

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

SU ALCUNE NOZIONI DI  
TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:  
Andrea Petracchi

Presentata da:  
Guido Battistini

Anno Accademico 2022-2023



# Introduzione

La topologia differenziale studia le *varietà differenziabili* sia con gli strumenti della topologia che con quelli dell'analisi matematica. La maggior parte dei contributi in questo ambito provengono dai lavori di Riemann, Poincaré, Whitney, Brouwer e Pontrjagin.

Nel primo capitolo si introduce la categoria delle varietà differenziabili, la cui peculiarità è data dall'esistenza di una struttura differenziabile. La struttura differenziabile dà alla varietà delle parametrizzazioni locali definite su aperti di uno stesso spazio  $\mathbb{R}^n$  con una condizione di compatibilità; in altre parole una varietà differenziabile si comporta localmente come un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Queste proprietà permettono le definizioni di *mappa liscia* tra varietà e di *spazio tangente* in un punto ad una varietà. Inoltre vengono presentati diversi esempi tra quelli più noti.

Nel secondo capitolo vengono trattati i *fibrati vettoriali*, tra i quali il fibrato tangente. Un fibrato vettoriale di rango  $r$  su una varietà  $M$  è dato da uno *spazio totale*  $E$  e da una funzione  $\pi: E \rightarrow M$ , tale che  $\pi$  localmente su  $M$  è isomorfa alla proiezione  $M \times \mathbb{R}^r \rightarrow M$ . In questo modo, per ogni punto  $p$  di  $M$ , la fibra  $\pi^{-1}(p)$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $r$ . Si dimostra inoltre che un fibrato vettoriale è descritto unicamente, a meno di isomorfismi, dalle sue *funzioni di transizione*, che sono matrici invertibili che variano in modo  $C^\infty$  su  $M$ . Una *sezione* del fibrato vettoriale  $\pi: E \rightarrow M$  è una funzione differenziabile  $M \rightarrow E$  che associa ad ogni punto  $p$  di  $M$  un punto di  $\pi^{-1}(p)$ . Un *campo vettoriale* su una varietà  $M$  è una sezione del fibrato tangente.

Infine nel terzo capitolo si utilizzano le nozioni dei capitoli precedenti per mostrare risultati riguardo al *grado* di una mappa liscia e al *numero di Eulero* di un fibrato vettoriale. Il grado di una mappa liscia  $f: M \rightarrow N$  si può pensare come il numero di volte contate con segno con cui  $M$  riveste localmente  $N$  tramite  $f$ , dove  $M$  e  $N$

sono varietà compatte e orientate della stessa dimensione e  $N$  è connessa. Il teorema di classificazione delle mappe lisce da una varietà di dimensione  $n$ , connessa, compatta e orientata alla  $n$ -sfera stabilisce che due di queste mappe aventi lo stesso grado sono omotope e viceversa. Date due sottovarietà chiuse, compatte, orientate e senza bordo con dimensioni complementari di una varietà orientata  $W$ , esse si dicono *trasverse* se in ogni punto  $p$  dell'intersezione  $M \cap N$  gli spazi tangenti alle sottovarietà in  $p$  generano lo spazio tangente a  $W$  in  $p$ . Il *numero di intersezione* di  $M$  e  $N$  dentro  $W$  è il numero di punti in cui  $M$  e  $N$  si intersecano contati con segno. Tale definizione può essere estesa a varietà non necessariamente trasverse. Dato un fibrato vettoriale su una varietà  $M$ , compatta, orientata e senza bordo, di rango uguale alla dimensione di  $M$ , si può definire il numero di autointersezione di  $M$  dentro lo spazio totale del fibrato; tale numero è detto numero di Eulero del fibrato vettoriale. Il numero di Eulero del fibrato tangente è detto *caratteristica di Eulero* della varietà. Dato un campo vettoriale con uno zero isolato  $x$  su una varietà si può definire un numero associato a  $x$  detto *indice* del campo vettoriale in  $x$ . Il teorema di Poincaré-Hopf risulta molto utile nello studio degli zeri dei campi vettoriali perché stabilisce che la somma degli indici di un campo vettoriale su una varietà compatta, senza bordo e orientata è uguale alla caratteristica di Eulero della varietà. Per semplicità questi argomenti vengono trattati facendo riferimento a *varietà orientate e fibrati vettoriali orientati* nonostante esistano estensioni di tali concetti alle *varietà non orientabili*.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Varietà differenziabili</b>	<b>1</b>
1.1 Varietà differenziabili . . . . .	1
1.2 Applicazioni differenziabili . . . . .	5
1.3 Spazio tangente . . . . .	7
1.4 Sottovarietà e varietà con bordo . . . . .	11
<b>2 Fibrati vettoriali</b>	<b>15</b>
2.1 Definizione di fibrato . . . . .	15
2.2 Sezioni di fibrati . . . . .	20
2.3 Complementi . . . . .	21
<b>3 Grado e numero di Eulero</b>	<b>23</b>
3.1 Grado di una mappa . . . . .	23
3.2 Numero di Eulero . . . . .	31
<b>Bibliografia</b>	<b>39</b>



# Capitolo 1

## Varietà differenziabili

Nel primo capitolo verrà illustrata la categoria delle varietà differenziabili e ne verranno illustrate alcune proprietà ed esempi notevoli per poi approfondire i concetti di spazio tangente e differenziale di una funzione differenziabile ed infine approfondire le varietà con bordo.

### 1.1 Varietà differenziabili

In questa sezione si dà la definizione di varietà differenziabile e di conseguenza anche quali siano i morfismi nella categoria delle varietà differenziabili. Un passo fondamentale riguarda la definizione di struttura differenziabile che conferisce alla varietà differenziabile delle proprietà ulteriori rispetto ad un generico spazio topologico. Inoltre esiste un funtore dalla categoria delle varietà differenziabili alla categoria degli spazi topologici che dimentica la struttura differenziabile. Di seguito vengono fornite alcune nozioni preliminari fondamentali per la definizione di varietà differenziabile.

**Definizione 1.1.1.** Sia  $M$  un insieme e  $n$  un numero naturale. Una  $n$ -carta  $(U, \varphi)$  di  $M$  è un'applicazione biettiva  $\varphi: U \rightarrow V$  dove  $U$  è un sottoinsieme di  $M$  e  $V$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $p \in U$  si dice che  $(U, \varphi)$  è una *carta in*  $p$  e se  $\varphi(p) = 0$  si dice che  $U$  è *centrata* in  $p$ . Se poi si scrive  $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$  allora le funzioni  $x_1, \dots, x_n: U \rightarrow \mathbb{R}$  sono le *coordinate locali* nella carta data. L'inversa della funzione  $\varphi$  è detta *parametrizzazione locale* di  $M$ .

**Definizione 1.1.2.** Due  $n$ -carte  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  su un insieme  $M$  si dicono *compatibili* se vale una delle seguenti condizioni:

- $U \cap V = \emptyset$
- $U \cap V \neq \emptyset$ , gli insiemi  $\varphi(U \cap V)$  e  $\psi(U \cap V)$  sono aperti in  $\mathbb{R}^n$  e la funzione  $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  è un diffeomorfismo di classe  $C^\infty$  tra aperti di  $\mathbb{R}^n$ .

**Osservazione 1.1.3.** Se  $(U, \varphi)$  è una  $n$ -carta in  $p \in M$  e  $\chi: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un diffeomorfismo con l'immagine allora  $(U, \chi \circ \varphi)$  è una  $n$ -carta in  $p$  compatibile con qualsiasi altra carta compatibile con  $(U, \varphi)$ .  $\chi(\varphi(U))$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$  perché  $\chi$  è un diffeomorfismo e quindi anche una funzione aperta e  $\varphi(U)$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . La compatibilità con le carte compatibili con  $(U, \varphi)$  segue dal fatto che la composizione di diffeomorfismi tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  è ancora un diffeomorfismo tra aperti di  $\mathbb{R}^n$ .

**Corollario 1.1.4.** Se  $(U, \varphi)$  è una  $n$ -carta in  $p \in M$  allora prendendo  $\chi(x) = x - \varphi(p)$  ristretta a  $\varphi(U)$  si ha che  $(U, \chi \circ \varphi)$  è una  $n$ -carta centrata in  $p$  compatibile con  $(U, \varphi)$ .

**Osservazione 1.1.5.** Se  $(U, \varphi)$  è una  $n$ -carta in  $p \in M$  e se  $W$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$  tale che  $W \subseteq \varphi(U)$  e  $\varphi(p) \in W$  allora si ha che  $(\varphi^{-1}(W), \varphi|_{\varphi^{-1}(W)})$  è una  $n$ -carta in  $p$  di  $M$  compatibile con tutte le carte compatibili con  $(U, \varphi)$ .

Arrivati a questo punto si rischia di credere che la compatibilità tra carte possa essere una relazione d'equivalenza ma ciò si dimostra essere falso con il seguente controesempio in cui si mostra che la proprietà transitiva non è sempre rispettata.

**Esempio 1.1.6.** Siano  $M = \mathbb{R}^n \times \{0, 1\}$ ,  $U = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ ,  $V = \mathbb{R}^n \times \{1\}$ ,  $W = U$  e siano  $p: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proiezione al primo fattore e  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una biezione che non sia un diffeomorfismo. Allora  $(U, p|_U)$  è compatibile con  $(V, p|_V)$  e  $(W, \varphi \circ p|_W)$  è compatibile con  $(V, p|_V)$  ma  $(U, p|_U)$  non è compatibile con  $(W, \varphi \circ p|_W)$ .

**Definizione 1.1.7.** Un *atlante di dimensione  $n$*  su un insieme  $M$  è una famiglia  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  di  $n$ -carte di  $M$  a due a due compatibili i cui domini ricoprono  $M$ ; cioè  $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ .

**Definizione 1.1.8.** Dati due atlanti  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  di dimensione  $n$  su un insieme  $M$  essi si dicono *compatibili* se  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  è ancora un atlante di  $M$ ; cioè se ogni carta di  $\mathcal{A}$  è compatibile con ogni carta di  $\mathcal{B}$ .

**Osservazione 1.1.9.** Dato un insieme  $M$  la relazione di compatibilità tra atlanti di dimensione  $n$  su  $M$  è una relazione di equivalenza. Questo si dimostra sfruttando il fatto che i domini delle carte di un atlante di dimensione  $n$  su  $M$  ricoprono  $M$ .

**Definizione 1.1.10.** Una *struttura differenziabile di dimensione  $n$*  su un insieme  $M$  è un atlante di dimensione  $n$  su  $M$  massimale rispetto all'inclusione.

Questa definizione insieme alla proposizione successiva permette di identificare atlanti compatibili poiché essi identificano la stessa struttura differenziabile; per cui è sufficiente avere un atlante per conoscere la struttura differenziabile di un insieme.

**Osservazione 1.1.11.** Se  $M$  è un insieme e  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  allora esiste una struttura differenziabile di dimensione  $n$  su  $M$  se e solo se  $M$  ha una cardinalità maggiore o uguale a quella di  $\mathbb{R}$  perché questa è una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di funzioni iniettive tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  e  $M$ .

**Proposizione 1.1.12.** Ogni atlante di dimensione  $n$  su  $M$  è contenuto in una e una sola struttura differenziabile su  $M$ . Due atlanti compatibili sono contenuti nella stessa struttura differenziabile.

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{A}$  un atlante di dimensione  $n$  su  $M$  e sia

$$\mathcal{M} = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ è una } n\text{-carta compatibile con tutte le carte di } \mathcal{A}\};$$

chiaramente ne segue  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$  e inoltre si nota facilmente che  $\mathcal{M}$  contiene tutti gli atlanti compatibili con  $\mathcal{A}$  cioè anche ogni struttura differenziabile contenente  $\mathcal{A}$ . Siano  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  due carte di  $\mathcal{M}$ . Se  $U \cap V = \emptyset$  allora le carte sono compatibili. Si può supporre dunque che  $U \cap V \neq \emptyset$ . Sia  $p \in U \cap V$  e siccome  $\mathcal{A}$  è un atlante esiste una carta  $(W, \chi) \in \mathcal{A}$  in  $p$  e per la definizione di  $\mathcal{M}$  si ha che  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  sono compatibili con  $(W, \chi)$ ; per cui si ha che

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V \cap W)} = (\psi \circ \chi^{-1}) \circ (\chi \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U \cap V \cap W) \rightarrow \psi(U \cap V \cap W)$$

è un diffeomorfismo  $C^\infty$  tra aperti di  $\mathbb{R}^n$ . Quindi le carte  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  sono compatibili, per cui  $\mathcal{M}$  è un atlante.  $\square$

**Osservazione 1.1.13.** Un atlante  $\mathcal{A}$  di dimensione  $n$  su un insieme  $M$  induce naturalmente una topologia su  $M$  dichiarando che un sottoinsieme  $A$  è aperto in  $M$  se e solo se  $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ .

**Definizione 1.1.14.** Una *varietà differenziabile di dimensione  $n$*  è un insieme  $M$  dotato di una struttura differenziabile di dimensione  $n$  che induce su  $M$  una topologia di Hausdorff a base numerabile.

