Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Statistica degli estremi per variabili aleatorie a coda lunga e una loro applicazione nella fisica ottica

Relatore:
Prof. Marco Lenci

Presentata da:
Luca Franciosi

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

In questa tesi esploriamo in dettaglio le distribuzioni stabili, un importante campo della teoria delle probabilità che ha applicazioni in una vasta gamma di discipline scientifiche. La discussione inizia con una trattazione di alcuni elementi probabilistici basilari indispensabili per l'analisi delle proprietà fondamentali di queste distribuzioni.

Successivamente trattiamo le condizioni necessarie affinché una distribuzione sia stabile, definiamo cosa si intenda per dominio di attrazione ed esaminiamo il Teorema Centrale del Limite Generalizzato.

Attraverso l'utilizzo di questi concetti matematici, confrontiamo la statistica di eventi estremi per variabili aleatorie a coda lunga con la statistica della somma di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite appartenenti al dominio di attrazione di una variabile aleatoria stabile, quando ci troviamo in un regime non coperto dal *Teorema Centrale del Limite Generalizzato*.

Infine concentriamo la nostra attenzione sul "*vetro di Lévy*", un innovativo materiale ottico in cui la luce segue un modello di "*volo di Lévy*", ovvero un cammino aleatorio con distribuzione stabile.

Ai miei nonni.

Indice

Introduzione

Nel mondo complesso delle probabilità e delle variabili casuali, le distribuzioni stabili rappresentano una tappa fondamentale e sono state affrontate per la prima volta già nel 1820, dal matematico francese Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), che introdusse appunto la cosidetta distribuzione di Cauchy. Questa distribuzione è stata oggetto di una delle discussioni più intriganti e durature nella storia della matematica, in quanto presenta una caratteristica distintiva: la mancanza di una varianza definita, non accettabile per le teorie matematiche dell'epoca. Questo singolare attributo ha portato a un dibattito accanito, aprendo una breccia nel cuore stesso della teoria delle probabilità. Tra i principali partecipanti a questo dibattito c'erano matematici illustri come Pafnuty Chebyshev (1821-1894) e Siméon Denis Poisson (1781-1840). Questi pensatori di spicco si sono scontrati sul significato e sulla coerenza di una distribuzione probabilistica che non soddisfaceva i requisiti tradizionali della statistica.

Il paradosso di Cauchy è rimasto irrisolto per quasi un secolo, finché Paul Lévy (1886-1971), un matematico francese, non ha gettato nuova luce sulla questione nel 1925. Attraverso un articolo intitolato *Calcul des Probabilités*, Lévy (1886-1971) diede la definizione di *distribuzioni stabili*, dimostrando che quella di Cauchy appartenesse a questo gruppo, e, durante la Seconda Guerra Mondiale, le applicò alla meteorologia militare, mostrando la loro rilevanza pratica al di fuori della matematica.

Negli anni '30, i matematici russi Gnedenko (1912-1995) e Kolmogorov (1903-1987) dimostrarono il *Teorema Centrale del Limite Generalizzato*, stabilendo che la somma di un gran numero di variabili casuali i.i.d. segue una distribuzione stabile in determinate condizioni. Questo risultato aprì la strada all'applicazione di queste distribuzioni in vari campi scientifici, inclusa l'analisi delle code nelle scienze finanziarie.

William Feller (1906-1970) scrisse un libro monumentale negli anni '50 dal titolo *An introduction to probability theory and its applications*, rendendo accessibili i complessi concetti delle distribuzioni stabili a un vasto pubblico e contribuendo significativamente alla diffusione del sapere in questo campo.

Oggi, le distribuzioni stabili trovano applicazione in diversi campi, dalla fisica alla biologia, dalla statistica all'ingegneria. Sono utilizzate per modellare eventi rari e deviazioni significative dalla norma. Nelle scienze finanziarie, in particolare, queste distribuzioni sono fondamentali per gestire il rischio e prevedere eventi estremi che potrebbero influenzare i mercati. Negli ultimi anni, è stato sviluppato un innovativo materiale ottico con notevoli potenzialità nell'ambito industriale. Questo materiale permette alla luce di propagarsi in modo non convenzionale, consentendo ai fotoni di muoversi attraverso il mezzo a una velocità media molto superiore rispetto ai materiali diffusivi tradizionali. Questo comportamento è il risultato della distribuzione quasi frattale dei centri di diffusione all'interno del materiale, il quale è stato denominato "*vetro di Lévy*", in quanto la propagazione della luce segue una distribuzione stabile. Questa scoperta ha importanti implicazioni, poiché migliora la nostra comprensione dei processi fisici legati al trasporto della luce e del suono, così come del comportamento di particelle come gli elettroni e di altri sistemi complessi.

L'argomento di questa tesi è stato sviluppato suddividendone la trattazione in tre capitoli:

- nel Capitolo 1 descriviamo alcuni concetti basilari della teoria della probabilità, introduciamo le importanti nozioni di distribuzione stabile e di dominio di attrazione ed enunciamo alcuni teoremi caratteristici, soffermandoci in particolare sul *Teorema Centrale del Limite Generalizzato*;

- nel Capitolo 2 analizziamo il comportamento asintotico delle code delle distribuzioni delle somme di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite appartenenti al dominio di attrazione di una variabile aleatoria stabile;

- nel Capitolo 3 esaminiamo un'applicazione fisica che fa uso delle distribuzioni stabili. In particolare, esploreremo il fenomeno della superdiffusione della luce attraverso un particolare materiale ottico chiamato "*vetro di Lévy*". In questo contesto, la luce segue un cammino aleatorio con distribuzione stabile, che per questo motivo viene indicato con il termine "*volo di Lévy*".

Capitolo 1

Distribuzioni stabili e loro dominio di attrazione normale

In questo capitolo sarà introdotto il concetto di distribuzioni stabili, iniziando dalla loro definizione matematica e continuando con l'enunciazione e la dimostrazione di lemmi e teoremi riguardanti le loro proprietà caratteristiche. Nel corso della trattazione verranno spiegate brevemente le nozioni basilari di probabilità di cui ci serviremo, citando dove è possibile trovare una spiegazione più ampia e dettagliata, sarà affrontato il concetto di dominio di attrazione "normale", evidenziandone la differenza da quello "non normale", e infine discuteremo riguardo al *Teorema Centrale del Limite Generalizzato*.

1.1 Distribuzioni stabili

Iniziamo con la definizione di variabile aleatoria *stabile*.

Definizione 1.1.1. Una variabile aleatoria X è *stabile* se, dati X_1 e X_2 copie indipendenti di X e due qualsiasi costanti positive a e b, vale per una costante positiva c e un numero $d \in \mathbb{R}$ la seguente relazione:

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d. \tag{1.1}$$

La variabile aleatoria si dice invece *strettamente stabile* se vale (1.1) con $d = 0$ per una qualsiasi scelta di a e b. Infine una variabile aleatoria si dice *simmetricamente stabile* se è stabile ed è distribuita simmetricamente attorno allo 0.

Prima di procedere, è opportuno definire cosa si intenda per *variabile aleatoria*, cosa significhi il simbolo $\stackrel{d}{=}$ nel contesto della teoria probabilistica e infine cosa sia la *funzione caratteristica.*

Definizione 1.1.2. Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con Ω spazio campionario, $\mathcal{F}$ la σ-algebra e $\mathbb{P}$ la misura di probabilità (concetti che il lettore può approfondire su un qualsiasi testo di probabilità [5, cap. 1]), sia $H \subseteq \mathbb{R}$ misurabile e una funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$, indichiamo con

$$\{X \in H\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in H\} = X^{-1}(H)$$

la contro-immagine di H mediante X (intuitivamente $\{X \in H\}$ rappresenta l'insieme degli esiti ω, ossia, gli stati del fenomeno aleatorio tali che $X(\omega) \in H$). Una variabile aleatoria (abbreviato in v.a.) su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in $\mathbb{R}$ è una funzione

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

tale che $\{X \in H\} \in \mathcal{F}$ per ogni $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, con $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la cosiddetta σ-algebra di Borel, ovvero X è misurabile da $(\Omega, \mathcal{F})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

La precedente definizione è estendibile al caso $\mathbb{R}^d$ con $d \in \mathbb{N}$, tuttavia, siccome ci limiteremo alla trattazione di distribuzioni stabili univariate con variabile appartenente ad $\mathbb{R}$, è preferibile scriverla in questo caso particolare in cui lavoreremo.

poiché la definizione matematica di variabile aleatoria può risultare di non immediata comprensione, possiamo pensarla come una variabile casuale che assume determinati valori, ogni valore con una certa probabilità, dove quest'ultima è determinata da una certa legge, chiamata appunto *legge di probabilità*. Detto ciò, possiamo rivelare che il simbolo $\stackrel{d}{=}$ significhi uguaglianza in distribuzione, ovvero che le variabili aleatorie a sinistra e a destra del simbolo hanno la stessa legge di probabilità. In altre parole, se due v.a. X e Y sono uguali in distribuzione, allora la probabilità che X assuma un determinato valore è la stessa della probabilità che Y assuma lo stesso valore.

Riguardo la funzione caratteristica invece, scriviamone la definizione ed enunciamo alcune sue proprietà che incontreremo nel corso del capitolo.

Definizione 1.1.3. Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria (v.a.) sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La funzione $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$\phi_X(\eta) = \mathbb{E}[e^{i\eta X}] = \mathbb{E}[\cos(\eta X)] + i\mathbb{E}[\sin(\eta X)],$$

dove $\eta \in \mathbb{R}$, è detta funzione caratteristica della v.a. X. Indicheremo la funzione caratteristica con l'abbreviazione CHF.

Come prima la definizione è estendibile a $\mathbb{R}^d$ e in questo caso, invece di scrivere il prodotto tra η ed X, dovremmo utilizzare il prodotto scalare di questi ultimi $\langle \eta, X \rangle$ oppure $\eta \cdot X$, in quanto sia η che X apparterrebbero a $\mathbb{R}^d$ e dunque si può facilmente intuire che il prodotto della definizione sia semplicemente il prodotto scalare nel caso ad una dimensione.

Il simbolo $\mathbb{E}$ indica il *valore atteso* ed è definito nel seguente modo:

Definizione 1.1.4. In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, il valore atteso di una v.a. integrabile X è definito da

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

Non soffermandoci sulle condizioni necessarie e sul significato di v.a. "integrabile", scriviamo prima un esempio che chiarisce il concetto di valore atteso e successivamente un esempio di una funzione caratteristica, ponendo particolare attenzione sugli elementi probabilistici definiti precedentemente.

