Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Derivati Americani

e strategie ottimali d'esercizio nel modello binomiale

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Margherita Fabini

Anno Accademico 2022/2023

"Per fare qualcosa che non è da tutti,
bisogna rinunciare a qualcosa"

Introduzione

La Finanza Matematica ha visto un notevole sviluppo in tempi recenti, soprattutto grazie all'introduzione di strumenti finanziari atti a contenere il rischio nelle operazioni di mercato. Lo studio delle problematiche legate a tali strumenti richiede tecniche matematiche talvolta sofisticate e per la maggior parte legate alla teoria della Probabilità. Questo elaborato si propone di studiare nello specifico uno di questi strumenti finanziari, i Derivati Americani, con una particolare attenzione al calcolo delle strategie ottimali d'esercizio nel modello binomiale. Nel primo capitolo vengono introdotti i concetti di mercato discreto e di portafoglio autofinanziante e predicibile, necessari alla comprensione dell'elaborato. Il primo capitolo introduce poi i concetti più generali riguardanti i titoli derivati, un derivato è uno strumento finanziario il cui valore dipende e deriva da quello di un altro tipo di titolo, detto sottostante. Il secondo capitolo va a trattare nello specifico i derivati Americani. I derivati con opportunità di esercizio anticipato, ovvero i derivati Americani, sono quelli di maggiore interesse in ambito finanziario.
Il pricing di questo tipo di derivati è un problema complesso in quanto, anche nei casi più semplici di opzioni su un singolo sottostante, non esistono soluzioni in forma chiusa. Le opzioni Americane generalizzano quelle Europee nel senso che possono esssere esercitate in qualsiasi momento prima della scadenza. Oltre ai problemi tipici dei derivati Europei, per quelli Americani si aggiunge il problema della determinazione della strategia di esercizio ottimale. Quest'ultimo è un problema di ottimizzazione.
Nel corso del capitolo vengono affrontati i problemi di determinazione del prezzo di arbitraggio di un derivato Americano, di determinazione di una strategia ottimale di esercizio e di determinazione di una strategia di copertura del derivato Americano. Lo strumento basilare per la risoluzione di questi problemi è dato dal cosiddetto inviluppo di Snell di una data sequenza di variabili casuali che fornisce, allo stesso tempo, il prezzo d'arbitraggio e due strategie ottimali d'esercizio, quella minimale e quella massimale.
Nel terzo capitolo viene inizialmente presentato il modello binomiale nonchè il modello più semplice di mercato discreto. Il capitolo conclude l'elaborato mostrando delle applicazioni a tale modello, in particolare viene mostrato come calcolare il prezzo del-

l'opzione e trovare la massima e minima strategia ottimale d'eserczio nel caso di una Put Americana, di un'opzione di tipo "collar" e di una Call Americana di tipo "up-and-out".

Indice

Capitolo 1

I derivati finanziari

In questo capitolo vengono introdotti risultati matematici dal risvolto economico che costituiscono un modello funzionale allo studio dei principali problemi di Finanza Matematica. I requisiti matematici delle teoria della probabilità sono gli elementi necessari alla buona comprensione dei derivati finanziari. Una volta definito un mercato discreto si può parlare di titoli derivati, opzioni e arbitraggi.

1.1 Titoli primari e strategie

1.1.1 Mercati discreti

Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con Ω che ha un numero finito di elementi e in cui assumiamo che $\mathcal{F}$ sia l'insieme delle parti di Ω e $P(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$. Fissiamo $t_0, t_1, \ldots, t_N \in \mathbb{R}$ con

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_N.$$

Nel seguito porremo $t_0 = 0$ e $t_N = T$, che rispettivamente rappresentano la data odierna e la scadenza di un derivato.

Fissato $d \in \mathbb{N}$, un modello di mercato discreto è costituito da un titolo non rischioso (bond) B e da d titoli rischiosi (stocks) $S^1, ..., S^d$.
Il bond ha la seguente struttura deterministica: se B_n indica il valore del bond all'istante t_n, vale

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_n = B_{n-1}(1 + r_n), \qquad n = 1, ..., N. \end{cases} \tag{1.1}$$

dove r_n, tale che $1 + r_n > 0$, indica il tasso privo di rischio nel periodo n-esimo $[t_{n-1}, t_n]$.
I titoli rischiosi hanno la seguente dinamica stocastica: se S_n^i indica il prezzo all'istante t_n del titolo i-esimo, allora vale

$$\begin{cases} S_0^i \in \mathbb{R}_+ \\ S_n^i = S_{n-1}^i(1 + \mu_n^i), \quad n = 1, ..., N. \end{cases} \tag{1.2}$$

dove μ_n^i è una variabile aleatoria reale che rappresenta il tasso di rendimento dell'i-esimo titolo nel periodo n-esimo $[t_{n-1}, t_n]$.
Poniamo

$$\mu_n = (\mu_n^1, ..., \mu_n^d)$$

e supponiamo che il processo μ_n sia adattato ad una filtrazione generica $(\mathcal{F}_n)$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Supporremo $\mathcal{F}_n$ generata da μ_n cioè

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^\mu := \sigma\{\mu_k \mid k \leq n\}, \quad n = 1, .., N$$

Infine, siccome (1.2) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i processi μ_n ed S_n, la filtrazione $(\mathcal{F}_n)$ coincide anche con quella generata da S cioè $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^S$ per ogni n.

1.1.2 Portafoglio autofinanziante e predicibile

Definizione 1.1. *Un portafoglio (o strategia) è un processo stocastico in* $\mathbb{R}^{d+1}$

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_n^1, ..., \alpha_n^d, \beta_n)_{n=1,...,N}$$

.

In questa definizione α_n^i rappresenta la quantità del titolo S^i detenuta nel portafoglio nel periodo ennesimo ed equivalentemente β_n rappresenta la quantità del titolo B detenuta nel portafoglio nel periodo ennesimo.
Indichiamo il valore del portafoglio (α, β) nel periodo ennesimo con

$$V_n^{(\alpha,\beta)} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i S_n^i + \beta_n B_n, n = 1, ..., N,$$

e poniamo inoltre

$$V_0^{(\alpha,\beta)} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_1^i S_0^i + \beta_1 B_0.$$

D'ora in avanti indicheremo il processo dei prezzi con $S = (S^1, ..., S^d)$ e dato $\alpha = (\alpha^1, ..., \alpha^d)$ indichiamo con

$$\alpha S = \sum_{i=1}^{d} \alpha^i S^i$$

il prodotto scalare in $\mathbb{R}^d$ ed in particolare il valore del portafoglio nell'ennesimo intervallo diventa

$$V_n = \alpha_n S_n + \beta_n B_n.$$

Definizione 1.2. *Un portafoglio* (α, β) *è autofinanziante se vale la relazione*

$$V_{n-1} = \alpha_n S_{n-1} + \beta_n B_{n-1}$$

per ogni n=1,...,N.

Per un portafoglio autofinanziante (α, β) vale l'uguaglianza

$$\alpha_{n-1} S_{n-1} + \beta_{n-1} B_{n-1} = \alpha_n S_{n-1} + \beta_n B_{n-1}$$

che si interpreta nel modo seguente: all'istante t_{n-1}, avendo a disposizione il capitale

$$V_{n-1} = \alpha_{n-1} S_{n-1} + \beta_{n-1} B_{n-1}$$

si costruisce la strategia per il periodo n-esimo con le nuove quantità α_n, β_n in modo tale da non mutare il valore complessivo del portafoglio. Sottolineiamo il fatto che (α_n, β_n) indica la composizione del portafoglio che si costruisce all'istante t_{n-1}.

Definizione 1.3. *Un portafoglio* (α, β) *è predicibile se* (α_n, β_n) *è* $\mathcal{F}_{n-1}$ *misurabile per ogni n=1,...,N.*

Indicheremo con $\mathcal{A}$ la famiglia delle strategie autofinanzianti e predicibili.

Proposizione 1.4. *Il valore di una strategia autofinanziante* (α, β) *è determinato dal valore iniziale* V_0 *e ricorsivamente dalla relazione*

$$V_n = V_{n-1}(1 + r_n) + \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i S_{n-1}^i (\mu_n^i - r_n)$$

per n=1,...,N.