**Esempio 1.1.15.** Sia  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Esso ammette una naturale struttura di varietà differenziabile con l'atlante  $\mathcal{A} = \{(V, id_V)\}$

**Esempio 1.1.16.** Sia  $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  la sfera  $n$ -dimensionale.  $S^n$  ammette una struttura di varietà differenziabile tramite l'atlante  $\mathcal{A} = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ . Dove  $U_N = S^n \setminus \{e_{n+1}\}$ ,  $U_S = S^n \setminus \{-e_{n+1}\}$ ,  $\varphi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$  e  $\varphi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right)$ .  $N = e_{n+1}$  è detto *polo nord* e  $S = -N$  è detto *polo sud*.

**Definizione 1.1.17.** Si consideri sull'insieme  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$  la relazione d'equivalenza  $\sim$  definita da  $v \sim w$  se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tale che  $v = \lambda w$ . Il quoziente  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\} / \sim$  è detto *spazio proiettivo reale di dimensione  $n$* . Se  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$  e  $x = (x_0, \dots, x_n)$  allora si indica con  $[x_0 : \dots : x_n]$  l'elemento  $[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ; inoltre  $(x_0, \dots, x_n)$  sono dette coordinate omogenee di  $[x]$ . Si osserva facilmente che per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  si ha  $[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n]$ .

**Esempio 1.1.18.** Per ogni  $j \in \{0, \dots, n\}$   $U_j$  è l'insieme  $\{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_j \neq 0\}$  e l'applicazione  $\varphi_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  è definita da  $\varphi_j([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right)$ . Lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  ammette una struttura di varietà differenziabile  $n$ -dimensionale con l'atlante  $\{(U_j, \varphi_j) \mid j \in \{0, \dots, n\}\}$ .

**Esempio 1.1.19.** Se  $M$  è una varietà  $m$ -dimensionale con atlante  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  e  $N$  è una varietà  $n$ -dimensionale con atlante  $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$  allora  $M \times N$  ammette una struttura di varietà  $n + m$ -dimensionale definita dall'atlante  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$  dove  $\varphi_\alpha \times \psi_\beta: U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  è definita da  $(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q))$ .

**Esempio 1.1.20.** Un esempio di prodotto di varietà differenziabili è dato dal toro  $n$ -dimensionale  $\mathbb{T}^n$  definito come il prodotto  $S^1 \times \cdots \times S^1$  di  $n$  fattori.

**Definizione 1.1.21.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione  $C^\infty$ . Un punto  $x \in \Omega$  è detto *punto critico* di  $f$  se il differenziale  $df_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  non è suriettivo e in questo caso  $f(x)$  è detto *valore critico*. Se invece  $y \in f(\Omega)$  non è un valore critico, allora si dice che  $y$  è un *valore regolare*.

**Esempio 1.1.22.** Se  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{n+m}$ ,  $F \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$  e  $y \in f(\Omega)$  allora l'insieme  $f^{-1}(y) \setminus \{x \in \Omega \mid x \text{ è un punto critico}\}$  ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $n$  indotta dal teorema di Dini sulle funzioni implicite.

## 1.2 Applicazioni differenziabili

Una volta definiti gli oggetti della categoria è necessario definire quali siano i morfismi tra tali oggetti. Trattandosi di insiemi è facile pensare che questi morfismi siano funzioni ma allo stesso tempo si vuole anche che queste rispettino in qualche modo la struttura differenziabile che caratterizza le varietà: per cui si dà la seguente definizione.

**Definizione 1.2.1.** Siano  $M, N$  due varietà differenziabili e  $f: M \rightarrow N$  un'applicazione  $f$  si dice *differenziabile* o *di classe  $C^\infty$*  in  $p \in M$  se esistono  $(U, \varphi)$  carta in  $p$  e  $(V, \psi)$  carta in  $f(p)$  tali che  $f(U) \subseteq V$  e la composizione  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$  è di classe  $C^\infty$  in un intorno di  $\varphi(p)$ . Se  $f$  è differenziabile in ogni punto di  $M$  allora si dice che  $f$  è *differenziabile*. Inoltre se  $f$  è differenziabile, biettiva e con inversa differenziabile allora  $f$  si dice *diffeomorfismo*. L'insieme delle funzioni differenziabili tra due varietà  $M, N$  si indica con  $C^\infty(M, N)$  e se  $N$  coincide con  $\mathbb{R}$  si indica  $C^\infty(M)$ .

**Proposizione 1.2.2.** Se la funzione  $f: M \rightarrow N$  è differenziabile in  $p \in M$  allora per ogni carta  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  in  $p$  e per ogni carta  $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$  in  $f(p)$  si ha che la composizione  $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \tilde{\varphi}(\tilde{U} \cap U) \rightarrow \tilde{\psi}(\tilde{V} \cap V)$  è di classe  $C^\infty$  in un intorno di  $\tilde{\varphi}(p)$ .

La dimostrazione di questa proposizione segue dal fatto che  $M$  è una varietà differenziabile; in particolare due carte in  $p$  sono compatibili.

**Proposizione 1.2.3.** Siano  $M, N$  e  $S$  tre varietà differenziabili e  $f: M \rightarrow N$  e  $g: N \rightarrow S$  funzioni differenziabili. Allora anche la composizione  $g \circ f: M \rightarrow S$  è differenziabile.

*Dimostrazione.* Siano  $(U, \varphi)$  carta in  $p$ ,  $(V, \psi)$  carta in  $f(p)$  e  $(W, \chi)$  carta in  $g(f(p))$ . Allora la composizione  $\chi \circ g \circ f \circ \varphi^{-1} = (\chi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$  è  $C^\infty$  perché composizione di funzioni di classe  $C^\infty$  tra aperti di  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Proposizione 1.2.4.** Sia  $F: M \rightarrow N$  una funzione differenziabile; allora  $F$  è una funzione continua.

*Dimostrazione.* Basta dimostrare la proposizione per un generico  $p \in M$ . Siano  $(U, \varphi)$  carta in  $p$  e  $(V, \psi)$  carta in  $f(p)$ . Per definizione di topologia indotta dalla struttura di varietà differenziabile si ha che  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  e  $\psi: V \rightarrow \psi(V)$  sono omeomorfismi. Inoltre l'applicazione  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$  è  $C^\infty$  e quindi anche continua. Questo basta per dire che  $f|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$  è continua perché è composizione di funzioni continue; dunque  $f$  è continua in  $p$ .  $\square$

**Esempio 1.2.5.** Sia  $\varphi: U \rightarrow V$  una carta di  $M$ . Allora si mostra facilmente che  $\varphi$  è un diffeomorfismo tra  $U$  e  $V$  perché  $\text{id}_V \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}_V$  e  $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \text{id}_U = \text{id}_U$ .

**Esempio 1.2.6.** L'inclusione  $\iota: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  è un'applicazione differenziabile e segue dal fatto che la composizione dell'identità su  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dell'inclusione e dell'inversa della proiezione stereografica è la funzione

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{2x_1}{1+x_1^2+\dots+x_n^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+x_1^2+\dots+x_n^2}, 1 - \frac{2}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} \right)$$

che appartiene a  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ . Un procedimento analogo si usa per la proiezione stereografica dal polo sud.

**Definizione 1.2.7.** Una funzione  $f: M \rightarrow N$  fra varietà è un *diffeomorfismo locale* se per ogni  $p \in M$  esiste un intorno  $U$  di  $p$  tale che  $f(U)$  è un aperto di  $N$  e  $f|_U: U \rightarrow f(U)$  è un diffeomorfismo. Inoltre se ogni  $y$  possiede un intorno  $U$  tale che  $f^{-1}(U)$  è unione disgiunta di aperti di  $M$  e la funzione  $f$  ristretta ad ognuno di questi aperti è un diffeomorfismo,  $f$  si dice *rivestimento liscio*.

**Esempio 1.2.8.** Alcuni esempi notevoli di applicazioni differenziabili sono:

- la mappa antipodale  $a: S^n \rightarrow S^n$  definita da  $a(x) = -x$ , che è un diffeomorfismo;
- la proiezione  $p: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  definita da  $p(x) = [x]$ ;
- per ogni  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  l'applicazione  $f_m: S^1 \rightarrow S^1$  definita in notazione complessa da  $f_m(z) = z^m$  è un rivestimento liscio.

## 1.3 Spazio tangente

In questa sezione si definisce lo spazio tangente di una varietà differenziabile in un punto arbitrario ma per poter arrivare a darle una definizione precisa bisogna introdurre dei concetti preliminari, tra cui la definizione di spiga dei germi di funzioni differenziabili in un punto  $p$  e la definizione di derivazione.

**Definizione 1.3.1.** Sia  $M$  una varietà e  $p \in M$ . Consideriamo l'insieme  $\mathcal{S}$  definita da  $\mathcal{S} = \{(U, f) \mid U \text{ è un intorno aperto di } p, f \in C^\infty(U)\}$ . Definiamo su  $\mathcal{S}$  la relazione di equivalenza  $\sim$  definita in questo modo:  $(U, f) \sim (V, g)$  se esiste un intorno aperto  $W$  del punto  $p$  tale che  $W$  è sottoinsieme di  $V \cap U$  e le restrizioni di  $f$  e  $g$  a  $W$  coincidono. L'insieme  $C^\infty(p) := \mathcal{S} / \sim$  è detto *spiga dei germi di funzioni differenziabili in  $p$* , i cui elementi sono detti *germi in  $p$* .

**Definizione 1.3.2.** Siano  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(p)$  tali che  $\mathbf{f} = [(U, f)]$  e  $\mathbf{g} = [(V, g)]$  e sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ , allora su  $C^\infty(p)$  sono definite e ben poste le seguenti operazioni:

- $\mathbf{f} + \mathbf{g} := [(U \cap V, f + g)]$ ;
- $\mathbf{f}\mathbf{g} := [(U \cap V, fg)]$ ;
- $\lambda\mathbf{f} := [(U, \lambda f)]$ ;
- $\mathbf{f}(p) := f(p)$ .

Queste operazioni rendono  $C^\infty(p)$  un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale e  $(C^\infty(p), +, \cdot)$  è un'algebra.

**Definizione 1.3.3.** Sia  $M$  una varietà una *derivazione* in un punto  $p \in M$  è una funzione lineare  $X: C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che per ogni  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^\infty(p)$  vale

$$X(\mathbf{f}\mathbf{g}) = \mathbf{f}(p)X(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(p)X(\mathbf{f}).$$

Lo spazio tangente a  $M$  in  $p$  è l'insieme delle derivazioni in  $p$  e si indica con  $T_pM$ . La linearità degli elementi di  $T_pM$  garantisce che lo spazio tangente sia uno spazio vettoriale. Un elemento  $X \in T_pM$  è detto *vettore tangente* a  $M$  in  $p$ .

**Osservazione 1.3.4.** Se  $U$  è un aperto di  $M$ , allora  $T_pU = T_pM$  per ogni  $p \in U$  perché  $C_M^\infty(p)$  si identifica naturalmente con  $C_U^\infty(p)$ . Infatti tramite l'inclusione  $\iota: U \hookrightarrow M$  si identificano i germi  $[(V, g)] \in C_M^\infty(p)$  con  $[(V \cap U, g \circ \iota)] \in C_U^\infty(p)$  e questa applicazione risulta banalmente suriettiva e anche iniettiva grazie alle relazioni di equivalenza e al fatto che  $U$  è un aperto.

A questo punto è importante dare qualche esempio utile per la parte successiva, in cui verranno definiti il differenziale di una applicazione differenziabile, l'applicazione pull-back e sarà mostrato che  $\dim T_pM = n$  se la varietà  $M$  ha dimensione  $n$ .

**Esempio 1.3.5.** Sia  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ; ad esso si può associare la derivata parziale nella direzione  $v$  definita da

$$\frac{\partial}{\partial v} = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

$\frac{\partial}{\partial v}$  definisce una derivazione in ogni punto  $p \in \mathbb{R}^n$  e la funzione  $v \mapsto \frac{\partial}{\partial v}$  è ovviamente lineare.

**Esempio 1.3.6.** Siano  $M$  una varietà,  $p \in M$ ,  $(U, \varphi)$  una carta in  $p$  e  $\mathbf{f} = [(U, f)] \in C^\infty(p)$ . Si generalizza la derivata parziale in una direzione coordinata definendo per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  la derivazione

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p(\mathbf{f}) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)).$$

**Lemma 1.3.7.** Sia  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ . La funzione  $\delta: \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\bar{x}}\mathbb{R}^n$  che associa a un vettore  $v$  la derivazione  $\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{\bar{x}}$  definita nell'Esempio 1.3.5 è un isomorfismo di spazi vettoriali; da cui segue che  $\dim T_{\bar{x}}\mathbb{R}^n = n$ .

**Definizione 1.3.8.** Siano  $M, N$  due varietà,  $p \in M$  e  $F: M \rightarrow N$  un'applicazione differenziabile. Si dice *pull-back* l'applicazione  $F_p^*: C^\infty(F(p)) \rightarrow C^\infty(p)$  che associa a un germe  $\mathbf{g} \in C^\infty(F(p))$  di rappresentante  $(V, g)$  il germe  $\mathbf{g} \circ F$  di rappresentante  $(F^{-1}(V), g \circ F)$ .