Esempio 1.1.5. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione discreta finita

$$X \sim \sum_{k=1}^{m} p_k \delta_{x_k},$$

ossia $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$ per $k = 1, \dots, m$, allora il valore atteso di X è

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{k=1}^{m} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{m} x_k p_k.$$

Possiamo vedere $\mathbb{E}[X]$ come una media dei valori di X pesata secondo la probabilità che tali valori siano assunti. Notiamo che in questo caso il valore atteso è definito dalla sommatoria poiché la distribuzione è discreta, ma nel caso generale una distribuzione potrebbe essere continua e dunque aver bisogno dell'integrale, in quanto se una distribuzione è continua ciò che si misura è la probabilità che la variabile aleatoria assumi i valori all'interno di un dato intervallo.

Esempio 1.1.6. Consideriamo una v.a. X distribuita uniformemente sull'intervallo chiuso $[-1, 1]$ ($X \sim \text{Unif}_{[-1,1]}$). Per scriverne la funzione caratteristica partiamo dalla definizione di quest'ultima e svolgiamo i seguenti passaggi:

1. La funzione caratteristica

$$\phi_X(\eta)$$

è data dalla formula:

$$\phi_X(\eta) = \mathbb{E}[e^{i\eta X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} f_X(x)\, dx$$

dove $f_X(x)$ è la funzione di densità di probabilità della variabile X.

2. Poiché X è uniformemente distribuita tra -1 e 1, la sua funzione di densità di probabilità $f_X(x)$ è costante all'interno dell'intervallo $[-1, 1]$ e zero altrove:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{per } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

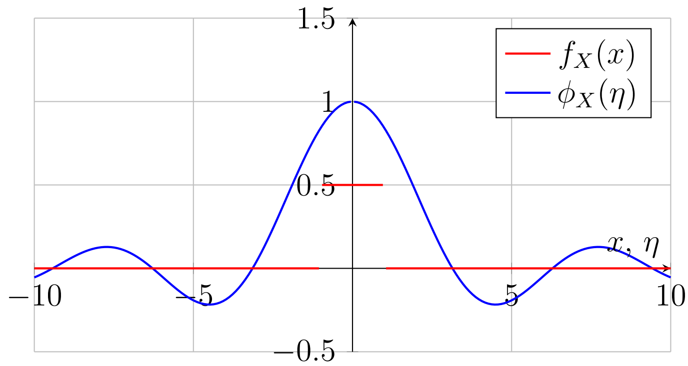


Figura 1.1: PDF (linea rossa) e funzione caratteristica (linea blu) di una variabile distribuita uniformemente tra -1 e 1.

3. Sostituendo la funzione di densità di probabilità nella formula della caratteristica e calcolando l'integrale, otteniamo:

$$\phi_X(\eta) = \int_{-1}^{1} e^{i\eta x} \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{i\eta x}\, dx$$

4. Per calcolare l'integrale, risolviamo:

$$\phi_X(\eta) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{i\eta x}}{i\eta} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\eta} - e^{-i\eta}}{i\eta} \right) = \frac{1}{2i\eta}(e^{i\eta} - e^{-i\eta}) = \frac{\sin(\eta)}{\eta}$$

La Fig. 1.1 mostra graficamente la densità della distribuzione di X e la corrispondente funzione caratteristica.

L'importanza della funzione caratteristica risiede nel fatto che esiste una relazione biunivoca tra questa e la distribuzione di probabilità che la definisce (vedi *Teorema di inversione* [12, pag. 149]). Questa relazione è un aspetto fondamentale della teoria della probabilità e della statistica, in quanto consente di derivare importanti proprietà e risultati attraverso l'uso delle funzioni caratteristiche, senza il bisogno di conoscere la distribuzione, fatto molto ricorrente nella realtà.

Inoltre la funzione caratteristica condensa tutte le informazioni rilevanti sulla distribuzione di una variabile casuale in una singola funzione matematica, rendendo l'analisi più efficiente.

Elenchiamo ora alcune proprietà della funzione caratteristica che ci saranno utili durante la trattazione:

1. Il momento n-esimo di una variabile casuale X è definito come l'aspettazione della potenza n-esima di X:

$$\mu_n = \mathbb{E}[X^n]$$

Quando esiste, il momento può essere calcolato utilizzando la funzione caratteristica $\phi_X(t)$ nel seguente modo:

$$\mu_n = i^{-n} \frac{d^n \phi_X(t)}{dt^n}\Big|_{t=0}$$

2. Sia X_n una successione di variabili casuali. Questa converge in distribuzione ad una variabile casuale X se converge puntualmente la successione delle funzioni caratteristiche corrispondenti $\phi_{X_n}(t)$ ad una certa funzione caratteristica $\phi_X(t)$, che di conseguenza si rivelerà essere la funzione caratteristica associata alla variabile aleatoria X. In simboli:

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t) = \phi_X(t)$$

3. Se X e Y sono due variabili casuali indipendenti, la funzione caratteristica della loro somma $Z = X + Y$ è il prodotto delle loro funzioni caratteristiche:

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$$

Quest'ultima proprietà vale anche con un qualsiasi numero di v.a. indipendenti (per maggiori informazioni vedere [12, cap. 3, sez. 5]).

Fatto questo breve ripasso su alcuni concetti fondamentali della teoria probabilistica, prima di affrontare nel dettaglio alcuni risultati sulle distribuzioni stabili, citiamone alcuni esempi noti.

Esempio 1.1.7. Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti gaussiane (ovvero distribuite secondo una distribuzione gaussiana), allora anche la loro combinazione linare sarà distribuita secondo una gaussiana. Supponiamo che queste variabili casuali abbiano medie $\mu_1, \ldots, \mu_n$ e varianze $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$, rispettivamente. Se consideriamo la combinazione lineare $Y = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$, dove $a_1, \ldots, a_n$ sono costanti, allora Y sarà distribuita a sua volta secondo una gaussiana di media data dalla combinazione lineare delle medie delle variabili X_i:

$$\mu_Y = a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n$$

e una varianza data dalla combinazione lineare delle varianze delle variabili X_i:

$$\sigma_Y^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2$$

Questa è una proprietà di notevole importanza per le v.a. gaussiane e per dimostrarla seguiamo i seguenti passaggi (limitandoci al caso della somma di due sole v.a.):

1. $N(\mu_1, \sigma_1^2)$: distribuzione normale con media μ_1 e varianza σ_1^2.

2. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$: distribuzione normale con media μ_2 e varianza σ_2^2.

La densità di distribuzione di una distribuzione normale è data da:

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Ora, consideriamo la somma di queste due distribuzioni normali indipendenti:

$$Y = X_1 + X_2$$

dove X_1 è una variabile casuale che segue $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e X_2 è una variabile casuale che segue $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Per le proprietà delle funzioni caratteristiche enunciate precedentemente, la funzione caratteristica di Y è il prodotto delle funzioni caratteristiche di X_1 e X_2:

$$\phi_Y(t) = \phi_{X_1}(t) \cdot \phi_{X_2}(t)$$

La funzione caratteristica della variabile casuale X_1 è data da:

$$\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_1}] = e^{it\mu_{X_1} - \frac{1}{2}\sigma_{X_1}^2 t^2}$$

Analogamente per X_2:

$$\phi_{X_2}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_2}] = e^{it\mu_{X_2} - \frac{1}{2}\sigma_{X_2}^2 t^2}$$

Di conseguenza la funzione caratteristica di Y sarà:

$$\begin{aligned}\phi_Y(t) &= \left(e^{it\mu_{X_1} - \frac{1}{2}\sigma_{X_1}^2 t^2}\right) \cdot \left(e^{it\mu_{X_2} - \frac{1}{2}\sigma_{X_2}^2 t^2}\right) \\ &= e^{it(\mu_{X_1}+\mu_{X_2}) - \frac{1}{2}(\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2)t^2}\end{aligned}$$

Osserviamo che la funzione caratteristica di Y è ancora una funzione esponenziale della forma $e^{it\mu_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2 t^2}$, dove $\mu_Y = \mu_{X_1} + \mu_{X_2}$ e $\sigma_Y^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2$ e dunque ha la stessa forma della funzione caratteristica di una variabile gaussiana con media μ_Y e varianza σ_Y^2. Ciò completa la dimostrazione.

In questo esempio è evidente l'importanza che ricopre in probabilità la funzione caratteristica, permettendo di evitare conti molto più lunghi e complessi. Inoltre questa proprietà appena dimostrata ci permette di affermare che le distribuzioni gaussiane sono un tipo di distribuzioni stabili, perché se al posto di considerare due v.a. indipendenti distribuite secondo due gaussiane differenti tra loro prendessimo due copie di una stessa v.a. X il risultato non cambierebbe e, anzi, soddisferemmo la definizione di distribuzione stabile.

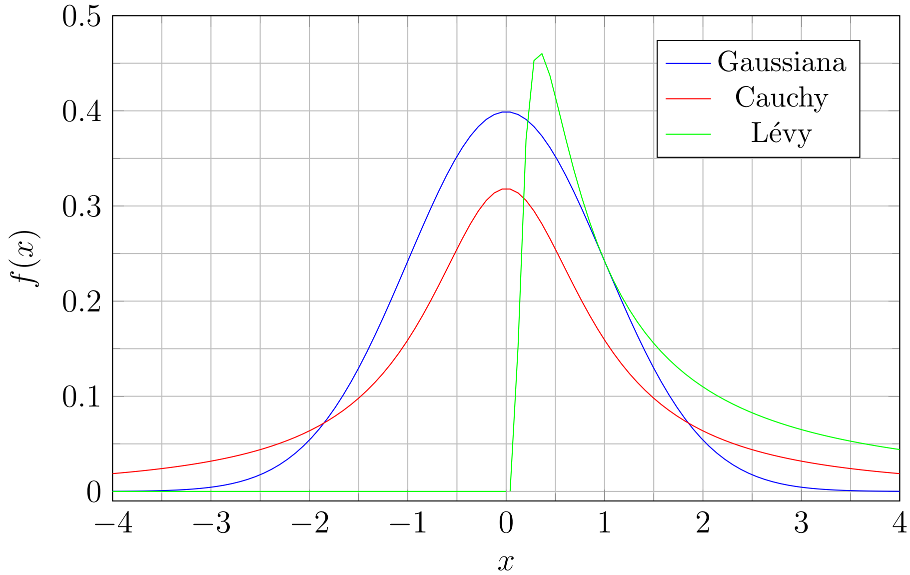


Figura 1.2: In blu, in rosso e in verde rispettivamente le PDF di $N(0{,}1)$, Cauchy(1,0) e Lévy(1,0).

Esempio 1.1.8. Senza trattare la dimostrazione, la distribuzione di Cauchy è un altro esempio famoso di distribuzione stabile. Si indica con $X \sim \text{Cauchy}(\gamma,\ \delta)$ ed è caratterizzata dalla seguente densità di distribuzione:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2}$$

dove γ e δ sono parametri di cui tratteremo nella prossima sezione.

