).

- La sfera S^n, con la decomposizione in celle dell'Esempio 3.1.7 è un CW complesso n-dimensionale.
- $\mathbb{R}$, con la decompsizione in celle dell'Esempio 3.1.7 è un CW-complesso 1-dimensionale.

Ogni cella e_n^α in un complesso di celle è caratterizzata da una *mappa caratteristica* $\psi_\alpha \colon D_\alpha^n \to X$ che estende la funzione caratteristica ϕ_α e dà un omeomorfismo tra la parte interna di D_α^n e e_α^n, portando il bordo D_α^n nell'unione delle celle di dimensione strettamente minore di n. In realtà, possiamo vedere ψ_α come la composizione $D_\alpha^n \hookrightarrow X^{n-1} \bigsqcup D_n^\alpha \to X^n \hookrightarrow X$ dove la funzione centrale rappresenta la mappa quoziente, questa è continua poichè composizione di mappe continue. Nell'Esempio 3.1.7, una mappa caratteristica per la n-celle di S^n è l'applicazione $\psi \colon D^n \to S^n$ che collassa ∂D^n ad un punto.

Definizione 3.1.12 (Sottocomplesso di celle)**.** Un *sottocomplesso di celle* di un CW-complesso X è un sottospazio chiuso $Y \subseteq X$ formato dall'unione di celle di X.

Osservazione 3.1.13. In generale i sottocomplessi di un CW-complesso X preservano la struttura di CW-complessso, infatti l'immagine di ogni cella nel sottocomplesso, tramite la funzione di incollamento, è contenuta nel sottocomplesso stesso. La topologia del sottocomplesso come CW-complesso coincide con quella indotta da X. La dimostrazione rigorosa di questo fatto si trova nella Proposizione 68.18 di [5].

Esempio 3.1.14. Ogni n-scheletro X^n di un complesso di celle X è un sottocomplesso.

Definizione 3.1.15 (Mappa cellulare)**.** Siano X,Y due CW-complessi. Una mappa continua $f \colon X \to Y$ è detta *cellulare* se per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ vale che $f(X^n) \subset Y^n$.

Non tutte le mappe tra CW-complessi godono della seguente proprietà:

Esempio 3.1.16. Consideriamo $X = [0,1]$ con due 0-celle e una 1-cella e $Y = [0,1] \times [0,1]$ con quattro 0-celle, quattro 1-celle e una 2-cella. La mappa

$$\begin{aligned} g\colon X &\to Y \\ t &\to (t,t) \end{aligned}$$

non è cellulare, infatti l'immagine dell'1-scheletro di X tramite f non è contenuta nell'1-scheletro di Y.

Definizione 3.1.17 (Coppia di CW-complessi)**.** Sia X un complesso di celle e $A \subseteq X$ un sottocomplesso, chiameremo la coppia (X, A) *coppia di CW-complessi.*

Esempio 3.1.18. Ogni n-scheletro X^n di un complesso di celle X è un sottocomplesso.

Enunciamo ora una proprietà riguardante i sottocomplessi che sfrutteremo nella sezione successiva:

Proposizione 3.1.19. ([5, Proposizione 68.22]) Sia X un CW-complesso e sia $Y = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq ...$ una sequenza di sottocomplessi tali che siano soddisfatte le seguenti due condizioni:

1. Abbiamo $X = \cup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$.

2. Ciascun Y_i è un retratto per deformazione di Y_{i+1}.

Allora Y_0 è un retratto per deformazione di X.

È inoltre importante osservare che ogni CW-complesso soddisfa la seguente proprietà. Questo ci permetterà di dare l'esempio di uno spazio topologico che non sia un complesso cellulare.

Proposizione 3.1.20. ([2, Proposizione A.5]) Ogni punto in un CW-complesso ha un intorno aperto, arbitrariamente piccolo, e contraibile. Ossia, in altre parole, i CW-complessi sono localmente contraibili.

La dimostazione sfrutta principalmente il fatto che ogni cella in un CW-complesso è localmente contraibile.

Diamo ora l'esempio di uno spazio che non è un CW-complesso:

Esempio 3.1.21. Consideriamo il *Cerchio di Varsavia*, ossia il sottospazo di $\mathbb{R}^2$ definito come

$$W = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) : x \in (0,1] \right\} \bigcup \; (\{0\} \times [-1,1]) \; \bigcup L;$$

dove L è la curva che unisce i primi due insiemi di W. Il cerchio di Varsavia non è localmente contraibile. Infatti, se lo fosse, sarebbe localmente connesso per archi, invece non lo è. Per mostrarlo consideriamo il punto $x = (0,0)$, ogni intorno aperto di x con diametro minore di 1 ha un numero infinito di punti sconessi. Più precisamente, se consideriamo $V = \{y \in W : ||y|| \leq \epsilon\}$ con $\epsilon < 1$, allora i punti $(\frac{1}{n\pi}, 0)$ per gli interi $n > \frac{1}{\epsilon\pi}$ sono tutti interni a V, ma non è possibile connetterli tramite un cammino dentro a V. Perciò W non è un CW complesso.

Ci sono alcune "sottigliezze topologiche" nei complessi cellulari che emergono inaspettatamente con i prodotti. Il prodotto di due CW complessi ha effettivamente una naturale struttura CW , ma la sua topologia è generalmente più fine, con più insiemi aperti, rispetto alla topologia del prodotto. Tuttavia, le differenze tra le due topologie sono piuttosto piccole e, in effetti, inesistenti nella maggior parte dei casi di interesse, quindi non c'è un vero problema per la topologia algebrica. In generale vale il seguente teorema:

Teorema 3.1.22. (Prodotto di CW-complessi è un CW-complesso [2, Teorema A.6]) . Dati due CW-complessi X e Y con mappe caratteristiche ϕ_α e ψ_β, le mappe prodotto $\phi_\alpha \times \psi_\beta$ sono le mappe caratteristiche per una struttura di complesso cellulare su $(X \times Y)_c$. Se uno tra X o Y è compatto o localmente compatto, allora $(X \times Y)_c = (X \times Y)$. Vale anche $(X \times Y)_c = (X \times Y)$ se entrambi hanno una quantità numerabile di celle.