**Osservazione 1.3.9.** Date le varietà  $M, N, S$ , le applicazioni differenziabili  $F: M \rightarrow N$ ,  $G: N \rightarrow S$  e un punto  $p \in M$  si possono verificare le seguenti proprietà:

- $F_p^*: C_N^\infty(F(p)) \rightarrow C_M^\infty(p)$  è un omomorfismo di algebre;
- $(G \circ F)_p^* = G_{F(p)}^* \circ F_p^*$ ;
- $(id_M)_p^* = id_{C_M^\infty(p)}$
- dalle proprietà precedenti segue che se  $F$  è un diffeomorfismo allora  $F_p^*$  è un isomorfismo di algebre;
- $\varphi_p^*: C_{\mathbb{R}^n}^\infty(\varphi(p)) \rightarrow C_M^\infty(p)$  è un isomorfismo di algebre se  $(U, \varphi)$  è una carta in  $p$ .

Le proprietà del pull-back permettono di definire un funtore dalla categoria delle varietà differenziabili puntate alla categoria delle algebre che associa a un oggetto  $(M, p)$  l'oggetto  $C^\infty(p)$  e ad un'applicazione differenziabile  $F: M \rightarrow N$  la funzione pull-back  $F_p^*$ .

**Definizione 1.3.10.** Siano  $M, N$  varietà,  $p \in M$  un punto e  $F: M \rightarrow N$  una funzione differenziabile. Il differenziale  $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  di  $F$  in  $p$  è la funzione definita da

$$dF_p(X) = X \circ F_p^* \text{ per ogni } X \in T_p M;$$

ossia per ogni  $\mathbf{g} \in C^\infty(F(p))$  vale  $dF_p(X)(\mathbf{g}) = X(\mathbf{g} \circ F)$ .

**Proposizione 1.3.11.** Siano  $M, N, S$  varietà,  $p \in M$  e  $F: M \rightarrow N$ ,  $G: N \rightarrow S$  applicazioni differenziabili. Il differenziale gode delle seguenti proprietà:

- $d(id_M)_p = id_{T_p M}$
- $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$

*Dimostrazione.* La prima proprietà segue dal fatto che per ogni germe  $\mathbf{f} \in C^\infty(p)$  vale  $\mathbf{f} \circ id_M = \mathbf{f}$ . Siano ora  $X \in T_p M$  e  $\mathbf{f} \in C_{G(F(p))}^\infty$ . Allora vale

$$\begin{aligned} d(G \circ F)_p(X)(\mathbf{f}) &= X((G \circ F)_p^*(\mathbf{f})) = X(\mathbf{f} \circ G \circ F) \\ &= X(F_p^*(\mathbf{f} \circ G)) = dF_p(X)(G_{F(p)}^*(\mathbf{f})) \\ &= dG_{F(p)}(dF_p(X)(\mathbf{f})) = (dG_{F(p)} \circ dF_p)(X)(\mathbf{f}). \end{aligned}$$

□

**Proposizione 1.3.12.** Siano  $M$  una varietà di dimensione  $n$  e  $p \in M$ . Allora  $T_p M$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ ; inoltre se  $(U, \varphi)$  è una carta in  $p$  e  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  sono le coordinate locali allora  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$  è una base di  $T_p M$ .

*Dimostrazione.* La carta  $\varphi: U \rightarrow V$  è tautologicamente un diffeomorfismo tra varietà; inoltre grazie all'Osservazione 1.3.4., alla proposizione precedente e al Lemma 1.3.7. si conclude che

$$d\varphi_p: T_p M = T_p U \rightarrow T_{\varphi(p)} V = T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n,$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.  $\square$

Nella proposizione precedente la scelta della base di  $T_p M$  dipende dalla scelta della carta  $(U, \varphi)$  in  $p$ ; dunque è opportuno chiedersi come cambi la base di  $T_p M$  a seconda della scelta della carta.

**Osservazione 1.3.13.** Siano  $M$  una varietà,  $p \in M$ ,  $(U, \varphi)$ ,  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  due carte in  $p$  e sia  $f \in C^\infty(p)$ . Allora se  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\tilde{\varphi} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_h} \Big|_p (f) &= \frac{\partial (f \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{x}_h} (\tilde{\varphi}(p)) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{x}_h} (\tilde{\varphi}(p)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_k} (\varphi(p)) \frac{\partial (x_k \circ \tilde{\varphi}^{-1})}{\partial \tilde{x}_h} (\tilde{\varphi}(p)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p (f) \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h} (\tilde{\varphi}(p)). \end{aligned}$$

Per cui la matrice di cambio di base coincide con la matrice associata all'applicazione lineare  $d(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})_{\tilde{\varphi}(p)}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Questa osservazione sarà molto utile nel capitolo successivo. Inoltre si può ottenere una versione del teorema della funzione inversa per le applicazioni differenziabili fra varietà.

**Teorema 1.3.14.** Siano  $M, N$  due varietà di dimensione  $n$  e  $F: M \rightarrow N$  un'applicazione differenziabile. Sia  $p \in M$  tale che  $dF_p: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  sia un isomorfismo. Allora esistono un intorno  $U$  di  $p$  e un intorno  $V$  di  $F(p)$  tali che  $F|_U: U \rightarrow V$  sia un diffeomorfismo.

La dimostrazione di questo teorema segue dalla dimostrazione dell'analogo teorema di analisi matematica per funzioni definite su aperti di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.3.15.** Siano  $M, N$  due varietà e  $F: M \rightarrow N$  una funzione differenziabile. Un punto  $p \in M$  è detto *critico* per  $F$  se il differenziale  $dF_p: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$  non è suriettivo. Un punto  $y \in F(M)$  si dice *valore critico* se esiste un punto critico  $x \in M$  tale che  $y = F(x)$ . Un punto  $y \in F(M)$  si dice *valore regolare* se non è un valore critico.

**Definizione 1.3.16.** Sia  $F: M \rightarrow N$  una applicazione differenziabile tra varietà. Il *rango in  $p$*  di  $F$  è il rango del differenziale  $dF_p: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ . Se per ogni  $p \in M$  il differenziale  $dF_p$  è iniettivo allora  $F$  si dice *immersione*; se inoltre  $F$  è un omeomorfismo con l'immagine allora si dice *embedding*.  $F$  si dice *sommersione* se il differenziale è suriettivo in ogni punto.

## 1.4 Sottovarietà e varietà con bordo

In questa sezione vengono affrontati alcuni argomenti propedeutici ai capitoli successivi. Tra questi è fondamentale la nozione di varietà con bordo, che estende la definizione di varietà differenziabile affinché si possano considerare tra queste anche alcuni spazi esclusi dalla definizione precedente.

**Definizione 1.4.1.** Sia  $M$  una varietà. Un sottoinsieme  $S$  di  $M$  è una *sottovarietà* di  $M$  se è provvista di una struttura differenziabile tale per cui l'inclusione  $\iota: S \rightarrow M$  sia un embedding. Invece una *sottovarietà immersa* di  $M$  è l'immagine di una immersione iniettiva considerata con la struttura differenziabile indotta da  $S$  con l'atlante  $\left\{ \left( F(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F|_{U_\alpha}^{-1} \right) \right\}$ , dove  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  è l'atlante di  $S$ .

**Definizione 1.4.2.** Un *semispazio* di  $\mathbb{R}^n$ , detto anche  *$n$ -semispazio*, è un sottoinsieme  $H$  di  $\mathbb{R}^n$  per cui vale la seguente proprietà:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda(x) \geq 0\};$$

dove  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione lineare.  $H$  si dice *proprio* se  $\lambda$  non è l'applicazione nulla, altrimenti  $H$  coincide con  $\mathbb{R}^n$ . Se  $H$  è proprio, il suo *bordo* è l'insieme  $\partial H = \text{Ker}(\lambda)$ .

**Definizione 1.4.3.** Ora si possono estendere le definizioni della prima sezione usando i semispazi. Sia  $M$  un insieme, una carta  $(U, \varphi)$  è il dato di un sottoinsieme  $U$  di  $M$  e di una biezionazione  $\varphi: U \rightarrow V$ , dove  $V$  è un sottoinsieme aperto di un  $n$ -semispazio. Questa nuova definizione di carta comprende quelle che soddisfano la definizione precedente siccome anche  $\mathbb{R}^n$  è un semispazio. Allo stesso modo si definisce la compatibilità tra carte e di conseguenza si estendono le definizioni di atlante, struttura differenziabile e varietà differenziabile.

**Definizione 1.4.4.** Sia  $(M, \mathcal{A})$  una varietà differenziabile secondo il nuovo significato e sia  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ . Se  $\varphi(U)$  è sottoinsieme di un semispazio proprio  $H$  e  $p$  è un punto dell'insieme  $\varphi^{-1}(\partial H)$  allora si dice che  $p$  è un *punto di bordo* per la carta  $(U, \varphi)$ . Questa condizione dipende solo dal punto  $p$  e non dalla scelta della carta perché tramite un diffeomorfismo tra sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  un punto del bordo non può essere mandato in un punto interno e viceversa; questo è dovuto al fatto che i punti di bordo non hanno intorni diffeomorfi a palle aperte. Il *bordo* di  $M$  è l'insieme  $\partial M$  dei punti di bordo di  $M$ .

**Osservazione 1.4.5.** Sia  $(M, \mathcal{A})$  una varietà di dimensione  $n$ . L'atlante  $\mathcal{A}$  induce su  $\partial M$  un atlante. Siano  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ ,  $H$  un semispazio che contiene  $\varphi(U)$  e  $L: \partial H \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  un isomorfismo di spazi vettoriali; la carta indotta da  $(U, \varphi)$  su  $\partial M$  è  $(L \circ \varphi, U \cap \partial M)$ . L'insieme di tutte le carte di questo tipo è un atlante di dimensione  $n - 1$  su  $\partial M$ . Se  $\partial M \neq \emptyset$  allora si dice che  $M$  è una *varietà con bordo* o  *$\partial$ -varietà*; se invece  $\partial M = \emptyset$  allora  $M$  si dice *varietà senza bordo*.

**Esempio 1.4.6.** Un esempio di varietà con bordo è il disco compatto

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\},$$

il cui bordo è la varietà  $S^{n-1}$ .

**Osservazione 1.4.7.** Dati una varietà  $M$  con bordo e un punto  $p \in M$ , la definizione di spazio tangente  $T_p M$  è ben posta anche nel caso in cui  $p$  sia un punto di bordo per  $M$ .

**Osservazione 1.4.8.** Siano  $M$  una varietà,  $S$  una sottovarietà di  $M$  e  $p$  un punto di  $S$ . L'inclusione  $\iota: S \rightarrow M$  induce un'inclusione tra gli spazi tangenti  $T_p S$  e  $T_p M$ ; per cui ha

senso dire che  $T_p S$  è un sottospazio vettoriale di  $T_p M$ . Un caso particolare si ha quando la sottovarietà è  $\partial M$ .

**Definizione 1.4.9.** Siano  $M$  una varietà con bordo e  $S$  una sottovarietà con bordo di  $M$ .  $S$  si dice *sottovarietà propria* di  $M$  se valgono queste tre condizioni:

- $S$  è un sottoinsieme chiuso di  $M$ ;
- $\partial S = \partial M \cap S$ ;
- $S$  è *trasversa* a  $\partial M$ , ossia per ogni  $p \in \partial M \cap S$

$$T_p M = T_p S + T_p \partial M.$$



# Capitolo 2

## Fibrati vettoriali

In questo capitolo si vuole trattare la categoria dei fibrati e in particolare i fibrati vettoriali deducendone poi alcune caratteristiche ed illustrando alcuni degli esempi più importanti, tra cui il fibrato tangente.

### 2.1 Definizione di fibrato

In questa sezione si dà la definizione generale di fibrato per poi osservarne alcune altre più specifiche. La prima definizione è quella di fibrato banale. Intuitivamente il prodotto di due spazi topologici  $X \times F$  con la proiezione al primo fattore  $X$  è tale che ogni fibra sia omeomorfa al secondo fattore  $F$ .

**Definizione 2.1.1.** Dati due spazi topologici  $F$  e  $X$ , il *fibrato banale* su  $X$  di fibra  $F$  è la proiezione sul primo fattore  $pr_1: X \times F \rightarrow X$ .

**Definizione 2.1.2.** Dati gli spazi topologici  $F$ ,  $E$  e  $X$ , una funzione continua suriettiva  $\pi: E \rightarrow X$  si dice *F-banalizzabile* se esiste un omeomorfismo  $\chi: E \rightarrow X \times F$  tale che il seguente diagramma commuta.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\chi} & X \times F \\ & \searrow \pi & \downarrow pr_1 \\ & & X \end{array}$$

La funzione  $\chi$  è detta una *banalizzazione* del fibrato.