Dimostrazione. La strategia è autofinanziante perciò vale che la varazione del portafoglio nell'n-esimo periodo è

$$V_n - V_{n-1} = \alpha_n (S_n - S_{n-1}) + \beta_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i S_{n-1}^i (\mu_n^i) + \beta_n B_{n-1} r_n =$$

(poichè, ancora per la proprietà autofinanziante, vale $\beta_n B_{n-1} = V_{n-1} - \alpha_n Sn - 1$)

$$= \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i S_{n-1}^i (\mu_n^i - r_n) + r_n V_{n-1}$$

da cui segue la tesi. □

Definizione 1.5. *Un arbitraggio è una strategia autofinanziante* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ *che verifica le seguenti condizioni:*

1. $V_0^{(\alpha,\beta)} = 0$
2. $V_n^{(\alpha,\beta)} \geq 0$
3. $P(V_n^{(\alpha,\beta)} > 0) > 0$

Si dice che un modello di mercato è libero da arbitraggi se la famiglia $\mathcal{A}$*, delle strategie autofinanzianti e predicibili, non contiene arbitraggi.*

Definizione 1.6. *Il prezzo scontato del titolo i-esimo è definito da*

$$\tilde{S}_n^i = \frac{S_n^i}{B_n}$$

n=0,...,N.

Definizione 1.7. *Una misura martingala (con numeraire B) è una misura di probabilità* Q *su* $(\Omega, \mathcal{F})$ *tale che:*

1. *Q è equivalente a P;*
2. *per ogni n=1,...,N vale*
$$\tilde{S}_{n-1} = E^Q[\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}],$$
ossia $\tilde{S}$ *è una Q-martingala.*

Osservazione 1.8. Due misure di probabilità di dicono equivalenti se hanno gli stesssi eventi di probabilità nulla.

Teorema 1.9. *(Primo Teorema Fondamentale della valutazione) Un mercato a tempo discreto è libero da arbitraggi se e solo se esiste almeno una misura martingala.*

Osservazione 1.10. Una misura martingala è a volte anche chiamata misura neutrale al rischio perchè la seconda condizione nella definizione di misura martingala può essere interpretata economicamente come formula di valutazione neutrale al rischio.

Proposizione 1.11. *Siano* Q *una misura martingala e* (α, β) *una strategia in* $\mathcal{A}$ *di valore* V*. Allora vale*

$$\tilde{V}_{n-1} = E^Q[\tilde{V}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}], \quad n = 1, ..., N,$$

e in particolare

$$V_0 = E^Q[\tilde{V}_n], \quad n = 1, ..., N.$$

Dimostrazione. Dalla condizione di autofinanziamento, considerando l'attesa condizionata a $\mathcal{F}_n$, otteniamo

$$E^Q[\tilde{V}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \tilde{V}_{n-1} + E^Q[\alpha_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$$

(essendo α predicibile)

$$= \tilde{V}_{n-1} + \alpha_n E^Q[(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \tilde{V}_{n-1}.$$

$\square$

A questo punto è possibile dare una seconda formulazione del principio di non arbitraggio:

Corollario 1.12. *In un mercato libero da arbitraggi, se due strategie (α, β), $(\alpha', \beta') \in \mathcal{A}$ hanno uguale valore finale, $V_N^{(\alpha,\beta)} = V_N^{(\alpha',\beta')}$ q.c. allora vale anche:*

$$V_n^{(\alpha,\beta)} = V_n^{(\alpha',\beta')} \quad q.c., \quad n = 0, ..., N.$$

1.2 Titoli derivati: concetti generali

Un derivato finanziario è un contratto il cui valore dipende da uno o più titoli o beni, detti sottostanti. Consideriamo un modello di mercato discreto con processo

$$S_n = (S_n^1, ...S_n^d)$$

dei titoli primari rischiosi e fissiamo una scadenza

$$t_N$$

che indicheremo semplicemente con T.

Definizione 1.13. *Un derivato europeo con sottostante S è una variabile aleatoria X definita sullo spazio di probabilità*

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

e misurabile rispetto alla $\sigma - algebra$

$$\mathcal{F}_N^S := \sigma(S_n \mid n \leq N).$$

La X viene anche detta "payoff del derivato" o anche "claim".

Un classico esempio di derivati sono le opzioni di Call (o di acquisto) Europee. Esse sono contratti che danno al detentore il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare alla scadenza N un'unità di titolo rischioso sottostante ad un importo fissato K, detto strike o prezzo d'esercizio. Il payoff di un'opzione Call è quindi della forma

$$X = (S_N - K)^+.$$

Tipicamente un derivato permette al detentore di trasferire alla controparte il rischio legato al sottostante. Nel caso di un'opzione Call, il detentore trasferisce infatti il rischio legato all'aumento del prezzo del titolo da acquistare. Analogamente, nel caso di un'opzione Put (di vendita), il cui payoff è dato da

$$X = (K - S_N)^+$$

il detentore trasferisce alla controparte il rischio di un abbassamento del prezzo del titolo da vendere.
Oltre alle opzioni Europee ci sono poi le opzioni Americane (a tempo discreto anche dette opzioni Bermuda) che possono essere esercitate in un qualsiasi istante prima della scadenza.
Molti derivati sono già contrattati e quindi hanno un prezzo quotato sul mercato. Spesso però un derivato viene confezionato specificatamente per una data situazione contingente e quindi non possiede ancora un prezzo di mercato.

Osservazione 1.14. Uno dei problemi basilari della teoria classica della valutazione d'arbitraggio è quello di stabilire condizioni per l'esistenza di una strategia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ che assuma a scadenza lo stesso valore di un derivato X, ossia valga

$$V_N^{(\alpha,\beta)} = X \quad q.c.$$

Se tale strategia esiste, X si dice replicabile e (α, β) è detta strategia replicante per X.

Il problema della copertura consiste nel determinare una strategia replicante o strategia di copertura.

Teorema 1.15. *Sia X un derivato Europeo replicabile in un mercato libero da arbitraggi. Allora per ogni strategia replicante $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ e per ogni misura martingala Q vale*

$$H_n := V_n^{(\alpha,\beta)} = E^Q \left[X \frac{B_n}{B_N} \middle| \mathcal{F}_n \right],$$

n=0,...,N.

Notiamo che vale in particolare

$$H_0 = E^Q \left[\frac{X}{B_N} \right].$$

Poichè H_0 è il valore atteso rispetto ad una misura neutrale al rischio, del payoff scontato si dice che H_0 é il prezzo neutrale al rischio di X.

Definizione 1.16. *Un mercato in cui ogni derivato è replicabile si dice completo.*

Osservazione 1.17. La completezza del mercato è generalmente ritenuta un'ipotesi poco realistica che, però, si rivela molto utile negli sviluppi teorici. In base al Teorema 1.14, in un mercato completo è definito in modo unico il prezzo di arbitraggio di ogni derivato. Vale il seguente risultato

Teorema 1.18. *(Secondo Teorema fondamentale della valutazione) Un mercato libero da arbitraggi è completo se e solo se esiste un'unica misura martingala (con numerarire B).*

Capitolo 2

I derivati Americani

Le opzioni Americane generalizzano quelle Europee nel senso che possono essere esercitate in qualunque momento prima della scadenza.

2.1 Strategie d'esercizio anticipato

Consideriamo il modello di mercato (B, S) descritto nel capitolo 1 e assumiamo che ci sia assenza di possibilità di arbitraggio o, equivalentemente, che ci sia almeno una misura martingala Q.

Definizione 2.1. *Un derivato Americano è un processo stocastico* X=(X_n) *non negativo e adattato alla filtrazione* $(\mathcal{F}_n^S)$.

Un derivato Americano è caratterizzato dalla possibilià di esercizio anticipato ad ogni istante t_n, $0 \leq n \leq N$, durante la vita del contratto.
La scelta dell'istante in cui esercitare un'opzione Americana deve dipendere solo dalle informazioni disponibili al momento, che tipicamente sono date dalle osservazioni dei prezzi dei sottostanti fino all'istante t_n, $0 \leq n \leq N$.

