

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**Integrabilità di Automi Cellulari Classici  
e Introduzione agli Automi Cellulari  
Quantistici**

**Relatore:**  
**Prof. Francesco Ravanini**

**Presentata da:**  
**Daniele Cristani**

Anno Accademico 2022/2023

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Automi cellulari</b>	<b>4</b>
1.1 Definizione formale di automa cellulare . . . . .	5
1.2 Automi cellulari elementari . . . . .	6
1.3 Classi di CA . . . . .	8
1.3.1 Analogie con la teoria dei sistemi dinamici . . . . .	11
1.4 Analisi matematica di un CA semplice . . . . .	11
<b>2 Introduzione all'integrabilità</b>	<b>15</b>
2.1 Liouville Integrabilità . . . . .	15
2.2 Lax pair e equazione di Yang Baxter classica . . . . .	17
2.2.1 Lax pair "costanti" . . . . .	17
2.2.2 Lax pair dipendenti da un parametro spettrale . . . . .	20
2.3 Teorie di campo integrabili . . . . .	20
<b>3 Integrabilità di automi cellulari classici</b>	<b>22</b>
3.1 CA reversibili . . . . .	22
3.2 Filter Automata e Parity Rule Filter Automata . . . . .	24
3.2.1 Fast Rule Theorem e PRFA a più stati . . . . .	26
3.2.2 PRFA reversibili . . . . .	28
3.3 FA integrabili . . . . .	29
3.3.1 Integrabilità . . . . .	31
<b>4 Quantum Cellular Automata</b>	<b>34</b>
4.1 Definizione Assiomatica di QCA . . . . .	35
4.1.1 Sistemi . . . . .	35
4.1.2 Dinamica . . . . .	36
4.1.3 Regole di transizioni globali e locali . . . . .	37
4.2 Esempi di QCA . . . . .	39

<i>INDICE</i>	2
4.2.1 Schemi di Partizione . . . . .	40
4.2.2 QCA di Clifford . . . . .	42
<b>Bibliografia</b>	<b>45</b>

# Introduzione

In questa tesi si vogliono studiare gli automi cellulari (CA), in particolare focalizzandosi su esempi integrabili. Si vogliono anche introdurre automi cellulari quantistici (QCA).

Gli automi cellulari, introdotti nel capitolo 1, sono modelli matematici in cui sia spazio che tempo sono presi come discreti. Lo spazio deve essere perciò reticolare e ad ogni sito del reticolo si può porre un sistema che può assumere un numero finito di valori, anch'essi discreti. I CA hanno grandi potenzialità di applicazione in varie branche della scienza, tra cui biologia, informatica e chimica. Sono numerosi anche i sistemi fisici modellizzabili con automi cellulari. In particolare si hanno diverse applicazioni in fisica statistica e in fisica della materia condensata, per studiare fenomeni come la fluidodinamica o le transizioni di fase. Esempi canonici sono il modello di Ising [1] e i cosiddetti *lattice gas automata*, dai quali è possibile derivare le equazioni di Navier-Stokes [2].

In fisica, i modelli integrabili sono abbondantemente studiati in quanto possono essere risolti in maniera esatta e dunque permettono di essere analizzati molto nel profondo. Ciò spesso fornisce informazioni su comportamenti che anche sistemi simili a certi sistemi integrabili possono perpetrare, rendendoli più comprensibili. Si è perciò scelto di studiare degli esempi di automi cellulari integrabili del capitolo 3. Per farlo però, è stato prima necessario introdurre alcune nozioni di base di integrabilità, come l'integrabilità alla Liouville e concetti come i Lax pair e la matrice  $r$ . Ciò è stato fatto nel capitolo 2.

Nell'ultimo capitolo di questo elaborato, infine, si sono introdotti gli automi cellulari quantistici. In essi, i sistemi posti su ogni sito non saranno più classici, ma quantistici, il che ne complica la definizione e la trattazione. I QCA forniscono un paradigma alternativo alla computazione quantistica e una naturale discretizzazione della teoria quantistica dei campi.

# Capitolo 1

## Automi cellulari

Un **automa cellulare** o **cellular automata**, abbreviato in **CA**, consiste in un reticolo discreto  $n$ -dimensionale di siti identici (anche detti celle), ognuno dei quali può assumere un numero finito di valori interi. Questi valori evolvono in intervalli temporali discreti seguendo regole deterministiche, le quali specificano il valore di ogni sito ad un istante successivo partendo dai valori dei siti vicini. I CA possono quindi essere considerati un'idealizzazione matematica di sistemi fisici in cui tempo e spazio sono discreti. Essi forniscono un buon modello per sistemi con numerosi elementi discreti soggetti a interazioni *locali*: le regole di evoluzione devono dipendere dai valori dei vicini entro un raggio finito. Non riusciremo perciò a descrivere così efficacemente interazioni globali. In generale qualunque sistema fisico governato da equazioni differenziali alle derivate parziali, può essere approssimato da un automa cellulare, introducendo differenze finite e variabili discrete. Oltre alle applicazioni fisiche, i cellular automata forniscono semplici modelli per una grande varietà di sistemi biologici: essi sono stati infatti introdotti da von Neumann e Ulam come una possibile idealizzazione di questi, in particolare con l'obiettivo di modellizzare l'autoriproduzione.

Vediamo alcuni esempi di sistemi modellizzabili con automi cellulari. A livello microscopico, i siti possono rappresentare punti in un reticolo cristallino e i valori possibili qualche osservabile quantizzato, come ad esempio componenti dello spin, oppure possono corrispondere a diversi tipi di atomo o unità elementare. Per particelle di spin  $1/2$ , si può associare il valore 0 a particelle con spin down e il valore 1 a particelle con spin up, o viceversa. A un livello più macroscopico, i siti possono rappresentare regioni contenenti varie molecole e i valori indicare una o più fasi o composizioni discrete, fornendo anche modelli discreti per sistemi chimici. Anche la struttura spaziale di fluidi turbolenti si può modellizzare tramite CA, approssimando il campo di velocità come un reticolo di celle interagenti con le proprie vicine. Inol-

tre, la formazione di strutture e pattern nella crescita di organismi spesso risulta governata da regole locali molto semplici, perciò ben modellizzabili tramite automi cellulari. I valori discreti ad ogni sito possono ad esempio indicizzare diversi tipi di cellule viventi, approssimandone la crescita come su un reticolo spaziale regolare. Regole anche molto semplici possono portare alla formazione di pattern complessi come quelli visibili a volte in un buon numero di piante e animali.

## 1.1 Definizione formale di automa cellulare

Possiamo definire formalmente gli automi cellulari con la seguente

**Definizione 1.1 (Automa Cellulare).** Un automa cellulare consiste in un insieme di 4 elementi  $(L, \Sigma, \mathcal{N}, f)$  tali che

- $L$  è uno spazio  $d$ -dimensionale, generalmente un reticolo indicizzato da interi, cioè  $L \subseteq \mathbb{Z}^d$ ;
- $\Sigma$  è un insieme finito di possibili stati che le celle possono assumere detto *spazio degli stati*, la cui cardinalità  $|\Sigma|$  è detta *dimensione* della cella;
- $\mathcal{N}_i \subseteq L$  è un intorno di una cella  $i$  detto *vicinato*, che contiene un numero finito di siti ed è uguale per ogni cella, cioè tale che  $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_j, \forall i, j \in L$ ;
- chiamiamo *configurazione classica* una funzione  $a : L \rightarrow \Sigma$  che assegna ogni punto del reticolo a un elemento dello spazio degli stati, così da formare uno spazio di tutte le possibili configurazioni  $\Sigma_L$ . Indichiamo con  $a_i^{(t)}$  lo stato al tempo  $t \in \mathbb{Z}$  associato al punto  $i$ ;
- $f_i : \Sigma_{\mathcal{N}_i} \rightarrow \Sigma_i$  è una regola di transizione locale che evolve lo stato di un sito dal tempo  $t$  al tempo  $t + 1$ , che dipende soltanto dalle configurazioni del vicinato di  $i$ . Possiamo dunque scrivere

$$a_i^{(t+1)} = f_i(\{a_j^{(t)} : j \in \mathcal{N}_i\}); \quad (1.1)$$

- considerando la regola di transizione locale per ogni  $i \in L$ , possiamo derivare una regola di transizione globale

$$f : \Sigma_L \rightarrow \Sigma_L, f(a_i) = f_i(\{a_j : j \in \mathcal{N}_i\}). \quad (1.2)$$

Vediamo che le regole di evoluzione locali sono uguali per ogni cella: si ha omogeneità spaziale. Avendo inoltre  $f$  indipendente dal tempo, si ha anche omogeneità temporale.

Confrontiamo la definizione 1.1 con quella più euristica data all’inizio del capitolo per introdurre gli automi cellulari. La prima ci fornisce CA con siti identici e regole di evoluzione locali: ogni cella cambia stato tenendo conto soltanto di un vicinato finito. Siamo quindi limitati a un certo raggio di interazione. Entrambe le cose erano richieste dalla definizione euristica. Ora se indicizziamo gli stati possibili con valori interi, ad esempio,  $i = 0, 1, \dots, |\Sigma| - 1$ , possiamo sostituire i diversi stati con i loro indici ottenendo una corrispondenza completa con la definizione precedente.

## 1.2 Automi cellulari elementari

Nei casi più semplici di cellular automata, avremo a che fare con reticoli 1-dimensionali ( $L \subseteq \mathbb{Z}$ ), i cui siti possono assumere come valori solo 0 o 1 ( $\Sigma = \{0, 1\}$ ) e in cui le regole di evoluzione dipendono soltanto dai valori del sito stesso e dei suoi *primi vicini* ( $\mathcal{N}_i = \{i - 1, i, i + 1\}$ ). Indicando allora con  $a_i^{(t)} \in \{0, 1\}$  il valore di un sito posto alla posizione  $i$  di un reticolo 1-dimensionale al tempo  $t$ , con  $t \in \mathbb{Z}$ , le regole di evoluzione possono essere rappresentate come

$$a_i^{(t+1)} = f(a_{i-1}^{(t)}, a_i^{(t)}, a_{i+1}^{(t)}). \quad (1.3)$$

Questi automi sono detti **elementari**. Possiamo associare ad ognuno dei  $2^3 = 8$  possibili "vicinati" di 3 siti il corrispondente valore, scelto tra 0 e 1, che il sito centrale assumerà dopo uno step temporale. Una regola di evoluzione sarà perciò identificabile con un numero binario a 8 cifre  $\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ , con  $\alpha_k \in \{0, 1\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 7$ . Per convenzione, si pongono come cifre via via più significative quelle associate ai vicini che in binario rappresentano i numeri via via più grandi:  $\alpha_7$  corrisponde perciò a 111,  $\alpha_6$  a 110 e così via. Avremo dunque  $2^8 = 256$  regole distinte possibili, che vengono generalmente indicate usando la rappresentazione decimale della loro specificazione binaria, secondo la *notazione di Wolfram* [3]. Queste si possono considerare come funzioni booleane dei siti nel vicinato. Possiamo quindi applicare le regole dell'algebra di Boole per trovare l'espressione matematica della funzione a partire dalla sua tavola di verità, rappresentata di fatto dalla specificazione binaria delle regole.

Sulle regole, si impongono solitamente due restrizioni. In primis, un automa in cui uno stato iniziale composto da soli 0 non rimane immutato è considerato inammissibile. Ciò impone un vincolo sull'ultima cifra della specificazione binaria, che dovrà necessariamente essere  $\alpha_0 = 0$ , e rimuove la simmetria nel trattamento dei siti di valori 0 e 1, impedendo una "propagazione istantanea" di siti di valore 1. Riduciamo perciò il numero delle regole accettabili, che diventano 128. Inoltre

imponiamo *simmetria di riflessione*, cosicché le coppie (100, 001), (110, 011) e (101, 010) portino allo stesso valore. Questo garantisce isotropia e omogeneità nell'evoluzione, e ci lascia 32 regole definite **legali**, nella forma  $\alpha_7\alpha_6\alpha_5\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0$ . A causa della simmetria di riflessione, avremo che i termini  $a_{i-1}^{(t)}$  e  $a_{i+1}^{(t)}$  dovranno entrare simmetricamente nelle regole legali. In assenza di questa, le configurazioni tendono a subire traslazione uniforme nell'evoluzione temporale.