**Definizione 2.1.3.** Siano  $F$ ,  $E$  e  $X$  degli spazi topologici. Una funzione continua suriettiva  $\pi: E \rightarrow X$  è un *fibrato di fibra  $F$*  se per ogni punto  $x \in X$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che  $\pi|_{\pi^{-1}(U)}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U$  è  $F$ -banalizzabile con banalizzazione  $\chi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  e  $\chi$  si dice *banalizzazione locale*. Lo spazio  $X$  è detto *base del fibrato* mentre  $E$  è detto *spazio totale del fibrato* e per ogni  $p \in X$  la fibra  $\pi^{-1}(p)$  si indica con  $E_p$ . Inoltre il fibrato si può indicare con la terna  $(\pi, E, X)$ .

**Definizione 2.1.4.** Due fibrati  $(\pi, E, X)$  e  $(\pi', E', X)$  si dicono *isomorfi* se esiste un omeomorfismo  $\Phi: E \rightarrow E'$  tale che  $\pi = \pi' \circ \Phi$ .

**Esempio 2.1.5.** Diamo ora alcuni esempi notevoli a seconda degli spazi topologici  $X$  e  $F$ :

- se  $F$  è un punto i fibrati di fibra  $F$  coincidono con gli omeomorfismi di  $X$ ;
- se  $F$  è discreto i fibrati di fibra  $F$  sono rivestimenti di  $X$ ;
- se  $X = S^1$  identificato con lo spazio topologico  $[0, 1] / \{0, 1\}$ ,  $F = [0, 1]$  e  $E$  è il nastro di Möbius identificato con il quoziente del quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  tramite la relazione di equivalenza data da  $(0, t) \sim (1, 1 - t)$  allora la funzione  $[(x, t)] \mapsto [x]$  è un fibrato di fibra  $F$  su  $X$  non isomorfo al fibrato banale.

Ora è opportuno tornare a parlare di varietà differenziabili per cui è necessario introdurre la classe di fibrati più utile nello studio delle varietà differenziabili: i fibrati vettoriali.

**Definizione 2.1.6.** Siano  $M$  una varietà differenziabile e  $r \in \mathbb{N}$ . Un *fibrato vettoriale di rango  $r$*  su  $M$  è il dato di:

- un'applicazione differenziabile  $\pi: E \rightarrow M$  tra varietà differenziabili;
- una struttura di spazio vettoriale (reale) di dimensione  $r$  sulla fibra  $E_p$  per ogni punto  $p$  di  $M$ ;

tale che esiste un ricoprimento aperto  $\{U_\alpha\}$  di  $M$  ed esistono dei diffeomorfismi

$$\chi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$$

tali per cui  $\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = pr_1 \circ \chi_\alpha$  e per ogni  $p \in U_\alpha$  la funzione  $\chi_\alpha|_{E_p} : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^r$  è un isomorfismo di spazi vettoriali. I fibrati vettoriali di rango 1 si dicono anche *fibrati in rette*.

Chiaramente un fibrato vettoriale è anche un fibrato di fibra  $\mathbb{R}^r$ .

**Definizione 2.1.7.** Siano  $(\pi_1, E_1, M_1)$  e  $(\pi_2, E_2, M_2)$  due fibrati vettoriali. Un *morfismo* tra i due fibrati è il dato di una coppia di applicazioni differenziabili  $L: E_1 \rightarrow E_2$  e  $F: M_1 \rightarrow M_2$  tali che:

- $\pi_2 \circ L = F \circ \pi_1$ , ossia il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{L} & E_2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \end{array}$$

- per ogni  $p \in M$  la funzione  $L|_{(E_1)_p} : (E_1)_p \rightarrow (E_2)_{F(p)}$  è lineare.

**Definizione 2.1.8.** Siano  $(\pi, E, M)$  un fibrato vettoriale su una varietà e  $(U, \varphi)$  una carta locale di  $M$ . Si dice che  $(U, \varphi)$  *banalizza*  $E$  se esiste una banalizzazione locale del fibrato definita su  $\pi^{-1}(U)$ . Se inoltre ogni carta di un atlante  $\mathcal{A}$  banalizza  $E$  allora si dice che l'atlante  $\mathcal{A}$  banalizza  $E$ .

**Osservazione 2.1.9.** Siano  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  un atlante che banalizza un fibrato  $(\pi, E, M)$  e  $\chi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$  le banalizzazioni locali. Le funzioni

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$$

inducono per ogni  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  un isomorfismo lineare di  $\{p\} \times \mathbb{R}^r$ ; per cui si costruisce una funzione  $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$  tale che

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(p)v) \quad \text{per ogni } p \in U_\alpha \cap U_\beta, v \in \mathbb{R}^r.$$

Il fatto che le banalizzazioni locali siano diffeomorfismi implica che la funzione  $g_{\alpha\beta}$  sia differenziabile, cioè  $g_{\alpha\beta} \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta, GL_r(\mathbb{R}))$ . Tali funzioni sono dette *funzioni di transizione del fibrato*.

La proposizione successiva metter  in luce l'importanza delle funzioni di transizione poich  esse sono sufficienti per definire un fibrato vettoriale che abbia come funzioni di transizione quelle date.

**Proposizione 2.1.10.** (a) Siano  $\{g_{\alpha\beta}\}$  le funzioni di transizione di un fibrato vettoriale  $(\pi, E, M)$  di rango  $r$  rispetto ad un atlante banalizzante  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \chi_\alpha)\}$ . Allora si ha che:

- $g_{\alpha\alpha}(p) = I_{\mathbb{R}^r}$  per ogni  $p \in U_\alpha$ ;
- $g_{\beta\alpha}(p) = (g_{\alpha\beta}(p))^{-1}$  per ogni  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ ;
- $g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p)$  per ogni  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ .

(b) Supponendo di avere un atlante  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  su una variet   $M$  e delle funzioni differenziabili  $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$  che soddisfano le propriet  precedenti, allora esiste un unico fibrato vettoriale  $(\pi, E, M)$  su  $M$  di rango  $r$  (a meno di isomorfismi) che ha  $g_{\alpha\beta}$  come funzioni di transizione.

*Dimostrazione.* La dimostrazione del punto (a) segue dai questi fatti:

- $\chi_\alpha \circ \chi_\alpha^{-1} = id_{U_\alpha \times \mathbb{R}^r}$ ;
- $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}|_{(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r} = (\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}|_{(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^r})^{-1}$ ;
- $\chi_\alpha \circ \chi_\gamma^{-1}|_{(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times \mathbb{R}^r} = (\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}|_{(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times \mathbb{R}^r}) \circ (\chi_\beta \circ \chi_\gamma^{-1}|_{(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times \mathbb{R}^r})$ .

Per dimostrare (b)   opportuno costruire un fibrato vettoriale di rango  $r$  su  $M$ . Considero l'insieme  $T = \bigsqcup (U_\alpha \times \mathbb{R}^r)$  e su questo insieme considero la relazione di equivalenza data da  $(x, v) \sim (y, w)$  se  $x = y$  con  $x \in U_\alpha, y \in U_\beta$  e  $v = g_{\alpha\beta}(x)w$ . Le tre propriet  delle funzioni  $\{g_{\alpha\beta}\}$  garantiscono che questa sia una relazione di equivalenza. Sia  $E = T/\sim$  il quoziente di  $T$  e sia  $P: T \rightarrow E$  la proiezione al quoziente. Le banalizzazioni locali  $\chi_\alpha: P(U_\alpha \times \mathbb{R}^r)/\sim \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^r$  sono date da  $\chi_\alpha([x, v]) = (x, v)$ . Da questa definizione segue immediatamente che le funzioni di transizione sono le funzioni  $\{g_{\alpha\beta}\}$  date e le banalizzazioni locali inducono su  $T/\sim$  una struttura differenziabile tale per cui esse sono diffeomorfismi e la proiezione  $\pi: T/\sim \rightarrow M$  data da  $\pi([x, v]) = x$    ben definita, differenziabile e rende  $(\pi, T/\sim, M)$  un fibrato vettoriale.  $\square$

**Osservazione 2.1.11.** Ora si può definire il *fibrato tangente*  $TM$  ad una varietà  $M$  di dimensione  $n$  con un atlante  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ . Siano  $TM$  l'unione disgiunta degli spazi  $T_pM$  al variare di  $p \in M$  e  $\pi: TM \rightarrow M$  che manda ogni vettore di  $T_pM$  in  $p$ . Per ogni  $\alpha$  se  $\varphi_\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$  e  $v = (v_1, \dots, v_n)$  si definisce la banalizzazione  $\chi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  data da

$$\chi_\alpha \left( \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} \Big|_p \right) = (p, v);$$

la funzione di transizione  $g_{\alpha\beta}$  è data dalla matrice jacobiana del cambio di coordinate  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  come già anticipato nell'Osservazione 1.3.13.

**Esempio 2.1.12.** Sia  $f: M \rightarrow N$  è una funzione differenziabile tra varietà. Il differenziale di  $f$  è un morfismo tra i fibrati tangenti  $df: TM \rightarrow TN$ ; talvolta si indicherà anche con  $Tf$ .

**Definizione 2.1.13.** Sia  $\{(\pi_k, E_k, M)\}$  una famiglia al più numerabile di fibrati vettoriali su  $M$  e siano  $F_k: E_k \rightarrow E_{k-1}$  morfismi di fibrati; cioè tali che  $\pi_k = \pi_{k-1} \circ F_k$ . Diciamo che  $(E_\bullet, F_\bullet)$  è una *successione esatta di fibrati vettoriali* se per ogni punto  $x \in M$  e per ogni  $k$  vale  $\text{Ker}(F_{k-1}|_{(E_{k-1})_x}) = \text{Im}(F_k|_{(E_k)_x})$ ; ossia i morfismi  $F_k$  inducono sulle fibre di ogni punto  $x \in M$  una successione esatta di spazi vettoriali.

**Osservazione 2.1.14.** Siano  $f: M \rightarrow N$  un'applicazione differenziabile e  $\pi: E \rightarrow N$  un fibrato vettoriale di rango  $r$  su  $N$ . Considero l'insieme

$$f^*E := \{(x, e) \in M \times E \mid f(x) = \pi(e)\}$$

e le funzioni  $p: f^*E \rightarrow M$  e  $q: f^*E \rightarrow E$ , tali che  $p(x, e) = x$  e  $q(x, e) = e$ . Siccome  $(f \circ p)(x, e) = f(x)$  e  $(\pi \circ q)(x, e) = \pi(e)$ , per la definizione di  $f^*E$  il seguente diagramma commuta.

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{q} & E \\ \downarrow p & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

In questo modo si costruisce un fibrato vettoriale  $(p, f^*E, M)$  di rango  $r$  su  $M$  detto *fibrato pull-back*. Se  $U$  è un aperto banalizzante e  $\chi\pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$  è la sua banalizzazione locale, allora si definisce la banalizzazione locale del fibrato pull-back

$\tilde{\chi}: p^{-1}(f^{-1}(U)) \rightarrow f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^r$  data da  $\tilde{\chi}(x, e) = (x, pr_2(\chi(e)))$ , dove  $pr_2$  indica la proiezione al secondo fattore  $\mathbb{R}^r$ . Le funzioni di transizione  $\tilde{g}_{\alpha\beta}: f^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$  sono definite da  $\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(f(x))$ .

**Esempio 2.1.15.** Sia  $M$  una varietà, sia  $S$  una sottovarietà di  $M$  e sia  $\iota: S \rightarrow M$  l'inclusione. Il fibrato pull-back  $\iota^*TM$  si indica con  $T_S M$  o con  $TM|_S$  e le fibre di  $T_S M$  sono gli spazi tangenti a  $M$   $T_p M$  per ogni punto  $p$  di  $S$ .

**Definizione 2.1.16.** Siano  $M$  una varietà,  $S$  una sottovarietà di  $M$  e  $\iota: S \rightarrow M$  l'inclusione. Il quoziente  $T_S M/TS$  che ha come fibre i quozienti  $T_p M/T_p S$  è detto *fibrato normale algebrico* di  $S$  in  $M$ . Si ha quindi la successione esatta di fibrati vettoriali

$$0 \longrightarrow TS \xrightarrow{T\iota} T_S M \xrightarrow{P_q} T_S M/TS \longrightarrow 0$$

dove il morfismo  $T\iota$  è dato dall'inclusione di  $T_p S$  in  $T_p M$ , il morfismo  $P_q$  è dato dalla proiezione al quoziente  $T_p M \rightarrow T_p M/T_p S$ . Il fibrato normale di  $S$  in  $M$  si indica con  $\nu_{S,M}$ .

**Definizione 2.1.17.** Sia  $f: M \rightarrow W$  una funzione differenziabile tra varietà e sia  $N$  una sottovarietà di  $W$ .  $f$  si dice *trasversa* rispetto a  $N$  se per ogni  $y = f(x)$  con  $y \in N$  e  $x \in M$  vale

$$T_y W = df_x(T_x M) + T_y N.$$

## 2.2 Sezioni di fibrati

**Definizione 2.2.1.** Sia  $(\pi, E, M)$  un fibrato vettoriale su una varietà  $M$ . Una funzione differenziabile  $s: M \rightarrow E$  tale che  $\pi \circ s = id_M$  si dice *sezione* del fibrato. L'insieme delle sezioni di  $E$  è uno spazio vettoriale e si indica con  $\mathcal{E}(M)$ . La *sezione nulla*  $O_E$  è la sezione che associa ad ogni  $p \in M$  il vettore  $O_{E_p}$ . Frequentemente si identifica  $M$  con una sottovarietà di  $E$  tramite  $O_E$ . Una sezione del fibrato tangente  $TM$  è detta *campo vettoriale* su  $M$ .