Definizione 2.2. *Una strategia (o tempo) d'esercizio è un tempo d'arresto ossia una variabile aleatoria*

$$\nu : \Omega \to \{0, 1, ..., N\},$$

tale che

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n, \qquad n = 0...N.$$

Indichiamo con $\mathcal{T}_0$ *la famiglia di tutte le strategie d'esercizio.*

Per ogni traiettoria $\omega \in \Omega$ del mercato sottostante, il numero $\nu(\omega)$ rappresenta l'istante in cui si decide di esercitare il derivato Americano.

Definizione 2.3. *Dati un derivato Americano X e una strategia d'esercizio $\nu \in \mathcal{T}_0$, la variabile aleatoria X_ν definita da*

$$(X_\nu)(\omega) = X_{\nu_\omega}(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

è detta payoff di X relativo alla strategia ν.
Data una misura martingala Q, diciamo che una strategia d'esercizio ν_0 è ottimale per X in Q se

$$E^Q\left[\tilde{X}_{\nu_0}\right] = \max_{\nu \in \mathcal{T}_0} E^Q\left[\tilde{X}_\nu\right].$$

Nel valutare un derivato Americano occorre tener conto del fatto che in generale non è possibile determinare una strategia replicante, ossia una strategia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ tale che $V_n^{(\alpha,\beta)} = X_n$ per ogni n, questo perchè $\tilde{X}$ non è necessariamente una Q-martingala ma solo un processo adattato.
Possiamo tuttavia determinare un limite inferiore e superiore per il prezzo di X.

Definizione 2.4. *La famiglia delle strategie super-replicanti di X è*

$$\mathcal{A}_X^+ := \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \mid V_n^{(\alpha,\beta)} \geq X_n, \quad n = 0, ..., N\}.$$

La famiglia delle strategie sub-replicanti di X è:

$$\mathcal{A}_X^- := \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \mid esiste\ \nu \in \mathcal{T}_0 \ \ t.c \ \ X_\nu \geq V_\nu^{(\alpha,\beta)}\}.$$

Indicato con H_0 un possibile prezzo iniziale di X, per evitare di introdurre opportunità di arbitraggio si dovrà avere:

$$\sup_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}_x^-} V_0^{(\alpha,\beta)} \leq H_0 \leq \inf_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}_x^+} V_0^{(\alpha,\beta)}.$$

2.2 Prezzo d'arbitraggio in un mercato completo

In analogia a quanto avviene per per i derivati di tipo Europeo, per poter dare una definizione univoca di un prezzo d'arbitraggio per un'opzione Americana, supporremo che il mercato sia completo cioè che esista un'unica misura martingala equivalente.
Uno dei risultati preliminari è il seguente Teorema:

Teorema 2.5. *(Teorema di decomposizione di Doob) Ogni processo sommabile e adattato Y può essere decomposto in modo unico nella somma*

$$Y = M + A$$

dove M è una martingala tale che $M_0 = Y_0$ e A è un processo predicibile e tale che $A_0 = 0$. Inoltre Y è una super-martingala se e solo se A è decrescente, cioè se $A_n \leq A_{n+1}$ per ogni n.

Dimostrazione. Definiamo ricorsivamente i processi M e A ponendo:

$$\begin{cases} M_0 = Y_0 \\ M_n = M_{n-1} + Y_n - E\left[Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right], \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_n = A_{n-1} - (Y_{n-1} - E\left[Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]), \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Più esplicitamente vale

$$M_n = Y_n + \sum_{k=0}^{n-1} (Y_k - E\left[Y_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right]),$$

e

$$A_n = -\sum_{k=0}^{n-1} (Y_k - E\left[Y_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right]).$$

Allora M è una martingala, A è predicibile e vale Y=M+A.
Per quanto riguarda l'unicità della scomposizione, se vale Y=M+A si ha anche

$$Y_n - Y_{n-1} = M_n - M_{n-1} + A_n - A_{n-1},$$

e considerando l'attesa condizionata si ha:

$$E\left[Y_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] - Y_{n-1} = A_n - A_{n-1},$$

da cui segue che A deve necessariamente essere definito come sopra. Infine da questa relazione e scrivendo $M = Y - A$ si può concludere che M è definita univocamente dalla relazione ricorsiva definita sopra. □

Uno strumento fondamentale per ottenere il prezzo d'arbitraggio, la strategia di copertura in un mercato completo e per determinare una strategia ottimale d'esercizio in un mercato privo di arbitraggio è l'inviluppo di Snell del processo X.

Definizione 2.6. *Dato un processo adattato X, si dice inviluppo di Snell di X la più piccola super-martingala che domina X.*

Lemma 2.7. *Dato un derivato americano X, il processo $\tilde{H}$ definito ricorsivamente da :*

$$\tilde{H}_n = \begin{cases} \tilde{X}_N, & n = N, \\ \max\{\tilde{X}_N, E^Q\left[\tilde{H}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]\}, & n = 0, ..., N-1, \end{cases} \tag{2.3}$$

è la più piccola super-martingala che domina $\tilde{X}$ ed è quindi l'inviluppo di Snell di $\tilde{X}$.

Definizione 2.8. *Il processo H in (2.3) è detto prezzo d'arbitraggio del derivato Americano X.*

Dimostrazione. Evidentemente $\tilde{H}$ è un processo adattato e non-negativo. Inoltre per ogni n, vale

$$\tilde{H}_n \geq E^Q\left[\tilde{H}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right],$$

ossia $\tilde{H}$ è una Q-super-martingala. Inoltre $\tilde{H}$ è la più piccola super-martingala tale che $Y_n \geq \tilde{X}_n$, allora vale

$$\tilde{H}_N = \tilde{X}_N \leq Y_N.$$

La tesi segue allora per induzione: infatti, supposto che $\tilde{H}_n \leq Y_n$, si ha

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{n-1} &= \max\{\tilde{X}_{n-1}, E^Q\left[\tilde{H}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]\} \\ &\leq \max\{\tilde{X}_{n-1}, E^Q\left[Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]\} \\ &\leq \max\{\tilde{X}_{n-1}, Y_{n-1}\} = Y_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Nell'ipotesi che il mercato sia libero d'arbitraggi e completo, il seguente risultato prepara la definizione di prezzo d'arbitraggio dell'opzione Americana X.

Teorema 2.9. *(di Valutazione) Assumiamo che esista e sia unica la misura martingala Q. Allora esiste una strategia $(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}_x^+ \cup \mathcal{A}_x^-$ e pertanto si ha:*

1. $V_n^{(\alpha,\beta)} \geq X_n, \quad n = 0, ..., N;$
2. *esiste $\nu_0 \in \mathcal{T}_0$ tale che $X_{\nu_0} = V_{\nu_0}^{(\alpha,\beta)}$.*

Inoltre si ha

$$E^Q\left[\tilde{X}_{\nu_0}\right] = V_0^{(\alpha,\beta)} = \max_{\nu \in \tau_0} E^Q\left[\tilde{X}_\nu\right], \tag{2.4}$$

e tale valore definisce il prezzo iniziale d'arbitraggio di X.

Dimostrazione. La dimostrazione è costruttiva ed è costituita da due passi principali in cui

1. viene costruito l'inviluppo di Snell del processo $\tilde{X}$;
2. viene utilizzato il Teorema di decomposizione di Doob per isolare la parte martingala del processo $\tilde{H}$ al fine di determinare la strategia $(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}_X^+ \cap \mathcal{A}_X^-$.

Infine la dimostrazione si conclude mostrando che $\tilde{H}_0 = \tilde{V}_0^{(\alpha,\beta)} = V_0^{(\alpha,\beta)}$ e che vale (2.4).
Passo 1: introduciamo il processo H ponendo $H_n = B_n \tilde{H}_n$ dove $\tilde{H}$ è l'inviluppo di Snell di $\tilde{X}$. Proveremo nel seguito che H definisce il prezzo d'arbitraggio del derivato Americano X. Tale definizione ha un chiaro significato intuitivo: infatti l'opzione X vale $H_N = X_N$ a scadenza e, al tempo t_{N-1}, vale

1. X_{N-1} nel caso sia esercitata;
2. $\frac{1}{1+r} E^Q [H_N \mid \mathcal{F}_{N-1}]$ pari al prezzo di un'opzione Europea con payoff H_N e scadenza N, nel caso non sia esercitata.