3.2 Proprietà di estensione dell'omotopia

Nella seconda Sezione di questo capitolo ci concentreremo sulla *proprietà di estensione dell'omotopia.* Vedremo il suo "legame" con i complessi di celle e enunceremo alcuni risultati utili per la dimostrazione del Teorema di Whitehead.

Un modo comune per modificare uno spazio senza cambiarne il tipo di omotopia coinvolge l'idea di modificare con continuità il modo in cui le sue parti sono "collegate" e "incollate" tra loro.

Delle costruzioni utili che ricorrono all' "incollamento di spazi" sono la seguenti:

Definizione 3.2.1 (Cilindro mappante)**.** Dati due spazi topologici X e Y e una funzione continua $f\colon X \to Y$, chiamiamo *cilindro mappante* M_f realtivo ad f lo spazio ottenuto da $X \times I$ attaccando Y lungo $X \times \{1\}$ tramite f, ossia lo spazio

$$M_f = ((X \times I) \bigsqcup Y)/\sim,$$

dove $\sim$ è tale che $(x, 1) \sim f(x)$ per qualsiasi $(x, 1) \in X \times I$.

Definizione 3.2.2 (Cono mappante)**.** Dati due spazi topologici X e Y e una funzione continua $f\colon X \to Y$, chiamiamo *cono mappante* C_f lo spazio ottenuto da $CX = (X \times I)/(X \times \{0\})$ attaccando Y lungo $X \times \{1\}$ tramite f, ovvero lo spazio $C_f = (CX \bigsqcup Y)/\sim$, dove $\sim$ è tale che $(x, 1) \sim f(x)$ per ogni $(x, 1) \in CX$.

Esempio 3.2.3. Se X è una sfera, $X = S^{n-1}$, il cono mappante C_f associato alla mappa $f\colon S^{n-1} \to X$ è lo spazio ottenuto da Y attaccando una n-cella.

Osservazione 3.2.4. Il cono mappante C_f può anche essere visto come il quoziente M_f/X del cilindro di mappante M_f con il sottospazio $X = X \times \{0\}$ collassato in un punto.

In generale vale la seguente:

Proposizione 3.2.5. Siano X, Y spazi topologici e $f\colon X \to Y$, il sottospazio $Y \subseteq M_f$ è un retratto per deformazione del cilindro mappante M_f.

Dimostrazione. Una retrazione è data dall'applicazione:

$$H\colon M_f \times I \to M_f$$
$$(P,t) \to \begin{cases} P & \text{se } P \in Y. \\ [(Q, s(1-t)+t)] & \text{se } P = [(Q,s)] \text{ dove } Q \in X, s \in [0,1]. \end{cases}$$

□

Possiamo dare al cilindro mappante M_f una struttura di CW-complesso se abbiamo delle proprietà sulla funzione f.

Proposizione 3.2.6. ([5, Proposizione 68.35]) Siano X,A due CW-complessi. Se $f\colon A \to Y$ è una funzione cellulare, allora il cilindro mappante M_f ammette la struttura di CW-complesso.

In matematica, nell'ambito della topologia algebrica, la proprietà di *estensione dell'omotopia* indica quali omotopie definite su un sottospazio possono essere estese a un'omotopia definita su uno spazio più grande.

Definizione 3.2.7 (Estensione dell'omotopia)**.** Dati una coppia di spazi (X, A), una funzione continua $f_0\colon X \to Y$ e un'omotopia $F\colon A \times I \to Y$ tale che $F_0 = F(x, 0) = f_0\big|_A(x)$, diciamo che (X, A) verifica la *proprietà di estensione dell' omotopia* se esiste un'omotopia $G\colon X \times I \to Y$ che estende F e f_0, ossia tale che $G(x,t) = F(x,t)\ \ \forall (x,t) \in A \times I$ e $G(x, 0) = f_0(x)$ $\forall x \in X$.

In altre parole, (X, A) verifica la proprietà di *estensione dell'omotopia* se ogni coppia di funzioni continue $X \times \{0\} \to Y$ e $A \times I \to Y$ che coincidono su $A \times \{0\}$ possono essere estese ad una funzione continua $X \times I \to Y$.

Adesso proviamo che c'è una correlazione tra la proprietà di estensione dell'omotopia e una particolare proprietà di retrazione negli spazi topologici, vale infatti la seguente:

Proposizione 3.2.8. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, e sia $A \subseteq X$ un chiuso in X. Allora la coppia di spazi (X, A) gode della proprietà di estensione dell'omotopia se e solo se $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è un retratto di $X \times I$.

Dimostrazione. $(\Longrightarrow)$: La proprietà di estensione dell'omotopia per (X, A) implica che la funzione identità $(X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ si estende ad una funzione $(X \times I) \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ che è ancora l'identità su $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$, dunque $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è un retratto.

$(\Longleftarrow)$: Dimostriamo la seguente implicazione nel caso in cui A sia chiuso. Componendo due funzioni continue $X \times \{0\} \to Y$ e $A \times I \to Y$ che coincidono su $A \times \{0\}$ si ottiene una funzione $(X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to Y$ che è continua poichè continua sugli insiemi chiusi $X \times \{0\}$ e $A \times I$. Precomponendo tale funzione $(X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to Y$ con una retrazione $X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ otteniamo un'estensione $X \times I \to Y$, dunque (X, A) ha la proprietà di estensione dell'omotopia. □

Osservazione 3.2.9. L'ipotesi di chiusura dell'insieme A e la richiesta che X sia di Hausdroff possono essere evitate, una dimostrazione senza tali ipotesi si trova nell'Appendice di [2].

Mostriamo un esempio in cui non vale la propretà di estensione dell'omotopia:

Esempio 3.2.10. Sia $I = [0, 1]$, allora la coppia (I, A) con $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$, non è difficile mostrare che non c'è alcuna retrazione continua $I \times I \to (I \times \{0\}) \cup (A \times I)$. Il fatto che qua non valga tale proprietà può essere attribuito alla "brutta" struttura di (I, A) attorno allo 0 come viene messo in evidenza da Hatcher nel libro *'Algebraic Topology'* [2].

Vediamo ora come la condizione necessaria e sufficiente della Proposizione 3.2.8 può essere trasportata anche ai CW-complessi.