Cerchiamo di vedere tutto ciò in azione tramite un semplice esempio.

---

*Esempio 1.1* (Rule 90). Un primo esempio di CA elementare è quello descritto dalla specificazione binaria 01011010, corrispondente al numero 90 in base dieci. Questa regola è quindi detta **rule 90**. Vediamo l'associazione di ogni vicinato all'evoluto in tabella 1.1.

<i>Vicinato</i>	$a_{i-1}^{(t)}$	$a_i^{(t)}$	$a_{i+1}^{(t)}$	$a_i^{(t+1)}$
111	1	1	1	0
110	1	1	0	1
101	1	0	1	0
100	1	0	0	1
011	0	1	1	1
010	0	1	0	0
001	0	0	1	1
000	0	0	0	0

Tabella 1.1: Evoluzione di tutti gli 8 possibili vicinati secondo la *rule 90*. Esplicitando i valori dei 3 membri del vicinato, abbiamo anche una tavola di verità, da cui possiamo ricavare la funzione booleana che rappresenterà questa regola.

Dalla tavola di verità ricaviamo l'espressione booleana come

$$a_i^{(t+1)} = a_{i-1}^{(t)} \oplus a_{i+1}^{(t)}, \quad (1.4)$$

ovvero l'**EXOR**, cioè l'or esclusivo dei valori dei due primi vicini del sito  $i$ -esimo. Questo operatore è anche detto *di disuguaglianza*, in quanto fornisce come risultato 1 se i due valori coinvolti sono tra loro diversi. Vediamo come  $a_{i-1}^{(t)}$  e  $a_{i+1}^{(t)}$  appaiano simmetricamente, in accordo con quanto detto.

Possiamo anche esprimere la regola scrivendo

$$a_i^{(t+1)} = a_{i-1}^{(t)} + a_{i+1}^{(t)} \pmod{2}, \quad (1.5)$$



dove mod 2 indica che stiamo prendendo il resto della divisione per 2 del risultato della somma.

---

Alcune regole sono dette *periferiche*, nel senso che il valore di un particolare sito dipende solo dai valori dei suoi primi vicini allo step temporale precedente, ma non dal suo. La rule 90 vista in 1.1 ne è un esempio. In generale le regole legali di questo tipo devono necessariamente avere specificazione binaria nella forma  $\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2\alpha_20\alpha_20$  e le uniche possibili sono le regole 0, 90, 160 e 250. La regola 0 annulla qualsiasi condizione iniziale, mentre 160 e 250 sono analoghe alla 90, ma sostituendo l'EXOR rispettivamente con un AND e un OR.

### 1.3 Classi di CA

Possiamo suddividere in 4 classi automi cellulari elementari e non solo a partire dal loro comportamento [4].

- **Classe 1:** l'evoluzione porta rapidamente a uno stato omogeneo (regole 0, 160).
- **Classe 2:** l'evoluzione porta a un insieme di strutture stabili o periodiche, separate e semplici (regole 50, 122).
- **Classe 3:** l'evoluzione porta a un pattern caotico (regole 18, 22, 90).
- **Classe 4:** l'evoluzione porta a strutture complesse localizzate, a volte longeve (regola 110, non rispetta simmetria di riflessione).

L'esistenza di solo 4 classi qualitative implica una certa universalità nel comportamento degli automi cellulari: molte loro proprietà dipenderanno solamente dalla classe di appartenenza più che dai dettagli precisi della loro evoluzione.

In generale possiamo esplicitare meglio le definizioni delle classi andando a vedere il grado di prevedibilità dell'evoluzione data la configurazione iniziale. Capiamo subito che per CA di classe 1, si ha previsione completa dell'evoluzione: essa infatti non dipende dalla condizione iniziale ed evolve sempre verso uno stato omogeneo. CA di classe 2 sono caratterizzati dal fatto che l'effetto di un certo valore a un determinato sito si propaga solo a una distanza finita, cioè solo a un numero finito di celle vicine. Perciò un cambiamento nel valore di un singolo sito iniziale, influenza solo una regione finita di siti intorno ad esso, anche per  $t \rightarrow \infty$ . Da ciò deduciamo che la previsione di un particolare stato finale richiede la conoscenza di soltanto un

insieme finito di valori iniziali. D'altra parte, per automi di classe 3 cambiamenti sui valori iniziali generalmente si propagano a una velocità finita indefinitamente, influenzando sempre più siti al passare del tempo. Dunque il valore di un sito particolare dopo numerosi step temporali dipende da un numero di valori iniziali crescente con il tempo: per  $t \rightarrow \infty$  dovremmo conoscere infiniti valori iniziali. Nella classe 4, gli automi sono distinti da una imprevedibilità ancora maggiore.

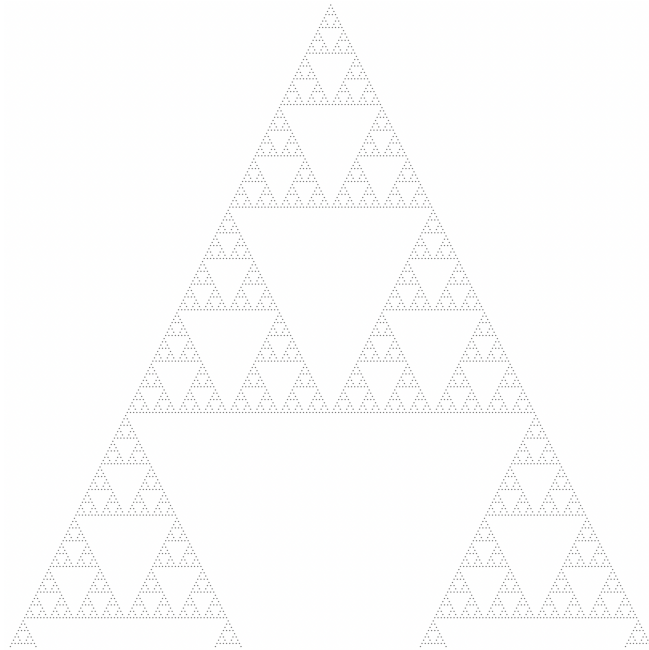


Figura 1.1: Evoluzione secondo la *rule 90* riportata in eq. (1.5) a partire da una configurazione iniziale composta da una sola cella con valore diverso da zero. Gli asterischi neri rappresentano celle di valore uno, le zone bianche sono occupate da celle di valore zero. Il tempo cresce verso il basso.

Dalle proprietà viste prima, i CA di classe 2 possono essere considerati come *filtri* che selezionano alcune particolari caratteristiche dello stato iniziale. Ad esempio, un automa di questo tipo può essere costruito facendo in modo che la sequenza iniziale 111 sopravviva, mentre siti non in questa sequenza vadano a 0 con il tempo. La loro evoluzione sarà perciò caratterizzata da blocchi contenenti siti di valore diverso da 0 separati da regioni di zeri. I blocchi possono o rimanere costanti nel tempo, dando origine a strisce verticali, o alternarsi tra qualche stato.

I CA di classe 3, invece, per quanto caotici non generano pattern totalmente casuali: possono infatti esibire *auto-organizzazione*.

Consideriamo ad esempio uno stato iniziale con un singolo sito a valore 1 e con tutti gli altri a valore 0 e studiamone l'evoluzione a partire dalla regola riportata nell'esempio 1.1. Si può notare che il pattern che si crea, visibile in figura 1.1, è

il triangolo di Pascal modulo due: i coefficienti dispari danno contributo 1, quelli pari contributo 0. Questo pattern ha la proprietà di *auto-somiglianza*. Infatti nel limite di tempo infinito, diverse viste della configurazione a differenti ingrandimenti e stessa risoluzione, risultano indistinguibili. Pattern di questo tipo sono detti *frattali*. Questa proprietà è comune a numerosi CA di classe 3. Se ora partiamo da uno stato iniziale casuale, si può osservare in figura 1.2 che si ha auto-organizzazione, nel senso che si perde l'indipendenza dei siti iniziali e l'evoluzione porta a uno stato contenente correlazioni a lungo raggio e struttura, in particolare con la formazione di triangoli.

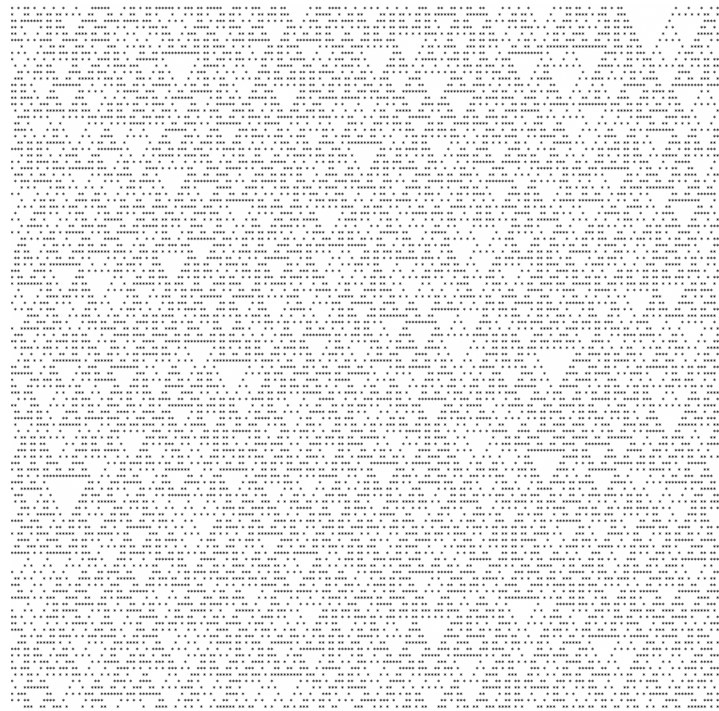


Figura 1.2: Evoluzione secondo la *rule 90* riportata in eq. (1.5) a partire da una configurazione iniziale casuale. Gli asterischi neri rappresentano celle di valore uno, le zone bianche sono occupate da celle di valore zero. Il tempo cresce verso il basso.

In generale, dal secondo principio della termodinamica ci aspettiamo che ogni sistema debba tendere verso uno stato di massima entropia e massimo disordine. Questo non è però il caso di molti sistemi, in particolare biologici, che spontaneamente generano struttura con il tempo. I CA di classe 3 forniscono perciò un buon modello per sistemi di questo tipo.

Possiamo intuire facilmente dal comportamento di automi di classi 1 e 2 che devono esistere CA irreversibili. In generale questi sono i più comuni: spesso nell'evoluzione di un cellular automata posso arrivare ad una configurazione a partire da diversi predecessori, mentre altre non sono raggiungibili tramite evoluzione temporale, ma possono solo aversi come condizioni iniziali. Questa irreversibilità causa

una perdita di informazione con l'evoluzione. Dopo molti step temporali, solo certe configurazioni saranno realizzabili. Queste si dicono *attrattori* dell'evoluzione del CA. Se esse hanno caratteristiche "organizzate", ciò apparirà anche nell'evoluzione: l'auto-organizzazione è dunque conseguenza dell'irreversibilità.

### 1.3.1 Analogie con la teoria dei sistemi dinamici

Le prime tre classi di CA sono analoghe a tre classi di comportamento che si trovano nelle soluzioni di equazioni differenziali [5]. Per alcune, le soluzioni approssimano un punto fisso a tempi lunghi, con un comportamento analogo a CA di classe 1. In una seconda classe, la soluzione nel limite  $t \rightarrow \infty$  è un ciclo in cui i parametri variano periodicamente nel tempo, analogamente a CA di classe 2. Infine, alcune equazioni differenziali hanno un comportamento complicato, apparentemente caotico, dipendente da piccolissime variazioni nelle condizioni iniziali. Ciò è analogo alla dipendenza del valore di un particolare sito da valori iniziali di siti sempre più distanti per CA di classe 3.

La maggiore semplicità matematica dei CA, suggerisce che studiarli può essere un buon modo per chiarificare certi comportamenti dei sistemi dinamici continui, descrivibili tramite equazioni differenziali.

## 1.4 Analisi matematica di un CA semplice

Vediamo come fare un'analisi matematica di un automa cellulare semplice, ovvero del CA elementare la cui evoluzione è guidata dalla *rule 90*, riportata nell'esempio 1.1. Questo formalismo è generalizzabile a più dimensioni e a regole di evoluzione dipendenti da un numero maggiore di vicini.