Esempio 1.1.9. L'ultimo esempio riguarda la distribuzione di Lévy, che si indica con $X \sim \text{Lévy}(\gamma,\ \delta)$ e ha una densità di distribuzione del tipo:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\frac{1}{(x-\delta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-\delta)}\right), \quad \delta < x < \infty.$$

La Fig. 1.2 mostra graficamente queste funzioni, mentre la Tab. 1.1 confronta le probabilità delle code nelle tre distribuzioni.

Soffermandoci in particolare sulla figura, notiamo che la distribuzione gaussiana e quella di Cauchy sono simmetriche e a forma di campana. Al contrario, la distribuzione di Lévy è fortemente asimmetrica, tutta concentrata sulle x positive. Inoltre, essendo le probabilità alle code per la distribuzione di Cauchy e di Lévy maggiori di quella della distribuzione normale (visibile qualitativamente dalla Fig. 1.2 e quantitativamente dalla Tab. 1.1), le prime due sono considerate distribuzioni a coda pesante, considerando la

c	$\mathbb{P}$(X > c)		
	Normal	**Cauchy**	**Lévy**
0	0.5000	0.5000	1.0000
1	0.1587	0.2500	0.6827
2	0.0228	0.1476	0.5205
3	0.001347	0.1024	0.4363
4	0.00003167	0.0780	0.3829
5	0.0000002866	0.0628	0.3453

Tabella 1.1: Confronto dei valori delle probabilità per le tre distribuzioni considerate in Fig. 1.2 [11, pag. 4].

semplice definizione che una distribuzione è a coda pesante se la probabilità di osservare eventi estremamente rari è maggiore rispetto a quello che ci si aspetterebbe da una distribuzione gaussiana. Dunque si evince che le distribuzioni stabili possono essere diverse tra loro, a seconda della loro simmetria e della pesantezza delle loro code.

Sono note anche altre definizioni di distribuzione stabile, di cui è possibile dimostrare l'equivalenza.

Definizione 1.1.10. Una v.a. non degenere X è *stabile* se e solo se per ogni $n > 1$, esistono delle costanti $c_n > 0$ e $d_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$X_1 + \ldots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n,$$

dove $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti, identiche copie di X. X si dice *strettamente stabile* se e solo se $d_n = 0$ per ogni n.

Definizione 1.1.11. Una v.a. X è *stabile* se e solo se $X \stackrel{d}{=} \gamma Z + \delta$, dove $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $\gamma \neq 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ e Z è una v.a. con la seguente funzione caratteristica:

$$\Phi(u) = \mathbb{E}[\exp(iuZ)] = \begin{cases} \exp\left(-|u|^\alpha \left[1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}(\text{sign } u)\right]\right) & \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-|u| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi}(\text{sign } u) \log |u|\right]\right) & \alpha = 1, \end{cases} \tag{1.2}$$

dove $u \in \mathbb{R}$ e sign u è definita nel seguente modo

$$\text{sign } u = \begin{cases} -1 & \text{se } u < 0 \\ 0 & \text{se } u = 0 \\ 1 & \text{se } u > 0 \end{cases}$$

Quando $\beta = 0$ e $\delta = 0$, X è simmetrica attorno allo 0 e la sua funzione caratteristica è semplicemente:

$$\phi(u) = e^{-\gamma^\alpha |u|^\alpha}.$$

Da questa ultima definizione notiamo che una distribuzione stabile è caratterizzata da quattro parametri:

- $\alpha \in (0, 2]$: parametro di stabilità. Controlla il grado di pesantezza delle code della distribuzione;
- $\beta \in [-1, 1]$: parametro di asimmetria. Per $\beta = 0$ si ha una distribuzione simmetrica, per $\beta = 1$ fortemente asimmetrica verso destra, per $\beta = -1$ fortemente asimettrica verso sinistra;
- $\gamma \geq 0$: parametro di scala;
- $\delta \in \mathbb{R}$: parametro di posizione.

Terminiamo la sezione indicando la notazione che viene utilizzata per affermare che una v.a. X è distribuita stabilmente:

$$X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; k)$$

dove i primi quattro parametri sono gli stessi appena discussi, mentre k è un numero naturale che ha il semplice compito di chiarire quale parametrizzazione è stata scelta (nel caso in cui $\gamma = 1$ e $\delta = 0$, ovvero la v.a. stabile è normalizzata e centrata, si usa la notazione $\mathbf{S}(\alpha, \beta, k)$). Infatti, ogni parametrizzazione ha i propri vantaggi ed è dunque utile scegliere quella opportuna a seconda del contesto e dei risultati che si vogliono ottenere.

Non andremo ad approfondire ogni singola parametrizzazione, anzi ci limiteremo a questa singola notazione, visto che le affermazioni che discuteremo saranno idonee ad ognuna di esse (salvo eccezioni trattate a parte). In ogni caso per i più curiosi e interessati è possibile studiarle dal testo di Nolan [11, cap. 3, sez. 5].

1.2 Proprietà principali delle distribuzioni stabili

Riportiamo in questa sezione alcuni dei risultati chiave rigurdanti le distribuzioni stabili.

Lemma 1.2.1. *Se la Def. 1.1.1 vale, allora anche la Def. 1.1.10 vale per qualche $c_n > 0$ e $d_n \in \mathbb{R}$. Se X è simmetrica o strettamente stabile, allora $d_n = 0$ per tutti gli $n > 1$.*

Dimostrazione. Scriviamo $c = c(a, b)$ e $d = d(a, b)$ per evidenziare la dipendenza di c e d da a e b. Se X è stabile, allora la Def. 1.1.1 mostra che $X_1 + X_2 \stackrel{d}{=} c(1, 1)X + d(1, 1)$, quindi il risultato è vero per $c_2 = c(1,1)$ e $d_2 = d(1,1)$. Dimostriamo ora per induzione: assumendo che il risultato sia vero per $n-1$, allora si ha:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1} + X_n \stackrel{d}{=} (c_{n-1}X + dn - 1) + X_n =$$

$$(c_{n-1}X + X_n) + d_{n-1} =$$
$$c(c_{n-1}, 1)X + (d(c_{n-1}, 1) + d_{n-1}).$$

Quindi il risultato è vero con $c_n = c(c_{n-1}, 1)$ e $d_n = d(c_{n-1}, 1) + d_{n-1}$.

Se X è simmetricamente stabile, allora è necessariamente strettamente stabile. Infatti se esistesse un $d(a,b) \neq 0$ per una coppia a, b, allora la parte a sinistra della Def. 1.1.1 sarebbe simmetrica, mentre quella a destra no. Inoltre se X è strettamente stabile, allora per definizione $d(a,b) = 0$ per ogni a, b e dunque $d_n = 0$ per ogni n. □

Lemma 1.2.2. *Sia X una v.a. simmetrica non degenere e siano $X_1, \ldots, X_n$ copie i.i.d. di X che soddisfano*
$$X_1 + \ldots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X.$$
Allora esiste un $\alpha \in (0,2]$, con $k > 0$ tale che $c_n = n^{1/\alpha}$ e la funzione caratteristica di X risulta essere
$$\phi(u) = \exp(-k|u|^\alpha).$$

Lemma 1.2.3. *Se una v.a. non degenere X soddisfa la Def. 1.1.10, allora esiste un $\alpha \in (0,2]$ tale che $c_n = n^{1/\alpha}$ per tutti gli $n > 1$. Se $\alpha \neq 1$, allora esistono delle costanti $k_1 > 0$ e $k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ tali che $d_n = (n - n^{1/\alpha})k_3$ e X ha la seguente funzione caratteristica*

$$\phi(u) = \exp(-[k_1 + i(sign\ u)k_2]|u|^\alpha + ik_3 u).$$

Lemma 1.2.4. *Se una v.a. non degenere X soddisfa la Def. 1.1.10 con $c_n = n$, allora esistono delle costanti $k_1 > 0$ e $k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ tali che $d_n = k_2 n \log n$ e la funzione caratteristica di X è*

$$\phi(u) = \exp(-k_1|u| - ik_2 u \log|u| + ik_3 u).$$

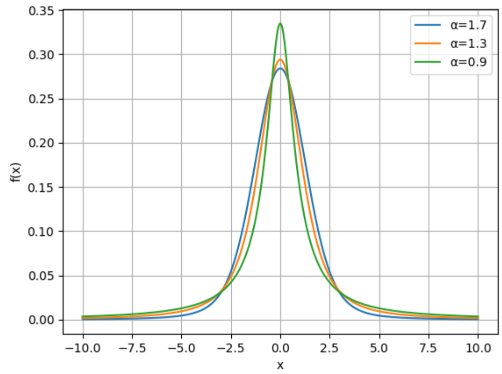
Non tratteremo le dimostrazioni di questi lemmi (reperibili in [11]).

Proposizione 1.2.5. *Per qualsiasi valori di α e β, con $Z \sim \boldsymbol{S}(\alpha, \beta; k)$ si ha*

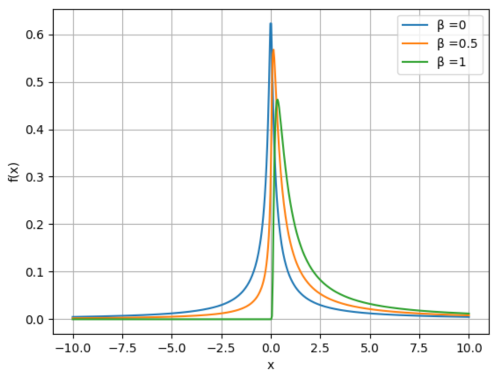
$$Z(\alpha, -\beta) \stackrel{d}{=} -Z(\alpha, \beta).$$

Questa viene chiamata *proprietà di riflessione* e comporta anche che la densità di distribuzione e la funzione cumulativa di Z soddisfino le seguenti relazioni

$$f(x|\alpha, \beta; k) = f(-x|\alpha, -\beta; k)$$



(a)



(b)

Figura 1.3: Distribuzioni stabili al variare di α con $\beta = 0$ (Figura 1.3a) e al variare di β con $\alpha = 0.5$ (Figura 1.3b).

$$F(x|\alpha, \beta; k) = 1 - F(\alpha, -\beta; k).$$

Sappiamo già che quando $\beta = 0$ la distribuzione stabile è simmetrica e questa proposizione lo ribadisce. Infatti si ha:

$$f(x|\alpha, 0; k) = f(-x|\alpha, 0; k).$$

Ritornando agli esempi iniziali, si può dimostrare che la distribuzione normale, di Cauchy e di Lévy sono caratterizzate rispettivamente dai parametri $(\alpha = 2, \beta = 0)$, $(\alpha = 1, \beta = 0)$ e $(\alpha = 1/2, \beta = 1)$. Inoltre era stato osservato come le code delle distribuzioni di Cauchy e di Lévy fossero più pesanti rispetto a quelle della gaussiana ed effettivamente risulta che al decrescere del parametro α (con $\beta = 0$) le distribuzioni stabili presentano code più popolate, oltre al fatto che il picco cresce e la distribuzione si restringe attorno a questo. Per completezza notiamo che quando $\alpha \to 2$, il termine $\tan \frac{\pi\alpha}{2} \to 0$, presente nella Def. 1.1.11, e dunque la funzione caratteristica tende ad essere reale e quindi sempre simmetrica, con il valore del parametro β che diventa ininfluente. Al contrario quando $\alpha \neq 2$ e nemmeno ci tende, β è assolutamente rilevante ai fini della forma della distribuzione. In particolare se $\beta > 0$ si avrà una distribuzione spostata verso destra, ovvero, matematicamente: $\mathbb{P}(X > x) > \mathbb{P}(X < -x)$ per $x > 0$ grandi. Per la proprietà della riflessione, nel caso in cui $\beta < 0$ avremo una distribuzione più spostata a sinistra. Nelle Fig. 1.3a e 1.3b è possibile osservare graficamente il comportamento delle distribuzioni stabili al variare di α e di β.