Allora è ragionevole definire

$$H_{N-1} = max\{X_{N-1}, \frac{1}{1+r} E^Q [H_N \mid \mathcal{F}_{N-1}]\},$$

ripetendo tale ragionamento a ritroso otteniamo per $\tilde{H}_n = B_n^{-1} H_n$ la definizione di inviluppo di Snell di X (2.3).
Il fatto che $\tilde{H}$ sia una Q-super-martingala significa che $\tilde{H}$ "decresce in media" e intuitivamente ciò corrisponde al fatto che, col passare del tempo, il vantaggio della possibilità dell'esercizio anticipato diminuisce.
Passo 2: proviamo ora che esiste $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+ \cap \mathcal{A}_X^-$. Poichè $\tilde{H}$ è una Q-super-martingala, per il Teorema di decomposizione di Doob vale

$$\tilde{H} = M + A$$

dove M è una Q-martingala tale che $M_0 = \tilde{H}_0$ e A è un processo predicilibile e decrescente con valore iniziale nullo.
Poichè per ipotesi il mercato è completo, esiste una strategia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ che replica il derivato Europeo con payoff M_N, cioè $\tilde{V}_N(\alpha, \beta) = M_N$. Inoltre poichè M e $\tilde{V} := \tilde{V}^{(\alpha,\beta)}$ sono Q-martingale con lo stesso valore finale, sono uguali:

$$\tilde{V}_n = E^Q \left[\tilde{V}_N \mid \mathcal{F}_n \right] = E^Q [M_N \mid \mathcal{F}_n] = M_n. \tag{2.5}$$

Quindi $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+$ poichè $A_n \leq 0$. Inoltre, essendo $A_0 = 0$, vale

$$V_0 = M_0 = H_0.$$

Per verificare che $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^-$, poniamo:

$$v_0 = \min\{n \mid \tilde{H}_n(\omega) = \tilde{X}_n(\omega)\}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Poichè

$$\{v_0 = n\} = \{\tilde{H}_0 > \tilde{X}_0\} \cap ... \cap \{\tilde{H}_{n-1} > \tilde{X}_{n-1}\} \cap \{v_0 = n\} = \{\tilde{H}_n = \tilde{X}_n\} \in \mathcal{F}_n$$

per ogni n, allora v_0 è il primo istante in cui $\tilde{X}_n \geq E^Q\left[\tilde{H}n+1 \mid \mathcal{F}_n\right]$ e quindi intuitivamente rappresenta il primo tempo in cui conviene esercitare l'opzione.
In base al Teorema di decomposiozione di Doob, per n=1,...,N, abbiamo

$$M_n = \tilde{H}_n + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\tilde{H}_k - E^Q\left[\tilde{H}k+1 \mid \mathcal{F}_k\right]\right),$$

e di conseguenza

$$M_{v_0} = \tilde{H}_{v_0} \tag{2.6}$$

poichè

$$\tilde{H}_k = E^Q\left[\tilde{H}_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right] \;\; su\ \{k < v_0\}.$$

Allora, per la (2.5), si ha

$$\tilde{V}_{v_0} = M_{v_0} =$$

(per la (2.6))

$$= \tilde{H}_{v_0} =$$

(per definizione di v_0)

$$= \tilde{X}_{v_0}, \tag{2.7}$$

e questo prova che $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+$.
Conclusione: verifichiamo che v_0 è una strategia ottimale d'esercizio. Poichè $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_X^+ \cap \mathcal{A}_X^-$, otteniamo

$$V_0 = V_0^{(\alpha,\beta)} = \max_{v\in\tau_0} E^Q\left[\tilde{X}_v\right].$$

D'altra parte, per la (2.7) e per il Teorema di Optional Sampling, vale

$$V_0 = E^Q\left[\tilde{X}_v\right]$$

e questo conclude la prova. □

2.3 Strategie ottimali d'esercizio

La strategia ottimale d'esercizio per un derivato Americano X non è generalmente unica. Per determinare una strategia ottimale d'esercizio supponiamo solamente che il mercato sia libero da arbitragggi. Fissiamo una misura martingala Q e consideriamo l'inviluppo di Snell $\tilde{H}$ di $\tilde{X}$ relativo a Q.

Lemma 2.10. *Per ogni $\nu \in \mathcal{T}_0$ vale*

$$E^Q\left[\tilde{V}_\nu\right] \leq H_0.$$

Inoltre $\nu \in \mathcal{T}_0$ è ottimale per X in Q se e solo se

$$E^Q\left[\tilde{V}_\nu\right] = H_0.$$

Corollario 2.11. *Se $\nu \in \mathcal{T}_0$ è tale che:*

1. $\tilde{X}_\nu = \tilde{H}_\nu$,

2. $\tilde{H}^\nu$ *è una Q-martingala,*

allora ν è una strategia ottimale d'esercizio per X in Q.

Per comodità introduciamo il processo E definito da

$$E_n = \frac{1}{1+r} E^Q\left[H_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right], \qquad n \leq N-1.$$

Ponendo per convenzione $E_N = -1$, abbiamo che

$$H_n = \max\{X_n, E_n\}, \quad n \leq N$$

e inoltre gli insiemi $\{n \mid X_n \geq E_n\}$ e $\{n \mid X_n > E_n\}$ sono diversi dall'insieme vuoto per ipotesi. Sono ben definite le seguenti definizioni di strategie d'esercizio:

$$\nu_{min} := \min\{n \mid X_n \geq E_n\}, \tag{2.8}$$

$$\nu_{max} := \min\{n \mid X_n > E_n\}. \tag{2.9}$$

Proposizione 2.12. *Le strategie d'esercizio ν_{min} e ν_{max} sono ottimali per X in Q.*

Dimostrazione. Proviamo l'ottimalità di ν_{min} e ν_{max} verificando le condizioni (1.) e (2.) del Corollario 2.10. Abbiamo che

$$H_{\nu_{min}} = \max\{X_{\nu_{min}}, E_{\nu_{min}}\} = X_{\nu_{min}},$$

$$H_{\nu_{max}} = \max\{X_{\nu_{max}}, E_{\nu_{max}}\} = X_{\nu_{max}},$$

e ciò prova la (1.). Ricordiamo poi che per il Teorema di decomposizione di Doob vale

$$\tilde{H}_n = M_n + A_n, \quad n \leq N,$$

dove M è una Q-martingala tale che $M_0 = H_0$ e A è un processo predicibile e decrescente tale che $A_0 = 0$. Nello specifico vale

$$A_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \left(\tilde{H}_k - \tilde{E}_k \right), \quad n \leq N.$$

Dalle definizioni (2.8) e (2.9) si ha

$$H_n = E_n \;\; per \;\; n \leq \nu_{max} - 1,$$

cosicchè

$$A_n = 0 \;\; per \;\; n \leq \nu_{max},$$

e

$$A_n < 0 \;\; per \;\; n \geq \nu_{max} + 1.$$

Ne viene allora che

$$\tilde{H}_n = M_n \;\; per \;\; n \leq \nu_{max},$$

e quindi, essendo $\nu_{min} \leq \nu_{max}$, abbiamo

$$\tilde{H}^{\nu_{min}} = M^{\nu_{min}}, \qquad \tilde{H}^{\nu_{max}} = M^{\nu_{max}}.$$

Di conseguenza per il Lemma 2.9, si ha che i processi $\tilde{H}^{\nu_{min}}, \tilde{H}^{\nu_{max}}$ sono Q-martingale. Questo prova la (2.) del Corollario 2.10 e conclude la dimostrazione. □

Osservazione 2.13. Si osserva che questo risultato estende in parte il Teorema 2.8 in cui si provava l'ottimalità di ν_0 sotto l'ipotesi di completezza del mercato. Inoltre ν_{min} e ν_{max} sono rispettivamente la prima e l'ultima strategia d'esercizio ottimale per X in Q.

Capitolo 3

Applicazioni al modello binomiale

3.1 Il modello di mercato binomiale

L'esempio più semplice di mercato discreto è fornito dal modello binomiale. Assumiamo che esista un bond B con tasso $r_n = r$ costante, ossia

$$B_n = (1+r)^n, \qquad n = 0, ..., N.$$

Inoltre assumiamo che esista un solo titolo rischioso S:

$$S_n = S_{n-1}(1+\mu_n), \qquad n = 1, ..., N$$

dove le μ_n sono variabili aleatore i.i.d. e tali che

$$1+\mu_n = \begin{cases} u & \text{con probabilità } p \\ d & \text{con probabilità } 1-p \end{cases}$$

con $p \in (0,1)$ e $0 \ < \ d < \ u$. Ovvero la distribuzione di μ_n è una combinazione di delta di Dirac $p\delta_{u-1} + (1-p)\delta_{d-1}$.