Iniziamo introducendo una notazione valida per generici CA 1-dimensionali. Consideriamo un automa cellulare consistente di  $N$  siti con condizioni al contorno periodiche: il sito nella posizione 0 è identificato con quello alla posizione  $N$ . Si ha dunque una disposizione dei siti circolare. Lo spazio degli stati, composto soltanto dai valori 0 e 1, è un campo finito di 2 elementi interi, che indichiamo con  $\Sigma = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  (in generale  $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ).

La configurazione completa di un automa può essere specificata dai valori degli  $N$  siti e può venire rappresentata da un **polinomio caratteristico di configurazione**:

$$A^{(t)}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i^{(t)} x^i, \quad (1.6)$$

dove  $x$  è una variabile fittizia e  $a_i^{(t)} \in \Sigma$  è il valore del sito alla posizione  $i$ -esima al tempo  $t \in \mathbb{Z}$ .

*Osservazione 1.1.* Tutta l'aritmetica sui coefficienti dei polinomi da qui in poi va svolta in  $\mathbb{Z}_2$ , perciò modulo 2.

Spesso conviene considerare polinomi generalizzati contenenti anche potenze negative di  $x$ , detti *dipolinomi*. In generale  $H(x)$  è un dipolinomio se esiste un intero  $m$  tale che  $x^m H(x)$  è un polinomio. Essi hanno proprietà di divisibilità e di congruenza analoghe a quelle dei polinomi ordinari. La moltiplicazione di un polinomio caratteristico  $A(x)$  per  $x^{\pm j}$  produce un dipolinomio che rappresenta una configurazione in cui i valori di ogni sito sono stati traslati a un sito  $j$  posizioni più a destra o sinistra rispettivamente.

Considerando automi cellulari elementari, avremo che  $\mathcal{N}_i = \{i-1, i, i+1\}$  e che  $a_i^{(t+1)}$  sarà scrivibile nella forma (1.3). Vogliamo limitarci alla *rule 90*, la quale gode di una proprietà detta **addittività**, per cui l'evoluzione temporale avviene secondo regole date da combinazioni lineari del tipo

$$a_i^{(t)} = \alpha_{-1} a_{i-1}^{(t-1)} + \alpha_0 a_i^{(t-1)} + \alpha_{+1} a_{i+1}^{(t-1)}, \quad (1.7)$$

dove  $\alpha_j \in \Sigma$  con  $j = -1, 0, +1$  e gli indici di sito  $i$  sono presi modulo  $N$ . In questo caso posso rappresentare l'evoluzione temporale moltiplicando il polinomio caratteristico per il dipolinomio fissato

$$T(x) = \alpha_{-1} x + \alpha_0 + \alpha_{+1} x^{-1}, \quad (1.8)$$

da cui

$$A^{(t+1)}(x) = T(x)A^{(t)}(x) \pmod{(x^N - 1)}. \quad (1.9)$$

La riduzione modulo  $x^N - 1$  (equivalente a  $x^N + 1$  poiché i coefficienti sono presi modulo due) serve a mantenere le condizioni al contorno periodiche e a rimuovere potenze negative di  $x$ . CA addittivi obbediscono un particolare principio di sovrapposizione. Esso implica che la configurazione ottenuta evolvendo una configurazione iniziale esprimibile come  $A^{(0)}(x) + B^{(0)}(x)$  è identica a  $A^{(t)}(x) + B^{(t)}(x)$ , dove  $A^{(t)}(x)$  e  $B^{(t)}(x)$  sono il risultato dell'evoluzione separata di  $A^{(0)}(x)$  e  $B^{(0)}(x)$ . Potendo rappresentare ogni configurazione come combinazione lineare di configurazioni di base  $x^j$  ( $j = 0, 1, \dots, N-1$ ) contenenti un singolo sito diverso di valore unitario, questo principio permette di determinare l'evoluzione di una qualsiasi configurazione a partire da quella degli  $x^j$ . Avendo però a che fare con siti identici, avremo simmetria di traslazione e basterà considerare l'evoluzione soltanto per il caso  $j = 0$ .

Concentriamoci sulla *rule 90*. Secondo essa, i siti evolvono seguendo la regola di evoluzione (1.5), la quale si può rappresentare moltiplicando il polinomio caratteristico della configurazione per il dipolinomio

$$T(x) = x + x^{-1}, \quad (1.10)$$

essendo una regola addittiva.

Dall'addittività, sappiamo che ci basta valutare l'evoluzione di una singola configurazione iniziale contenente un unico sito diverso da zero nella posizione  $i = 0$ . L'evoluzione di questa dopo  $t$  step temporali sarà data semplicemente da

$$T(x)^t 1 = (x + x^{-1})^t = \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} x^{2i-t}. \quad (1.11)$$

Per  $t < N/2$ , il numero di siti diverso da zero cresce linearmente con il tempo e in particolare i valori sono dati semplicemente dai coefficienti binomiali modulo due, in accordo con quanto osservato in figura 1.1.

Usando questo formalismo possiamo caratterizzare l'irreversibilità di alcuni automi cellulari: infatti, mentre ogni configurazione ha un unico successore nel tempo, molte possono avere numerosi precedenti, o non averne nessuno. Queste ultime, dette *Giardino dell'Eden* possono occorrere solo come condizioni iniziali e non potranno mai generarsi dall'evoluzione temporale di un CA.

Per *rule 90* possiamo caratterizzare l'irreversibilità dell'automata con una serie di lemmi e teoremi, dimostrati in [6], di cui se ne riportano alcuni.

**Lemma 1.1.** *Configurazioni contenenti un numero dispari di siti con valore 1 non possono mai essere generate nell'evoluzione dell'automata cellulare definito dalla regola di evoluzione (1.5) e possono solo aversi come condizioni iniziali.*

**Teorema 1.1.** *La frazione delle  $2^N$  configurazioni possibili di un automa cellulare composto da  $N$  siti definito dalla regola di evoluzione (1.5) che possono essere soltanto condizioni iniziali è  $1/2$  per  $N$  dispari e  $3/4$  per  $N$  pari.*

**Teorema 1.2.** *Le configurazioni possibili di un automa cellulare composto da  $N$  siti definito dalla regola di evoluzione (1.5) con almeno un predecessore, ne hanno esattamente 2 per  $N$  dispari ed esattamente 4 per  $N$  pari.*

È interessante vedere come avere un numero di siti  $N$  divisibile per due o meno possa influenzare le caratteristiche legate all'irreversibilità.

*Osservazione 1.2.* Abbiamo considerato automi composti da un numero finito di siti. In questa condizione vediamo dal lemma 1.1 che esistono configurazioni senza

predecessori. Se considerassimo però  $N = \infty$ , non avremmo più Giardini dell'Eden, in quanto esistono predecessori delle configurazioni con un numero dispari di siti di valore 1. Queste avranno infiniti valori diversi da zero. Inoltre, per  $N = \infty$  cambia anche il teorema 1.2. Infatti in questo caso il comportamento è analogo a quello per  $N$  pari: avremo sempre 4 predecessori.

Nel resto di questa tesi si vogliono studiare automi integrabili, i quali dovranno necessariamente avere caratteristiche reversibili. Non sarebbe possibile altrimenti trovare una soluzione unica per la dinamica dei CA. Sarà perciò necessario introdurre una nozione di reversibilità per automi cellulari nel capitolo 3.

# Capitolo 2

## Introduzione all'integrabilità

Prima di proseguire oltre, è necessario introdurre alcune nozioni di integrabilità, per sistemi sia finito che infinito dimensionali, per poi applicarle ad alcuni automi cellulari integrabili. Nell'arco di questo capitolo seguiremo l'esempio dell'oscillatore armonico 1-dimensionale per comprendere meglio i concetti che si stanno introducendo.

### 2.1 Liouville Integrabilità

Consideriamo una generica funzione di fase  $F(\{q_i\}, \{p_i\})$  in uno spazio delle fasi  $2n$ -dimensionale, dove  $\{q_i\}$  e  $\{p_i\}$  rappresentano le variabili di fase coniugate. La sua derivata temporale sarà esprimibile come

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right),\end{aligned}\tag{2.1}$$

dove abbiamo usato le equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Riconosciamo nel lato destro di eq. (2.1) la parentesi di Poisson di  $F$  e  $H$ , perciò possiamo scrivere

$$\dot{F} = \{F, H\},\tag{2.3}$$

che descrive l'evoluzione di una qualunque funzione di fase.



Da ciò si può dedurre che qualunque funzione che soddisfi  $\{F, H\} = 0$  si conserva ed è perciò un integrale primo del moto. L'esempio più ovvio è l'Hamiltoniana stessa.

**Definizione 2.1 (Liouville Integrabilità).** Un sistema in uno spazio delle fasi  $2n$ -dimensionale si dice **Liouville integrabile** se ci sono  $n$  quantità conservate indipendenti in involuzione, cioè tali che:

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Una di queste è l'Hamiltoniana  $H$ .

Questi sistemi risultano completamente risolvibili, come conseguenza del **teorema di Liouville** [7].

**Teorema 2.1 (Teorema di Liouville).** *Le equazioni del moto di un sistema Liouville integrabile sono risolvibili per quadrature (cioè integrazioni temporali).*

Da questo teorema sappiamo che per un sistema Liouville integrabile esiste sempre una trasformazione canonica, che quindi conserva la forma delle equazioni di Hamilton,  $(p_i, q_i) \rightarrow (F_i, \varphi_i)$ , dove le  $F_i$  corrispondono agli integrali primi del moto. Le equazioni canoniche diventano perciò:

$$\begin{aligned} \dot{F}_i &= \{F_i, H\} = 0, \\ \dot{\varphi}_i &= \{\varphi_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial F_i} = \Omega_i, \end{aligned} \quad (2.5)$$

che hanno come soluzione:

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \alpha, \\ \varphi_i(t) &= \Omega_i t + \varphi_i(0). \end{aligned} \quad (2.6)$$

*Oscillatore Armonico 1D* L'Hamiltoniana per un oscillatore armonico classico 1D di massa  $m = 1$  è data da

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} = E, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Possiamo effettuare una trasformazione canonica  $(p, q) \rightarrow (F, \varphi)$  definita da

$$\begin{aligned} p &= F \cos \varphi, \\ q &= \frac{F}{\omega} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.8)$$

e l'Hamiltoniana diventa

$$H = \frac{F^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\omega^2 F^2}{2\omega^2} \sin^2 \varphi = \frac{F^2}{2} = E, \quad (2.9)$$

da cui  $F = \sqrt{2E}$  ed è costante, perciò le equazioni del moto diventano semplicemente

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \omega t + \varphi(0), \\ F(t) &= F(0) = \sqrt{2E}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

## 2.2 Lax pair e equazione di Yang Baxter classica

Il teorema di Liouville è molto importante nella teoria dell'integrabilità classica, ma esiste un altro formalismo, per alcune classi di modelli, che gode di numerosi vantaggi: **Lax pair** ed **equazione di Yang-Baxter classica**. Questo formalismo permette di descrivere teorie di campo (1+1)-dimensionali integrabili usando la cosiddetta *connessione di Lax*.

Abbiamo due possibilità quando si ha a che fare con Lax pair: Lax pair "costanti" e Lax pair dipendenti da un parametro spettrale  $z$ .

### 2.2.1 Lax pair "costanti"

Abbiamo visto che un sistema Liouville integrabile con  $n$  gradi di libertà ha  $n$  cariche conservate (integrali primi del moto), le quali sono tutte in involuzione. Consideriamo queste due proprietà separatamente.

Innanzitutto notiamo che è possibile scrivere le equazioni di Hamilton (2.2) in una forma matriciale

$$\dot{L} = [M, L],\tag{2.11}$$

dove la coppia  $M, L \in \mathcal{M}$  di matrici  $2n \times 2n$  su un campo  $\mathbb{K}$  (generalmente  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) è detta **Lax pair** (o coppia di Lax) e la parentesi quadre rappresentano il commutatore delle due matrici. Affinché eq. (2.11) ci fornisca soltanto  $2n$  equazioni indipendenti equivalenti a eq. (2.2),  $L$  deve essere simmetrica e a traccia nulla e di conseguenza anche  $\dot{L}$  sarà simmetrica. Siccome il commutatore di una matrice simmetrica e una antisimmetrica è simmetrico,  $M$  dovrà invece essere antisimmetrica [8].