1.3 Dominio di attrazione

Per i prossimi risultati cambiamo leggermente notazione: indichiamo con $S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, con $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. con funzione cumulativa F e supponiamo che, per qualche costanti $B_n > 0$ e $A_n \in \mathbb{R}$, la successione $B_n^{-1} S_n - A_n$ converge ad una v.a. Y che ha una distribuzione limite non degenere. Matematicamente scriviamo:

$$\frac{S_n}{B_n} - A_n \xrightarrow{d} Y$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{B_n} - A_n \leq x\right) = G(x) \tag{1.3}$$

per tutti i punti di continuità x di G, che è la funzione cumulativa della v.a. Y.

Riformuliamo la relazione (1.3) in termini delle funzioni caratteristiche delle variabili. Dunque definiamo per $s \in \mathbb{R}$

$$\phi(s) := \mathbb{E}[e^{isX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} dF(x)$$

$$\psi(s) := \mathbb{E}[e^{isY}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} dG(x).$$

Tuttavia ci risulterà più conveniente riscriverle nel seguente modo

$$\lambda(t) := \phi(1/t)$$

$$g(t) := \psi(1/t)$$

per $t \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\}$. Detto ciò dimostriamo la seguente relazione, che per il *teorema di continuità di Lévy* [13, cap. 18], è equivalente alla (1.3):

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{iA_n}{t}} \lambda^n(B_n t) = g(t),\ t \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\} \tag{1.4}$$

uniformemente nell'intorno di $\pm\infty$.

Dimostrazione. Partiamo dallo scrivere esplicitamente $g(t)$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{\frac{i}{t}\left(\frac{S_n}{B_n} - A_n\right)}\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{\frac{i}{t}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{B_n} - A_n\right)}\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\frac{iA_n}{t}} e^{\left(\frac{i}{t}\frac{X_1+\ldots+X_n}{B_n}\right)}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{iA_n}{t}} \mathbb{E}\left[e^{\left(\frac{i}{t}\frac{X_1+\ldots+X_n}{B_n}\right)}\right] = lim_{n\to\infty} e^{-\frac{iA_n}{t}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{\left(\frac{i}{t}\frac{X_i}{B_n}\right)}\right]$$

Utilizzando la definizione di $\lambda(t)$ e indicando con λ_i la funzione corrispondente alla v.a. X_i scriviamo:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{iA_n}{t}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{\left(\frac{i}{t}\frac{X_i}{B_n}\right)}\right] = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{iA_n}{t}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(B_n t)$$

Infine, poiché le v.a. X sono indipendenti e identicamente distribuite:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{iA_n}{t}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i\left(B_n t\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda^n\left(B_n t\right) e^{-\frac{iA_n}{t}}.$$

□

Per completezza, enunciamo il teorema di Lévy appena citato.

Teorema 1.3.1. *Data una sequenza di variabili casuali $\{X_n\}$ con funzioni caratteristiche ϕ_n, se $\phi_n(t) \to \phi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, allora esiste una variabile casuale X tale che X_n converge in distribuzione a X, dove la funzione caratteristica di X è $\phi(t)$.*

Prima di giungere al risultato principale di questa sezione, definiamo cosa sia una funzione che varia regolarmente.

Definizione 1.3.2. Una funzione positiva misurabile f (per il concetto di misurabile vedere [3, cap. 5]) è *regolarmente variante* per $t \to \infty$ se esiste una costante $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^{\gamma} \quad \text{per tutte le } x > 0. \tag{1.5}$$

Per dire che una funzione f è regolarmente variante di ordine γ si utilizza la notazione $f \in RV_{\gamma}$. Inoltre una funzione appartenente a RV_0 si dice *lentamente variante*.

Queste funzioni, che descrivono un comportamento asintotico, sono utilizzate per caratterizzare il modo in cui le probabilità decadono verso gli estremi delle distribuzioni e, nel contesto delle distribuzioni stabili, sono utili per approssimarne le code, fornendo così uno strumento matematico per comprenderle e analizzarle.

Enunciamo a tal proposito la seguente proposizione.

Proposizione 1.3.3. Se vale la relazione (1.3), allora $|g(t)|^2 = e^{-c|t|^{-\alpha}}$ per un qualche $\alpha \in (0, 2]$ e $c > 0$. Inoltre

$$\lim_{t\to\infty} \frac{-\log|\lambda(tx)|}{-\log|\lambda(t)|} = x^{-\alpha} \quad \text{per } x > 0, \tag{1.6}$$

cioè $-\log|\lambda|$ è regolarmente variante con indice $-\alpha$.

Possiamo ora definire con questa nuova notazione le distribuzioni stabili e il loro dominio di attrazione.

Definizione 1.3.4. Una qualsiasi funzione di distribuzione G che ha una funzione caratteristica g che soddisfa

$$|g(t)|^2 = e^{-c|t|^{-\alpha}} \quad \text{per un qualche } \alpha \in (0, 2] \text{ e } c > 0 \tag{1.7}$$

è chiamata *distribuzione stabile* di indice α o *distribuzione α-stabile*.

Definizione 1.3.5. L'insieme delle funzioni di distribuzione F per le quali vale la relazione (1.3) con una distribuzione limite G che soddisfa la relazione (1.7) è chiamato *dominio di attrazione* α-stabile e si scrive $F \in D_\alpha$.

Definizione 1.3.6. Un *dominio di attrazione* α-stabile si dice *normale* quando le costanti di riscalamento a_n possono essere scelte nel seguente modo:

$$a_n = an^{-1/\alpha} \tag{1.8}$$

per un qualche $a > 0$.

1.4 Teorema Centrale del Limite Generalizzato

Per completare i risultati della sezione precedente è doveroso fornire l'enunciazione e la dimostrazione del *Teorema Centrale del Limite Generalizzato*.

Innanzitutto partiamo da quello classico, dal *Teorema Centrale del Limite*, il quale afferma che, sotto certe condizioni, la somma di un gran numero di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite tende ad una distribuzione normale indipendentemente dalla distribuzione delle singole variabili casuali.

Teorema 1.4.1. *Sia $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una sequenza di v.a. i.i.d. con media μ e varianza σ^2. Allora, quando n tende all'infinito, la distribuzione della somma $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ si avvicina a una distribuzione normale con media $n\mu$ e varianza $n\sigma^2$. In simboli:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right) = \Phi(x)$$

dove $\Phi(x)$ rappresenta la funzione cumulativa della distribuzione normale standard. Equivalentemente possiamo scrivere, indicando con $\overline{X_n} = S_n/n$

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(0, 1) \quad \textit{quando } n \to \infty.$$

Passiamo ora a quello generalizzato, che stabilisce una relazione tra le distribuzioni stabili e le somme di variabili casuali indipendenti, affermando che le prime possono essere rappresentate attraverso le seconde nel momento in cui presentano caratteristiche specifiche. La possibilità di rappresentare distribuzioni stabili come somma di variabili casuali semplifica l'analisi e l'interpretazione dei dati e delle distribuzioni che presentano comportamenti estremi e code pesanti.

Teorema 1.4.2. *Una variabile casuale non degenere Z è α-stabile per un qualche $0 < \alpha \leq 2$ se e solo se esiste una sequenza di v.a. i.i.d. $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e costanti $B_n > 0$, $A_n \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{B_n} - A_n \xrightarrow{d} Z.$$

Prima di scrivere la dimostrazione, citiamo un lemma necessario per quest'ultima (che non verrà verificato).

Lemma 1.4.3. *Sia $\{X_n\}$ una qualsiasi sequenza di v.a. e supponiamo che esistano successioni $\{a_n\}$, con $a_n > 0$ $\forall n$, e $\{b_n\}$ tali che*

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad e \quad a_n X_n + b_n \xrightarrow{d} Y,$$

dove né X né Y sono degeneri. Allora $a_n \to a > 0$, $b_n \to b$ e $aX + b \stackrel{d}{=} Y$. In altre parole, X e Y sono dello stesso tipo.

Dimostrazione. Sia Z una variabile aleatoria non degenere e supponiamo che esista una sequenza di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ tale che

$$\frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{B_n} - A_n \xrightarrow{d} Z, \tag{1.9}$$

dove $B_n > 0$ e $A_n \in \mathbb{R}$.
Fissato un $n > 1$, definiamo $Y_m = \frac{S_{nm}}{B_{nm}} - A_{nm}$ per $m = 1, 2, 3, \ldots$. Da (1.9) otteniamo $Y_m \xrightarrow{d} Z$.
Dividiamo S_{nm} in n termini $T_i(m)$ come segue:

$$T_1(m) = X_1 + X_{n+1} + X_{2n+1} + \ldots + X_{(m-1)n+1}$$

$$T_2(m) = X_2 + X_{n+2} + X_{2n+2} + \ldots + X_{(m-1)n+2}$$

$$\vdots$$

$$T_n(m) = X_n + X_{2n} + X_{3n} + \ldots + X_{mn}$$

Ora consideriamo $B'_m(n) = B'_m = \frac{B_m}{B_{nm}}$ e $A'_m(n) = A'_m = \frac{B_m A_{nm}}{B_{nm}} - nA_m$ e applicando dell'algebra e la relazione (1.9), otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{Y_m}{B'_m} + A'_m &= \frac{B_{nm}}{B_m}\left(\frac{S_{nm}}{B_{nm}} - A_{nm}\right) + \frac{B_{nm}}{B_m}A_{nm} - nA_m \\
&= \frac{S_{nm}}{B_m} - nA_m \\
&= \left(\frac{T_1(m)}{B_m} - A_m\right) + \left(\frac{T_2(m)}{B_m} - A_m\right) + \ldots + \left(\frac{T_n(m)}{B_m} - A_m\right) \\
&\xrightarrow{d} Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n,
\end{aligned}$$

dove $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sono copie i.i.d. di Z.
Per il lemma precedente, per $m \to \infty$ deduciamo che $B'_m(n) \to C_n > 0$ e $A'_m(n) \to D_n$ e quindi $\frac{(Z_1+Z_2+\ldots+Z_n)}{C_n} + D_n \overset{d}{=} Z$. Dal momento che n era arbitrario, otteniamo $Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n \overset{d}{=} C_n Z - C_n D_n$ per ogni $n > 1$. Quindi, per la Definizione 1.1.10, Z è stabile.
La dimostrazione dell'implicazione contraria la tralasciamo.