Teorema 3.1. *Nel modello binomiale la condizione*

$$d < 1+r < u,$$

è equivalente all'esistenza e unicità della misura martingala Q. Sotto tale condizione, posto

$$q = \frac{1+r+d}{u-d},$$

la misura Q è definita da

$$Q(1+\mu_n = u) = 1 - Q(1+\mu_n = d) = q,$$

essendo le variabili aleatorie $\mu_1, ..., \mu_N$ Q-indipendenti. Inoltre vale

$$Q(S_n = u^k d^{n-k} S_0) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \leq N.$$

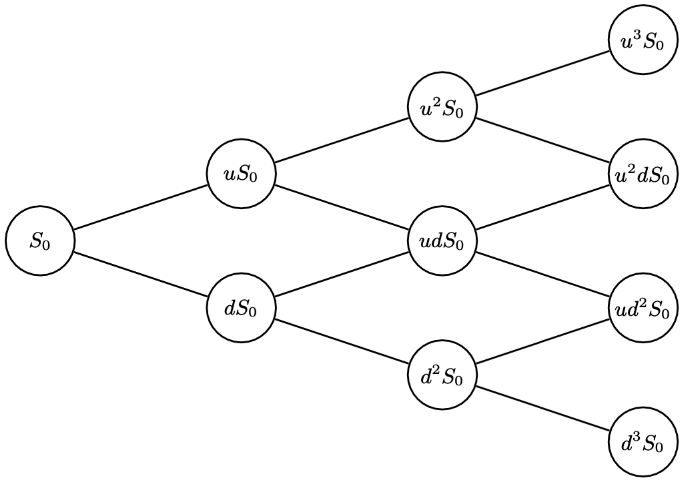

Figura 3.1: *Albero binomiale a tre periodi*

3.1.1 Costruzione di una strategia di copertura

Nel modello binomiale è possibile costruire direttamente una strategia di copertura (α, β) per un derivato Europeo X con generica scadenza N. Si hanno due possibili valori finali di S:

$$S_N = \begin{cases} uS_{N-1}, \\ dS_{N-1}. \end{cases}$$

Dunque se $V_N = \alpha_N S_N + \beta_N B_N$, la condizione di replicazione $V_N = X$ equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha_N u S_{N-1} + \beta_N B_N = X^u, \\ \alpha_N d S_{N-1} + \beta_N B_N = X^d, \end{cases} \tag{3.1}$$

dove X^u e X^d rappresentano rispettivamente i payoff in caso di crescita e decrescita del sottostante date le informazioni al tempo N-1. Il sistema (3.1) ha soluzione

$$\bar{\alpha}_N = \frac{X^u - X^d}{(u-d)S_{N-1}}, \quad \bar{\beta}_N = \frac{uX^d - dX^u}{(1+r)^N(u-d)},$$

e fornisce la strategia da utilizzare al tempo $N-1$ che assicura la replicazione all'istante finale. In base alla condizione di autofinanziamento

$$H_{N-1} := V_{N-1} = \bar{\alpha}_N S_{N-1} + \bar{\beta}_N B_{N_1}$$

determina il prezzo d'arbitraggio di X al tempo $N-1$. Questo argomento può essere utilizzato a ritroso determinando tutta la strategia di copertura fino all'istante iniziale.

3.2 Calcolo della minima e massima strategia ottimale d'esercizio

3.2.1 Caso di una Put Americana

In un modello di mercato binomiale si consideri una Put Americana con payoff $X_n = (K - S_n)^+$ i cui dati numerici sono $u = 2,\ \ d = \frac{1}{2},\ \ S_0 = 1,\ \ K = \frac{1}{2}$ e l'orizzonte temporale di tre periodi, cioè N=3. Al variare del tasso d'interesse r si vogliono determinare:

1. il processo H del prezzo dell'opzione;

2. la minima e la massima strategia ottimale d'esercizio.

Procedimento : Affinchè il modello sia libero da arbitraggi deve valere la relazione $d < 1 + r < u$ che in questo caso equivale a

$$-\frac{1}{2} < r < 1. \tag{3.2}$$

Assumendo valida la (3.2) si ha che la misura martingala è definita in termini di

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{1}{3}(1 + 2r), \qquad 1 - q = \frac{2}{3}(1 - r).$$

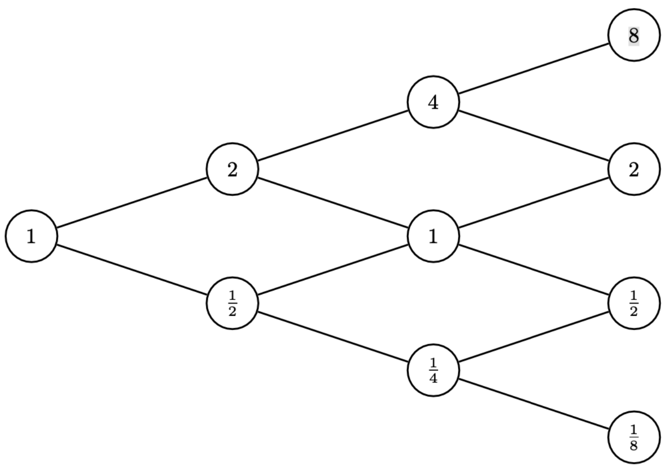

Figura 3.2: *Albero binomiale dei prezzi del sottostante*

Si ricorda che il processo del prezzo d'arbitraggio del derivato Americano è definito ricorsivamente da

$$H_n = \begin{cases} (\frac{1}{2} - S_N)^+, & n = N, \\ \max\{(\frac{1}{2} - S_n)^+, E_n\}, & n = 0, ..., N-1, \end{cases} \tag{3.3}$$

dove E è il processo definito da

$$E_n = \frac{1}{1+r} E^Q \left[H_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \right], \qquad n \leq N-1.$$

Indicato con $H_{n,k}$ il prezzo del titolo H individuato nell'albero binomiale dalle coordinate n (tempo) e k (numero di movimenti di crescita del sottostante), all'ultimo periodo si avrà

$$\begin{cases} H_{3,3} = X_{3,3} = (\frac{1}{2} - 8)^+ = 0, \\ H_{3,2} = X_{3,2} = (\frac{1}{2} - 2)^+ = 0, \\ H_{3,1} = X_{3,1} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^+ = 0, \\ H_{3,0} = X_{3,0} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{8})^+ = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Successivamente usando la (3.3) si ha

$$X_{2,2} = X_{2,1} = E_{2,2} = E_{2,1} = 0,$$

da cui $H_{2,2} = H_{2,1} = 0$. Inoltre

$$X_{2,0} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}^+) = \frac{1}{4},$$

e

$$E_{2,0} = \frac{1}{1+r}(qH_{3,1} + (1-q)H_{3,0}) = \frac{3}{8}(\frac{1-q}{1+r}) = \frac{1}{4}(\frac{1-r}{1+r}).$$

Allora si ha

$$H_{2,0} = \max\{X_{2,0}, E_{2,0}\} = \begin{cases} \frac{1}{4} & se\ 0 < r < 1, \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1-r}{1+r}\right) & se\ -\frac{1}{2} < r \leq 0. \end{cases}$$

Al passo precedente $X_{1,1} = E_{1,1} = H_{1,1} = 0$ e

$$E_{1,0} = \frac{1}{1+r}(qH_{2,1} + (1-q)H_{2,0}) = \begin{cases} \frac{1}{6}\left(\frac{1-r}{1+r}\right) & se\ 0 < r < 1, \\ (\frac{1}{6}(\frac{1-r}{1+r}))^2 & se\ -\frac{1}{2} < r \leq 0. \end{cases}$$

In ogni caso essendo $X_{1,0} = 0$, vale $H_{1,0} = E_{1,0}$. Infine al primo istante si ha $X_{0,0} = 0$ e quindi

$$H_{0,0} = E_{0,0} = \frac{1}{1+r}(qH_{1,1} + (1-q)H_{1,0}) = \begin{cases} \frac{1}{9}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 & se\ 0 < r < 1, \\ \frac{1}{9}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^3 & se\ -\frac{1}{2} < r \leq 0. \end{cases}$$

Per facilitare i calcoli seguenti, nella Figura 3.3 sono rappresentati i valori dei processi X ed E nel caso $0 < r < 1$, evidenziando in grassetto il massimo fra i due, pari al prezzo H dell'opzione Americana.