Proposizione 3.2.11 (i CW-complessi godono della proprietà di estensione dell'omotopia.)**.** Se (X, A) è una coppia di CW-complessi, allora $(X \times \{0\}) \cup$

$(A \times I)$ è un retratto per deformazione di $X \times I$. In particolare (X, A) ha la proprietà di estensione dell'omotopia.

Dimostrazione. Consideriamo la retrazione $r\colon D^n \times I \to (D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I)$ data dalla proiezione radiale dal punto $(0, 2) \in D^n \times \mathbb{R}$. Essa associa a $P \in D^n \times I$ l'unico punto nell'insieme $(D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I)$ che viene intersecato dalla retta passante per P e $(0, 2)$. Poniamo $\tilde{r}\colon D^n \times I \times I \to (D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I)$ definita da $\tilde{r}(P, t) = t \cdot r(P) + (1 - t)P$. Allora $\tilde{r}$ è l'omotopia tra $r \circ i$ e id. Questo mostra che è una una retrazione per deformazione di $D^n \times I$ su $(D^n \times \{0\}) \cup (\partial D^n \times I)$. Consideriamo $Z_n := (X \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \cup A) \times I$. Ogni Z_n è un sottocomplesso di $X \times I$. Abbiamo quindi una sequenza

$$(X \times \{0\}) \cup (A \times I) = Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 ... \text{ con } X \times I = \cup_{n \geq 1} Z_n.$$

Grazie alla Proposizione 3.1.19 basta mostrare che vale la cosa seguente per ottenere la tesi: per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ esiste una retrazione per deformazione da Z_{n+1} a Z_n. Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, denotiamo con $\phi_i\colon D^n \to X^n,\ \ i \in I$, le mappe caratteristiche di tutte le n-celle di X^n che non giacciono in A. L'idea è quella di applicare la retrazione $\tilde{r}$ a tutte le k-celle di X per ottenere la retrazione per deformazione desiderata. Più precisamente consideriamo la mappa:

$$\begin{aligned} r_n\colon & Z_{n+1} \times I \to Z_{n+1} \\ & ((P, t), s) \to \begin{cases} \phi_i(\tilde{r}((Q, t), s)), & \text{se } P = \phi_i(Q), \text{ con } Q \in D^n \\ (P, t), & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che r_n è una retrazione per deformazione di Z_{n+1} su Z_n. □

Quest'ultima proposizione ha come corollario un fatto riguardante i cilindri mappanti che risulterà utile successivamente.

Corollario 3.2.12. Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua tra spazi topologici e sia M_f il cilindro mappante f. La coppia di spazi (M_f, X) soddisfa la proprietà di estensione dell'omotopia.

Dimostrazione. Dimostreremo il seguente fatto più generale, per poi applic-carlo al caso specifico del corollario. Una coppia di spazi (X, A) ha la proprietà di estensione dell'omotopia se A ha un intorno del tipo cilindro mappante in X, ossia un intorno chiuso N contenente un sottospazio B, pensato come il bordo di N, con $N \setminus B$ un intorno aperto di A, tale che esistano una funzione $f\colon B \to A$ e un omeomorfismo $h\colon M_f \to N$ tale che $h\big|_{A\cup B} = \mathrm{id}$. Per verificare la proprietà di estensione dell'omotopia, osserviamo innanzitutto che $I \times I$ si retrae su $(I \times \{0\}) \cup (\partial I \times I)$, dunque $(B \times I) \times I$ si retrae a $(B \times I \times \{0\}) \cup (B \times \partial I \times I)$ e questa retrazione induce una retrazione di $M_f \times I$ su $(M_f \times \{0\}) \cup ((A \cup B) \times I)$. Perciò $(M_f, A \cup B)$ ha la proprietà di estensione dell'omotopia per la Proposizione 3.2.8. Analogamente si ottiene il medesimo risultato per la coppia omeomorfa $(N, A \cup B)$. Date una funzione $X \to Y$ e un'omotopia della sua restrizione ad A, possiamo prendere l'omotopia costante su $X \setminus (N \setminus B)$ e poi estenderla sopra N applicando la proprietà di estensione dell'omotopia di $(N, A \cup B)$ all'omotopia data su A e all'omotopia costante su B. Usando l'intorno $X \times [0, \frac{1}{2}]$ di X in M_f, si ottiene la tesi. □

Prima di passare al prossimo capitolo, enunciamo la seguente proposizione, senza darne la dimostrazione.

Proposizione 3.2.13. ([5, Proposizione 0.19]) Se le coppie di spazi (X, A) e (Y, A) hanno la proprietà di estensione dell'omotopia e $f\colon X \to Y$ è un'equivalenza omotopica, con $f\big|_A = \mathrm{id}$, allora f è un' equivalenza omotopica relativa ad A.

Un corollario della Proposizione precedenete si ottiene applicandola all'inclusione $A \hookrightarrow X$.

Corollario 3.2.14. Se la coppia di spazi (X, A) soddisfa la proprietà di estensione dell'omotopia e l'inclusione $A \hookrightarrow X$ è un' equivalenza omotopica, allora A è un retratto per deformazione di X.

Come dicevamo poco fa, il cilindro mappante viene coinvolto in una condizione necessaria e sufficiente per avere un'equivalenza omotopica tra due spazi topologici.

Proposizione 3.2.15. Una funzione $f\colon X \to Y$ è un'equivalenza omotopica se e solo se X è un retratto per deformazione del cilindro mappante M_f. In particolare, due spazi X e Y sono omotopicamente equivalenti se e solo se esiste un terzo spazio contenente sia X sia Y come retratti per deformazione.