□

Notiamo che a seconda delle costanti che scegliamo (con determinate caratteristiche) la successione può convergere ad una v.a. α-stabile diversa dalla precendente (in termini di centramento e riscalamento), tuttavia con stesso dominio di attrazione in quanto

$$D_\alpha(Z) = D_\alpha(aZ + b)$$

per un qualsiasi $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.
Verifichiamo dunque che le costanti a_n e b_n non sono uniche, ma sono definite a meno di certi termini aggiuntivi che possono far variare la v.a. α-stabile come sopra.
Prendiamo per comodità di calcolo la solita successione nella forma

$$\frac{S_n}{B'_n} - A'_n \xrightarrow{d} Z', \tag{1.10}$$

e consideriamo il caso in cui il valore di aspettazione di X sia definito e $\alpha > 1$, in modo da aver finito il primo momento della v.a. Z'. Definiamo $B'_n = cB_n$, dove $c > 0$ e poiché sappiamo che Z' è una v.a. α-stabile, allora conosciamo l'andamento di B'_n, visto che

$$B_n = l(n)n^{1/\alpha},$$

con $l(n)$ funzione *lentamente variante*.
Scriviamo invece A'_n come:

$$A'_n = A_n - c_n,$$

dove $A_n = n\frac{\mathbb{E}(X)}{B'_n}$ e c_n è per ora una successione di valori definiti con limite finito e reale. Calcoliamo il valore atteso della relazione (1.10):

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{B'_n} - A'_n\right] \xrightarrow{d} \mathbb{E}[Z']$$

Concentriamoci sulla parte a sinistra, poiché di quella a destra sappiamo già per le ipotesi date che è un numero reale e finito. Perciò:

$$\frac{\mathbb{E}[S_n]}{B'_n} - A'_n = \frac{n\mathbb{E}[X]}{B'_n} - A'_n =$$

$$= \frac{n\mathbb{E}[X]}{c\,l(n)n^{1/\alpha}} - \frac{n\mathbb{E}[X]}{c\,l(n)n^{1/\alpha}} + c_n$$

e dunque otteniamo che

$$\mathbb{E}[Z'] \sim c_n.$$

Possiamo osservare questi aspetti:

- se $\alpha > 1$ è necessaria la presenza di A_n per compensare il termine $\frac{n^{1-1/\alpha}\mathbb{E}[X]}{c\,l(x)}$ poiché quest'ultimo diverge quando $n \to \infty$;

- c_n non può né tendere ad infinito e nemmeno non convergere poiché $\mathbb{E}[Z']$ è un valore finito e unico;

- c_n può essere un qualsiasi numero reale oppure essere scritta in funzione di una qualsiasi successione d_n che abbia ordine di grandezza inferiore ad B'_n e in questo caso scriveremo $c_n = \frac{d_n}{B'_n}$ in modo tale che ad $n \to \infty$ il suo contributo si annulli.

- se $A'_n = A_n$ avremmo valore di aspettazione nullo della v.a. Z ed è dunque evidente che la presenza di c_n possa modificarla e lo stesso effetto ha la costante moltiplicativa c che potrebbe riscalare Z.

Dunque una diversa scelta delle costanti B_n e A_n, con le caratteristiche citate sopra, porta ad una variazione di Z, tuttavia, poiché non vengono modificati i parametri principali di una v.a. α-stabile, ovvero α e β, il dominio di attrazione rimane lo stesso.

Per concludere il capitolo enunciamo due ulteriori teoremi che stabiliscono delle condizioni per cui la somma di v.a. i.i.d. (opportunatamente riscalata e traslata) converge ad una v.a. Z α-stabile (per la dimostrazione vedere rispettivamente [4, pag. 175] e [4, sez. 35]).

Teorema 1.4.4. *Siano $X_1, X_2, \ldots$ copie i.i.d. di una v.a. X, dove X ha una funzione caratteristica $\phi_X(u)$ e soddisfa queste condizioni sulla coda:*

$$x^\alpha F(-x) \to c^- \text{ e } x^\alpha(1 - F(x)) \to c^+ \text{ quando } x \to \infty, \tag{1.11}$$

dove $c^- \geq 0$, $c^+ \geq 0$ e $0 < c^- + c^+ < \infty$.

Se $0 < \alpha < 2$ e $\alpha \neq 1$, mettendo:

$$\beta = \frac{c^+ - c^-}{c^+ + c^-}$$

$$B_n = \left(\frac{2\Gamma(\alpha) sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\pi(c^+ + c^-)} \right)^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}$$

$$A_n = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{n\mathbb{E}[X]}{B_n} & 1 < \alpha < 2 \end{cases}$$

allora $\frac{(X_1+X_2+\ldots+X_n)}{B_n} - A_n \xrightarrow{d} Z \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, 1, 0; 1)$.

Se $\alpha \geq 2$, mettendo:

$$B_n = \begin{cases} ((c^+ + c^-)n \log n)^{1/2} & \alpha = 2 \\ (nVar(X)/2)^{1/2} & \alpha > 2 \end{cases}$$

$$A_n = \frac{n\mathbb{E}[X]}{B_n}$$

allora $\frac{(X_1+X_2+\ldots+X_n)}{B_n} - A_n \xrightarrow{d} Z \sim \mathbf{S}(2, 0, 1, 0; 1) = N(0, 1/2)$.

Teorema 1.4.5. *Sia X una v.a. con funzione di distribuzione F e sia $0 < \alpha < 2$. Si definisce per $x > 0$,*

$$L(-x) = x^\alpha F(-x) \quad e \quad L(x) = x^\alpha(1 - F(x)).$$

Allora X appartiene al dominio di attrazione di una v.a. α-stabile $Z(\alpha, \beta)$ se e solo se esistono delle costanti $c^- \geq 0$ e $c^+ \geq 0$ tali che

$$c^- + c^+ > 0$$

$$\beta = \frac{c^+ - c^-}{c^+ + c^-}$$

$$c^+ > 0 \Rightarrow L(x) \text{ è lentamente variante}$$

$$c^- > 0 \Rightarrow L(-x) \text{ è lentamente variante}$$

$$\frac{L(x)}{L(x) + L(-x)} = \frac{\mathbb{P}(X > x)}{\mathbb{P}(|X| > x)} \to \frac{c^+}{c^+ + c^-} \quad \text{quando} \quad x \to \infty.$$

È possibile mostrare che se una v.a. soddisfa le condizioni (1.11), allora appartiene al dominio di attrazione normale della v.a. α-stabile a cui la somma riscalata e traslata tende.

Capitolo 2

Confronto tra somme ed estremi di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite

In questo capitolo saranno enunciati tre teoremi che analizzano il comportamento delle code nel caso della distribuzione di una somma di v.a. i.i.d. a coda lunga. In particolare vedremo che la probabilità della coda della distribuzione della somma opportunatamente rinormalizzata è la stessa di quella del sommando più grande, con la stessa normalizzazione. In pratica, ciò significa che in un processo stocastico, quando la quantità rilevante è la somma di variabili, il meccanismo che porta a eventi rari non è dovuto ad una serie di piccole deviazioni tutte nella stessa direzione, ma da un salto, il più grande tra tutti, che fornisce il contributo principale alla rara grande fluttuazione. La sua importanza deriva dal fatto che può essere utilizzato come guida affidabile per stimare il rischio e le probabilità di eventi rari in una vasta gamma di processi complessi che presentano distribuzioni a code pesanti e per il quale il *Teorema Centrale del Limite Generalizzato* non risulta utile, poichè questo prevede la forma della distribuzione solo per la parte centrale. Processi stocastici in cui alcuni eventi possono annullare o stravolgere tutta la statistica precedente possono essere studiati più agevolmente conoscendo questo principio, conosciuto come *principio del grande salto.*

2.1 Teoremi

Iniziamo elencando quali saranno le variabili che verranno utilizzate e quali caratteristiche presentano.
Sia $\{X_1, \dots, X_n\}$ una sequenza di copie i.i.d. di una v.a. X, definiamo $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $Z_n = S_n B_n^{-1} - A_n$ (somma normalizzata e centrata) e $M_n = \max_{1 \le i \le n} |X_i|$. Ciò che andremo a studiare sarà $\mathbb{P}(Z_n > x_n)$, con $\{x_n\}$ una sequenza che tende ad infinito

quando $n \to \infty$, cioè affronteremo la probabilità di eventi rari o estremi.
Supponiamo che la nostra sequenza di v.a. i.i.d. appartenga al dominio di attrazione di una certa v.a. α-stabile Z con la sequente funzione caratteristica:

$$\exp\left\{-a|t|^\alpha \left(1 + i\frac{t}{|t|}\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right\},$$

con $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, $a > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ e indichiamo con F la sua funzione di distribuzione. Se $\alpha > 1$ supponiamo che la v.a. X abbia l'ulteriore proprietà che $\mathbb{E}[X] = 0$ e scriveremo dunque $Z_n = B_n^{-1}S_n$, definendo $F_n(u) = \mathbb{P}(Z_n \leq u)$ e ponendoci dunque nel caso in cui $Z_n \to Z$ e $F_n \to F$ per $n \to \infty$, in modo da stimare (non univocamente) la successione $\{B_n\}$.
Date le condizioni scritte sopra e per il Teorema 1.4.5., possiamo scrivere per $x > 0$,

$$\mathbb{P}(X \leq -x) = \frac{L_1(x)}{x^\alpha},$$

$$\mathbb{P}(X > x) = \frac{L(x)}{x^\alpha},$$

dove $L_1(x)$ e $L(x)$ sono delle funzioni lentamente varianti con la proprietà che

$$\frac{L_1(x)}{L(x)} \to \frac{c_1}{c_2} \quad \textit{quando} \quad x \to \infty.$$

Inoltre $L(x)$ e la sequenza di riscalamento B_n sono legati in modo che

$$\frac{nL(B_n)}{B_n^\alpha} \to c_2 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

Infine indichiamo $L_1(x) + L(x) = M(x)$ (è facilmente verificabile che è una funzione lentamente variante) in modo tale che $M(x) \sim \left(1 + \frac{c_1}{c_2}\right) L(x)$ quando $x \to \infty$ e

$$q(x) = \mathbb{P}(X \leq -x) + \mathbb{P}(X > x) = \frac{M(x)}{x^\alpha}.$$

Possiamo ora enunciare il primo teorema, restringendoci alla coda destra (evidente che il risultato corrispondente può essere esteso anche alla coda sinistra).