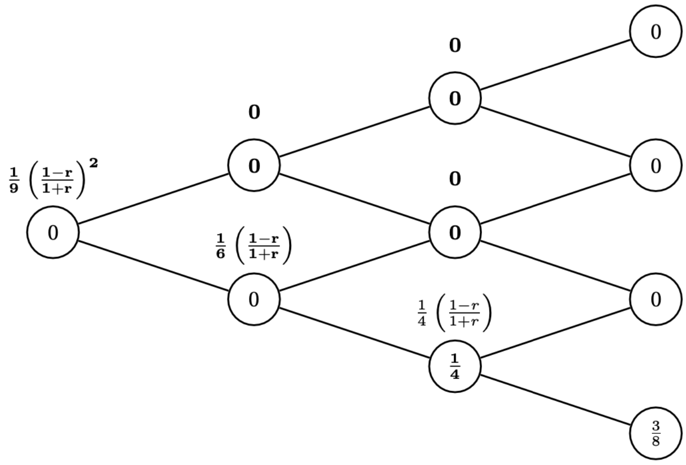

Figura 3.3: *Valori dei processi X (dentro al cerchio) e E (sopra al cerchio) nel caso* $0 < r < 1$

Osservando la figura (3.3) si può facilmente determinare la prima e l'ultima strategia ottimale d'esercizio nel caso $0 < r < 1$. Infatti per definizione vale

$$\nu_{min} = \min\{n \mid X_n \geq E_n\} = \begin{cases} 1 \ in \ \{S_1 = S_{1,1}\} \\ 2 \ in \ \{S_1 = S_{1,0}\}. \end{cases}$$

$$\nu_{max} = \min\{n \mid X_n > E_n\} = \begin{cases} 2 \ in \ \{S_2 = S_{2,0}\} \\ 3 \ altrimenti. \end{cases}$$

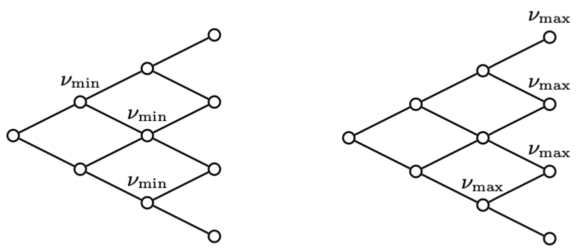

Figura 3.4: *Minima (a sinistra) e massima (a destra) strategia d'esercizio ottimale nel caso* $0 < r < 1$

Analogamente si osserva il caso $-\frac{1}{2} < r \leq 0$.

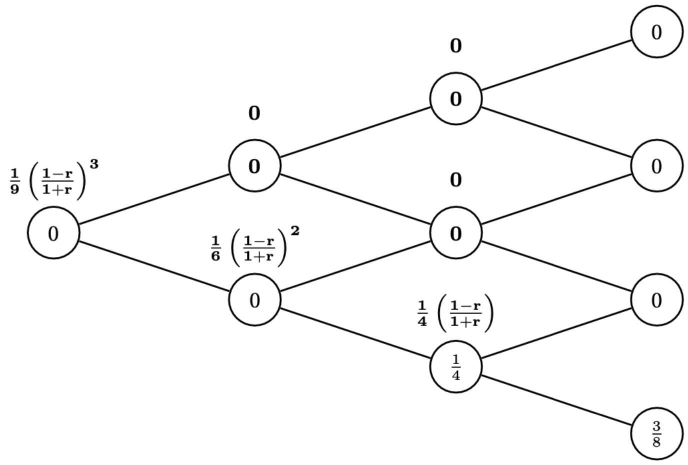

Figura 3.5: *Valori dei processi X (dentro al cerchio) e E (sopra al cerchio) nel caso* $-\frac{1}{2} < r \leq 0$

Per quanto riguarda le strategie d'esercizio ottimale, consideriamo prima il caso $r < 0$, per definizione vale

$$\nu_{min} = \min\{n \mid X_n \geq E_n\} = \begin{cases} 1 \ in \ \{S_1 = S_{1,1}\}, \\ 2 \ in \ \{S_1 = S_{1,0}\} \cap \{S_2 = S_{2,1}\}, \\ 3 \ in \ \{S_2 = S_{2,0}\}. \end{cases}$$

$$\nu_{max} = \min\{n \mid X_n > E_n\} = 3.$$

Infine nel caso $r = 0$, abbiamo $\nu_{max} = 3$ e

$$\nu_{min} = \min\{n \mid X_n \geq E_n\} = \begin{cases} 1 \ in \ \{S_1 = S_{1,1}\}, \\ 2 \ in \ \{S_1 = S_{1,0}\}. \end{cases}$$

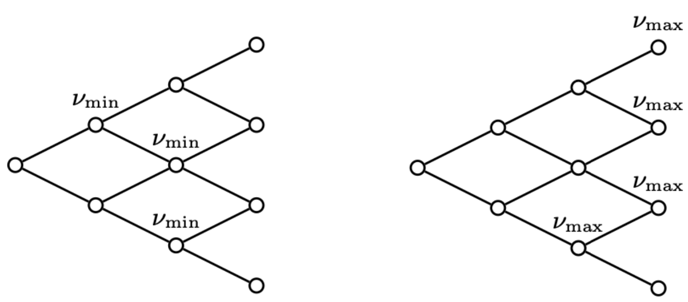

Figura 3.6: *Minima (a sinistra) e massima (a destra) strategia d'esercizio ottimale nel caso* $-\frac{1}{2} < r \leq 0$

3.2.2 Caso di un'opzione di tipo "collar"

In un modello di mercato binomiale si consideri un'opzione Americana di tipo "collar", cioè con premio di esercizio

$$X_n = \min\{\max\{S_n, K_1\}, K_2\}.$$

I dati numerici siano

$$u = 2, \quad d = \frac{1}{2}, \quad S_0 = 1, \quad K_1 = 1, \quad K_2 = 2, \quad r = \frac{1}{2},$$

e l'orizzonte temporale sia di due periodi, $N = 2$. Si vogliono determinare:

1. il processo H del prezzo dell'opzione;
2. la minima e la massima strategia ottimale d'esercizio;
3. la strategia di copertura.

Procedimento : sulla base dei dati numerici, per la misura martingala vale

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{2}{3}.$$

In figura 3.7 rappresentiamo l'albero binomiale del prezzo del sottostante e del payoff dell'opzione Americana.

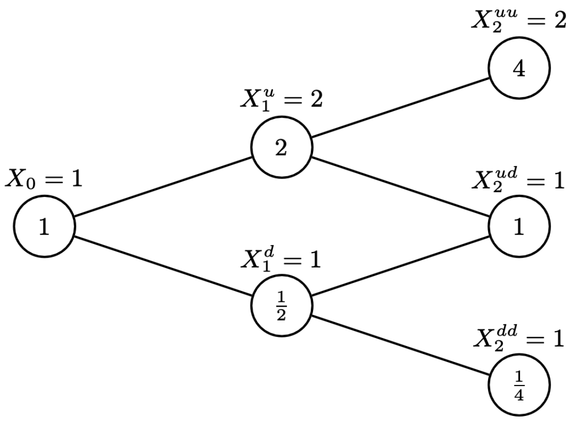

Figura 3.7: *Albero binomiale dei prezzi del sottostante S (all'interno dei cerchi) e dei valori del payoff X (sopra i cerchi)*

All'ultimo periodo il prezzo d'arbitraggio del derivato H è pari a

$$\begin{cases} H_2^{uu} = X_2^{uu} = \min\{\max\{4, 1\}, 2\} = 2, \\ H_2^{ud} = X_2^{ud} = \min\{\max\{1, 1\}, 2\} = 1, \\ H_2^{dd} = X_2^{dd} = \min\{\max\{\frac{1}{4}, 1\}, 2\} = 1. \end{cases}$$