Dimostrazione. Nel diagramma sottostante le funzioni i e j sono inclusioni e r è la retrazione.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & Y \arrow[d, bend left, "j"] \\ & M_f \arrow[u, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

Dunque $f = r \circ i$ e $i \sim j \circ f$. Poichè j e r sono equivalenze omotopiche, f è un'equivalenza omotopica se e solo se i è un'equivalenza omotopica, in quanto la composizione di due equivalenze omotopiche è un'equivalenza omotopica e una funzione omotopa a un'equivalenza omotopica è un'equivalenza omotopica. Applicando il Corollario 3.2.14 alla coppia (M_f, X), che soddisfa la proprietà di estensione dell'omotopia per il Corollario 3.2.12, si ottiene la tesi. $\square$

Capitolo 4

Teorema di Whitehead

In questo capitolo andremo a enunciare e dimostrare un teorema importante in teoria dell'omotopia formulato da J.H.C. Whitehead. Questo ci dice che i CW complessi si "comportano meglio" degli spazi arbitrari nel seguente senso: le nozioni di *equivalenza omotopica debole* e equivalenza omotopica coincidono se consideriamo mappe tra complessi cellulari. Prima di passare al teorema, però, intoduciamo alcuni concetti utili in teoria dell'omotopia. Fino ad ora abbiamo parlato dei gruppi di omotopia e delle loro proprietà, ma non abbiamo mai parlato del calcolo dei gruppi di omotopia superiore. Questo perchè a differenza dei *gruppi di omologia*, anch'essi invarianti topologici, i gruppi di omotopia sono sorprendentemente complessi e difficili da calcolare. In questa tesi non ci occuperemo in modo diretto di questo "problema" ma vedremo come calcolare alcuni gruppi di omotopia delle sfere, dando l'esempio di spazi *n-connessi.* Esistono tuttavia alcuni metodi per calcolare i gruppi d'omotopia, sebben piuttosto complicati. Il lettore o la lettrice interessati possoo consultare il libro *'Algebraic Topology'* di Allen Hatcher [2] per eventuali approfondimenti.

4.1 La n-connessione

Uno spazio topologico è connesso per archi se ogni due punti dello spazio possono essere collegati tra loro da un cammino, ovvero se l'applicazione di π_0 allo spazio restituisce un insieme formato da un solo punto. Allo stesso modo, uno spazio è detto semplicemente connesso se è connesso per archi e ha gruppo fondamentale banale. Generalizziamo queste definizioni a dimensioni superiori.

Definizione 4.1.1 (Spazio topologico n-connesso)**.** Uno spazio topologico X si dice *n-connesso* se $\pi_i(X, x_0) = 0$ per ogni $i \leq n$ e per ogni punto base $x_0 \in X$.

Osservazione 4.1.2. 0-connesso significa connesso per archi e 1-connesso significa semplicemente connesso. La n-connessione implica la 0-connessione, quindi la n-connessione può essere espressa senza considerare il punto base. Osserviamo che X è n-connesso se e solo se (X, x_0) è n-connesso per qualche $x_0 \in X$, e quindi per tutti gli x_0.

Si può dimostrare che, dato uno spazio topologico X, le seguenti affermazioni sono equivalenti tra loro:

- Ogni funzione continua $S^i \to X$ è omotopa ad una funzione costante.
- Ogni funzione $S^i \to X$ si estende a una funzione sul disco $D^{i+1} \to X$.
- $\pi_i(X, x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in X$.

Quindi, X è n-connesso se una qualsiasi delle condizioni precedenti vale per ogni $i \leq n$. Allo stesso modo, nel caso relativo, per $i > 0$ sono equivalenti:

1. Ogni funzione $(D^i, \partial D^i) \to (X, A)$ è omotopa, relativamente a ∂D^n, ad una funzione $D^i \to A$.
2. Ogni funzione $(D^i, \partial D^i) \to (X, A)$ è omotopa, tramite la stessa funzione, ad una funzione $D^i \to A$.

3. Ogni funzione $(D^i, \partial D^i) \to (X, A)$ è omotopa, tramite la stessa funzione, ad una funzione costante $D^i \to A$.

4. $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in A$.

La dimostrazione di queste equivalenze può essere trovata nelle pagine $141 - 142$ di [3].

Considerando il secondo gruppo di affermazioni equivalenti, per $i = 0$ non possiamo definire il gruppo di omotopia relativo, e le affermzioni (1) e (3) sono equivalenti a dire che ogni componente connessa per archi di X contiene punti in A, in quanto D^0 è un punto e $\partial D^0 = \emptyset$. Una coppia di spazi (X, A) si dice *n-connessa* se $(1), (4)$ valgono per ogni $0 < i \leq n$ e (1),(3) anche per $i = 0$. In modo più compatto:

Definizione 4.1.3. (Coppia di spazi n-connessa) Una coppia di spazi (X, A) si dice *n-connessa* se $\pi_i(X, A, x_0) = 0$ per ogni $0 < i \leq n$, e per ogni $x_0 \in A$.

4.2 Le sfere n-dimensionali sono $(n-1)$-connesse.

Nel campo della topologia algebrica i gruppi di omotopia delle sfere descrivono come sfere di varie dimensioni possono "avvolgersi" l'una attorno all'altra. Per adesso il nostro scopo è quello di fornire l'esempio di uno spazio n-connesso. In particolare vogliamo mostrare che la sfera unitaria n-dimensionale S^n è uno spazio $(n-1)$-connesso.

Una strategia "intuitivamente corretta" per dimostrare che $\pi_n(S^k) = 0$ per $n < k$ è quella di mostrare prima che ogni mappa continua $f\colon S^n \to S^k$ può essere deformata in modo che la sua immagine sia contenuta in S^k tolto almeno un punto. Utilizzeremo poi il fatto che il complementare di un punto in S^k è contraibile per completare la dimostrazione.

Il primo passo sembrerebbe essere superfluo, si potrebbe infatti pensare che nessuna mappa continua $f\colon S^n \to S^k$ possa essere suriettiva quando $n < k$, ma non è così. Pertanto, per rendere questa "strategia" una dimostrazione valida, è necessario compiere uno sforzo per costruire omotopie che eliminino il comportamento “strano” di queste mappe. Affinchè le cose funzionino dobbiamo “trasformare” f in una mappa cellulare.

Ci chiediamo, quindi, se una funzione tra due CW-complessi può essere “deformata” in una mappa cellulare. Il seguente teorema ci dà la risposta:

Teorema 4.2.1 (Teorema di approssimazione cellulare per funzioni)**.** Ogni funzione continua tra CW-complessi $f\colon X \to Y$ è omotopa a una mappa cellulare. Se f è già cellulare su un sottocomplesso $A \subseteq X$, l'omotopia può essere presa costante su A.