Le cariche conservate sono date da

$$Q_j = \text{tr } L^j, \quad j = 2, 4, \dots, 2n.\tag{2.12}$$

Per verificarlo deriviamo rispetto al tempo e, usando la ciclicità e la linearità della traccia ed eq. (2.11) avremo:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_n &= n \text{tr}(\dot{L}L^{n-1}) = n \text{tr}([M, L]L^{n-1}) = \\ &= n \text{tr}(ML - LML^{n-1}) = n \text{tr}(ML) - n \text{tr}(ML) = 0.\end{aligned}\tag{2.13}$$

*Osservazione 2.1.* La dimostrazione del fatto che i  $Q_j$  si conservano non richiede di avere potenze pari. Avendo però  $\text{tr } L = 0$ ,  $Q_j = 0$  per  $j$  dispari. Questi dunque non sono integrali del moto utilizzabili.

---

*Oscillatore Armonico 1D* La coppia di Lax di un oscillatore armonico classico si può esprimere nel seguente modo

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Sostituendo nell'equazione (2.11) otteniamo le solite equazioni del moto per l'oscillatore. Inoltre possiamo trovare l'unico integrale primo del moto del sistema, ovvero l'Hamiltoniana stessa, calcolando la traccia di  $L^2$

$$\text{tr } L^2 = \frac{1}{4} \text{tr} \begin{pmatrix} p^2 + \omega^2 q^2 & 0 \\ 0 & p^2 + \omega^2 q^2 \end{pmatrix} = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} = H = E \quad (2.15)$$

---

L'equazione (2.11) ha soluzione:

$$L(t) = g(t)L(0)g^{-1}(t), \quad M(t) = \frac{dg(t)}{dt}g^{-1}(t), \quad (2.16)$$

dove  $g(t) \in \mathcal{M}$  è una matrice invertibile, perciò  $g^{-1}(t)g(t) = g(t)g^{-1}(t) = I$  ( $I \in \mathcal{M}$  è la matrice identità).

L'eq. (2.11) è chiamata **isospettrale**, poiché lo spettro della matrice di Lax è conservato dall'evoluzione temporale. Infatti la dinamica fa variare  $L(t)$  solo all'interno di una *classe di similarità*, nella quale non si ha variazione degli autovalori. Supponiamo di poter diagonalizzare  $L$  tramite una matrice  $U \in \mathcal{M}$  invertibile, cioè di poter scrivere  $L = U\Lambda U^{-1}$ , dove  $\Lambda \in \mathcal{M}$  è diagonale. Ciò implica che, poiché lo spettro deve rimanere invariato, gli autovalori  $\lambda_i$  di  $L$  e  $\Lambda$  si conservano durante l'evoluzione temporale. Essi forniscono perciò un altro insieme possibile di  $n$  cariche conservate. In totale si avranno  $2n$  autovalori, ma ce ne saranno solo  $n$  indipendenti.

---

*Oscillatore Armonico 1D* Gli autovalori della matrice di Lax  $L$  dell'oscillatore armonico riportata in eq. (2.14) possono essere ottenuti trovando gli zeri del polinomio caratteristico

$$\det(L - \lambda I) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} p - \lambda & \omega q \\ \omega q & -p - \lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - p^2 - \omega^2 q^2) = 0, \quad (2.17)$$

da cui otteniamo gli autovalori

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{p^2 + \omega^2 q^2} = \pm \sqrt{2E} = \pm F, \quad (2.18)$$

che rappresentano due integrali primi del moto, non indipendenti. Infatti basta prendere solo l'autovalore  $\lambda_+ = F$  per vedere che il sistema è Liouville integrabile, essendo 1-dimensionale.

---

Vogliamo ora porre la condizione di involuzione delle cariche. Per farlo dobbiamo introdurre alcune notazioni. Siano  $A, B \in \mathcal{M}$  e  $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{2n}$  una base di  $\mathcal{M}$ , possiamo definire la loro parentesi di Poisson come

$$\{A, B\} = \sum_{i,j,k,l} \{a_{ij}, b_{kl}\} (e_{ij} \otimes e_{kl}). \quad (2.19)$$

Inoltre indichiamo con  $A_i$  la seguente espressione

$$A_i = I \otimes \dots \otimes I \otimes A \otimes I \otimes \dots \otimes I \quad (2.20)$$

dove l'indice  $i$  ci dice che  $A$  è l' $i$ -esimo fattore del prodotto tensoriale.

A questo punto, per avere le cariche, ovvero gli autovalori, in involuzione ci basta porre la seguente condizione

$$\{\Lambda_1, \Lambda_2\} = 0. \quad (2.21)$$

Usando eq. (2.21) e (2.16) si può dimostrare il seguente teorema (si vedano [9] o [7])

**Teorema 2.2.** *Gli autovalori di  $L$  sono in involuzione se e solo se esiste  $r \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}$  tale che*

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]. \quad (2.22)$$

La matrice  $r$  è data da

$$r_{12} = U_2 \{U_1, \Lambda_2\} U_1^{-1} U_1^{-2} + \frac{1}{2} [\{U_1, U_2\} U_1^{-1} U_2^{-1}, L_2]. \quad (2.23)$$

Se  $r_{12}$  risulta indipendente dalle variabili dinamiche e imponiamo  $r_{12} = -r_{21}$ , dall'identità di Jacobi per  $L_1, L_2$  e  $L_3$

$$\{L_1, \{L_2, L_3\}\} + \{L_3, \{L_1, L_2\}\} + \{L_2, \{L_3, L_1\}\} = 0 \quad (2.24)$$

otteniamo l'equazione di Yang Baxter classica (cYBE)

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \quad (2.25)$$

---

*Oscillatore Armonico 1D* La matrice che diagonalizza la matrice di Lax  $L$  dell'oscillatore è

$$U = U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & \sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & -\cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

da cui possiamo ricavare la matrice  $r$  dall'eq. (2.23) come

$$r_{12} = \frac{\omega}{2F^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes L, \quad (2.27)$$

che verifica l'equazione di Yang Baxter classica (2.25).

### 2.2.2 Lax pair dipendenti da un parametro spettrale

Si hanno situazioni più interessanti aggiungendo un nuovo parametro, detto **parametro spettrale**  $z \in \mathbb{C}$ . Esso in linea di principio non è un parametro fisico e perciò la teoria non deve dipendere dal suo valore. In questo modo le cariche conservate possono essere ottenute da un'espansione in questo parametro.

L'equazione (2.11) diventa

$$\dot{L}(z) = [M(z), L(z)], \quad (2.28)$$

mentre (2.22) diventa

$$\{L_1(z_1), L_2(z_2)\} = [r_{12}(z_1 - z_2), L_1(z_1)] - [r_{21}(z_2 - z_1), L_2(z_2)], \quad (2.29)$$

e la cYBE (2.25) diventa

$$[r_{12}(z_1 - z_2), r_{13}(z_1)] + [r_{12}(z_1 - z_2), r_{23}(z_2)] + [r_{13}(z_1), r_{23}(z_2)] = 0, \quad (2.30)$$

**equazione di Yang-Baxter classica** per una matrice  $r$  dipendente da un parametro spettrale.

Va osservato che per ottenere l'equazione (2.30) si deve assumere

$$r_{12}(z) = -r_{21}(-z) \quad (2.31)$$

e che  $r_{ij}$  dipenda dalla differenza dei parametri spettrali. Non è l'unica convenzione: potrei ad esempio assumere  $r_{ij}$  dipendente dal rapporto dei parametri.

## 2.3 Teorie di campo integrabili

Se andiamo a considerare delle teorie di campo, l'integrabilità alla Liouville non risulta più appropriata dovendo studiare sistemi con infiniti gradi di libertà. È però possibile utilizzare l'idea dei Lax pair come punto di partenza.

Limitiamoci a teorie di campo (1+1)-dimensionali, cioè con una dimensione spaziale  $x$  e una temporale  $t$ .

Supponiamo di poter trovare due matrici  $L(z)$  e  $M(z)$  che permettano di poter scrivere le equazioni del moto nella seguente forma [10]

$$\partial_t L(z) - \partial_x M(z) = [M(z), L(z)], \quad (2.32)$$

detta **condizione di connessione piatta** o **rappresentazione a curvatura zero**. Chiameremo teorie di campo di questo tipo *integrabili classicamente*.

La condizione (2.32) può essere ottenuta dal seguente problema ausiliario per un generico campo  $\Psi$

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi(x, t; z) + L(x, t; z) \Psi(x, t; z) &= 0, \\ \partial_t \Psi(x, t; z) + M(t, x; z) \Psi(x, t; z) &= 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

richiedendo la *condizione di compatibilità*, cioè che  $\partial_x \partial_t \Psi = \partial_t \partial_x \Psi$ .

A partire da  $L$  possiamo definire la **matrice di monodromia**  $T(z)$  come l'esponenziale ordinata di percorso (path-ordered exponential) di  $L$ . Questa forma con  $M$  un Lax pair, poiché

$$\partial_t T(z) = [M(0, t; z), T(z)]. \quad (2.34)$$

Ciò implica che la cosiddetta **matrice di trasferimento**

$$t(z) = \text{tr} T(z), \quad (2.35)$$

è conservata per un qualsiasi  $z \in \mathbb{C}$ , per quanto visto in (2.13). Possiamo perciò espandere  $t(z)$  in serie nel parametro spettrale

$$t(z) = \sum_{i=1} Q_i z^i, \quad i \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.36)$$

dove i coefficienti  $Q_i$  rappresentano infinite cariche conservate, che saranno in involuzione se  $\{t(z_1), t(z_2)\} = 0$ .

## Capitolo 3

# Integrabilità di automi cellulari classici

Vogliamo ora concentrarci sullo studio di alcuni particolari automi cellulari integrabili. Per godere della proprietà di integrabilità, questi CA non potranno avere caratteristiche irreversibili: sarà perciò necessario introdurre una nozione di reversibilità.

In seguito ci occuperemo di introdurre i concetti di *Filter Automata* (FA) e di *Parity Rule Filter Automata* (PRFA), un sottoinsieme dei FA. Questi non sono connessi agli automi definiti "filtri" nel capitolo uno, ma sono una generalizzazione dei CA in cui le regole di evoluzione possono dipendere dai valori dei siti al tempo  $t$  o al tempo  $t+1$ . Essi esibiscono numerose strutture coerenti, che possiamo chiamare *particelle*, che spesso interagiscono *solitonicamente*. In particolare esiste una classe di FA reversibili e che possiedono leggi di conservazione, condividendo con equazioni solitoniche molte proprietà di integrabilità.

Si evidenzia che in questo capitolo la dipendenza temporale non sarà indicata all'apice come nel capitolo 1, ma come solitamente viene fatto per funzioni temporali. Esprimeremo quindi il valore di un sito  $i$  al tempo  $t$  come  $a_i(t)$  anziché  $a_i^{(t)}$ . Infatti l'apice verrà utilizzato per indicizzare altro nella sezione 3.3.

### 3.1 CA reversibili

Abbiamo visto nel primo capitolo che generalmente gli automi cellulari sono sistemi irreversibili, dove perciò posso avere configurazioni dotate di nessun o più di un predecessore. Intuitivamente avremo reversibilità se risulta equivalente andare avanti o indietro nel tempo. Ciò può tradursi nella richiesta di avere soltanto un predecessore e un successore per ogni possibile configurazione del CA: l'evoluzio-

ne è in questo modo univocamente determinabile dalla regola di evoluzione e dalla condizione iniziale.

Per dare una definizione più formale di questo concetto dovremmo riprendere la definizione formale di CA e in particolare considerare la sua *regola di transizione globale*  $f$ . Se questa funzione risulta *iniettiva* (*suriettiva*), l'automata cellulare stesso viene detto *iniettivo* (*suriettivo*). Se  $f$  è sia iniettiva che suriettiva (è perciò *biiettivo*), diremo che il CA è *biiettivo*.

**Definizione 3.1 (CA reversibile [11]).** Un automa cellulare di regola di evoluzione globale  $f$  è *reversibile* (*invertibile*) se esiste un altro automa cellulare di regola di evoluzione  $g$  tale che  $f \circ g = g \circ f = id$ , dove  $id$  è la funzione identità.

Ciò è equivalente ad avere  $f$  biiettivo, e quindi invertibile, tale per cui  $f^{-1}$  possa ancora rappresentare una regola di evoluzione globale accettabile per un CA.