Calcoliamo ora il prezzo d'arbitraggio al tempo n=1: per definizione si ha

$$H_1^u = \max\{X_1^u, E_1^u\} = \max\{2, \frac{1}{1+r}\left(qH_2^{uu} + (1-q)H_2^{ud}\right)\} = \max\{2, \frac{10}{9}\} = 2,$$

$$H_1^d = \max\{X_1^d, E_1^d\} = \max\{1, \frac{1}{1+r}\left(qH_2^{du} + (1-q)H_2^{dd}\right)\} = \max\{1, \frac{2}{3}\} = 1.$$

Inoltre al tempo iniziale si ha

$$H_0 = \max\{X_0, E_0\} = \max\{1, \frac{1}{1+r}\left(qH_1^u + (1-q)H_1^d\right)\} = \max\{1, \frac{10}{9}\} = \frac{10}{9}.$$

Confrontando i valori di X e E appena calcolati, otteniamo

$$\bar{\nu} := \nu_{min} = \min\{n \mid X_n \geq E_n\} = \nu_{max} = \min\{n \mid X_n > E_n\} = 1,$$

e quindi in questo caso l'opzione Americana non si riduce ad un'Europea. Calcoliamo ora la strategia di copertura. Poichè $\nu_{max} = 1$, è sufficiente calcolare la strategia di copertura solo del primo periodo. Inoltre tale strategia coincide con la strategia di copertura di H_1 e dunque si ottiene imponendo la condizione di replicazione

$$\alpha_1 S_1 + \beta_1 B_1 = H_1,$$

che fornisce il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \alpha_1 u S_0 + \beta_1(1+r) = H_1^u, \\ \alpha_1 d S_0 + \beta_1(1+r) = H_1^d, \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} \alpha_1 2 + \beta_1 \frac{3}{2} = 2, \\ \alpha_1 \frac{1}{2} + \beta_1 \frac{3}{2} = 1. \end{cases}$$

La soluzione di tale sistema è

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad \beta_1 = \frac{4}{9}.$$

Osservazione 3.2. Il costo iniziale di tale strategia è pari al prezzo iniziale dell'opzione Americana: ricordando che $S_0 = B_0 = 1$, vale infatti

$$\frac{2}{3}S_0 + \frac{4}{9}B_0 = \frac{10}{9} = H_0.$$

3.2.3 Caso di una Call Americana di tipo "up-and-out"

Definizione 3.3. *Una Call Americana di tipo "up-amd-out" è un'opzione con barriera il cui payoff è path-dependent, ossia X_n dipende dalla traiettoria del sottostante e non solo da S_n.*

In un modello di mercato binomiale si consideri una Call Americana "up-and-out" con payoff

$$X_n = \begin{cases} (S_n - K)^+ \text{ se } S_k \leq 3 \text{ per ogni } k \leq n, \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Assumendo i seguenti dati numerici

$$u = 2, \quad da = \frac{1}{2}, \quad r = 0, \quad S_0 = 1, \quad K = \frac{1}{3},$$

e l'orizzonte temporale di tre periodi, cioè N=3, si determini:

1. il processo H del prezzo dell'opzione;

2. la minima e la massima tra le strategie ottimali di esercizio.

Procedimento : Trattandosi di un'opzione il cui payoff è path-dependent, per ogni n occorre distinguere le traiettorie tali che, in qualche istante minore o uguale a n , il prezzo del sottostante è maggiore della barrier 3, caso in cui il payoff si annulla.

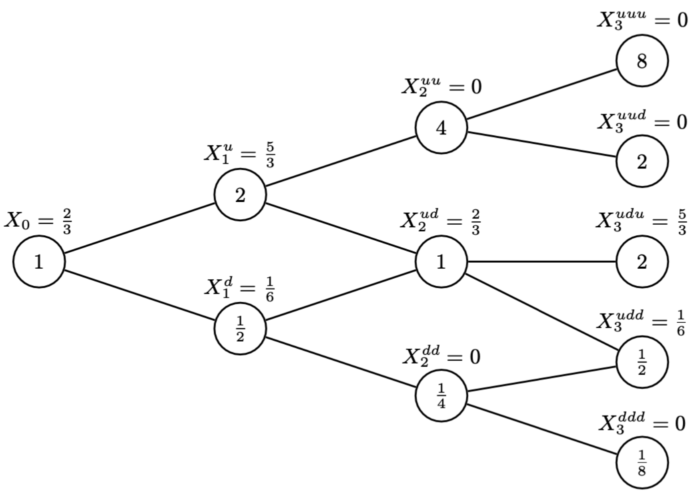

Figura 3.8: *Albero binomiale dei prezzi del sottostante S (all'interno dei cerchi) e dei valori del payoff X (sopra i cerchi)*

All'ultimo periodo il prezzo d'arbitraggio del derivato H è pari a

$$\begin{cases} H_3^{uuu} = X_3^{uuu} = 0, \\ H_3^{uud} = X_3^{uud} = 0, \\ H_3^{udu} = X_3^{udu} = (2 - \frac{1}{3})^+ = \frac{5}{3}, \\ H_3^{udd} = X_3^{udd} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})^+ = \frac{1}{6}, \\ H_3^{ddd} = X_3^{ddd} = (\frac{1}{8} - \frac{1}{3})^+ = 0. \end{cases}$$

Calcoliamo il prezzo d'arbitraggio al tempo $n = 2$: per definizione si ha

$$H_2^{uu} = \max\{X_2^{uu}, E_2^{uu}\} = \max\{0, qH_3^{uuu} + (1-q)H_3^{uud}\} = 0,$$
$$H_2^{ud} = \max\{X_2^{ud}, E_2^{ud}\} = \max\{\frac{2}{3}, qH_3^{udu} + (1-q)H_3^{udd}\} = \max\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\} = \frac{2}{3},$$
$$H_2^{dd} = \max\{X_2^{dd}, E_2^{dd}\} = \max\{0, qH_3^{ddu} + (1-q)H_3^{ddd}\} = \frac{1}{18}.$$

Al tempo $n = 1$ si ha

$$H_1^{u} = \max\{X_1^{u}, E_1 u\} = \max\{\frac{5}{3}, qH_2^{uu} + (1-q)H_2^{ud}\} = \max\{\frac{5}{3}, \frac{4}{9}\} = \frac{5}{3},$$
$$H_1^{d} = \max\{X_1^{d}, E_1 d\} = \max\{\frac{1}{6}, qH_2^{du} + (1-q)H_2^{dd}\} = \max\{\frac{1}{6}, \frac{7}{27}\} = \frac{7}{27}.$$

Infine al tempo iniziale si ha

$$H_0 = \max\{X_0, E_0\} = \max\{\frac{2}{3}, qH_1^{u} + (1-q)H_1^{d}\} = \max\{\frac{2}{3}, \frac{59}{81}\} = \frac{59}{81}.$$

Confrontando i valori di$X$ ed E già calcolati, possiamo facilmente determinare la prima e l'ultima strategia ottimale d'esercizio. Infatti, per definizione vale

$$\nu_{min} = \min\{n \mid X_n \geq E_n\} = \begin{cases} 1 \text{ in } \{S_1 = S_1^u\}, \\ 2 \text{ in } \{S_2 = S_2^{du}\}, \\ 3 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

$$\nu_{max} = \min\{n \mid X_n > E_n\} = \begin{cases} 1 \text{ in } \{S_1 = S_1^u\}, \\ 3 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

In figura 3.9 rappresentiamo la prima e l'ultima strategia ottimale d'esercizio.