Teorema 2.1.1. *Nelle ipotesi e con le notazioni precedenti, sia $\{x_n\}$ una successione con $x_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Allora,*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{x_n^\alpha L(B_n)}{L(x_n B_n)} \mathbb{P}(S_n > x_n B_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_n^\alpha L(B_n)}{L(x_n B_n)} \mathbb{P}(S_n > x_n B_n) < \infty.$$

Per la dimostrazione di questo risultato vedere [7].

Per il secondo teorema, che altro non è che un miglioramento del precedente sotto certe restrizioni, aggiungiamo la condizione che la sequenza x_n, oltre a tendere all'infinito quando $n \to \infty$, sia tale che $x_n^{-1} S_n \xrightarrow{P} 0$, dove "$P$" sta per convergenza in probabilità, di cui viene fornita la definizione.

Definizione 2.1.2. Sia $\{X_n\}$ una sequenza di v.a. e sia X la v.a. limite.
Allora $X_n \xrightarrow{P} X$ se $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

Inoltre considereremo v.a. che, come prima, non appartengono al dominio di attrazione di una v.a. normale, per le quali vale dunque (guardare [10])

$$\liminf_{u\to\infty} \left[\frac{u^2 \mathbb{P}(|X| > u)}{\int_{|x|\le u} x^2 dF(x)} \right] > 0, \tag{2.1}$$

e che nel caso $\alpha > 1$ presentano la seguente restrizione aggiuntiva

$$\liminf_{n\to\infty} \left[\frac{\mathbb{P}(|X| > \alpha x_n)}{\mathbb{P}(|X| > x_n)} \right] > 0. \tag{2.2}$$

Citiamo ora un lemma che risulterà utile per la dimostrazione del prossimo teorema (trattato in [9]), la cui enunciazione seguirà subito dopo.

Lemma 2.1.3. *Se $\{y_n\}$ è una sequenza monotona di numeri positivi tale che $y_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, allora $y_n^{-1} S_n \xrightarrow{P} 0$ se e solo se $\forall \epsilon > 0$,*

- *$n\mathbb{P}(|X| > \epsilon y_n) \to 0$ quando $n \to \infty$,*
- *$n y_n^{-2} \int_{|x|\le y_n} x^2 dF(x) \to 0$ quando $n \to \infty$,*
- *$n y_n^{-1} \int_{|x|\le y_n} x dF(x) \to 0$ quando $n \to \infty$.*

Teorema 2.1.4. *Sia $\{X_n\}$ una sequenza di v.a. i.i.d. che soddisfano le condizioni (2.1) e (2.2) e sia $\{y_n\}$ una sequenza definita come sopra. Allora,*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \left[\frac{\mathbb{P}(|S_n| > y_n)}{n\mathbb{P}(|X| > y_n)} \right] \le \limsup_{n\to\infty} \left[\frac{\mathbb{P}(|S_n| > y_n)}{n\mathbb{P}(|X| > y_n)} \right] < \infty, \tag{2.3}$$

o equivalentemente,

$$0 < \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{\mathbb{P}(|S_n| > y_n)}{\mathbb{P}(M_n > y_n)}\right] \le \limsup_{n\to\infty}\left[\frac{\mathbb{P}(|S_n| > y_n)}{\mathbb{P}(M_n > y_n)}\right] < \infty \tag{2.4}$$

Dimostrazione. La dimostrazione sarà suddivisa in tre parti:

1. $\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{\mathbb{P}(|S_n|>y_n)}{n\mathbb{P}(|X|>y_n)}\right] > 0$,

2. $\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{\mathbb{P}(|S_n|>y_n)}{n\mathbb{P}(|X|>y_n)}\right] < \infty$,

3. l'equivalenza tra le relazioni (2.3) e (2.4).

Innanzitutto prendiamo un $\epsilon > 0$ e definiamo gli eventi $A_i := \{|X_i| > (1+\epsilon)y_n\}$ e $B_i := \{|\sum_{j=1,j\neq i}^{n} X_j| < \epsilon y_n\}$. Indicando con $\bar{E}$ l'evento complementare di E, scriviamo la seguente disuguaglianza in modo da minorare il termine che ci interessa con altri più facilmente studiabili:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|S_n| > y_n) &\ge \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left[\bigcap_{j=1}^{i-1}(\overline{A_j \cap B_j}) \cap (A_i \cap B_i)\right] \\
&\ge \dots \\
&\ge n\mathbb{P}(A_1)[\mathbb{P}(B_1) - n\mathbb{P}(A_1)].
\end{aligned}$$

Poiché $y_n^{-1}S_n \xrightarrow{P} 0$, allora $\mathbb{P}(B_i) \to 1$ quando $n \to \infty$ e, dato $\delta > 0$ con $1 - 2\delta > 0$, possiamo scegliere N_1 abbastanza grande affinchè $\mathbb{P}(B_i) > 1 - \delta$ per $n \ge N_1$. Inoltre sappiamo dal lemma precedente che $n\mathbb{P}(A_i) \to 0$ quando $n \to \infty$ e dunque possiamo scegliere N_2 abbastanza grande affinchè $n\mathbb{P}(A_i) < \delta$ per $n \ge N_2$. In questo modo, per $n \ge N = \max(N_1, N_2)$, otteniamo

$$\mathbb{P}(|S_n| > y_n) \ge n(1-2\delta)\mathbb{P}(|X| > (1+\epsilon)y_n), \tag{2.5}$$

e dividendo ambo i membri per $n\mathbb{P}(|X| > y_n)$ riscriviamo la disuguaglianza (2.5) in modo tale da avere la relazione presente nel teorema, ovvero

$$\frac{\mathbb{P}(|S_n| > y_n)}{n\mathbb{P}(|X| > y_n)} \ge \frac{(1-2\delta)\mathbb{P}(|X| > (1+\epsilon)y_n)}{\mathbb{P}(|X| > y_n)}.$$

Svolgendo il limite inferiore di entrambi i termini e ricordando la condizione (2.2), completiamo la prima parte della dimostrazione. Infatti

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{\mathbb{P}(|S_n|>y_n)}{n\mathbb{P}(|X|>y_n)}\right]\geq(1-2\delta)\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{\mathbb{P}(|X|>(1+\epsilon)y_n)}{\mathbb{P}(|X|>y_n)}\right]>0.$$

Per la dimostrazione della seconda parte del teorema è necessario lavorare con le cosiddette variabili aleatorie *simmetrizzate* X_i^s, $i=1,2,3,\ldots$ e saranno utilizzate le *disuguaglianze di simmetrizzazione debole* che riportiamo di seguito.

Proposizione 2.1.5. *Siano X e X' due v.a. i.i.d. Definiamo con $X^s=X-X'$ la simmetrizzazione di X e indichiamo con mX la mediana di X, ovvero quel valore che soddisfa $\mathbb{P}(X\geq mX)\geq 1/2\leq\mathbb{P}(X\leq mX)$. Allora $\forall x$,*

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(|X-mX|\geq x)\leq\mathbb{P}(|X^s|\geq x), \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(X-mX\geq x)\leq\mathbb{P}(X^s\geq x), \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(-X+mX\geq x)\leq\mathbb{P}(-X^s\geq x)=\mathbb{P}(X^s\geq x). \tag{2.8}$$

A questo punto definiamo

$$X_{kn}^s=\begin{cases}X_k^s & \textit{se } |X_k^s|\leq 2y_n\\ 0 & \textit{altrimenti}\end{cases}$$

e di conseguenza anche $S_n^s=\sum_{k=1}^n X_k^s$ e $S_{nn}^s=\sum_{k=1}^n X_{kn}^s$. Possiamo ora scrivere

$$\mathbb{P}(|S_n^s|>2y_n)\leq n\mathbb{P}(|X^s|>2y_n)+\mathbb{P}(|S_{nn}^s|>2y_n). \tag{2.9}$$

Dividiamo tutto per $n\mathbb{P}(|X|>y_n)$ e per il primo termine sul lato destro otteniamo, utilizzando le *disuguaglianze di simmetrizzazione debole*,

$$\frac{\mathbb{P}(|X^s|>2y_n)}{\mathbb{P}(|X|>y_n)}\leq\frac{2\mathbb{P}(|X|>y_n)}{\mathbb{P}(|X|>y_n)}=2.$$

Prima di continuare con la trattazione, enunciamo la cosiddetta *disuguaglianza di Chebyshev*.

Proposizione 2.1.6. *Sia X una v.a. con varianza σ^2 finita e diversa da 0 (di conseguenza anche il valore di aspettazione μ avrà le stesse caratteristiche). Allora $\forall k > 0$ reale,*

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

Concentrandoci sull'altro termine del lato destro e, utilizzando la *disuguaglianza di Chebyshev*, possiamo maggiorarlo nel seguente modo:

$$\mathbb{P}(|S^s_{nn}| > 2y_n) \leq (2y_n)^{-2}\mathbb{E}[(S^s_{nn})^2] = n(2y_n)^{-2}\int_{|x|\leq 2y_n} x^2 d\mathbb{P}(X^s \leq x)$$

Unendo le varie espressioni precedenti, scriviamo:

$$\frac{\mathbb{P}(|S^s_{nn}| > 2y_n)}{n\mathbb{P}(|X| > y_n)} = \frac{\mathbb{P}(|S^s_{nn}| > 2y_n)}{n\mathbb{P}(|X^s| > 2y_n)}\frac{\mathbb{P}(|X^s| > 2y_n)}{\mathbb{P}(|X| > y_n)} \leq \frac{2(2y_n)^{-2}\int_{|x|\leq 2y_n} x^2 d\mathbb{P}(X^s \leq x)}{\mathbb{P}(|X^s| > 2y_n)}.$$

Poiché X^s non può appartenere al dominio di attrazione di una distribuzione normale, allora

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{\mathbb{P}(|S^s_{nn}| > 2y_n)}{n\mathbb{P}(|X| > y_n)}\right] < \infty.$$

Avendo maggiorato il termine a destra della relazione (2.9), possiamo affermare che

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{\mathbb{P}(|S^s_{n}| > 2y_n)}{n\mathbb{P}(|X| > y_n)}\right] < \infty,$$

e utilizzando le *disuguaglianze di simmetrizzazione debole*

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{\mathbb{P}(|S_n - mS_n| > 2y_n)}{n\mathbb{P}(|X| > y_n)}\right] < \infty,$$

dove mS_n indica la mediana della v.a. S_n. Ricordando che $y_n^{-1}S_n \xrightarrow{P} 0$ quando $n \to \infty$, allora $y_n^{-1}mS_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e quindi, per $\epsilon > 0$ e n sufficientemente grande, possiamo scrivere

$$\frac{\mathbb{P}(|S_n - mS_n| > 2y_n)}{n\mathbb{P}(|X| > y_n)} \geq \frac{\mathbb{P}(|S_n| > (2+\epsilon)y_n)}{n\mathbb{P}(|X| > y_n)} = \frac{\mathbb{P}(|S_n| > (2+\epsilon)y_n)}{n\mathbb{P}(|X| > (2+\epsilon)y_n)}\frac{\mathbb{P}(|X| > (2+\epsilon)y_n)}{\mathbb{P}(|X| > y_n)}.$$

Usando la condizione (2.2) e con una semplice trasformazione ci riconduciamo a

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{\mathbb{P}(|S_n| > y_n)}{n\mathbb{P}(|X| > y_n)}\right] < \infty,$$

che completa la seconda parte della dimostrazione.