Dimostrazione. La dimostrazione può essere condotta per induzione su n, considerando l'affermazione: “f è cellulare sull'n-scheletro X^n.” Per il passo base $n = 0$, notiamo che ogni componente connessa per archi di Y deve contenere una 0-cella. L'immagine tramite f di una 0-cella di X può quindi essere connessa a una 0-cella di Y tramite un cammino, ma questo fornisce un'omotopia tra f e una mappa cellulare sullo 0-scheletro di X.

Assumiamo per induzione che f sia cellulare sull'$(n-1)$-scheletro X^{n-1}, e sia e^n una n-cella di X. La chiusura di e^n è compatta in X, essendo l'immagine della mappa caratteristica della cella, e quindi l'immagine della chiusura di e^n tramite f è compatta in Y. Poichè un qualsiasi sottospazio compatto di un CW-complesso interseca solo un numero finito di celle del complesso (questa proprietà dei complessi cellulari è mostrata nell'Appendice A1 di [2]), l'immagine $f(e^n)$ incontra al massimo un numero finito di celle di Y. Quindi esiste una cella C di dimensione massima in Y tale che $f(e^n) \cap C \neq \emptyset$. Sia k la sua dimensione e chiamiamola $C = e^k \subset Y$. Se $k \leq n$, la mappa f è già cellulare su e^n, dato che $f(e^n) \subset Y^k \subset Y^n$. Quindi possiamo assumere che $k > n$. È quindi un risultato non banale (il lettore o la lettrice possono consultare il libro *‘Algebraic Topology’* di Hallen Hatcher [2] pagina 358) il fatto che esista un'omotopia relativa a X^{n-1} tra la restrizione di f a $X^{n-1} \cup e^n$ e una mappa h tale che $h(e^n)$ sia priva di un punto $p \in e^k$. Poichè $Y^k \setminus \{p\}$ si retrae per deformazione sul sottospazio $Y^k \setminus e^k$ possiamo trovare un'omotopia relativa a X^{n-1} tra la restrizione di f a $X^{n-1} \cup e^n$ e una mappa g con la proprietà che $g(e^n)$ non incontri tutta la cella e^k. Poiché $f(e^n)$ interseca solo un numero finito di celle di Y, possiamo ripetere questo processo un numero finito di volte per fare in modo che $f(e^n)$ non incontri tutte le celle di Y di dimensione maggiore di n.

Ripetiamo questo processo per ogni n-cella di X, fissando le celle del sottocomplesso A su cui f è già cellulare, e otteniamo così un'omotopia, relativa allo scheletro $(n-1)$-dimensionale di X e alle n-celle di A, tra la restrizione di f a X^n e una mappa cellulare. Utilizzando quindi la proprietà di estensione dell'omotopia per estendere su tutto X questa omotopia e quella costante su A, si completa la dimostrazione. Facendo tendere n all'infinito, la sequenza risultante di omotopie può essere realizzata come una singola omotopia, eseguendo l'ennesima omotopia durante l'intervallo "temporale " $[1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{1}{2^{n+1}}]$. Ogni punto di X si trova in qualche n-scheletro X^n, che rimane al più stazionario durante la catena infinita di omotopie. $\square$

Grazie a questo teorema siamo in grado di dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 4.2.2. $\pi_n(S^k) = 0$ per ogni $n < k$.

Dimostrazione. Consideriamo S^n e S^k con la loro "usuale" struttura di CW-complessi descritta nell'Esempio 3.1.7, con le 0-celle considerate come punti base. Per il Teorema 4.2.1 ogni mappa continua $S^n \to S^k$ è omotopa, fissato un punto base, a una funzione cellulare g. Dunque $g(S^n)$ deve essere contenuto nell'n-scheletro di S^k. Ma quest'ultimo è un punto, quindi f è costante per $n < k$. $\square$

Abbiamo quindi mostrato che le sfere n-dimensionali sono spazi $(n-1)$-connessi. Il problema di calcolare i gruppi di omotopia superiore $\pi_{n+k}(S^n)$ per $k > 0$ si è rivelato essere una questione centrale nella topologia algebrica che ha contribuito allo sviluppo di molte delle sue tecniche fondamentali ed è stata un focus stimolante della ricerca. Sono stati stabiliti diversi modelli importanti, ma molto resta sconosciuto, più precisamente per nessun $n \leq 2$ si conoscono tutti i gruppi di omotopia $\{\pi_k(S^n)\}_{k\in\mathbb{N}}$.

4.3 Teorema di Whitehead

Il teorema di Whitehead coinvolge funzioni che inducono isomorfismi tra i gruppi di omotopia tra due spazi topologici. Definiamo tali funzioni:

Definizione 4.3.1 (Equivalenza omotopica debole)**.** Siano X, Y spazi topologici. Una funzione $f\colon X \to Y$ si chiama *equivalenza omotopica debole* se la funzione indotta

$$f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to (Y, f(x_0))$$

è un isomorfismo di gruppi per $n \geq 0$ e per ogni punto base $x_0 \in X$.

Osserviamo che se X e Y sono due spazi topologici connessi per archi, è sufficiente che $f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to (Y, f(x_0))$ sia un isomorfismo per $n \geq 1$ e per un solo punto $x_0 \in X$, affinchè f sia un'equivalenza omotopica debole. E' chiaro che ogni equivalenza omotopica è un'equivalenza omotopica debole. Ma è vero il viceversa? Il teorema di Whitehead risponde in modo affermativo a questa domanda a patto che ci siano determinate ipotesi su X e Y. Prima di enunciare e dimostrare il teorema di Whitehead, abbiamo bisogno di un lemma preliminare.

Lemma 4.3.2 (Lemma di compressione)**.** Sia (X, A) una coppia di CW-complessi e sia (Y, B) una coppia di spazi tale che $B \neq \emptyset$. Supponiamo che per ogni n per cui $X \setminus A$ ammette almeno una cella n-dimensionale $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ per ogni $y_0 \in B$. Allora ogni funzione $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ è omotopa relativamente ad A ad una mappa $X \to B$.

Se $n = 0$ la condizione $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$ per ogni $y_0 \in B$ coincide con la richiesta che (Y, B) sia 0-connesso.

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserzione per induzione su $k \in \mathbb{N}$.