*Esempio 3.1 (Rule 90).* Riprendiamo l'esempio di rule 90, descritta da (1.4) nell'esempio 1.1 e vediamo se il CA è iniettivo, suriettivo, biiettivo e reversibile.

- *Iniettività:* il CA non è iniettivo, poiché, ad esempio, le due configurazioni omogenee composte da solo valori 0 o 1 sono mappate nella stessa configurazione, composta da solo zeri. In generale, supponendo infiniti siti, ogni configurazione ha 4 predecessori, come abbiamo visto in osservazione 1.2.
- *Suriettività:* abbiamo commentato in osservazione 1.2 l'assenza di Giardini dell'Eden per questo CA (sempre considerando infiniti siti). Dunque deve essere necessariamente suriettivo.
- *Biiettività:* non essendo iniettivo il CA non è biiettivo.
- *Reversibilità:* non essendo biiettivo il CA non può essere reversibile.

Definiamo come *shift*  $\tau$  una traslazione di una singola cella lungo una direzione del reticolo. L'omogeneità nello spazio implica che ogni regola  $f$  di un CA deve commutare con una qualunque traslazione:  $\tau \circ f = f \circ \tau$ .

Possiamo dotare lo spazio delle configurazioni  $\Sigma_L$  di una topologia, detta *topologia di Cantor*, come fatto in [11]. Questa è indotta da una metrica ed è compatta. Introducendo una topologia, possiamo parlare di continuità e possiamo enunciare il seguente teorema:



**Teorema 3.1 (Curtis-Hedlund-Lyndon [12]).** *Una funzione  $f : \Sigma_L \rightarrow \Sigma_L$  è una regola di transione globale di un automa cellulare se e solo se*

- (i)  $f$  è continua,
- (ii)  $f$  commuta con gli shifts.

Se  $f$  è una regola di evoluzione reversibile, sarà per definizione biettiva. Al contrario, supponiamo  $f$  biettiva: essa avrà una funzione inversa commutante con gli shifts. Inoltre, siccome lo spazio topologico  $\Sigma_L$  è compatto, l'inversa sarà anche continua e potrà quindi rappresentare una regola di evoluzione per il teorema 3.1. Abbiamo dimostrato il seguente corollario:

**Corollario 3.1.** *Un automa cellulare  $f$  è reversibile se e solo se è biiettivo.*

Vediamo ora che anche l'iniettività è equivalente alla reversibilità. Se  $f$  non è suriettiva, allora esisteranno Giardini dell'Eden, configurazioni senza predecessori. Chiamiamo *finite* le configurazioni con un numero finito di celle diverse da zero. Indichiamo con  $\Sigma_{L_F} \subseteq \Sigma_L$  lo spazio delle configurazioni finite e  $f_F : \Sigma_{L_F} \rightarrow \Sigma_{L_F}$  la restrizione di  $f$  sulle configurazioni finite. Queste si comportano in modo simile a insiemi finiti, nei quali funzioni dall'insieme in sè stesso sono iniettive se e solo se sono suriettive. Vale infatti il seguente teorema:

**Teorema 3.2 (Giardino dell'Eden [13], [14]).**  *$f_F$  è iniettiva se e solo se  $f$  è suriettiva.*

È chiaro che l'iniettività di  $f$  implica l'iniettività di  $f_F$  e perciò si ha il seguente corollario:

**Corollario 3.2.** *CA iniettivi sono anche suriettivi. Dunque iniettività, biettività e reversibilità sono nozioni equivalenti.*

## 3.2 Filter Automata e Parity Rule Filter Automata

Abbiamo visto che la regola di evoluzione di un automa cellulare 1-dimensionale con  $\Sigma = \mathbb{Z}_k$  e di vicinato  $\mathcal{N} = \{i - r, i - r + 1, \dots, i, \dots, i + r\}$ , si può scrivere come

$$a_i(t + 1) = f(a_{i-r}(t), a_{i-r+1}(t), \dots, a_i(t), \dots, a_{i+r}(t)), \quad (3.1)$$

dove vediamo che l'evoluzione di un sito dipende dai valori dei siti nel vicinato all'istante precedente.

Possiamo generalizzare questi CA definendo i **Filter Automata** (FA) [15], oggetti totalmente analoghi agli automi cellulari in cui però la regola di evoluzione è nella forma

$$a_i(t + 1) = f(a_{i-r}(t + 1), a_{i-r+1}(t + 1), \dots, a_{i-1}(t + 1), a_i(t), \dots, a_{i+r}(t)). \quad (3.2)$$

Vediamo che il valore di un sito all'istante successivo dipende dai valori evoluti dei siti alla sua sinistra, non più soltanto da valori all'istante precedente. Non stiamo perciò evolvendo tutte le celle simultaneamente, ma una dopo l'altra da sinistra verso destra.

I **Parity Rule Filter Automata** (PRFA) sono dei particolari FA 1-dimensionali e a due stati ( $L = \mathbb{Z}, \Sigma = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ ), definiti dalla seguente regola di evoluzione:

$$a_i(t + 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } S_{i,2}(t) \text{ è pari e diverso da } 0, \\ 0 & \text{se } S_{i,2}(t) \text{ è dispari o } 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

dove

$$S_{i,2}(t) = \sum_{j=1}^r a_{i-j}(t + 1) + \sum_{j=0}^r a_{i+j}(t). \quad (3.4)$$

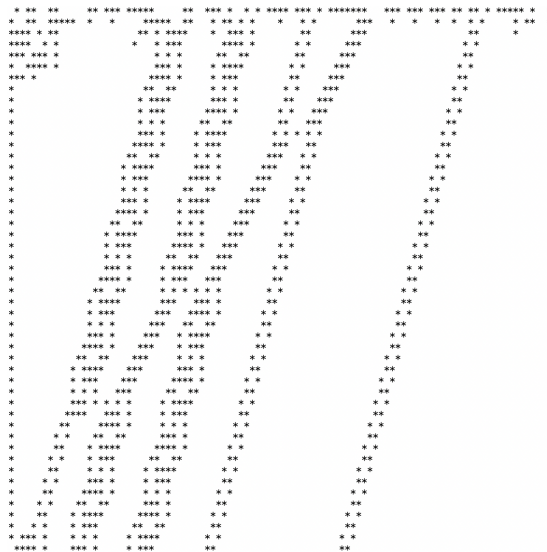


Figura 3.1: Evoluzione di un PRFA con  $r = 2$  da uno stato iniziale casuale. Vediamo diverse interazioni solitoniche tra particelle, in particolare le due interazioni più a destra. L'interazione più a sinistra non è invece di tipo solitonico, poiché la particella che arriva da destra viene modificata.

Vediamo come evolve un PRFA in figura 3.1. Date condizioni iniziali casuali, si verifica diffusione, il che si traduce nella formazione di diverse strutture stabili

e periodiche, che possiamo chiamare **particelle**. Esse sono caratterizzate da un *periodo*  $T$  e da uno *spostamento*  $d$ . Il primo è il numero di step temporali dopo i quali il pattern inizia a ripetersi, eventualmente traslato, mentre il secondo è la differenza tra l'indice della cella di valore 1 più a sinistra ai tempi  $t + T$  e  $t$ . Si può a questo punto associare loro una velocità, data da

$$v = \frac{d}{T}. \tag{3.5}$$

Ad esempio la particella più a destra in figura 3.1 ha periodo  $T = 2$  e spostamento  $d = 1$  e dunque velocità  $v = 1/2$ .

In figura 3.1 vediamo anche che le particelle possono interagire tra di loro se si muovono a differente velocità. Alcune di queste interazioni possono essere **solitoniche**: in esse, dopo aver interagito, le due particelle riemergono intatte, proseguendo indisturbate eccetto per uno shift della fase. Possiamo vederne un esempio in figura 3.2.

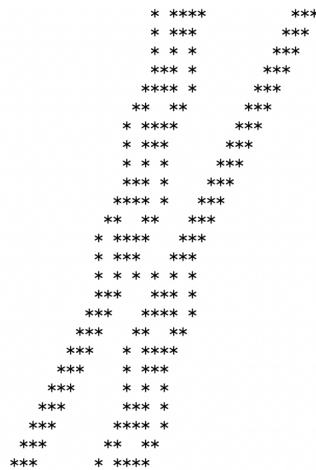


Figura 3.2: Interazione solitonica tra due particelle in un PRFA con  $r = 2$ . Dopo l'interazione le particelle procedono indisturbate, soltanto traslate.

A causare la diffusione è l'esistenza di alcuni speciali stati i quali in un time step evolvono verso la configurazione nulla, composta da soli zeri. Questi sono detti *prenull states*. Essi però impediscono di avere PRFA reversibili, in quanto uno stato nullo non potrà mai evolvere verso un prenull.

### 3.2.1 Fast Rule Theorem e PRFA a più stati

Esiste una regola geometrica equivalente ai PRFA, detta **Fast Rule Theorem** (FRT) [16], che ci permette di rendere più esplicita l'evoluzione temporale di un PRFA.

Questa è data da

$$a_{i-r}(t+1) = \begin{cases} a_i(t) & \text{se } i \notin B(t), \\ (a_i(t) - 1) \bmod 2 & \text{se } i \in B(t), \end{cases} \quad (3.6)$$

dove  $B(t)$  è un insieme definito a ogni step temporale nel seguente modo:

1. muovendosi da sinistra verso destra, l'indice (coordinata spaziale) del primo sito diverso da zero è in  $B(t)$ ;
2. in salti di  $r+1$ , poniamo  $i+r+1$  in  $B(t)$  se negli  $r$  siti alla destra dell' $i$ -esimo (ovvero quelli indicizzati da  $j \in \{i+1, \dots, i+r\}$ ), ce n'è almeno uno diverso da zero;
3. se ci sono  $r$  siti uguali a zero consecutivi a destra dell' $i$ -esimo, si procede da sinistra verso destra fino al successivo sito diverso da zero e si pone il suo indice in  $B(t)$ . Si ripetono poi gli step 2-3.

In questo caso un prenull state sarà costituito da una cella di valore 1 appartenente a  $B(t)$ , seguita da  $r$  siti di valore zero.

Possiamo generalizzare un PRFA ad avere stati in  $\Sigma = \mathbb{Z}_k$ . Per farlo introduciamo la seguente funzione delta

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \bmod k, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Utilizzandola, siamo in grado di scrivere un'equazione alle differenze finite equivalente al FRT e perciò al PRFA

$$\sum_{j=0}^r a_{i-j}(t+1) \equiv \sum_{j=0}^r a_{i+j}(t) + \delta_2(a_i(t)) \prod_{j=1}^r \delta_2(a_{i-j}(t+1)) \delta_2(a_{i+j}(t)) - 1, \quad (3.8)$$

dove l'equivalenza va intesa mod 2. Eq. (3.8) può anche essere scritta in funzione del PRFA originale come

$$a_i(t+1) \equiv S_{i,2}(t) + \delta_2(a_i(t)) \prod_{j=1}^r \delta_2(a_{i-j}(t+1)) \delta_2(a_{i+j}(t)) - 1. \quad (3.9)$$

Possiamo a questo punto generalizzare il PRFA passando da  $\delta_2$  ad una  $\delta_k$  generica, ottenendo

$$\sum_{j=0}^r a_{i-j}(t+1) \equiv \sum_{j=0}^r a_{i+j}(t) + \delta_k(a_i(t)) \prod_{j=1}^r \delta_k(a_{i-j}(t+1)) \delta_k(a_{i+j}(t)) - 1, \quad (3.10)$$

dove l'equivalenza è ora mod  $k$ . Ciò può anche essere riscritto come FRT semplicemente passando da mod 2 a mod  $k$

$$a_{i-r}(t+1) = \begin{cases} a_i(t) & \text{se } i \notin B(t), \\ (a_i(t) - 1) \bmod k & \text{se } i \in B(t), \end{cases} \quad (3.11)$$

dove  $B(t)$  è definito come sopra.