Per provare l'equivalenza tra le relazioni (2.3) e (2.4) e ultimare così la dimostrazione del teorema è necessario citare le *disuguaglianze di Bonferroni* [2, pag. 100], attraverso le quali possiamo scrivere che

$$\mathbb{P}\left(M_n > y_n\right) \leq n\mathbb{P}(|X| > y_n).$$

Visto il primo risultato del Lemma 2.1.4, abbiamo

$$\mathbb{P}\left(M_n > y_n\right) \sim n\mathbb{P}(|X| > y_n) \quad \textit{quando } n \to \infty$$

e andando a sostituire questo ultimo risultato la dimostrazione del teorema è terminata.

□

Concludiamo il capitolo con l'enunciazione dell'ultimo teorema (reperibile in [8] con la propria dimostrazione), il quale può essere considerato un perfezionamento del primo teorema affrontato, in quanto quest'ultimo analizzava soltanto l'ordine di grandezza del comportamento asintotico di $\mathbb{P}(|S_n| > x_n B_n)$, mentre il prossimo teorema ci permetterà di conoscerlo precisamente. Rispetto alle ipotesi precedenti, aggiungiamo il fatto che $x_n^{-1} B_n^{-1} S_n \xrightarrow{P} 0$ quando $n \to \infty$.

Teorema 2.1.7. *Sia $\{x_n\}$ una sequenza di numeri positivi tale che $x_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Allora,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(|S_n| > x_n B_n)}{n\mathbb{P}(|X| > x_n B_n)} = 1, \tag{2.10}$$

o equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(|S_n| > x_n B_n)}{\mathbb{P}\left(M_n > x_n B_n\right)} = 1. \tag{2.11}$$

Nello specifico quando il numero di termini nella somma cresce, la probabilità che il valore assoluto della somma superi una certa soglia è approssimativamente uguale alla probabilità che il massimo dei valori assoluti nella sequenza superi la stessa soglia. Questa è sicuramente una proprietà rilevante che caratterizza le distribuzioni stabili, per le quali, essendo distribuzioni a code pesanti, l'avvenimento di eventi rari o estremi non è poi così remoto.

Capitolo 3

Applicazione fisica

Nella fisica contemporanea, il concetto di *cammino aleatorio*, un processo stocastico in cui particelle o onde seguono traiettorie casuali, è emerso come uno strumento fondamentale per comprendere il moto in sistemi disordinati, ovvero quei sistemi che presentano un certo grado di disordine o casualità nella disposizione delle loro componenti o nelle interazioni tra di esse.. Questo concetto ha avuto origine nell'ambito della descrizione del moto browniano delle particelle in un fluido, ma si è evoluto fino a diventare un pilastro centrale della fisica statistica. Le applicazioni dei cammini aleatori spaziano dalla descrizione del moto termico alla diffusione di calore, suono e luce in materiali disordinati. Questo capitolo si propone di esplorare, attraverso un'applicazione fisica, una classe particolare di cammini aleatori noti come "*voli di Lévy*", in cui le lunghezze dei passi seguono una distribuzione di legge di potenza con una coda pesante, in particolare proprio quelle distribuzioni stabili di cui abbiamo trattato nei capitoli precedenti.

3.1 Superdiffusione della luce

Negli ultimi anni, la luce ha assunto un ruolo di rilievo nello studio dei fenomeni di trasporto. Sono emerse interessanti analogie tra il trasporto della luce e il comportamento di elettroni e onde di materia, portando alla scoperta di fenomeni quali la *localizzazione debole e forte*, l'*effetto Hall ottico*, le *oscillazioni di Bloch* e le *fluttuazioni universali della conduttanza*. La comprensione del comportamento della luce in sistemi disordinati è diventata essenziale per applicazioni come l'imaging medico, il concetto di laser casuale e la ricostruzione delle immagini. Tuttavia, la maggior parte degli studi si è concentrata su una forma semplificata di cammino aleatorio, noto come *diffusione*, in cui le lunghezze dei passi seguono una distribuzione gaussiana. Generalizzare questo fenomeno, analizzarlo in una versione più complessa potrebbe persino consentire lo sviluppo di nuove funzionalità ottiche che vanno oltre la normale diffusione della luce, che ricordiamo essere un fenomeno ottico che si verifica quando un fascio di luce attraversa

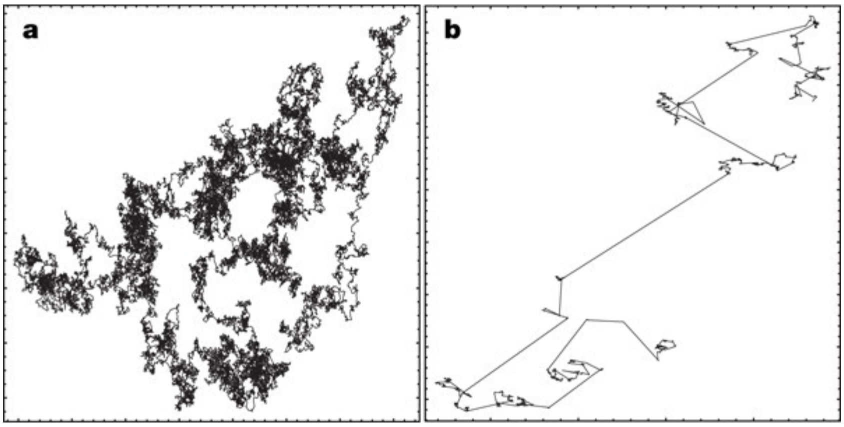


Figura 3.1: Cammino aleatorio standard e "*volo di Lévy*" rispettivamente a sinistra e a destra [1].

un materiale e viene deviato o disperso in molte direzioni diverse, dove quest'ultimo comportamento è dovuto dall'interazione della luce con le particelle o le imperfezioni presenti nel materiale attraverso cui passa.

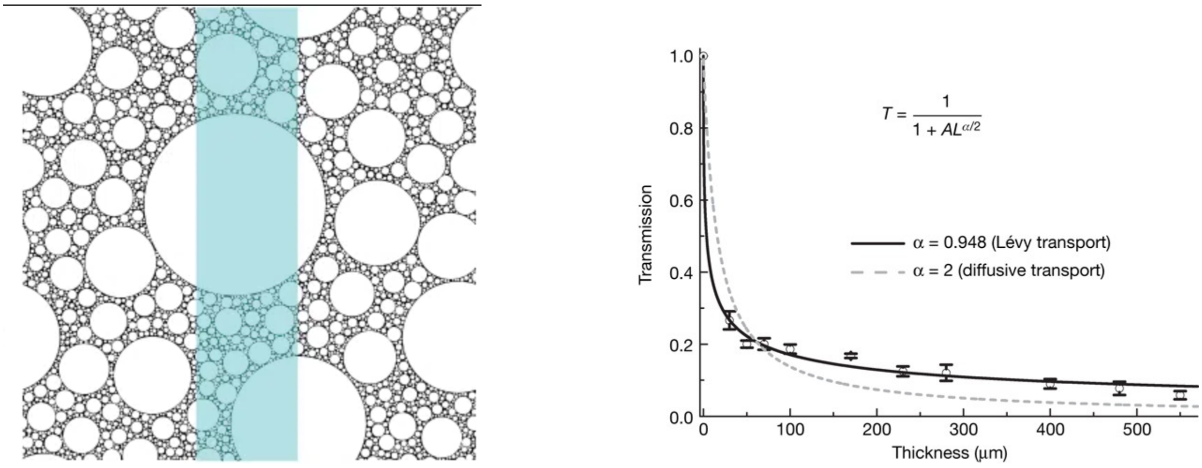
Formalizzando il problema proposto, si può intuire innanzitutto che in un "volo di Lévy", poiché i passi del cammino aleatorio seguono una distribuzione di legge di potenza, possono verificarsi salti estremamente lunghi e ciò comporta che ogni step può potenzialmente portare a cambiamenti significativi nelle caratteristiche del sistema, al contrario che in un cammino aleatorio standard. È possibile osservare graficamente la differenza tra i due cammini in Fig. 3.1.

Nel regime della statistica di Lévy, si parla di *superdiffusione* e in questo caso si ha uno spostamento quadratico medio $\langle x^2 \rangle$ che aumenta più velocemente che linearmente rispetto al tempo t

$$\langle x^2 \rangle = Dt^\gamma$$

dove γ è un parametro che caratterizza la superdiffusione e D è una costante di diffusione generalizzata. Per $\gamma > 1$ abbiamo la superdiffusione, mentre per $\gamma = 1$ recuperiamo un comportamento diffusivo normale e dunque le diffusioni normali le possiamo vedere come caso limite dei "*voli di Lévy*".

Un cammino di Lévy per la luce è realizzabile *ad hoc* attraverso un semplice metodo (non ancora studiato a dovere), ovvero utilizzando particelle di dispersione ad alto indice di rifrazione (biossido di titanio per esempio) in una matrice di vetro. La densità locale di queste particelle è modificata includendo microsfere di vetro che presentano dimensioni diverse, ma seguendo una specifica distribuzione. Queste microsfere non disperdono la luce perché sono incorporate in una matrice di vetro con lo stesso indice di rifrazione e il loro unico scopo è modificare localmente la densità degli elementi di dispersione. Dato il



(a) (b)

Figura 3.2: Proiezione 2D di un "*vetro di Lévy*" (Figura 3.2a [6]) e andamento della trasmissione totale in funzione dello spessore con parametrizzazione α (Figura 3.2b [1]).

suo utilizzo, questo materiale viene chiamato "*vetro di Lévy*" ed è rappresentato in Fig. 3.2a.