**Definizione 2.2.2.** Siano  $(\pi, E, M)$  un fibrato vettoriale di rango  $r$  e  $U \subseteq M$  un aperto di  $M$ . Una  $r$ -upla di sezioni di  $E$   $(s_1, \dots, s_r)$  è detta *riferimento locale* per  $E$  su  $U$  se

in ogni punto  $p \in U$   $\{s_1(p), \dots, s_r(p)\}$  è una base di  $E_p$ . Un riferimento locale su  $M$  è detto *riferimento globale*.

**Osservazione 2.2.3.** Dare un riferimento locale  $(s_1, \dots, s_r)$  su un aperto  $U$  è equivalente a dare una banalizzazione locale. Infatti tramite  $\xi: U \times \mathbb{R}^r \rightarrow \pi^{-1}(U)$  che associa a  $(p, w)$  il punto  $w_1 s_1(p) + \dots + w_r s_r(p)$  si ottiene l'inversa di una banalizzazione locale. Data una banalizzazione locale  $\chi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$  si ottiene un riferimento locale  $(s_1, \dots, s_r)$  tale che per ogni  $p \in U$   $s_j(p) = \chi^{-1}(p, e_j)$ . Per questo motivo non è affatto scontata l'esistenza di un riferimento globale, poiché l'esistenza di questo darebbe un isomorfismo con il fibrato banale. Per i fibrati in rette l'esistenza di una sezione che non si annulla mai dà un isomorfismo con il fibrato banale.

## 2.3 Complementi

In questa sezione vengono date alcune definizioni complementari propedeutiche alla comprensione del capitolo successivo, tra cui le definizioni di intorni tubolari, collari e altre definizioni che riguardano il concetto di orientazione e orientabilità.

**Definizione 2.3.1.** Sia  $S \subseteq M$  una sottovarietà della varietà  $M$ . Un *intorno tubolare* di  $S$  è la coppia  $(f, \xi)$  dove  $\xi = (\pi, E, S)$  un fibrato vettoriale su  $S$  e  $f: E \rightarrow S$  è un embedding tale che  $f|_S = id_S$  e  $f(E)$  è un intorno aperto di  $S$  in  $M$ .

**Definizione 2.3.2.** Sia  $M$  una varietà con bordo. Un *collare* su  $M$  è un embedding  $f: \partial M \times [0, 1) \rightarrow M$  tale che  $f(x, 0) = x$  per ogni  $x \in \partial M$ .

In alternativa si può dare un collare su  $M$  come una sottovarietà di  $M$  che è anche un fibrato di fibra  $[0, +\infty)$  su  $\partial M$ . Ogni varietà con bordo ha un collare.

**Definizione 2.3.3.** Siano  $M$  una varietà e  $\xi = (\pi, E, M)$  un fibrato vettoriale su  $M$ .  $\xi$  si dice *orientabile* se esiste un atlante banalizzante  $\mathcal{A}$  tale che le funzioni di transizione abbiano immagine contenuta nel sottogruppo delle trasformazioni lineari con determinante positivo. Una varietà  $M$  si dice *orientabile* se il fibrato tangente  $TM$  è orientabile.

Esiste anche una definizione equivalente che esplicita l'orientazione del fibrato.

**Definizione 2.3.4.** Siano  $M$  una varietà,  $\xi = (\pi, E, M)$  un fibrato vettoriale su  $M$  di rango  $r$  e  $\mathcal{A}$  un atlante banalizzante. Un'*orientazione*  $\omega$  di  $\xi$  è una famiglia  $\omega = \{\omega_x\}_{x \in M}$  di orientazioni  $\omega_x$  delle fibre  $E_x$  con la condizione che per ogni banalizzazione  $\chi$  risulti che  $\chi|_{E_x} : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^r$  ha determinante positivo.

# Capitolo 3

## Grado e numero di Eulero

In questo capitolo si danno le nozioni di grado di una mappa differenziabile e il numero di Eulero di un fibrato su una varietà, passando prima per la definizione di numero di intersezione. Si dimostrano inoltre la possibilità di classificare mappe a valori in  $S^n$  in base al grado e altri risultati sulle sezioni di un fibrato, tra cui i campi vettoriali.

### 3.1 Grado di una mappa

**Definizione 3.1.1.** Siano  $(M, \omega)$  e  $(N, \theta)$  varietà orientate. Si definisce l'*orientazione prodotto*  $\omega \times \theta$  di  $M \times N$  come la famiglia di orientazioni  $\omega_x \oplus \theta_y$  dello spazio tangente  $T_{(x,y)}(M \times N)$ , che è canonicamente isomorfo a  $T_x M \oplus T_y N$ , per ogni  $(x, y) \in M \times N$ .

**Osservazione 3.1.2.** Siano  $M$  una varietà con bordo orientata con orientazione  $\omega$  e  $f: \partial M \times [0, 1) \rightarrow M$  un collare su  $M$ . L'orientazione standard di  $[0, 1)$  induce un'orientazione  $i$  del fibrato normale  $\nu$  che non dipende da  $f$ . Tramite la successione esatta di fibrati vettoriali

$$0 \longrightarrow T(\partial M) \longrightarrow T_{\partial M} M \longrightarrow \nu_{\partial M, M} \longrightarrow 0$$

si ottiene un'orientazione  $\partial\omega = \omega/i$  di  $\partial M$ .

**Osservazione 3.1.3.** In altre parole il collare  $f$  su  $M$  induce un'orientazione su  $\partial M$  tramite  $Tf$  con la richiesta che preservi l'orientazione. Se  $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$  è una base

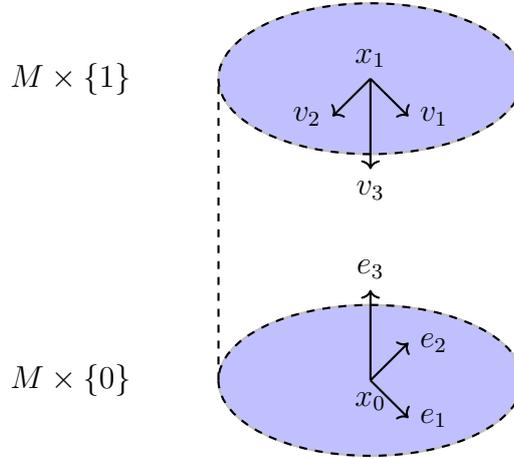


Figura 3.1: Un esempio di orientazione su  $M \times [0, 1]$

orientante per  $\omega_x$  e  $e_n$  è “rivolto verso l’interno”, allora  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  è orientante per  $(\partial\omega)_x$ . Siano  $(M, \theta)$  una varietà senza bordo orientata,  $I = [0, 1]$  con l’orientazione  $\rho_1$  indotta dall’inclusione in  $\mathbb{R}$  e  $\omega = \theta \times \rho_1$  l’orientazione di  $M \times I$ . Il bordo di  $M \times I$  è  $\partial(M \times I) = (M \times \{0\}) \cup (M \times \{1\})$  e l’orientazione  $\partial\omega$  sulle due componenti del bordo è  $\partial\omega|_{M \times \{0\}} = \theta$  e  $\partial\omega|_{M \times \{1\}} = -\theta$ .

Se ci riferiamo a  $M$  sottintendendo l’orientazione  $\theta$ , allora  $(M, -\theta)$  sarà indicato per comodità con  $-M$ . Per cui si potrà scrivere  $\partial(M \times I) = (M \times \{0\}) \cup (-M \times \{1\})$ . Per esempio, nella Figura 3.1 l’orientazione  $\omega_{(x,0)}$  è data da  $[e_1, e_2, e_3]$  e  $\omega_{(x,1)}[v_1, v_2, v_3]$  con la differenza che  $(\partial\omega|_{M \times \{0\}})_{(x,0)} = [e_1, e_2]$  e  $(\partial\omega|_{M \times \{1\}})_{(x,1)} = [v_1, v_2]$ . Siccome  $v_3 = -e_3$ ,  $e_1 = v_1$  e  $e_2 = -v_2$  risulta che l’orientazione sulle componenti del bordo sono opposte.

**Esempio 3.1.4.** Sia  $D^{n+1}$  il disco unitario contenuto in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Il bordo  $S^n = \partial D^{n+1}$  eredita un’orientazione che viene detta *standard*. Si mostra facilmente che la proiezione stereografica  $\varphi_N: S^n \setminus \{N\}$  preserva l’orientazione. Per ogni  $m$  naturale la mappa antipodale  $a: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  preserva l’orientazione di  $\mathbb{R}^m$  solo se  $m$  è pari e su  $\partial D^m$  preserva l’orientazione del fibrato normale. Quindi la mappa antipodale  $a|_{S^n}$  preserva l’orientazione solo se  $n$  è dispari.

**Lemma 3.1.5.** Siano  $W$  una varietà con bordo con orientazione  $\omega$  e  $K \subseteq W$  un arco di  $W$  trasverso a  $\partial W$  nei suoi estremi  $u, v \in \partial W$ . Se  $\kappa$  è un'orientazione di  $K$  allora  $\omega_u/\kappa_u = (\partial\omega)_u$  se e solo se  $\omega_v/\kappa_v = -(\partial\omega)_v$ .

*Dimostrazione.* Se  $X_u, X_v$  sono i vettori tangenti a  $K$  rispettivamente in  $u, v$  appartenenti a  $\kappa$  allora uno dei due è rivolto verso l'esterno mentre l'altro è rivolto verso l'interno. Si usa una costruzione con un intorno tubolare di  $K$  come nella figura relativa all'Osservazione 3.1.3; il fatto che  $K$  sia trasverso garantisce l'esistenza di un tale intorno.  $\square$

**Definizione 3.1.6.** Siano  $(M, \omega)$  e  $(N, \theta)$  due  $n$ -varietà compatte, orientate e senza bordo e sia  $f: M \rightarrow N$  una funzione differenziabile. Sia  $y \in N$  un valore regolare e sia  $x \in f^{-1}(y)$ . Se l'isomorfismo  $T_x f: T_x M \rightarrow T_y N$  preserva l'orientazione allora si dice che  $x$  è di *tipo positivo* e si scrive  $\deg_x f = 1$  mentre se inverte l'orientazione si dice che  $x$  è di *tipo negativo* e si scrive  $\deg_x f = -1$ . Il *grado di  $f$  su  $y$*  è definito come

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x f.$$

Se  $f^{-1}(y) = \emptyset$  allora si pone che  $\deg(f, y) = 0$ .

La fibra  $f^{-1}(y)$  è un sottoinsieme chiuso di  $M$ , che è anche compatto; quindi  $f^{-1}(y)$  è compatto e ovviamente discreto perché  $M$  è di Hausdorff. Per cui  $f^{-1}(y)$  è finito e quindi  $\deg(f, y)$  è un numero intero.

**Esempio 3.1.7.** Sia  $m$  un intero diverso da 0 e si consideri  $S^1$  come sottovarietà di  $\mathbb{C}$ . La funzione  $f_m: S^1 \rightarrow S^1$  definita da  $f_m(z) = z^m$  ha  $1 \in S^1$  come valore regolare e  $\deg(f_m, 1) = m$ . La scelta di  $m \neq 0$  è necessaria affinché 1 sia un valore regolare.

**Lemma 3.1.8.** Siano  $W$  una varietà compatta, orientata e di dimensione  $n+1$ ,  $N$  una varietà compatta, orientata, senza bordo e di dimensione  $n$ . Se  $h \in C^\infty(W, N)$  e  $y \in N$  è regolare per  $h$  e  $h|_{\partial W}$ , allora  $\deg(h|_{\partial W}, y) = 0$ .

*Idea della dimostrazione.*  $h^{-1}(y)$  è unione disgiunta di archi trasversi a  $\partial W$ . Quindi per il Lemma 3.1.5 si hanno cancellazioni a due a due.  $\square$

**Lemma 3.1.9.** Siano  $M$  e  $N$  varietà differenziabili. Se  $\tilde{f}: M \rightarrow N$  è una funzione continua allora esiste  $f \in C^\infty(M, N)$  omotopa a  $\tilde{f}$ . Se  $f, g \in C^\infty(M, N)$  sono omotope allora esiste un'omotopia liscia  $M \times I \rightarrow N$  tra  $f$  e  $g$ .

Questi fatti sono trattati più approfonditamente in [5, 2]. Il lemma appena illustrato semplifica alcune dimostrazioni successive.

**Teorema 3.1.10.** Siano  $(M, \omega), (N, \theta)$  due varietà compatte, orientate, senza bordo di dimensione  $n$ . Se  $f, g \in C^\infty(M, N)$  sono mappe omotope con un valore regolare  $y \in N$  in comune allora  $\deg(f, y) = \deg(g, y)$ .