### 3.2.2 PRFA reversibili

Consideriamo l'equazione alle differenze finite (3.8). Questa descrive un PRFA irreversibile. Infatti per avere reversibilità dovremmo avere la simmetria  $a_{i+j}(t) \leftrightarrow a_{i-j}(t+1)$ , che viene rotta dal coefficiente  $\delta_2(a_i(t))$ . Per ottenere un PRFA reversibile possiamo però semplicemente togliere questo coefficiente, ottenendo

$$\sum_{j=0}^r a_{i-j}(t+1) \equiv \sum_{j=0}^r a_{i+j}(t) + \prod_{j=1}^r \delta_2(a_{i-j}(t+1))\delta_2(a_{i+j}(t)) - 1, \quad (3.12)$$

con equivalenza sempre mod 2. Ciò sarà anche esprimibile come

$$a_i(t+1) \equiv S_{i,2}(t) + \prod_{j=1}^r \delta_2(a_{i-j}(t+1))\delta_2(a_{i+j}(t)) - 1. \quad (3.13)$$

Ora i prenull states, causa dell'irreversibilità, evolvono come singoli 1.

Possiamo ancora una volta generalizzare a  $k$  qualunque imponendo equivalenza modulo  $k$ . Dovremo però anche cambiare il coefficiente, come specificato in [16], ottenendo

$$\sum_{j=0}^r a_{i-j}(t+1) \equiv \sum_{j=0}^r a_{i+j}(t) + [\delta_k(a_i(t)) - \delta_k(a_i(t) - 1)] \prod_{j=1}^r \delta_k(a_{i-j}(t+1))\delta_k(a_{i+j}(t)) - 1. \quad (3.14)$$

In figura 3.3 vediamo che con questi automi reversibili, si può avere *produzione* di particelle. Inoltre è evidente la reversibilità del processo: partendo dallo stato finale riusciamo a tornare a quello iniziale seguendo la stessa regola di evoluzione.



Figura 3.3: A destra: interazione tra due particelle in un PRFA reversibile con  $r = 2$  con produzione di due particelle "elementari"; a sinistra avviene il processo inverso: vediamo che si ha reversibilità.

### 3.3 FA integrabili

I PRFA reversibili introdotti nel paragrafo precedente (eq. (3.12) e (3.14)) condividono con equazioni solitoniche molte proprietà di integrabilità. Questi non sono gli unici filter automata dotati di queste caratteristiche. In particolare è stato mostrato in [17] che è possibile ottenenere classi di FA integrabili a partire da un problema spettrale dato. In particolare, partendo dal seguente problema spettrale discreto:

$$\psi_{i-1}(z) + [1 + a_i]\psi_{i+1}(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)\psi_i(z), \quad (3.15)$$

dove  $i \in \mathbb{Z}$  rappresenta la coordinata spaziale discreta e  $z \in \mathbb{C}$  è il parametro spettrale, riusciamo ad ottenere i seguenti FA

$$a_i(t+1) = a_i(t) + a_{i-2}(t+1)a_{i+1}(t) + a_{i-1}(t+1)a_{i+2}(t) \pmod{2}, \quad (3.16)$$

$$a_i(t+1) = a_i(t) + a_{i-2}(t+1)a_{i+3}(t)(1 + a_{i-1}(t+1))(1 + a_{i+2}(t)) + a_{i-3}(t+1)a_{i+2}(t)(1 + a_{i-2}(t+1))(1 + a_{i+1}(t)) \pmod{2}, \quad (3.17)$$

i quali risultano integrabili, come vedremo più avanti.

Il metodo introdotto in [17] per ricavare i filter automata di eq. (3.16) e (3.17) a partire da eq. (3.15), fa uso di un parametro  $M \in \mathbb{Z}$  e dei potenziali  $V_i^{(j)}(t)$  dove  $j \in \{0, 1, \dots, M\}$ . Il variare di  $M$  permette di ottenere diversi FA: in particolare per  $M = 1$  otteniamo il FA di eq. (3.16) e per  $M = 2$  quello di eq. (3.17).

Vediamo le espressioni dei potenziali nei due casi che abbiamo scelto di considerare:

- $M = 1$ : si ottiene  $V_i^{(0)}(t) = 1$  per qualunque  $i$ , mentre per  $j = M = 1$  si ha

$$V_i^{(1)}(t) = b\delta(1 + a_{i-1}(t+1))\delta(1 + a_{i+2}(t)) \pmod k, \quad (3.18)$$

dove  $b \in \mathbb{Z}_k$  e  $\delta(x) = \prod_{n=1}^{k-1} (n+x) \pmod k$ ,  $x \in \mathbb{Z}_k \pmod k$ , simile a (3.7), ma uguale a  $(n-1)!$  se  $x = 0 \pmod k$ .

- $M = 2$ : si ottiene di nuovo  $V_i^{(0)}(t) = 1$  per qualunque  $i$ , mentre per  $j = 1, 2$  si ha

$$\begin{aligned} V_i^{(1)}(t) &= b\delta(1 + a_{i-2}(t+1))\delta(1 + a_{i+3}(t)) \\ &\quad \times \beta(k - m + 2 + a_{i-1}(t+1))\beta(k - m + 2 + a_{i+2}(t)) \pmod k, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$V_i^{(2)}(t) = mV_i^{(1)}(t) \pmod k,$$

dove  $m \in \mathbb{Z}_k$  e  $\beta(x) = \sum_{s=1}^{k-1} x^s$ .

Modificando  $M$ , quindi possiamo generare una gerarchia di FA. Ogni membro di questa gerarchia ha un raggio diverso, in particolare avremo  $r = M + 1$ . Possiamo vedere inoltre in figura 3.4 che, se la condizione iniziale è divisa in regioni separate da almeno  $2r - 1$  zeri consecutivi, l'evoluzione rimarrà confinata all'interno di tali regioni, che possiamo chiamare *isole*. In questo ricordano i CA di classe 2 introdotti nel capitolo 1, chiamati infatti anch'essi filtri. Inoltre possiamo notare che questi FA sono reversibili, poiché possiedono la simmetria  $a_{i+j}(t) \leftrightarrow a_{i-j}(t+1)$ .



Figura 3.4: Evoluzione del FA di eq. (3.16) a partire da una configurazione iniziale casuale. È evidente la separazione in isole.

Anche in questi FA si possono avere interazioni tra particelle solitoniche o in grado di produrre nuove particelle. Empiricamente, le uniche velocità possibili per queste strutture coerenti appaiono essere soltanto  $0, \pm 1$  e  $\infty$ .

Possiamo infine notare che le isole prima definite altro non sono che particelle di velocità nulla con struttura dinamica interna. Perciò il moto che avviene all'interno dell'isola si può interpretare come il moto di particelle confinate all'interno di una particella costante.

Vediamo ora che riusciamo a trovare delle costanti del moto che garantiscono l'integrabilità del modello.

### 3.3.1 Integrabilità

Vogliamo ricavare delle cariche conservate per questi FA. Possiamo farlo trovando la matrice di Lax del sistema.

Abbiamo visto che l'evoluzione di questi FA è separata all'interno di isole. Per semplificare il problema, possiamo non considerare l'intera retta  $i \in \mathbb{Z}$ , ma trattarlo come una serie di sottoproblemi indipendenti, uno per ogni isola. Concentriamoci perciò su una singola isola  $I = \{i \in \mathbb{Z} : 0 < i < N - 1\}$ , con  $a_i = 0$  per  $i \notin I$ .



Possiamo introdurre la seguente matrice  $N \times N$

$$L_{ij} = \delta_{i-1,j} + \delta_{i+1,j}(1 + a_i(t)), \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.20)$$

dove  $\delta_{ij}$  è la delta di Kronecker, e mostrare che i CA di equazioni (3.16) e (3.17) sono equivalenti all'equazione

$$L(t+1) = AL(t)A^{-1} \pmod{2}. \quad (3.21)$$

La matrice  $A$  è data da

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{i+2,j}V_i^{(1)}(t), \quad (3.22)$$

in cui  $V^{(1)}$  è dato dall'equazione (3.18) (con  $b = 1$ ) per il FA ottenuto con  $M = 1$ , mentre da

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{i+2,j}V_i^{(1)}(t) + \delta_{i+4,j}V_i^{(2)}(t), \quad (3.23)$$

dove  $V^{(1)}$  e  $V^{(2)}$  sono dati dalle equazioni (3.19) per il FA ottenuto con  $M = 2$ .

Possiamo riscrivere eq. (3.21) moltiplicando a destra per  $A$  ambo i membri, ottenendo

$$L(t+1)A = AL(t). \quad (3.24)$$

Verifichiamo di riuscire a ricavare eq. (3.16) utilizzando  $A$  data da (3.22). Il lato destro e il lato sinistro dell'equazione (3.24) saranno

$$\begin{aligned} L(t+1)A &= \delta_{i-1,j} + \delta_{i+1,j}(1 + a_i(t+1) + V_{i-1}^{(1)}(t)) + \delta_{i+3,j}(1 + a_i(t+1))V_{i+1}^{(1)}(t), \\ AL(t) &= \delta_{i-1,j} + \delta_{i+1,j}(1 + a_i(t) + V_i^{(1)}(t)) + \delta_{i+3,j}(1 + a_{i+2}(t))V_i^{(1)}(t), \end{aligned} \quad (3.25)$$

da cui possiamo ottenere il seguente sistema

$$\begin{cases} a_i(t+1) + V_{i+1}^{(1)}(t) = a_i(t) + V_i^{(1)}(t) \pmod{2}, \\ (1 + a_i(t+1))V_{i+1}^{(1)}(t) = (1 + a_{i+2}(t))V_i^{(1)}(t) \pmod{2}, \end{cases} \quad (3.26)$$

La seconda equazione del sistema ha come soluzione proprio (3.18) con  $k = 2$ . Ponendo  $b = 1$  e inserendola nella prima equazione del sistema otteniamo

$$a_i(t+1) + \delta(1 + a_{i-2}(t+1))\delta(1 + a_{i+1}(t)) = a_i(t) + \delta(1 + a_{i-1}(t+1))\delta(1 + a_{i+2}(t)), \quad (3.27)$$

dove stiamo sempre effettuando l'aritmetica modulo 2. Dalla definizione della funzione delta, abbiamo che  $\delta(1 + x) = x$  se  $x \in \mathbb{Z}_2$  e quindi otteniamo

$$a_i(t+1) + a_{i-2}(t+1)a_{i+1}(t) = a_i(t) + a_{i-1}(t+1)a_{i+2}(t), \pmod{2} \quad (3.28)$$

che è equivalente a eq. (3.16). Spostare a destra il secondo addendo di sinistra introduce un meno, ma poichè stiamo lavorando in  $\mathbb{Z}_2$ , possiamo sostituirlo con un

più. Procedendo in modo analogo, si riesce a mostrare che con  $A$  data da (3.23) si ottiene il FA di eq. (3.17).

Siamo riusciti a riscrivere le equazioni della dinamica dei Filter Automata considerati utilizzando un formalismo matriciale. Inoltre, possiamo notare che l'equazione (3.21) altro non è che una versione discreta della soluzione dell'equazione di Lax (2.11), riportata in (2.16): ci basta infatti sostituire  $g(t)$  con  $A$  e considerare  $t \in \mathbb{Z}$  per ottenerla. La matrice  $L$ , perciò, è in grado di risolvere un'equazione di Lax ed è quindi la matrice di Lax del sistema. Questo ci garantisce l'esistenza di cariche conservate, che possono essere scelte ad esempio tra  $\text{tr } L^n$  e gli autovalori di  $L$ . Siamo dunque riusciti ad dimostrare l'integrabilità dei FA (3.16) e (3.17).

In questo paragrafo, ci si è limitati a considerare  $M = 1$  o  $M = 2$ , ma la scelta di valori di  $M$  differenti permette di ottenere altri FA, anch'essi integrabili. Infatti scegliendo  $A$  opportunamente dipendente dai potenziali, i FA saranno descrivibili dall'equazione (3.21) e saranno dunque dotati di una matrice di Lax. Si è perciò trovato il modo di generare un'intera gerarchia di Filter Automata integrabili, non soltanto di una coppia.

# Capitolo 4

## Quantum Cellular Automata

Gli **automi cellulari quantistici** o **quantum cellular automata** (QCA), rappresentano la versione quantistica dei CA. Per costruirli basterebbe in linea di principio sostituire i sistemi classici posti ad ogni sito con sistemi quantistici e descrivere l'evoluzione tramite operatori unitari. In realtà il passaggio non è così semplice. Il problema dipende dal fatto che, nel caso classico, quando si ha l'evoluzione delle celle, si sta di fatto "clonando" lo stato passato per poterne leggere i valori. Ciò risulta proibito nel caso quantistico, a causa del teorema di *no cloning*, che stabilisce l'impossibilità di duplicare con esattezza uno stato quantistico sconosciuto.