Supponiamo di avere un'omotopia relativa ad A tra f e una funzione definita sul k-scheletro X^{k-1} con immagine in B. Se ϕ è la funzione caratteristica di una cella e^k di $X \setminus A$, consideriamo la composizione $f \circ \phi\colon (D^n, \partial D^n) \to (Y, B)$.

Per $k = 0$ la coppia (Y, B) è 0-connessa, quindi, sfruttando l'Osservazione 4.1.2, otteniamo che ogni funzione $(D^0, \partial D^0) \to (Y, B)$ è omotopa ad una funzione $D^0 \to B$. Per $k \neq 0$, per ipotesi $\pi_k(Y, B, y_0) = 0$ per ogni $y_0 \in B$, quindi la composizione $f \circ \phi$ rappresenta la classe di equivalenza nulla. Per l'Osservazione 4.1.2, o sfruttando il Criterio di compressione 2.4.4, possiamo dire che $f \circ \phi$ è omotopa relativamente a ∂D^k ad una funzione con immagine contenuta in B. In entrambi i casi l'omotopia di $f \circ \phi$ induce un'omotopia relativa a X^{k-1} di f nello spazio quoziente di $X^{k-1} \sqcup D^k$, ossia $X^{k-1} \cup e^k$. Iterando questo procedimento per ogni k-cella di $X \setminus A$ e prendendo l'omotopia costante su A, otteniamo un'omotopia di $f\big|_{X^k \cup A}$ con una funzione a valori in B. Per la proprietà di estensione dell'omotopia della Proposizione 3.2.11, tale omotopia si estende ad un'omotopia definita su tutto X e il passo induttivo è concluso. Un numero finito di applicazioni del passo induttivo conclude la dimostrazione se le celle di $X \setminus A$ hanno dimensione limitata. Nel caso generale restringiamo l'omotopia del passo induttivo all'intervallo "temporale" $[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}]$. Qualsiasi scheletro finito X^k è eventualmente costante sotto l'azione di queste omotopie. Quindi abbiamo un'omotopia ben definita $f_t,\ t \in [0, 1]$ con $f_1(X) \subset B$. □

Ora siamo pronti a dimostrare e enunciare il Teorema di Whitehead:

Teorema 4.3.3 (Theorema di Whitehead)**.** Siano X, Y due CW-complessi connessi per archi. Se esiste una mappa continua $f\colon X \to Y$ tale che la mappa indotta $f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ sia un isomorfismo per ogni $n \geq 0$, allora f è un' equivalenza omotopica. Nel caso in cui f sia l'inclusione di un sottocomplesso $X \hookrightarrow Y$, allora X è un retratto per deformazione di Y.

Dimostrazione. Possiamo dividere la dimostrazione in due casi:

1. Consideriamo il caso in cui f è un'inclusione di un sottocomplesso. Per ipotesi abbiamo che $\pi_n(X) \simeq \pi_n(Y)$ per ogni n. Consideriamo la successione esatta dei gruppi di omotopia della coppia (Y, X):

$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_n(Y, y_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(Y, X, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(X, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

Poichè f induce isomorfismi su tutti i gruppi d'omotopia, i gruppi di omotopia relativi sono banali, ossia $\pi_n(Y,X) = 0$ (osserviamo che il punto base x_0 si può omettere in quanto i CW-complessi sono connessi per archi). Applicando il Lemma di compressione 4.3.2 alla funzione identità $(Y,X) \to (Y,X)$ otteniamo che l'identità è omotopa ad una funzione $Y \to X$ che è una retrazione, quindi Y è un retratto per deformazione di X.

2. Il caso generale di una funzione $f\colon X \to Y$ può essere ricondotto al primo caso usando il cilindro mappante M_f e sfruttando la Proposizione 3.2.15. Consideriamo il cilindro mappante M_f, esso contiene sia $X \times \{0\}$ sia Y come sottospazi, e Y è un retratto per deformazione di M_f per la Proposizione 3.2.5. Possiamo vedere la funzione f come composizione dell'inclusione $i\colon X \hookrightarrow Y$ con la retrazione $r\colon M_f \to Y$:

$$f\colon X = X \times \{0\} \xrightarrow{\ i\ } M_f \xrightarrow{\ r\ } Y$$

Poichè M_f è omotopicamente equivalente a Y tramite r, è sufficiente mostrare che X è un retratto per deformazione di M_f, se f induce isomorfismi nei gruppi d'omotopia, sfruttando la Proposizione 3.2.15. Se f è una mappa cellulare, che manda l'n-scheletro di X nell'n-scheletro di Y per ogni n, allora sappiamo che (M_f, X) è una coppia di CW-complessi grazie alla Proposizione 3.2.6, e quindi otteniamo la tesi grazie alla prima parte della dimostrazione. Se f non è cellulare, applichiamo il Lemma 4.3.2 per ottenere un'omotopia relativa a X dell'inclusione $(X \cup Y, X) \hookrightarrow (M_f, X)$ con una mappa verso X. Poiché la coppia $(X \cup Y, M_f)$ soddisfa ovviamente la proprietà di estensione dell'omotopia per la Proposizione 3.2.8, questa omotopia si estende a un'omotopia tra l'identità su M_f e una mappa $g\colon M_f \to M_f$ che porta $X \cup Y$ in X. Applichiamo nuovamente il Lemma 4.3.2 alla composizione $(X \times I \sqcup Y, X \times \partial I \sqcup Y) \to (M_f, X \cup Y) \to (M_f, X)$ per completare la costruzione di un retrazione per deformazione di M_f su X.

□

La dimostrazione poteva essere "accorciata" sfruttando in Teorema di approssimazione cellulare 4.2.1. Nel caso in cui abbiamo considerato f non cellulare potevamo dire che, grazie al teorema appena citato, essa è omotopa ad una mappa cellulare g e quindi concludere riconducendoci al caso precedente e usando il fatto che mappe omotope inducono lo stesso morfismo tra gruppi di omotopia (2.3.3).

Osservazione 4.3.4. Osserviamo che il teorema di Whitehead dimostra che ogni equivalenza omotopica debole tra CW-complessi è un'equivalenza omotopica. Quindi, data una funzione continua $f\colon X \to Y$, partendo dalla conoscenza degli isomorfismi $\pi_*(f)\colon X \to Y$, siamo in grado di costruire anche un'inversa omotopica di f, $g\colon Y \to X$.