*Dimostrazione.* Esiste un'omotopia  $h \in C^\infty(M \times I, N)$ .  $\partial(M \times I) = (M \times \{0\}, \omega) \cup (M \times \{1\}, -\omega)$ . Per cui usando il Lemma 3.1.4 e tenendo conto delle orientazioni si ottiene

$$0 = \deg(h|_{\partial(M \times I)}, y) = \deg(f, y, \omega, \theta) + \deg(g, y, -\omega, \theta) = \deg(f, y) - \deg(g, y). \quad \square$$

**Lemma 3.1.11.** Siano  $M, N$  due  $n$ -varietà compatte, orientate, senza bordo con  $N$  connessa. Siano  $y, z \in N$  due valori regolari per una mappa  $f \in C^\infty(M, N)$ , allora  $\deg(f, y) = \deg(f, z)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $h: N \rightarrow N$  un diffeomorfismo omotopo a  $id_N$  tale che  $h(y) = z$ . Da questo segue che  $\deg(h, z) = \deg_y h = 1$ . Siccome  $h$  è omotopa a  $id_N$  si ha che  $\deg(f, y) = \deg(h \circ f, z)$  e che  $h \circ f$  è omotopa a  $f$ ; quindi per il Corollario 3.1.5. si ha che  $\deg(h \circ f, z) = \deg(f, z)$ . Resta da costruire  $h$ . Supponendo di avere  $z$  e  $y$  contenuti in uno stesso aperto  $U$  tale per cui  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una carta si costruisce  $h$  in modo che su  $N \setminus U$  sia l'identità e su  $U$  sia  $\varphi^{-1} \circ (x \mapsto x - \varphi(y) + \varphi(z)) \circ \varphi$ . Siccome  $N$  è connessa si può trovare una tale carta.  $\square$

Ora si può dare la definizione del grado di una mappa liscia; il Lemma 3.1.9. ne consente anche l'estensione a mappe continue stabilendo che il grado di una mappa continua coincide con il grado di una mappa liscia omotopa.

**Definizione 3.1.12.** Sia  $f: M \rightarrow N$  una mappa liscia tra due  $n$ -varietà compatte, orientate, senza bordo e con  $N$  connessa. Il *grado* di  $f$  è definito come  $\deg f = \deg(f, y)$ , dove  $y \in N$  è un qualsiasi valore regolare per  $f$ .

Il Lemma 3.1.11 garantisce che la definizione è ben posta. Si può dare un ulteriore risultato molto interessante nel caso di una composizione di funzioni differenziabili.

**Lemma 3.1.13.** Siano  $M$ ,  $N$  e  $S$  delle  $n$ -varietà connesse, compatte, orientate e senza bordo. Date due funzioni differenziabili  $f \in C^\infty(M, N)$  e  $g \in C^\infty(N, S)$ , vale  $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$ .

*Dimostrazione.* Se  $z \in S$  è un valore regolare per  $g \circ f$  allora ogni  $y \in g^{-1}(z)$  è un valore regolare per  $f$ ; poiché  $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$  è un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni  $x \in f^{-1}(y)$ . Applicando il teorema di Binet alla composizione di isomorfismi degli spazi tangenti si ottiene che  $\deg_x(g \circ f) = \deg_y g \cdot \deg_x f$ ; quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} \deg(g \circ f, z) &= \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(z)} \deg_x(g \circ f) \\ &= \sum_{y \in g^{-1}(z)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_y g \cdot \deg_x f \\ &= \sum_{y \in g^{-1}(z)} \deg_y g \cdot \left( \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x f \right) \\ &= \sum_{y \in g^{-1}(z)} \deg_y g \cdot (\deg(f, y)) \\ &= \deg f \cdot \deg(g, z) = \deg f \cdot \deg g. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 3.1.14.** Siano  $M$ ,  $N$  due  $n$ -varietà connesse, compatte, senza bordo, con  $N$  connessa. Due mappe omotope  $f, g: M \rightarrow N$  hanno lo stesso grado.

**Osservazione 3.1.15.** Siano  $M$ ,  $N$  due  $n$ -varietà compatte, orientate, senza bordo, con  $N$  connessa. Sia  $W$  una  $(n+1)$ -varietà compatta con bordo tale che  $\partial W = M$ . Se  $f \in C^\infty(M, N)$  si estende a una funzione differenziabile  $W \rightarrow N$  allora  $\deg f = 0$ . Questo risultato è una conseguenza del Lemma 3.1.8.

**Osservazione 3.1.16.** Una conseguenza di questi primi risultati è che una funzione differenziabile  $f: M \rightarrow N$  tra varietà compatte, orientate, senza bordo e con  $N$  connessa è suriettiva se  $\deg f \neq 0$ . Il teorema di Sard garantisce che l'insieme dei valori regolari sia denso nel codominio ed essendo  $f$  chiusa si ha la dimostrazione di questo fatto.

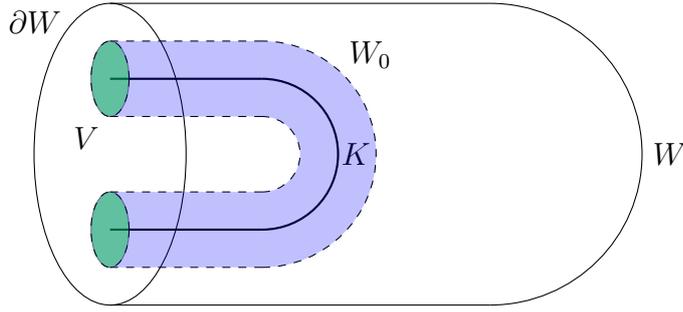


Figura 3.2: Un disegno semplificato per il Lemma 3.1.17

**Lemma 3.1.17.** Siano  $W$  una  $(n + 1)$ -varietà orientata e  $K \subseteq W$  un arco che soddisfa  $\partial K = K \cap \partial W$ . Siano  $V \subseteq \partial W$  un intorno di  $\partial K$ ,  $N$  una  $n$ -varietà orientata, senza bordo e  $f \in C^\infty(V, N)$ . Siano  $y \in N$  un valore regolare per  $f$  e  $f^{-1}(y) = \partial K$ . Se  $f$  ha gradi opposti agli estremi di  $K$  allora esiste un intorno  $W_0 \subseteq W$  di  $K$  e una mappa  $g: W_0 \rightarrow N$  tale che

- $g = f$  su  $W_0 \cap V$
- $y$  è un valore regolare per  $g$
- $g^{-1}(y) = K$

Questo lemma è dimostrato in un caso semplificato in [2, 5.1].

**Teorema 3.1.18.** Siano  $W$  una  $(n + 1)$ -varietà compatta, orientata, con bordo e

$$f: \partial W \rightarrow S^n$$

una mappa liscia. Allora  $f$  si estende a una mappa liscia  $W \rightarrow S^n$  se e solo se  $\deg f = 0$ .

*Dimostrazione.* Si è già visto nell'Osservazione 3.1.14 che la possibilità di estendere  $f$  implica  $\deg f = 0$ . Supponendo  $\deg f = 0$ , è opportuno costruire l'estensione di  $f$ . Sia  $y \in S^n$  un valore regolare per  $f$ , allora  $f^{-1}(y)$  contiene  $m$  punti del tipo positivo e  $m$  punti del tipo negativo. Esiste una famiglia di archi disgiunti  $K_1, \dots, K_m$  tali che  $\partial K = f^{-1}(y)$  se  $K = K_1 \cup \dots \cup K_m$  e ogni componente  $K_j$  ha un estremo del tipo positivo e l'altro del tipo negativo. Ora si può applicare il Lemma 3.1.10. ad ogni componente  $K_j$  in modo da ottenere un intorno  $W_0$  di  $K$  e una mappa  $g: W_0 \rightarrow S^n$  tale che  $g|_{\partial W_0} = f$  e  $g^{-1}(y) = K$ .

Sia ora  $U \subseteq W_0$  un intorno aperto di  $K$  tale che  $\bar{U} \subseteq W_0$ . Se  $X = \bar{U} \setminus U$  allora  $f$  e  $g$  formano una mappa continua  $H: (\bar{U} \cup \partial W) \setminus U \rightarrow S^n \setminus \{y\}$ . Il teorema di estensione di Tietze permette un'estensione di  $H$  ad una mappa  $h: W \setminus U \rightarrow S^n \setminus \{y\}$ . L'estensione di  $f$  è uguale a  $g$  su  $W_0$  ed è uguale a  $h$  su  $W \setminus U$ .  $\square$

Questo risultato permette di classificare le classi di omotopia di mappe da una  $n$ -varietà connessa, compatta a valori in  $S^n$

**Teorema 3.1.19.** Siano  $M$  una  $n$ -varietà connessa, compatta, orientata,  $f, g \in C^\infty(M, S^n)$  e  $n \geq 1$ . Allora valgono le seguenti:

- (a) se  $\partial M = \emptyset$ , allora  $f$  è omotopa a  $g$  se e solo se  $\deg f = \deg g$  e ci sono mappe per ogni grado  $m \in \mathbb{Z}$ ;
- (b) se  $\partial M \neq \emptyset$ , allora  $f$  e  $g$  sono omotope e  $\deg f = \deg g = 0$ .

*Dimostrazione.* Per mostrare il punto (a) serve mostrare che esistono mappe per ogni grado  $m \in \mathbb{Z}$ . Se  $m = 0$  si sceglie l'applicazione costante  $x \mapsto N$ , dove  $N$  è il polo nord di  $S^n$ . Siano  $m > 0$  e  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$  delle  $n$ -carte di  $M$  tali per cui gli  $U_i$  sono disgiunti. Possiamo supporre che per ogni  $i$  valga  $\varphi(U_i) = \mathbb{R}^n$ . Sia  $s: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$  l'inversa della proiezione stereografica che preserva l'orientazione. Considero la funzione  $\tilde{f}$  definita da

$$\tilde{f} = \begin{cases} s \circ \varphi_i & \text{su } U_i \text{ per ogni } i \\ N & \text{su } M \setminus \bigcup U_i \end{cases}.$$

Sia ora  $f \in C^\infty(M, S^n)$  omotopa a  $\tilde{f}$ , allora  $\deg f = m$  mentre se fosse stata scelta  $s$  in modo che invertisse l'orientazione allora si avrebbe  $\deg f = -m$ . Inoltre se  $g$  è tale che  $\deg g = m$  si ha che  $g$  è omotopa a  $\tilde{f}$ , che si dimostra applicando il Teorema 3.1.18 alla varietà  $M \times [0, 1]$ ; questo conclude la dimostrazione di (a).

Sia ora  $M$  nelle ipotesi del caso (b). Considero  $M \times \{0, 1\}$  con la relazione d'equivalenza  $\sim$  definita da  $(x, i) \sim (y, j)$  se  $(x, i) = (y, j)$  oppure se  $x = y$  e  $x, y \in \partial M$ . Sia  $M' = M \times \{0, 1\} / \sim$ , cioè due copie di  $M$  incollate lungo il bordo. Siano  $p: M' \rightarrow M$  l'applicazione che associa a  $[(x, i)]$  il punto  $x \in M$  e  $i: M \rightarrow M'$  la funzione che manda  $x$  in  $[(x, 0)]$ . Si vede facilmente che  $\deg(f \circ p) = 0$  e siccome  $M'$  è senza bordo si ha che  $f \circ p$  è omotopa ad una mappa costante. Il fatto che  $f \circ p \circ i = f$  ci garantisce infine che

$f$  è omotopa ad una mappa costante. Questo basta per concludere che  $f, g$  come nelle ipotesi sono omotope e hanno il grado di una mappa costante, cioè 0.  $\square$

**Esempio 3.1.20.** Le mappe  $S^n \rightarrow S^n$  di grado  $m$  si possono costruire induttivamente sulla dimensione  $n$ . Se  $X$  è uno spazio topologico, la *sospensione* di  $X$  è definita come  $S(X) = (X \times [0, 1]) / \sim$ , dove la relazione di equivalenza  $\sim$  ha come uniche classi non banali  $X \times \{0\}$  e  $X \times \{1\}$ . Si vede facilmente che  $S(S^n)$  è omeomorfa a  $S^{n+1}$  e quindi può ereditarne la struttura differenziabile. Si vede inoltre che se  $f: S^n \rightarrow S^n$  è una mappa continua,  $Sf: S(S^n) \rightarrow S(S^n)$  che associa a  $[(x, t)]$  il valore  $[(f(x), t)]$  ha lo stesso grado di  $f$ ; per cui è sufficiente costruire le mappe di grado  $m$  per il caso  $n = 1$ . Se si considera  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$  la circonferenza unitaria del piano complesso, la mappa di grado  $m$  è data da  $z \mapsto z^m$ .