Nei materiali in cui il moto casuale della luce segue una distribuzione gaussiana delle lunghezze dei passi, questi sono tipicamente descritti dalla legge di probabilità normale e la loro lunghezza media è determinata dal cammino libero medio, indicato con l:

$$l = \frac{1}{\langle \sigma N \rangle}, \tag{3.1}$$

dove σ è la sezione d'urto di scattering, N è la densità degli elementi di scattering e le parentesi angolari indicano una media su tutto il volume del campione.

Per consentire il fenomeno dei "voli di Lévy", in cui i passi del moto casuale della luce seguono una distribuzione di legge di potenza, è necessario un diverso tipo di distribuzione rispetto a quello normale. In un "*volo di Lévy*", la probabilità di fare un passo di lunghezza z segue una legge di potenza decrescente

$$\mathbb{P}(z) \to \frac{1}{z^{\alpha+1}},$$

dove α è un parametro che determina la forma della distribuzione dei passi. Il parametro α è correlato all'esponente di superdiffusione γ attraverso l'equazione:

$$\gamma = 3 - \alpha$$

nel caso in cui $1 \leq \alpha < 2$. Va notato che per valori di α inferiori a 2, i momenti della distribuzione dei passi divergono, il che significa che la media del cammino libero medio dell'equazione (3.1) non può essere calcolata su tutto il volume del campione. Tuttavia, la quantità $N\sigma$ può ancora essere interpretata come una misura della forza di scattering locale all'interno del materiale.

Indicando con $P_s(d)$ la distribuzione delle microsfere di vetro e regolando la concentrazione complessiva delle nanoparticelle di biossido di titanio in modo che, in media, ci sia circa un evento di scattering in spazi riempiti di biossido di titanio tra le microsfere di vetro adiacenti, allora si ottiene che la distribuzione delle lunghezze dei passi della luce all'interno di questi campioni viene modellata dalle variazioni locali di densità indotte dalla distribuzione delle microsfere $P_s(d)$. Per ottenere un "*volo di Lévy*" con un parametro α specifico, si utilizza una determinata distribuzione di diametri delle microsfere di vetro, che è

$$P_s(d) = \frac{1}{d^{2+\alpha}} \, .$$

La luce totale trasmessa viene misurata mediante una sfera integrante. Mentre nei sistemi diffusivi normali la trasmissione totale segue la legge di Ohm, per i "voli di Lévy" questa relazione può essere generalizzata come

$$T = \frac{1}{1 + AL^{\frac{\alpha}{2}}}$$

dove T è la trasmissione totale, A è una costante e L è lo spessore del campione, notando che se $\alpha = 2$ si ritorna al caso standard.

Per terminare il capitolo inseriamo un grafico che mostra effettivamente una conferma sperimentale del "*volo di Levy*" effettuato da un raggio laser He-Ne utilizzando l'apparato sperimentale descritto sopra, visibile in Fig. 3.2b.

Bibliografia

[1] Pierre Barthelemy, Jacopo Bertolotti e Diederik S. Wiersma. «A Lévy flight for light». In: *Nature Letters* 453 (2008), pp. 495–498.

[2] William Feller. *An Introduction to .Probability Theory and Its Applications*. Wiley, 1957.

[3] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 2*. Seconda edizione. Bollati Boringhieri, 1989.

[4] B.V. Gnedenko e A.N. Kolmogorov. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley, 1954.

[5] Geoffrey R. Grimmett e David R. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Quarta edizione. Oxford University Press, 2020.

[6] Christoph Groth, Anton R. Akhmerov e C. W. J. Beenakker. «Transmission probability through a Lévy glass and comparison with a Lévy walk». In: *Physical Review E* 85 (2 2012), p. 021138.

[7] C. C. Heyde. «A Contribution to the Theory of Large Deviations for Sums of Independent Random Variables». In: *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie* 7 (1967), pp. 303–308.

[8] C. C. Heyde. «On Large Deviation Probabilities in the Case of Attraction to a Non-Normal Stable Law». In: *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics* 30 (1968), pp. 253–258.

[9] C. C. Heyde. «On large deviation problems for sum of random variables which are not attracted to the normal law». In: *Ann. Math. Stat* 38 (1967), pp. 1575–1578.

[10] Paul Lévy. *Théorie de l'addition des Variables Aléatoires*. Deuxième édition. Gauthier-Villars, 1954.

[11] John P. Nolan. *Univariate Stable Distributions. Models for Heavy Tailed Data*. Springer, 2020.

[12] Andrea Pascucci. *Teoria della Probabilità*. Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, 2023.

[13] David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.

Ringraziamenti

Innanzitutto ritengo doveroso ringraziare il mio Relatore, il Professore Marco Lenci, che mi ha accompagnato per mesi nell'attività di ricerca, comprensione, rielaborazione e stesura degli argomenti presenti in questa tesi. E' stato un relatore paziente, estremamente disponibile e soprattutto mi ha sempre fatto sentire a mio agio. Durante i nostri incontri, ha creato un ambiente di lavoro produttivo, in cui ho sempre avuto la sensazione che la mia opinione fosse ascoltata attentamente.

Un ringraziamento speciale va ai miei genitori, ai quali tengo profondamente e amo con tutto il mio cuore. Desidero esprimere la mia gratitudine sia a mia madre che a mio padre, poiché entrambi hanno avuto un impatto straordinario sulla mia crescita e sulla mia formazione. Mia madre, con il suo forte senso del dovere, la sua brillantezza e la sua costante ricerca della perfezione, ha influenzato notevolmente la mia personalità professionale. La sua presenza costante, sebbene a volte un po' invadente, ha contribuito a farmi diventare la persona che sono oggi. D'altro canto, mio padre mi ha insegnato il valore del piacere, della tranquillità e della serenità interiore. Le sue lezioni sulla calma e la gioia nelle situazioni più difficili sono un patrimonio prezioso che porto sempre con me. Credo che mi abbiate trasmesso le vostre migliori qualità e mi abbiate cresciuto nel modo migliore possibile. Ogni giorno della mia vita, avete riversato su di me un amore infinito, e per questo vi sono profondamente grato. Siete il mio sostegno e la mia ispirazione. Vi devo tutto.
Desidero ringraziarvi non solo per il vostro affetto, ma anche per il vostro contributo finanziario alla mia formazione. So che fino ad ora sono stato un onere per voi, ma non me lo avete mai fatto pesare. Anzi, avete sempre fatto il possibile per mettermi nelle condizioni migliori per la mia crescita e formazione. Grazie.

Un ringraziamento particolare va a mio fratello, il mio fratellone, perché, al contrario dei miei genitori, mi ha insegnato l'arte dell'arrangiarsi, dello sbattere la testa finché non si è giunti al risultato con le sole proprie forze. Lo ho sempre visto e lo vedo tuttora come un esempio, prima un ragazzo diligente, intelligente e soprattutto molto maturo per l'età che aveva, ora un uomo che si impegna nel proprio lavoro, ma che non smette di alimentare le proprie passioni e seguire i propri sogni, un uomo tutt'altro che egoista, che farebbe di tutto per le persone che ama.

Ringrazio ora i miei carissimi nonni. Partendo dai miei nonni materni, non so veramente come farò un giorno senza di voi e spero vivamente che riuscirete ad essere presenti anche per la conclusione effettiva del mio percorso universitario. Rappresentate per me l'esempio che gli sforzi verranno premiati un giorno, l'esempio di non fermarsi mai e di dare il massimo in ogni cosa, di conservare gelosamente ogni esperienza ed ogni ricordo perché saranno quelli che ti faranno emozionare e ti permetteranno di ripercorrere la propria vita pensando che quest'ultima abbia avuto un senso. Ringrazio invece la mia nonna Angiolina per aver sempre creduto in me e nelle mie scelte, per accompagnarmi sempre con le sue preghiere, per la dolcezza e il bene che mi mostra ogni volta che la vado a trovare.

Ringrazio il mio prozio Fiorenzo per il sostegno e l'affetto che mi ha sempre dimostrato.

Ringrazio gli amici di Mantova, che mi hanno permesso di vivere in modo spensierato e felice gli anni della mia infanzia e della mia adolescenza. Ringrazio gli amici del Camplus che sono stati la mia seconda famiglia quest'ultimo anno, con i quali ho giocato, riso, condiviso momenti sereni e che mi hanno risollevato dopo un periodo abbastanza buio, in particolare il Pierone con cui parlo sempre volentieri di tutto, generoso è dir poco e con uno spirito coinvolgente. Ringrazio tutti i miei compari fisici e in particolare il Pioniere, Mulaz e Andrea. L'ultimo soprattutto perché penso di averlo tartassato di domande per tre anni e sempre mi ha aiutato, qualsiasi dubbio o problema avessi, è stato davvero prezioso.

Un ringraziamento speciale a Niccolò che considero un amico a tutto tondo. È sempre la mia prima scelta quando si tratta di trascorrere del tempo con qualcuno e condividere momenti significativi. La sua saggezza e i suoi preziosi consigli sulle scelte di vita e sull'università sono per me di inestimabile valore, e in questo momento lo ritengo una figura insostituibile nella mia vita.

Come ultima persona da ringraziare, ovviamente anche per importanza, ci sei proprio tu: Chiara Martini. Semplicemente il mio tutto. Grazie per ascoltarmi e consigliarmi, almeno ci provi visto che poi faccio sempre di testa mia. Grazie per la tua pazienza. Grazie per la tua generosità. Grazie per la tua innata e splendida dolcezza. Grazie per il tuo viso spontaneo che tanto adoro, che mi fa passare qualsiasi tipo di malessere. Grazie per il tuo incommensurabile affetto che mi mantiene sempre caldo il cuore. Grazie per sopportare una persona con così tanti difetti e di non avermi mai lasciato solo nei momenti più bui e delicati, nei quali ero veramente intrattabile. Grazie per asciugarmi le lacrime nella sofferenza. Grazie di essere qui oggi al mio fianco e spero per tutti i giorni a venire. Grazie di credere in noi, nonostante tutte le avversità che abbiamo passato e che quasi certamente dovremo affrontare. Grazie per suscitare in me il pensiero che una persona migliore non esista. Abbiamo trascorso quasi due anni in cui eravamo solo tu ed io e ti ringrazio non solo per essermi stata accanto, ma soprattutto per avermi fatto sentire come se non mi mancasse nulla perché mi bastava stare con te per essere veramente felice, con il mio scricciolo.