In generale il Teorema di Whitehead non vale se X e Y sono spazi topologici generici e non CW-complessi, come mostra il seguente esempio.

Esempio 4.3.5. Consideriamo il cerchio di Varsavia W visto nell'esempio 3.1.21. Avevamo osservato che non è un complesso cellulare in quanto non è localmente contraibile. Si tratta di un sottoinsieme compatto del piano ottenuto "chiudendo" la curva del seno topologo con un arco. Si può mostrare facilmente che è connesso per archi, ossia $\pi_0(W) = 0$. Ciò si ha proprio per costruzione del cerchio di Varsavia stesso. Infatti, grazie all'arco continuo che viene aggiunto agli estremi del grafico del seno del topologo, qualsiasi coppia di punti appartenenti al cerchio di Varsavia potrà essere collegata da un arco. In particolare, considerando il punto $(0,0)$ e un punto del tipo $(x, sin(1/x))$ con $0 < x < 1$, dovremo considerare l'arco che "passa sotto" al grafico del seno del topologo. I gruppi di omotopia del cerchio di Varsavia sono tutti banali, proprio come quelli di un punto, e quindi qualsiasi mappa tra il cerchio di Varsavia e un punto induce una equivalenza omotopica debole. Infatti, considerando una qualsiasi funzione continua $f\colon S^n \to W$, poichè f è continua si ha che l'insieme $f(S^n) \subseteq W$ è compatto, in quanto immagine di un compatto tramite una funzione continua. Intuitivamente, è chiaro che gli unici sottoinisemi compatti di W, ossia chiusi e limitati, sono contraibili. Perciò abbiamo mostrato che ogni laccio in W è contraibile e che in generale ogni mappa $S^n \to W$ è omotopa ad una costante, ossia $\pi_n(W) = 0$ per ogni $n \geq 0$. Tuttavia, il cerchio di Varsavia non è omotopicamente equivalente ad un punto. Per mostrarlo facciamo vedere che esiste una mappa $f: W \to S^1$ che non è nullomotopa. Consideriamo f tale che mandi il segmento $\{0\} \times [-1, 1]$ in un punto $p \in S^1$, l'arco L in $S^1 \setminus \{p\}$ e $\{(x, sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$ nel punto p. Tale funzione non è nullomotopa, in quanto abbiamo fatto "un giro completo" attorno a S^1. Abbiamo perciò mostrato che il Teorema di Whitehead non vale per spazi topologici qualsiasi, il cerchio di Varsavia W ha gruppi di omotopia banali, come quelli di un punto, ma non è omotopicamente equivalente ad esso.

Osservazione 4.3.6. Il teorema di Whitehead non dice che due CW-complessi con gruppi di omotopia isomorfi sono omotopicamente equivalenti, c'è differenza tra dire che X e Y hanno gruupi di omotopia isomorfi e dire che esiste una funzione $f: X \to Y$ che induce isomorfismi sui gruppi d'omotopia.

Vediamo un controesempio, sfruttando risultati noti riguardanti i rivestimenti universali e i *gruppi di omologia* che esulano dalla trattazzione della tesi. Rimandiamo il lettore o la lettrice al libro di Hatcher [2] per ulteriori dettagli.

Esempio 4.3.7. Consideriamo $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e $Y = S^2 \times \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$. Gli spazi $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, S^2 e $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ ammettono una struttura cellulare, come mostrato nell'Esempio 3.1.7. Inoltre, anche Y è un CW-complesso per la proposizione 3.1.22. Questi spazi hanno come gruppo fondamentale $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ [1, Proposizione 13.2]. Notiamo che il rivestimento universale di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è S^2, il rivestimento universale di $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ è $S^\infty = \cup_{n\geq 0} S^n$, ed il rivestimento universale di Y è $S^2 \times S^\infty$. Usando il fatto che S^∞ è contraibile, otteniamo che, per la Proposizione 2.3.6, i gruppi di omotopia superiore di X e Y sono isomorfi per $n \geq 2$. Allo stesso tempo possiamo dire che X e Y non sono omotopicamente equivalenti sfruttando il fatto che i loro gruppi di omologia sono molto diversi, [2].

Sembra, infatti, piuttosto raro che il "tipo di omotopia" di un CW-complesso sia univocamente determinato dai suoi gruppi di omotopia superiori. Un caso speciale in cui il tipo di omotopia di un CW-complesso è determinato dai suoi gruppi di omotopia è quando tutti i gruppi di omotopia sono banali. Un altro caso in cui un CW-complesso ha il tipo di omotopia univocamente determinato dai gruppi di omotopia è quando esso ha un solo gruppo di omotopia superiore non banale. Gli spazi che soddisfano questa situazione sono chiamati *spazi di Eilenberg-MacLane*.

Definizione 4.3.8 (Spazio di Eilenberg-MacLane)**.** Sia G un gruppo e n un numero intero positivo. Uno spazio topologico connesso X è chiamato uno *spazio di Eilenberg–MacLane* di tipo $K(G, n)$ se ha l'ennesimo gruppo di omotopia isomorfo a G e tutti gli altri gruppi di omotopia sono banali.

Osservazione 4.3.9. Sfruttando la Proposizione 2.3.6 possiamo osservare che dire che X è uno spazio $K(G, 1)$ secondo la definizione data sopra è equivalente a richiedere che abbia gruppo fondamentale isomorfo a G e rivestimento universale contraibile.

Esempio 4.3.10. Ecco due esempi:

1. S^1 è uno spazio $K(\mathbb{Z}, 1)$.
2. Il toro $S^1 \times S^1$ è uno spazio $K(\mathbb{Z}^2, 1)$. Infatti $\mathbb{Z}^2$ è il suo gruppo fondamentale e il rivestimento universale è $\mathbb{R}^2$, che è contraibile.

In generale si può mostrare che è possibile costruire un complesso cellulare X tale che X sia un "modello" per $K(G, n)$ per ogni gruppo G e ogni numero intero $n > 0$, richiedendo che G sia abeliano per $n > 1$. La dimostrazione precisa di questo fatto esula dagli scopi di queso elaborato, quindi rimandiamo il lettore alla Sezione 4.2 di [2]. Assumendo quindi l'esistenza di un CW-complesso tale che $\pi_n(X) \simeq G$ e $\pi_k(X) = 0$ per qualsiasi $k \neq n$ ci chiediamo se dati un gruppo G e un numero intero $n > 0$ sia unico a meno di omotopie, la risposta è positiva.