La strada migliore che si è trovata per definire questi oggetti è assiomaticamente. Questa definizione essenzialmente vede il QCA come un *reticolo spaziale con sistemi quantistici ad ogni sito, che evolve in step temporali discreti tramite un operatore unitario che preserva la località*. Quest'ultima condizione è l'analogo discreto della causalità relativistica e ci dice che operatori locali sono mappati ad altri operatori locali.

*Osservazione 4.1.* Lavorando con sistemi in cui la variabile temporale è discreta, non conviene generalmente lavorare nella rappresentazione di Schrödinger, ma in quella di Heisenberg. Possiamo infatti sfruttare direttamente l'operatore unitario che evolve il sistema ogni timestep.

I QCA sono stati sviluppati come paradigma alternativo per la computazione quantistica, ma sono poi stati proposti anche come modelli per una fisica discreta. In particolare sono stati considerati come una naturale discretizzazione di teorie di campo quantizzato, e ne sono stati introdotti alcuni esempi che diventano teorie di campo quantizzato interagenti nel limite al continuo.

In questa tesi i QCA saranno soltanto introdotti e ne saranno riportati alcuni esempi, cercando di focalizzarsi sulle loro caratteristiche peculiari. Questa introduzione è necessaria per concludere il discorso portato avanti in questo elaborato, in

quanto i QCA sono la naturale evoluzione dei CA classici quando si ha a che fare con sistemi quantistici da modellizzare.

## 4.1 Definizione Assiomatica di QCA

Cerchiamo di analizzare le differenze tra gli elementi necessari a definire un automa cellulare quantistico rispetto a uno classico.

### 4.1.1 Sistemi

I QCA sono definiti su sistemi reticolari quantistici, ovvero su un reticolo discreto spaziale  $L$  con sistemi quantistici ad ogni sito. I reticoli possono essere infiniti, come  $\mathbb{Z}^d$  o finiti, possibilmente con condizioni al contorno periodiche e sono perciò analoghi a quelli del caso classico. La differenza sta nei sistemi che andiamo a porre in ogni punto del reticolo, e quindi nello spazio degli stati  $\Sigma$ , che dovrà essere uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Generalmente prenderemo come sistemi quantistici dei sistemi finito dimensionali come *qudits*: avremo perciò a che fare con spazi di Hilbert a dimensione finita.

Per reticoli finiti, lo spazio di Hilbert totale sarà semplicemente dato dal prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert corrispondenti ad ogni sito. Indicando con  $\mathbf{n}$  un sito del reticolo, ad esso assoceremo uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathbf{n}}$  e potremo quindi scrivere lo spazio di Hilbert totale come

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{\mathbf{n} \in L} \mathcal{H}_{\mathbf{n}}. \quad (4.1)$$

In generale risulta più semplice ragionare in termini di *algebre degli osservabili* [18]: denotiamo l'algebra degli osservabili agente sul sistema al sito  $\mathbf{n}$  con  $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$ . Essa sarà isomorfa a  $\mathcal{M}_{d_{\mathbf{n}}}$ , algebra delle matrici complesse  $d_{\mathbf{n}} \times d_{\mathbf{n}}$  se consideriamo sistemi  $d$ -dimensionali. Il pedice  $\mathbf{n}$  si riferisce sempre al sito su cui si sta agendo. L'algebra degli osservabili totale sarà perciò data da

$$\mathcal{A} = \bigotimes_{\mathbf{n} \in L} \mathcal{A}_{\mathbf{n}}. \quad (4.2)$$

Dato un sottoinsieme del reticolo  $R \subset L$ , definiamo come  $\mathcal{A}_R$  l'algebra degli operatori localizzati nella regione  $R$ , e che perciò agiscono come l'identità fuori da essa. Essa sarà isomorfa a  $\bigotimes_{\mathbf{n} \in R} \mathcal{A}_{\mathbf{n}}$ .

Per reticoli infiniti di qudits, non ha senso prendere semplicemente i prodotti tensoriali degli spazi di Hilbert o delle algebre degli osservabili. Infatti non riusciamo

a dare un senso ad alcune scritte, come il prodotto interno di  $|0\rangle^{\otimes N}$  e  $(i|0\rangle)^{\otimes N}$  per  $N \rightarrow \infty$ . Per risolvere il problema possiamo limitare o gli osservabili (approccio *algebra quasi-locale*) o gli stati permessi (approccio *configurazioni finite-illimitate*). Fisicamente il primo approccio è più soddisfacente: possiamo fare solo operazioni locali in un laboratorio, perciò ha senso eliminare osservabili globali. Per reticoli infiniti dunque, con le stesse notazioni introdotte per quelli finiti, possiamo definire l'algebra dell'intero sistema come

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{R \subset L} \mathcal{A}_R}, \quad (4.3)$$

dove la linea superiore indica la chiusura in norma, la quale è la norma standard definita in ogni regione finita (a partire dal prodotto interno).

In generale potremmo sempre concentrarci su reticoli finiti, ma sufficientemente grandi, in quanto la dinamica deve preservare la località.

### 4.1.2 Dinamica

Avendo a che fare con sistemi quantistici, le regole di evoluzione dovranno essere modificate per poter agire opportunamente su di essi.

Come anticipato in osservazione 4.1, per descrivere la dinamica dei QCA conviene generalmente lavorare nella rappresentazione di Heisenberg, con osservabili che evolvono nel tempo. Ciò infatti rende molto più facile definire e comprendere la preservazione della località, caratteristica chiave della dinamica.

Per descrivere l'evoluzione del QCA avremo bisogno di *operatori unitari*  $U \in \mathcal{A}$ , cioè tali che  $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ , dove  $I \in \mathcal{A}$  è la matrice identità. Questi vanno applicati ai singoli siti per ottenerne lo stato dopo uno step temporale, ma funzionano soltanto nel caso di reticoli  $L$  finiti. Se si ha a che fare con reticoli infiniti, sarà invece necessario lavorare con *automorfismi dell'algebra*, ovvero isomorfismi dell'algebra in sè stessa. Essi soddisfano tutte le proprietà che ci interessano delle mappe unitarie, come la proprietà di non modificare le relazioni di commutazione.

In generale possiamo rappresentare la dinamica con una funzione

$$u : A \mapsto u(A), \text{ per ogni } A \in \mathcal{A}, \quad (4.4)$$

e nel caso finito esisterà  $U \in \mathcal{A}$  tale che  $u(A) = U^\dagger A U$ , mentre non è necessario per il caso infinito. Si ha però che in entrambi i casi  $u(AB) = u(A)u(B)$  e perciò ci basta comprendere come evolve l'algebra dei singoli siti per dedurre l'evoluzione completa.

*Osservazione 4.2.* Poiché la dinamica di un QCA è definita da operatori unitari, che sono per definizione invertibili avendo  $U^\dagger = U^{-1}$ , i QCA definiti in questo modo saranno **sempre reversibili**. Anche gli automorfismi, essendo isomorfismi, sono invertibili e perciò questa considerazione vale anche per QCA infiniti. Per ottenere QCA irreversibili è necessario sostituire gli unitari con mappe locali strettamente positive che preservino la traccia, le quali rappresentano l'evoluzione più generale possibile in meccanica quantistica.

Imponiamo ora la richiesta più importante, ovvero che l'evoluzione **preservi la località**. Questo si traduce nel fatto che operatori locali siano mappati in operatori localizzati in una regione vicina. Questa proprietà è ogni tanto chiamata *causalità* in analogia con quella relativistica. Più precisamente possiamo dare una definizione:

**Definizione 4.1.** La dinamica di un QCA preserva la località se esiste un certo *range*  $l \geq 0$  tale che per ogni  $\mathbf{n}$  e per ogni operatore  $A$  localizzato su  $\mathbf{n}$ , allora  $u(A)$  è localizzato in una regione costituita solo da siti  $\mathbf{m}$  tali che  $|\mathbf{n} - \mathbf{m}| \leq l$ .

*Osservazione 4.3.* In 4.1 stiamo usando la **metrica "taxicab"**. Dati due punti  $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$ , tale metrica è definita come  $d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ . Non è la classica distanza euclidea.

Possiamo anche definire il *vicinato* di un punto  $\mathbf{n}$ , indicato con  $\mathcal{N}_{\mathbf{n}}$ . Questo sarà la regione più piccola in cui l'algebra  $u(\mathcal{A}_{\mathbf{n}})$  è localizzata e si può generalizzare al vicinato di una regione  $R$ , che esprimiamo come  $\mathcal{N}_R$ .

Possiamo riassumere il tutto in una definizione per i QCA:

**Definizione 4.2 (Automa Cellulare Quantistico).** Un automa cellulare quantistico consiste in un reticolo ipercubico discreto  $L$ , finito o  $\mathbb{Z}^d$ , con un sistema quantistico finito in ogni sito, ovvero con  $\Sigma = \mathcal{H}$ , spazio di Hilbert di dimensione finita. L'evoluzione avviene per intervalli temporali discreti attraverso un automorfismo (o unitario per reticoli finiti) che preservi la località.

Non è necessario assumere che i QCA siano invarianti per traslazione, cioè che la dinamica commuti con spostamenti lungo qualunque direzione nel reticolo. Assumerlo sarebbe analogo ai CA classici, come abbiamo visto nel paragrafo 3.1, ma molti teoremi sulla struttura dei QCA non lo richiedono.

### 4.1.3 Regole di transizioni globali e locali

Come già visto nel capitolo 1, nei CA classici le regole di transizione sono locali: l'evoluzione di una cella al sito  $n$  dipende soltanto dagli stati delle celle nel vicinato

$\mathcal{N}$ . Abbiamo però definito un QCA tramite una regola di transizione globale, cioè un automorfismo o un unitario dell'algebra degli osservabili che preservi la località.

Per passare da una regola globale a una locale, definiamo le regole locali come le mappe  $\alpha_{\mathbf{n}} : \mathcal{A}_{\mathbf{n}} \mapsto \mathcal{A}_{\mathcal{N}_{\mathbf{n}}}$  tali che

$$\alpha_{\mathbf{n}}(A) = u(A) \text{ per ogni } A \in \mathcal{A}_{\mathbf{n}}. \quad (4.5)$$

Queste  $\alpha_{\mathbf{n}}$  ci dicono come osservabili localizzati su  $\mathbf{n}$  si estendono nel vicinato. Nel caso di invarianza per traslazione è molto più semplice definire queste regole. Basta infatti specificare  $\alpha_{\mathbf{0}}$ , poi l'invarianza fa il resto.

In eq. (4.5) abbiamo definito la regola locale a partire da quella globale, quindi è ovvio che il QCA da questa ottenuto sia ben definito e che la dinamica globale specifichi le regole di transizione locale. Più interessante è il contrario: cerchiamo di costruire un QCA a partire da una regola locale. Prendiamo come candidata a regola locale la funzione  $\beta_{\mathbf{n}} : \mathcal{A}_{\mathbf{n}} \mapsto \mathcal{A}_{\mathcal{N}_{\mathbf{n}}}$ . Definiamo quindi una possibile regola globale  $v$  come lineare e agente su prodotti di operatori su diversi siti nel seguente modo:

$$v(AB) = \beta_{\mathbf{n}}(A)\beta_{\mathbf{m}}(B), \quad (4.6)$$

con  $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{n}}$  e  $B \in \mathcal{A}_{\mathbf{m}}$ . Ci chiediamo se ciò descrive un QCA valido, cioè se la nostra regola di evoluzione sia un automorfismo valido. Per avere ciò abbiamo bisogno che  $\beta_{\mathbf{n}}$  sia un isomorfismo, cosicché preservi la struttura algebrica locale, mappando  $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$  in una sottoalgebra isomorfa di  $\mathcal{A}_{\mathcal{N}_{\mathbf{n}}}$  per un  $\mathbf{n}$  qualunque. Avremo anche bisogno che per  $\mathbf{n} \neq \mathbf{m}$  e  $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{n}}$ ,  $B \in \mathcal{A}_{\mathbf{m}}$  si abbia

$$[\beta_{\mathbf{n}}(A), \beta_{\mathbf{m}}(B)] = 0. \quad (4.7)$$

Queste condizioni garantiscono che le mappe definiscano un automorfismo, come dimostrato in [19] per QCA invarianti per traslazione 1-dimensionali.