**Esempio 3.1.21.** L'insieme dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ , che è isomorfo a un piano reale, può essere compattificato tramite la compattificazione di Alexandroff. Questa compattificazione è detta *sfera di Riemann* ed è omeomorfa a  $S^2$  e anche a  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . La funzione polinomiale  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  associata a un polinomio  $p$  di grado  $d \neq 0$  può essere estesa dichiarando che  $p(\infty) = \infty$ ; per cui si può definire il grado di questa funzione, che risulta essere  $d$ . Siccome i polinomi non nulli hanno zeri isolati e valgono le condizioni di *Cauchy-Riemann* per le funzioni complesse si deduce che ogni punto in  $p^{-1}(0)$  ha il tipo positivo. Da questi fatti si deduce anche il teorema fondamentale dell'algebra. Inoltre si possono estendere allo stesso modo le funzioni razionali definite da  $z \mapsto \frac{p(z)}{q(z)}$ ; risulta che il grado di tale mappa è la differenza dei gradi  $\deg p - \deg q$  dei due polinomi  $p, q \in \mathbb{C}[z]$ .

**Esempio 3.1.22.** Un altro risultato interessante riguardo alle mappe lisce tra sfere riguarda le funzioni differenziabili  $f: S^n \rightarrow S^n$  tali che  $f(x) = f(-x)$  per ogni  $x \in S^n$ . Una tale funzione  $f$  ha sicuramente grado pari; infatti se  $y \in S^n$  è un valore regolare allora  $f^{-1}(y)$  ha un numero pari di elementi perché se  $x$  appartiene a  $f^{-1}(y)$  allora anche  $-x$  vi appartiene. Un'altra spiegazione di questo fatto si può dare sfruttando che  $f$  definisce una funzione differenziabile  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow S^n$  e  $S^n$  dà un rivestimento a due fogli di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . La parità del grado è ovvia perché nel calcolo compare una quantità pari di addendi appartenenti a  $\{1, -1\}$ .

## 3.2 Numero di Eulero

**Definizione 3.2.1.** Siano  $W$  una varietà orientata di dimensione  $n+m$  e  $N \subseteq W$  una  $n$ -sottovarietà chiusa e orientata. Sia  $M$  una  $m$ -varietà compatta, orientata e supponiamo  $\partial M = \partial N = \emptyset$ . Sia  $f: M \rightarrow W$  una funzione differenziabile trasversa a  $N$ . Un punto  $x \in f^{-1}(N)$  ha il *tipo positivo* o *negativo*, rispettivamente, se l'isomorfismo dato dalla composizione

$$T_x M \xrightarrow{T_x f} T_{f(x)} W \xrightarrow{\pi} T_{f(x)} W / T_{f(x)} N$$

preserva o inverte l'orientazione e si scrive  $\#_x(f, N) = \pm 1$ . Il *numero di intersezione* di  $(f, N)$  è il numero intero

$$\#(f, N) = \sum_{x \in f^{-1}(N)} \#_x(f, N).$$

**Teorema 3.2.2.** Siano  $W$  una varietà orientata di dimensione  $n+m$  e  $N \subseteq W$  una  $n$ -sottovarietà chiusa e orientata. Sia  $M$  una  $m$ -varietà compatta, orientata e supponiamo  $\partial M = \partial N = \emptyset$ . Siano  $f, g \in C^\infty(M, W)$  trasverse a  $N$ . Se  $f$  e  $g$  sono omotope allora  $\#(f, N) = \#(g, N)$ .

Per cui si può dare una buona definizione del numero di intersezione di una qualunque mappa, che soddisfa le stesse condizioni della definizione ad eccezione della trasversalità, come il numero di intersezione di una mappa differenziabile e trasversa ad essa omotopa. L'esistenza di una mappa trasversa a  $N$  e omotopa a una mappa data è dovuta al fatto che l'insieme delle funzioni differenziabili da  $M$  a  $W$  trasverse a  $N$  è denso in  $C^\infty(M, W)$ ; questo ultimo fatto è detto teorema di trasversalità [2, 5.2.1].

*Dimostrazione.* Sia  $H: M \times I \rightarrow W$  un'omotopia liscia tra  $f$  e  $g$ . In modo simile al Teorema 3.1.10 considerando che  $\partial(M \times I) = (M \times \{0\}) \cup (-M \times \{1\})$  si ottiene che

$$0 = \#(H|_{\partial(M \times I)}, N) = \#(f, N) - \#(g, N).$$

□

Si può notare che il numero di intersezione  $\#(f, N)$  di una mappa trasversa a  $N$  nel caso di  $N = \{y\}$  non è altro che il grado  $\deg(f, y)$  e la richiesta di  $f$  trasversa a  $\{y\}$  è identica alla richiesta che  $y$  sia un valore regolare.

**Definizione 3.2.3.** Siano  $W$  una varietà orientata di dimensione  $n+m$  e  $N \subseteq W$  una  $n$ -sottovarietà chiusa e orientata. Sia  $M$  una  $m$ -varietà compatta, orientata e supponiamo  $\partial M = \partial N = \emptyset$ . Se anche  $M$  è una sottovarietà di  $N$  e  $\iota: M \rightarrow W$  è l'inclusione allora si definisce  $\#(M, N) := \#(\iota, N)$ , talvolta si indica  $\#(M, N) = \#(M, N; W)$  ed è detto *numero di intersezione di  $M$  e  $N$  dentro  $W$* . Inoltre se  $\dim W = 2 \dim M$  si definisce il *numero di autointersezione di  $M$  dentro  $W$*  come  $\#(M, M; W)$ .

Per quanto spiegato precedentemente non è necessario che  $\iota$  sia trasversa a  $N$ .

**Esempio 3.2.4.** Siano  $M$  e  $N$  sono due  $n$  varietà compatte, orientate, senza bordo con  $N$  connessa e sia  $f \in C^\infty(M, N)$ . Se  $Gr_f$  è il grafico di  $f$  contenuto in  $M \times N$  e  $y \in N$  è un valore regolare per  $f$  allora  $\#(Gr_f, M \times \{y\}) = \deg(f, y) = \deg f$ .

**Definizione 3.2.5.** Sia  $\xi = (\pi, E, M)$  un fibrato vettoriale di rango  $n$  sulla  $n$ -varietà  $M$  connessa, compatta e senza bordo. Si identifica  $M$  con la sezione nulla del fibrato. Il *numero di Eulero* di  $\xi$  è definito come il numero di autointersezione della sezione nulla nello spazio totale  $E$  del fibrato  $\xi$   $X(\xi) := \#(M, M) = \#(M, M; E)$ .

**Osservazione 3.2.6.** Per calcolare il numero di Eulero  $X(\xi)$  si sceglie una sezione  $h: M \rightarrow E$  omotopa alla sezione nulla  $O_E: M \rightarrow E$ , trasversa a  $O_E(M)$  tale che  $\pi \circ h$  sia un diffeomorfismo. Siano  $g = h \circ (p \circ h)^{-1}$  e  $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq M$  gli zeri di  $g$ . Scegliendo intorno  $U_i$  di  $x_i$  per ogni  $i$  e le banalizzazioni locali  $\chi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$  si ottengono funzioni  $F_i = pr_2 \circ \chi_i \circ g$ , dove  $pr_2$  indica la proiezione al secondo fattore; si ottiene quindi il diagramma

$$U_i \xrightarrow{g} \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\chi_i} U_i \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R}^n .$$

$F_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  ha 0 come valore regolare e  $x_i \in F_i^{-1}(0)$ , per cui si ha  $\deg_{x_i} F_i = \#_{x_i}(g, M)$  e  $X(\xi) = \sum \deg_{x_i} F_i$ .

**Definizione 3.2.7.** Sia  $\xi = (\pi, E, M)$  un fibrato vettoriale di rango  $n$  sulla  $n$ -varietà  $M$  connessa, compatta e senza bordo e sia  $f$  una sezione del fibrato  $\xi$ . Il valore  $\#_x(f, M)$  è detto *indice della sezione  $f$  in  $x \in M$*  e si indica con  $\text{Ind}_x f$ .

**Definizione 3.2.8.** Sia  $M$  una varietà connessa, compatta e senza bordo. Se  $\xi = TM$  allora  $X(\xi)$  si dice *caratteristica di Eulero* di  $M$  e si indica  $\chi(M) = X(TM)$ .

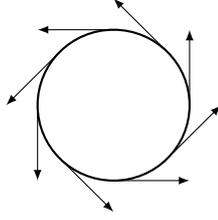


Figura 3.3: Un campo vettoriale che non si annulla mai su  $S^1$

**Esempio 3.2.9.** Per calcolare la caratteristica di Eulero di  $S^1$  si può scegliere il campo vettoriale  $f$  che associa ad ogni punto  $(x, y)$  il vettore  $[(x, y), (-y, x)]$ . Chiaramente questo campo vettoriale non si annulla mai e quindi  $\chi(S^1) = 0$ .

**Teorema 3.2.10.** Siano  $M$  una  $n$ -varietà compatta, orientata e senza bordo e  $\xi = (\pi, E, M)$  un fibrato vettoriale di rango  $n$  su  $M$ . Se esiste una sezione  $f: M \rightarrow E$  che non si annulla mai allora  $X(\xi) = 0$ .

*Dimostrazione.* Chiaramente  $f$  è trasversa ed è omotopa alla sezione nulla tramite  $H: M \times [0, 1] \rightarrow E$  definita da  $H(x, t) = tf(x)$ . Siccome  $f^{-1}(M) = \emptyset$ , risulta  $X(\xi) = \#(M, M; E) = \#(f, M) = 0$ .  $\square$

**Osservazione 3.2.11.** Per calcolare  $\chi(M)$  si può partire da un campo vettoriale  $f: M \rightarrow TM$  trasverso alla sezione nulla. Se  $x_i$  è uno zero di  $f$  e  $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  una carta che preserva l'orientazione allora la composizione  $g_i = pr_2 \circ \chi_i \circ T\varphi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$  ha un valore regolare in 0; dove  $pr_2$  indica la proiezione al secondo fattore e  $\chi_i$  è una banalizzazione locale. Sia  $d_i = \deg(g_i, 0)$ , allora  $d_i = \text{Ind}_{x_i} f$  è l'indice in  $x_i$  della sezione  $f$  e risulta  $\chi(M) = \sum d_i = \sum \text{Ind}_{x_i} f$

Questa osservazione contiene la dimostrazione di un risultato notevole: il teorema di Poincaré-Hopf.

**Teorema 3.2.12** (Teorema di Poincaré-Hopf). Sia  $M$  una  $n$ -varietà compatta e senza bordo. Se  $f$  è un campo vettoriale su  $M$  con  $\{x_i\}$  zeri isolati allora

$$\chi(M) = \sum \text{Ind}_{x_i} f.$$

**Esempio 3.2.13.** Siano  $S^n$  la sfera  $n$ -dimensionale,  $N \in S^n$  il polo nord e  $S = -N \in S^n$  il polo sud. Siano  $\varphi_N, \varphi_S$  le proiezioni stereografiche dell'Esempio 1.1.17. e  $\chi_N$  la banalizzazione locale del fibrato tangente su  $S^n \setminus \{N\}$ . Sia  $f: S^n \rightarrow TS^n$  la sezione che vale  $\chi_N^{-1} \circ (id_{S^n \setminus \{N\}}, \varphi_N, )$  su  $S^n \setminus \{N\}$  e  $f(N) = 0_{T_N S^n}$ . In questo modo il campo vettoriale  $f$  ha zeri solo in  $N$  e  $S$ . Nelle  $\varphi_S$ -coordinate  $f$  corrisponde al campo  $x \mapsto -x$  quindi  $f \in C^\infty(S^n, TS^n)$ . Inoltre questo permette di stabilire che  $\text{Ind}_N f = (-1)^n$  e  $\text{Ind}_S f = 1$  e quindi risulta  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ .

**Corollario 3.2.14.** Se  $n \in \mathbb{N}$  è pari, allora ogni campo vettoriale su  $S^n$  si annulla almeno in un punto.

*Dimostrazione.* Sia  $f$  un campo vettoriale su  $S^n$ . Se  $f$  non ha zeri isolati, allora non c'è niente da dimostrare. Se  $f$  ha zeri isolati, allora per il Teorema 3.2.12 (teorema di Poincaré-Hopf)  $f$  deve avere almeno uno zero.  $\square$

**Teorema 3.2.15.** (a) Se  $M$  e  $N$  sono varietà connesse, compatte, orientate e senza bordo allora  $\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$ .

(b) Siano  $n \in \mathbb{N}$  è dispari,  $M$  è una  $n$ -varietà, compatta, orientata e senza bordo. Se  $\xi = (\pi, E, M)$  è un fibrato vettoriale orientato di rango  $n$  su  $M$  allora  $X(\xi) = 0$ .

(c) Se  $M$  è una varietà connessa, compatta, orientata, senza bordo e di dimensione dispari allora  $\chi(M) = 0$ .