Analizziamo in dettaglio cosa avviene per $n = 1$:

Proposizione 4.3.11. ([2, Proposizione 1B.9]). Sia X uno spazio topologico connesso e Y un modello per $K(G,1)$. Allora ogni omomorfismo $f_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ è indotto da una mappa continua $f\colon (X,x_0) \to (Y,y_0)$.

Conseguenza diretta di questa proposizione è il seguente teorema:

Teorema 4.3.12. Il tipo di omotopia di un CW-complesso $K(G,1)$ dipende unicamente dal gruppo G. Ossia, siano G,H due gruppi tali che $G \simeq H$. Siano X un CW-complesso modello per $K(G,1)$, e Y un CW-complesso modello per $K(H,1)$, allora $X \sim Y$.

Dimostrazione. Siano X e Y due complessi cellulari $X = K(G,1)$ e $Y = K(Z,1)$ tali che esista un isomorfismo $f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ tra i loro gruppi fondamentali. Grazie alla Proposizione 4.3.11 sappiamo che esiste una mappa $f\colon X \to Y$ che induce f_*. Poichè per ipotesi X e Y hanno gruppi di omotopia superiore banali per $n \geq 2$, la mappa indotta $f_*\colon \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ è un isomorfismo per ogni $n > 0$. Grazie al Teorema di Whitehead 4.3.3 possiamo concludere che tali spazi sono omotopicamente equivalenti. □

Il fatto che ad ogni spazio $K(G,1)$ sia associato un unico tipo di omotopia per ogni gruppo G significa che gli invarianti algebrici degli spazi che dipendono solo dal tipo di omotopia, come i gruppi di *omologia* e *coomologia*, (che qua non verranno affrontati), diventano invarianti dei gruppi stessi. Questa idea si è dimostrata essere molto proficua ed è stata ampiamente studiata sia dal punto di vista algebrico che topologico.

Concludiamo il capitolo enunciando il risultato precedente nel caso più generale:

Teorema 4.3.13. ([2, Proposizione 4.30]) Il tipo di omotopia di un CW-complesso $K(G,n)$ è univocamente determinato dal gruppo G e da n.

Conclusioni

Riepilogando, abbiamo visto che i gruppi di omotopia superiore sono un importante invariante topologico, ma il Teorema di Whitehead mette in evidenza che la loro utilità è strettamente collegata all'utilizzo di particolari spazi: i complessi cellulari. Esiste però un teorema, formulato per "aggirare" questa mancanza, chiamato *Teorema di approssimazione cellulare* [2, Proposizione 4.13], che ci permette di "rimpiazzare" uno spazio arbitrario con un CW-complesso. Più precisamente, questo teorema afferma che per ogni spazio topologico connesso X esiste un CW-complesso Z e un'equivalenza omotopica debole $f\colon Z \to X$. Una mappa del genere $f\colon Z \to X$ è chiamata approssimazione cellulare di X. Tuttavia, pur potendo sostituire molti spazi con CW-complessi, il calcolo dei gruppi di omotopia di ordine superiore rimane molto difficile. Tuttora non conosciamo tuttti i gruppi di omotopia di spazi molto "semplici" come le sfere. La seguente tabella mostra alcuni casi di $\pi_i(S^n)$ con n e i "piccoli":

	$\mathbb{S}^1$	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{S}^3$	$\mathbb{S}^4$	$\mathbb{S}^5$	$\mathbb{S}^6$	$\mathbb{S}^7$	$\mathbb{S}^8$	$\mathbb{S}^9$	$\mathbb{S}^{10}$
π_1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
π_2	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0
π_3	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0
π_4	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0
π_5	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
π_6	0	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
π_7	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
π_8	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0
π_9	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0
π_{10}	0	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
π_{11}	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
π_{12}	0	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_2$	0	0	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$
π_{13}	0	$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_2$	0	0	$\mathbb{Z}_{24}$

Figura 4.1: Gruppi di omotopia delle sfere

Il problema della determinazione dei gruppi $\pi_i(S^n)$ rientra in tre regimi, a seconda che i sia inferiore, uguale o maggiore di n. In particolare, la questione del calcolo del gruppo di omotopia $\pi_{n+k}(S^n)$ per k positivo è una questione centrale per la topologia. Esistono alcuni risultati importanti, relativi a questo argomento, come il *Teorema di Hurewicz* [2, Teorema 4.32] che collega i primi gruppi di omotopia e omologia non nulli di uno spazio, permettendo di affermare che $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Un'altra applicazione degna di nota è il *Teorema di sospensione di Freudenthal* [2, Teorema 4.23], che porta a definire i gruppi di omotopia stabili e, di fatto, introduce l'intera teoria dell'omotopia stabile. Una delle scoperte principali è che i gruppi di omotopia $\pi_{n+k}(S^n)$ sono indipendenti da n per $n \leq k+2$. Questi sono chiamati gruppi di omotopia stabile delle sfere e sono stati calcolati per valori di k fino a 64. La maggior parte dei calcoli moderni utilizza sequenze spettrali, una tecnica applicata per la prima volta da Jean-Pierre Serre. Sono stati stabiliti diversi modelli importanti, ma molto rimane sconosciuto e inesplorato.

Bibliografia

[1] Marco Manetti (2014) *Topologia*, Springer, 2a edizione.

[2] Allen Hatcher (2001) *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2a edizione.

[3] Tammo tom Dieck (2008) *Algebraic Topology*, EMS.

[4] John M. Lee (2011) *Introduction to topological Manifolds*, Springer, 2a edizione.

[5] Stefan Friedl (2022) *Topology*, lecture notes, https://friedl.app.uni-regensburg.de/papers/1at-total-public-october-14-2022.pdf

[6] Georege W. Whitehead (1978) *Elements of homotopy theory*, Springer.

[7] John W. Milnor (1965) *Topology from the differentiable viewpoint*, lecture notes, Princeton University, based on notes by David W. Weaver.