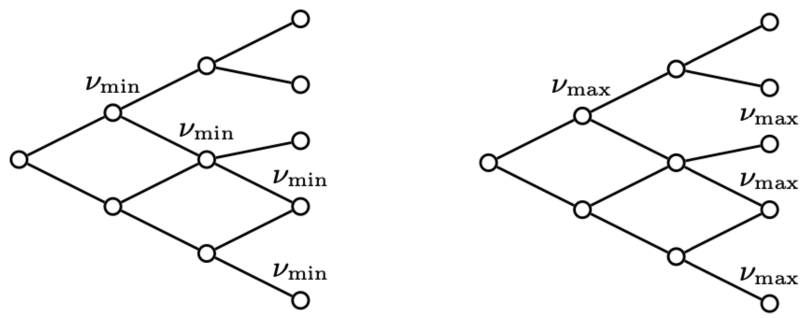

Figura 3.9: *Minima (a sinistra) e massima (a destra) strategia ottimale d'esercizio.*

Osservazione 3.4. Si noti che il fatto che sia ottimale esercitare anticipatamente se $S_1 = uS_0$, è dovuto alla presenza della barriera. Per i valori di S "lontani" dalla barriera, l'esercizio anticipato non è ottimale come nel caso standard della Call Americana senza barriera che è equivalente alla Call Europea.

Appendice A

Implementazione del modello binomiale nel linguaggio Python

In questa appendice viene implementato il modello binomiale a n periodi nel linguaggio di programmazione Python. Per implementare tale modello è necessaria una calibrazione preliminare delle grandezze in gioco.

A.1 Calibrazione

La calibrazione di un modello consiste nella determinazione dei parametri a partire dall'osservazione del mercato reale. I parametri del modello binomiale sono il tasso privo di rischio ρ nel periodo (t_{n-1}, t_n), i tassi di crescita e decrescita del sottostante u, d e la probabilità p; tuttavia il prezzo d'arbitraggio non dipende da p. Se ammettiamo che il tasso d'interesse privo di rischio r sia noto, ricaviamo subito ρ dalla relazione

$$1 + \rho = e^{r\frac{T}{N}}.$$

Definiamo il tasso di rendimento (annuale) μ del titolo rischioso ponendo

$$S_T = S_0 e^{\mu T}.$$

Definiamo poi il rendimento atteso m e la volatilità osservata σ rispettivamente come il valore atteso e la deviazione standard del tasso di rendimento annuale. Supponiamo dunque che m e σ siano noti e cerchiamo di ricavare il valore di u e d. Posto $\delta = \frac{T}{N}$, ricaviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} m\delta = (p \log u + (1-p) \log d), \\ \sigma^2 \delta = p(1-p)(\log \frac{u}{d})^2. \end{cases} \tag{A.1}$$

Poichè si tratta di un sistema di due equazioni nelle tre incognite (u, d, p) è necessario imporre a priori una terza condizione. Imponiamo

$$p = \frac{1}{2}.$$

La soluzione del sistema per $\delta \to 0$ sarà

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta}+o(\sqrt{\delta})} = 1 + \sigma\sqrt{\delta} + o(\sqrt{\delta}),$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}+o(\sqrt{\delta})} = 1 - \sigma\sqrt{\delta} + o(\sqrt{\delta}).$$

Per semplicità, nell'implementazione del modello binomiale, si sceglie

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta}}, \quad d = e^{--\sigma\sqrt{\delta}}.$$

A.2 Algoritmo per il calcolo del prezzo dell'opzione

Primo passo: importo i pacchetti e definisco la funzione "Binomial" che richiede in "input" i seguenti dieci valori:

1. OutputFlag: P prezzo dell'opzione, d delta dell'opzione, a prezzo dell'opzione, δ e γ;
2. AmeEurFlag: a se l'opzione è americana, e se l'opzione è europea;
3. CallPutFlag: C se si tratta di una call, P se si stratta di una put;
4. S, il prezzo al tempo t;
5. X, il prezzo di strike;
6. T, il tempo in anni;
7. r, il tasso di interesse privo di rischio;
8. c, il costo;
9. v, la volatilità osservata;
10. n, i passi.

Si richiede poi alla funzione di controllare nell'input se l'opzione analizzata è una Put o una Call.

Secondo passo: la calibrazione.

Terzo passo: viene creato l'albero binomiale, partendo dalla colonna più a destra.

Quarto passo: la funzione stampa il prezzo dell'opzione analizzata e riporta la tipologia di opzione in esame.

```python

import numpy as np
def Binomial(OutputFlag, AmeEurFlag, CallPutFlag, S, X, T, r, c, v, n):
    n_list = np.arange(0, (n + 1), 1)

    if CallPutFlag == 'C':
        z = 1
    elif CallPutFlag == 'P':
        z = -1
    else:
        return 'Call o put non definita'

```

Figura A.1: *Primo passo: definizione della funzione.*

```python

    dt = T / n

    H = np.exp((v**2)*dt)
    u = 0.5 * np.exp(c * dt) * H * (H + 1 + np.sqrt(H**2 + 2*H -3))  # up movement
    d = 0.5 * np.exp(c * dt) * H * (H + 1 - np.sqrt(H**2 + 2*H -3))  # down movement
    p = (np.exp(c * dt) - d) / (u - d)

    df = np.exp(-r * dt)

```

Figura A.2: *Secondo passo: calibrazione.*

```python
    max_pay_off_list = []
    for i in n_list:
        i = i.astype('int')
        max_pay_off = np.maximum(0, z * (S * u ** i * d ** (n - i) - X))
        max_pay_off_list.append(max_pay_off)

    for j in np.arange(n - 1, 0 - 1, -1):
        for i in np.arange(0, j + 1, 1):
            i = i.astype(int)  # deve essere intero
            if AmeEurFlag == 'e': #caso call
                max_pay_off_list[i] = (p * max_pay_off_list[i + 1] + (1 - p) * max_pay_off_list[i]) * df
            elif AmeEurFlag == 'a': #caso put
                max_pay_off_list[i] = np.maximum((z * (S * u ** i * d ** (j - i) - X)),
                                                 (p * max_pay_off_list[i + 1] + (1 - p) * max_pay_off_list[i]) * df)
        if j == 2:
            gamma = ((max_pay_off_list[2] - max_pay_off_list[1]) / (S * u ** 2 - S * u * d) - (
                    max_pay_off_list[1] - max_pay_off_list[0]) / (S * u * d - S * d ** 2)) / (
                            0.5 * (S * u ** 2 - S * d ** 2))
        if j == 1:
            delta = ((max_pay_off_list[1] - max_pay_off_list[0])) / (S * u - S * d)
    price = max_pay_off_list[0]
```

Figura A.3: *Terzo passo: creazione dell'albero binomiale.*

```python
    variable_list = [delta, gamma, price]
    if OutputFlag == 'P':
        return price
    elif OutputFlag == 'd':
        return delta
    elif OutputFlag == 'g':
        return gamma
    elif OutputFlag == 'a':
        return variable_list
    else:
        return 'Indicate if you want to return P, d, g or a'
S = 100 ; X = 100 ; T = 4/12 ; r = 0.05 ; c = 0.05 ; v = 0.3; n = 97

Eur_call_result = Binomial('P', 'e', 'C', S, X, T, r, c, v, n)
American_call_result = Binomial('P', 'a', 'C', S, X, T, r, c, v, n)
Eur_put_result = Binomial('P', 'e', 'P', S, X, T, r, c, v, n)
American_put_result = Binomial('P', 'a', 'P', S, X, T, r, c, v, n)
print('The price of the European call option is equal to ' +str(Eur_call_result))
print('The price of the American call option is equal to ' +str(American_call_result))
print('The price of the European put option is equal to ' +str(Eur_put_result))
print('The price of the American put option is equal to ' +str(American_put_result))
```

Figura A.4: *Quarto passo: stampa dei valori richiesti.*

```
The price of the European call option is equal to 7.703771959472266
The price of the American call option is equal to 7.703771959472266
The price of the European put option is equal to 6.050917341634754
The price of the American put option is equal to 6.1959114022492106
```

Figura A.5: *Stampa finale.*

Bibliografia

[1] A.Pascucci, W.Runggaldier: *Finanza Matematica*, Springer, Milano, 2009.

[2] A.Pascucci: *Calcolo stocastico per la Finanaza*. Springer, Milano, 2008.

[3] J. van der Hoek and R. J. Elliot: *Binomial models in finance*. Springer, New York, 2006.

[4] J.C. Cox; S.A. Ross; M. Rubistei: *Option pricing: A simplified approach*. Elsevier, 1979.

[5] VinegarHill-FinanceLabs. Binomial Lattice Framework, `https://sites.google.com/view/vinegarhill-financelabs/binomial-lattice-framework/tian-1993`.