*Dimostrazione.* Per provare il punto (a) si scelgono  $f, g$  campi vettoriali rispettivamente su  $M$  e  $N$  e si definisce il campo prodotto  $f \times g: M \times N \rightarrow TM \times TN$ . Il fibrato  $TM \times TN$  è canonicamente isomorfo a  $T(M \times N)$ . Siano  $\{x_i\}$  gli zeri di  $f$  e  $\{y_j\}$  gli zeri di  $g$ , per cui  $\{(x_i, y_j)\}$  sono gli zeri di  $f \times g$ . Si mostra che

$$\text{Ind}_{(x_i, y_j)}(f \times g) = \text{Ind}_{x_i} f \cdot \text{Ind}_{y_j} g ;$$

questo basta per concludere la dimostrazione del punto (a). Per il punto (b) sia  $f$  trasversa alla sezione nulla. Se  $x$  è uno zero di  $f$  lo è anche della sezione opposta  $-f$  e risulta  $\text{Ind}_x f = (-1)^n \text{Ind}_x(-f)$ . Per cui si ottiene  $X(\xi) = (-1)^n X(\xi)$  e quindi con  $n$  dispari risulta  $X(\xi) = 0$ . Il punto (c) è una conseguenza immediata di (b).  $\square$

**Osservazione 3.2.16.** Siano  $M$  e  $N$  sono varietà connesse, compatte, orientate e senza bordo. Siano  $\xi_M = (\pi_M, E_M, M)$  e  $\xi_N = (\pi_N, E_N, N)$  due fibrati vettoriali orientati rispettivamente di rango  $\dim M$  e  $\dim N$  su  $M$  e  $N$ . Posto

$$\xi_M \times \xi_N = (\pi_M \times \pi_N, E_M \times E_N, M \times N),$$

risulta che  $X(\xi_M \times \xi_N) = X(\xi_M) \cdot X(\xi_N)$ . La dimostrazione è analoga al punto (a) del teorema precedente.

Adesso è opportuno definire la caratteristica di Eulero anche per una varietà con bordo in modo che essa sia coerente con quanto visto precedentemente per le varietà senza bordo.

**Definizione 3.2.17.** Sia  $M$  una varietà con bordo connessa e compatta. Sia  $f$  una sezione del fibrato tangente trasversa alla sezione nulla  $M$  e tale per cui  $f$  è *uscende* nei punti di  $\partial M$ . La caratteristica di Eulero di  $M$  è definita da

$$\chi(M) = \chi_f(M) = \sum_{x \text{ zero di } f} \text{Ind}_x f ;$$

tale definizione è ben posta e non dipende dalla scelta di  $f$  perché le sezioni del fibrato tangente con le caratteristiche richieste dalla definizione sono omotope.

**Esempio 3.2.18.** Se  $D^2$  è il disco unitario di  $\mathbb{R}^2$  si può calcolare  $\chi(D^2)$  con il campo vettoriale  $f$  che associa al punto  $(x, y) \in D^2$  il vettore  $[(x, y), (x, y)]$  di  $T_{D^2}\mathbb{R}^2$ . Il campo vettoriale  $f$  ha un solo zero isolato in  $(0, 0)$ . Usando l'identificazione canonica  $T_x(TM)/T_xM \approx T_xM$  si vede che il morfismo  $T_{(0,0)}f$  è l'identità su  $T_{(0,0)}D^2$ ; per cui risulta che  $\chi(D^2) = 1$ ;

**Lemma 3.2.19.** Siano  $M$  una varietà connessa,  $U$  un sottoinsieme aperto di  $M$  diverso dal vuoto e  $F$  un sottoinsieme finito di  $M$ . Allora esiste un diffeomorfismo  $f: M \rightarrow M$  tale che  $f(F)$  è un sottoinsieme di  $U$ .

*Idea della dimostrazione.* Siano  $F = \{x_1, \dots, x_k\}$  e  $\dim M \geq 2$ . Dati  $\{y_1, \dots, y_k\}$  punti distinti in  $U$  e  $k$  archi disgiunti  $\gamma_j$  da  $x_j$  a  $y_j$  esistono intorno  $U_j$  disgiunti di  $\gamma_j$  tali per cui su ognuno di questi esiste un diffeomorfismo che manda  $x_j$  in  $y_j$  e può essere

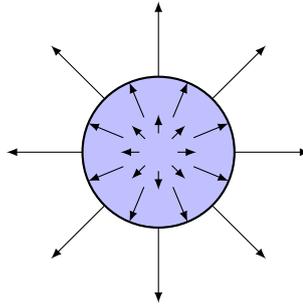


Figura 3.4: Il campo vettoriale sul disco  $D^2$  citato nell'Esempio 3.2.18

esteso al resto della varietà con la funzione identità. Nel caso in cui  $\dim M = 1$  non è detto che esistano tali archi ma è comunque possibile concludere la dimostrazione usando il fatto che  $F$  è contenuto in un aperto di  $M$  diffeomorfo a un intervallo aperto e che  $U$  contiene un sottoinsieme diffeomorfo ad un intervallo aperto. Con una costruzione simile a quella del caso precedente si riesce a risolvere anche questo caso.

**Teorema 3.2.20.** Sia  $M$  una varietà con bordo e  $\partial M \neq \emptyset$ . Allora  $M$  ha un campo vettoriale che non si annulla mai.

*Dimostrazione.* Sia  $M'$  definito come nella dimostrazione del Teorema 3.1.13 nel caso (b).  $M'$  è una varietà connessa, sia  $f: M' \rightarrow TM'$  un campo vettoriale con un numero finito di zeri e sia  $F$  l'insieme degli zeri di  $f$ .  $M' \setminus M$  è un sottoinsieme aperto di  $M'$  perché è diffeomorfo a  $M \setminus \partial M$ . Sia  $\phi: M' \rightarrow M'$  un diffeomorfismo tale che  $\phi(F)$  è un sottoinsieme di  $M' \setminus M$ . Allora  $T\phi \circ f \circ \phi^{-1}|_M$  è un campo vettoriale su  $M$  che non si annulla mai.  $\square$

**Lemma 3.2.21.** Sia  $D$  un  $n$ -disco contenuto in  $\mathbb{R}^n$  centrato in  $x$ . Sia  $U$  un aperto contenente  $D$  e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  considerata come un campo vettoriale di  $U$ . Supponiamo che 0 sia un valore regolare per  $f$  e che  $f(x) = 0$ . Sia  $g: \partial D \rightarrow S^{n-1}$  definita da  $g(y) = \frac{f(y)}{\|f(y)\|}$ . Allora  $\deg g = \text{Ind}_x f$ .

*Dimostrazione.* Per semplicità si può porre  $x = 0$ . Si costruisce l'omotopia  $F: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  come

$$F(y, t) = f_t(y) = \begin{cases} t^{-1}f(ty) & \text{se } t \in (0, 1] \\ Df_x(y) & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

e allo stesso modo  $G(y, t) = g_t(y) = \frac{F(y, t)}{\|F(y, t)\|}$ . Naturalmente  $g_0$  è omotopa a  $g_1 = g$  e quindi hanno lo stesso grado. La mappa  $(F, id_I)$  induce un'omotopia tra  $D(f_0)_0$  e  $D(f_1)_0$  quindi si può affermare che  $\text{Ind}_0 f_0 = \text{Ind}_0 f_1$ . Ora siccome  $f_0$  è lineare si ottiene un'omotopia tra  $f_0$  e  $g_0$  quindi si ha  $\text{Ind}_0 f_0 = \text{deg} g_0$ .  $\square$

Questo fatto permette di estendere la definizione di  $\text{Ind}_x f = \text{deg} g$  con  $g: \partial D \rightarrow S^{n-1}$  è definito se  $x$  è uno zero isolato di  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ma non dipende da  $D$ .

**Definizione 3.2.22.** Siano  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale su  $U$  e  $x \in U$  uno zero isolato per  $f$ . L'indice di  $f$  in  $x$  è  $\text{Ind}_x f := \text{deg} g$ , dove  $D$  è un disco centrato in  $x$  contenuto in  $U$  e  $g: \partial D \rightarrow S^{n-1}$  è definita da  $g(y) = \frac{f(y)}{\|f(y)\|}$ .

**Lemma 3.2.23.** Siano  $W$  una  $n$ -sottovarietà connessa e compatta di  $\mathbb{R}^n$  e  $f \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$ . Sia  $f^{-1}(0)$  un sottoinsieme finito di  $W \setminus \partial W$ . Se  $\sum_{x \in f^{-1}(0)} \text{Ind}_x f = 0$  allora esiste una mappa  $g: W \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tale che  $f|_{\partial W} = g|_{\partial W}$ .

**Teorema 3.2.24.** Sia  $M$  una  $n$ -varietà connessa, compatta, orientata e senza bordo. Sia  $\xi = (\pi, E, M)$  un fibrato vettoriale di rango  $n$  orientato su  $M$ . Se  $X(\xi) = 0$  allora  $\xi$  ha una sezione che non si annulla mai.

*Dimostrazione.* Sia  $f: M \rightarrow TM$  un campo vettoriale trasverso a  $M$ . Assumiamo che gli zeri  $f^{-1}(0)$  siano contenuti in un aperto  $U$  di  $M$  tale che  $\varphi: U \rightarrow V$  è una carta. La composizione  $T\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow TV = V \times \mathbb{R}^n$  è un campo vettoriale trasverso alla sezione nulla; allo stesso modo con  $V$  diffeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  si può vedere come una mappa  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  trasversa a  $\{0\}$ . La condizione  $X(\xi) = 0$  implica che  $\sum_{x \in g^{-1}(0)} \text{Ind}_x g = 0$ . Sia  $B$  un disco di  $\mathbb{R}^n$ , il cui interno contiene  $g^{-1}(0)$ . Per il lemma precedente esiste una mappa  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tale che  $h = g$  su  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int} B$ ; quindi  $h$  definisce un campo vettoriale  $g_1$  su  $\mathbb{R}^n$  che coincide con  $g$  su  $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int} B$ . Definendo  $f_1: M \rightarrow TM$  come

$$f_1 = \begin{cases} f & \text{su } M \setminus \varphi^{-1}(\text{Int} B) \\ T\varphi^{-1} \circ g_1 \circ \varphi & \text{su } B \end{cases};$$

per cui  $f_1$  non si annulla. Nel caso di un fibrato generico si usa la banalizzazione locale  $\chi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  invece che  $T\phi$  ma gli altri passaggi sono analoghi.  $\square$

**Osservazione 3.2.25.** Se  $M$  è una 1-varietà compatta, orientabile e senza bordo ha necessariamente il fibrato tangente isomorfo al fibrato banale. Questo è dovuto al fatto che  $\chi(M) = 0$  e che quindi esiste un campo vettoriale mai nullo; cioè un riferimento globale per  $TM$ .

**Esempio 3.2.26.**  $S^1$  ha il fibrato tangente banale. Se  $S^1$  è vista come sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$  si sceglie il campo vettoriale  $f: S^1 \rightarrow T_{S^1}\mathbb{R}^2$  che manda  $(x, y)$  in  $[(x, y), (y, -x)]$ ; questo è un campo vettoriale che non si annulla mai. Chiaramente l'esempio precedente si estende al *toro  $n$ -dimensionale* definito come  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  il prodotto di  $n$  copie di  $S^1$ .

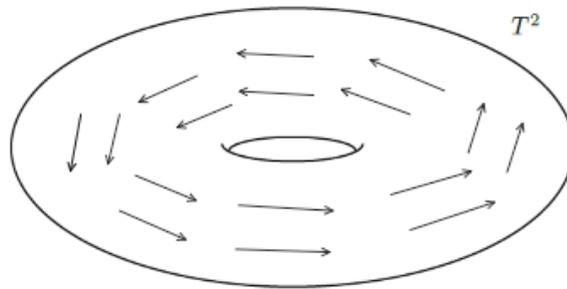


Figura 3.5: Un campo vettoriale che non si annulla mai sul toro  $T^2$

**Esempio 3.2.27.** Inoltre sapendo che se  $n$  è dispari allora  $\chi(S^n) = 0$  allora esiste un campo vettoriale su  $S^n$  mai nullo. Un campo vettoriale mai nullo su  $S^n$  è il campo  $S^n \rightarrow T_{S^n}\mathbb{R}^{n+1}$  che manda  $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$  in  $[(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), (x_2, -x_1, \dots, x_{n+1}, -x_n)]$ .

# Bibliografia

- [1] Abate M. Tovena F., *Geometria Differenziale*, Springer, 2011.
- [2] Hirsch M. W., *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1976.
- [3] Benedetti R., *Lectures on Differential Topology*, AMS, 2021.
- [4] Milnor J. W., *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.
- [5] L. S. Pontrjagin, *Smooth manifolds and their application in homotopy theory*, Nauka, 1976.



# Ringraziamenti

Vorrei dedicare questo spazio finale della tesi ai ringraziamenti verso tutti coloro che mi hanno supportato, aiutato e contribuito alla mia crescita personale.

Per prima cosa desidero ringraziare il mio relatore Andrea Petracci per avermi seguito e consigliato con grande disponibilità durante la redazione dell'elaborato di tesi.

Ringrazio infinitamente i miei genitori e la mia famiglia che mi hanno sempre sostenuto e motivato a dare il meglio di me.

Infine ringrazio i miei amici per tutte le gioie e i dolori condivisi in questi anni e per aver sempre creduto in me. Questo percorso è stato faticoso, a volte gratificante e altre volte frustrante ma mi auguro di vivere molti altri momenti come questo con voi.