Per QCA non invarianti per traslazioni, controllare che la relazione di commutazione di eq. (4.7) sia verificata risulta solitamente impossibile, poiché si dovrebbero controllare un numero infinito di condizioni. D'altra parte, per sistemi invarianti per traslazione, avendo vicinati finiti, basta controllare che  $[\beta_{\mathbf{0}}(A), \beta_{\mathbf{n}}(B)] = 0$  per ogni  $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{0}}$ ,  $B \in \mathcal{A}_{\mathbf{n}}$  quando i vicinati di  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{n}$  si sovrappongono, cioè  $\mathcal{N}_{\mathbf{0}} \cap \mathcal{N}_{\mathbf{n}} \neq \emptyset$ . Ciò significa che basta controllare un numero finito di commutatori.

In caso di invarianza traslazionale c'è anche una naturale corrispondenza tra QCA su reticoli finiti e infiniti, descritta nel **wrapping lemma** (**lemma dell'avvolgimento**)

**Lemma 4.1 (Wrapping Lemma [19]).** *Le regole di transizione di QCA su un reticolo finito  $L \subset \mathbb{Z}^d$  con vicinati  $\mathcal{N}$  e condizioni al contorno periodiche, sono in*

corrispondenza uno a uno con le regole di transizione per QCA su  $\mathbb{Z}^d$  con gli stessi vicini. Entrambi i casi devono essere invarianti per traslazione.

## 4.2 Esempi di QCA

Vediamo alcuni esempi di automi cellulari quantistici che possano darci una qualche intuizione di come possano costruirsi dei QCA.

Un primo esempio di QCA è descritto da un anello discreto di qubit con indice di posizione  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ , con  $N$  pari e con condizioni al contorno periodiche: identifichiamo il sito  $N$  con il sito  $0$ . Consideriamo l'applicazione di un insieme di unitari che agiscono su due siti vicini: stiamo applicando circuiti di *profondità due*. Siano  $V_{2n,2n+1}$ ,  $W_{2n-1,2n}$  due unitari applicati rispettivamente alle coppie di siti  $2n$ ,  $2n+1$  e  $2n-1$ ,  $2n$ . Sugli altri qubit agiranno come l'identità. Possiamo considerare il seguente circuito unitario  $U \in \mathcal{A}$ :

$$U = \prod_n V_{2n,2n+1} \prod_m W_{2m-1,2m} \quad (4.8)$$

L'ordine nei prodotti nelle produttorie non è importante, siccome sia i  $V_{2n,2n+1}$  che i  $W_{2n-1,2n}$  formano un insieme di operatori commutanti, in quanto agiscono su siti diversi.

Possiamo fissare gli unitari scegliendo per esempio  $V_{n,n+1} = W_{n,n+1} = C_n[X_{n+1}]$ , che rappresenta l'operatore C-NOT (controlled-NOT).

Per scriverlo esplicitamente dobbiamo introdurre alcune notazioni. Indichiamo una base ortonormale dello spazio di Hilbert bidimensionale associato ad un qubit con i seguenti ket:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Questa è detta *base computazionale* ed è tale che  $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ , dove  $\delta_{ij}$  la delta di Kronecker. Tramite il prodotto ket-bra dei ket di base riusciamo a definire i tre operatori di Pauli dello spin nel seguente modo

$$\sigma_1 = X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\sigma_2 = Y = i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\sigma_3 = Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$



i quali soddisfano le seguenti regole di commutazione e anticommutazione

$$\begin{aligned} [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2i\delta_{ij}I, \end{aligned} \quad (4.13)$$

dove  $\epsilon_{ijk}$  è simbolo di Levi-Civita. I ket di base sono autoket di  $Z$  con autovalori  $\pm 1$ .

Possiamo notare infine che l'operatore  $X$  permette di passare da un ket di base all'altro

$$\begin{aligned} X|0\rangle &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)|0\rangle = |1\rangle, \\ X|1\rangle &= (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)|1\rangle = |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.14)$$

L'operazione di C-NOT agisce su due qubit e inverte il secondo soltanto se il primo, il qubit di controllo, è  $|1\rangle$ . Possiamo perciò esprimerlo come

$$C_n[X_{n+1}] = |0\rangle_n\langle 0| \otimes I_{n+1} + |1\rangle_n\langle 1| \otimes X_{n+1}, \quad (4.15)$$

dove i pedici  $n$  o  $n+1$  ci dicono il sito su cui agisce l'operatore.

Per verificare che l'unitario di eq. (4.8) porti operatori locali in locali, basta verificare che per un qualsiasi operatore di Pauli e per un qualsiasi sito, l'evoluto sia localizzato nei siti vicini. Questo perché gli operatori di Pauli, insieme all'identità, forniscono una base dell'algebra  $\mathcal{A}_n$  di un sistema a due stati.

Non tutti i QCA saranno descrivibili in questo modo. In particolare un'altra tipologia di QCA sono gli *shifts*. Questi descrivono uno spostamento dei qudits di un sito

$$s(A_n) = S^\dagger A_n S = A_{n-1} \quad (4.16)$$

dove  $A_n$  è un qualsiasi operatore sul qudit  $n$  e  $S$  l'unitario che implementa lo shift.

Questi due esempi possono essere utilizzati come mattoncini per costruire varie classi di QCA.

### 4.2.1 Schemi di Partizione

Possiamo generalizzare il QCA definito in eq. (4.8) utilizzando un generico *circuito a profondità finita* (finite-depth circuit).

**Definizione 4.3 (Finite-depth circuit QCA).** Si considerino  $P$  differenti partizioni del reticolo in sovracelle  $\mathcal{C}_{\mathbf{n}}^p$ , con  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$  e  $p \in 1, \dots, P$ , in modo che ogni cella sia contenuta in esattamente una sovracella. Allora la dinamica è data da

$$u_1 \circ \dots \circ u_P, \quad (4.17)$$

dove ogni  $u_p$  è un prodotto di unitari  $U_n^p$  localizzati su  $C_n^p$ . In altre parole:

$$u_p(A) = \left( \prod_n U_n^{p\dagger} \right) A \left( \prod_n U_n^p \right) \quad (4.18)$$

dove  $A \in \mathcal{A}$  e l'ordine dei prodotti non importa, poiché gli unitari, agendo su regioni non sovrapponibili, commutano.

Questi QCA sono costituiti dall'applicazione consecutiva di shifts e circuiti unitari locali e richiedono uno schema di partizione del reticolo. Come esempio, consideriamo **QCA partizionati a blocchi**, che usano layers di *unitari condizionali*. Prendiamo un sistema 1-dimensionale di qubit e regole di evoluzione dipendenti soltanto dai primi vicini. Definiamo il seguente operatore, agente in modo non triviale soltanto sui siti  $n - 1$ ,  $n$  e  $n + 1$ ,

$$D_n^{ab} = |a\rangle \langle a|_{n-1} \otimes v_n^{ab} \otimes |b\rangle \langle b|_{n+1}, \quad (4.19)$$

dove  $a, b \in \{0, 1\}$  e  $v_n^{ab} \in \mathcal{A}_n$  è un unitario agente sul sito  $n$ . Possiamo ora definire l'operatore unitario condizionale come:

$$V_n = \sum_{a,b \in \{0,1\}} D_n^{ab}. \quad (4.20)$$

Se, ad esempio, i qubits  $n + 1$ ,  $n - 1$  sono entrambi nello stato 0, l'operatore di eq. (4.20) implementa l'azione dell'unitario  $v^{00}$  sul qubit  $n$ . La dinamica del QCA è dunque data da un circuito a *profondità tre*: partizioniamo il reticolo in 3 sovracelle, ovvero

$$\begin{aligned} C_n^1 &= \{n \in \mathbb{Z}^d : n \bmod 3 = 1\}, \\ C_n^2 &= \{n \in \mathbb{Z}^d : n \bmod 3 = 2\}, \\ C_n^3 &= \{n \in \mathbb{Z}^d : n \bmod 3 = 0\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

e applichiamo  $V_n$  prima a  $C_n^1$ , poi a  $C_n^2$  e poi a  $C_n^3$ . In questo modo gli unitari non sono mai applicati simultaneamente su sovracelle sovrapposte.

Possiamo anche generalizzare gli shift lungo una linea a shift lungo una direzione del reticolo in dimensioni maggiori. Siano  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, d$  vettori di base del reticolo. Definiamo gli shift lungo la direzione  $i$ -esima come:

$$s_i(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_{n-\mathbf{e}_i}, \quad (4.22)$$

il che semplicemente trasferisce l'algebra uno step lungo la direzione  $\mathbf{e}_i$ .

Possiamo anche considerare *shift parziali*, ovvero shift di una sottoalgebra anziché dell'intera algebra. Un esempio utile coinvolge reticoli 1-dimensionali di qudit.

Dividiamo le celle in 3 sottocelle, che indicizziamo con  $l$ ,  $c$  e  $r$ . Possiamo perciò scomporre l'algebra come:  $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_n^l \otimes \mathcal{B}_n^c \otimes \mathcal{B}_n^r$ . Definiamo quindi lo shift condizionale  $\sigma$  come:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{B}_n^l) &= \mathcal{B}_{n+1}^l \\ \sigma(\mathcal{B}_n^c) &= \mathcal{B}_n^c \\ \sigma(\mathcal{B}_n^r) &= \mathcal{B}_{n-1}^r.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Lo shift di eq. (4.23) permette di definire i cosiddetti *QCA partizionati di Wartous*, studiati in [20]. In questi, alcuni sottosistemi sono shiftati a sinistra, altri a destra e altri vengono lasciati inalterati.

### 4.2.2 QCA di Clifford

I QCA di Clifford sono un'altra importante classe di QCA, in particolare poiché sono efficientemente simulabili con automi cellulari classici. Ciò implica però che non potranno essere universali per la computazione quantistica. Nonostante ciò, risultano avere proprietà interessanti, usi pratici e permettono di avere un'intuizione della dinamica dei QCA.

**Definizione 4.4 (QCA di Clifford).** I QCA di Clifford sono definiti su reticoli di qubits o qudits dove la dinamica è un'operazione di Clifford, ovvero un'operazione che mappa un qualunque prodotto di operatori di Pauli (generalizzati) ad un multiplo di un prodotto di operatori di Pauli (generalizzati).

Considereremo prevalentemente QCA di Clifford 1D, invarianti per traslazione su qubits. La dinamica è determinata dall'automorfismo  $u_l$  che agisce come:

$$\begin{aligned}u_l(X_n) &= Z_n \\ u_l(Z_n) &= Z_{n-l} \otimes X_n \otimes Z_{n+l},\end{aligned}\tag{4.24}$$

per un  $l \in \mathbb{Z}$  fissato. Questo determina già completamente la dinamica, poiché  $u_l(AB) = u_l(A)u_l(B)$  e  $u_l$  è lineare: ci basta perciò esprimere  $Y_n$  in funzione di  $X_n$  e  $Z_n$  usando (4.13). Per  $l = 1$ , possiamo facilmente calcolare la dinamica di, ad esempio,  $Y_0 \otimes Z_3$  (definiamo  $u = u_1$ ):

$$\begin{aligned}u(Y_0 \otimes Z_3) &= u(Y_0)u(Z_3) = \\ &= -iu(Z_0)u(X_0)u(Z_3) = \\ &= Z_{-1} \otimes (-Y_0) \otimes Z_1 \otimes Z_2 \otimes X_3 \otimes Z_4,\end{aligned}\tag{4.25}$$

dove si sono usate le proprietà delle matrici di Pauli (4.13) e eq. (4.24).

Il vincolo di Clifford è piuttosto forte e permette di comprendere la dinamica guardando un più semplice CA. Indicizziamo  $I, X, Y, Z$  con  $0, 1, 2, 3$ . Rappresentiamo una stringa di operatori di Pauli come una stringa  $\mu = (\dots, \mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, \dots)$  dove  $\mu_m \in \{0, 1, 2, 3\}$  e  $m \in \mathbb{Z}$ . Per valutare il valore della stringa in  $m = 0$  dopo l'applicazione di  $u$  una volta (dopo un timestep), ci basta conoscere  $\mu_{-1}, \mu_0, \mu_1$ .

Supponiamo di avere  $\mu = (\dots, 2, 1, 2, \dots)$ , che rappresenta un operatore della forma  $A_{\{-\infty, \dots, -2\}} \otimes Y_{-1} \otimes X_0 \otimes Y_1 \otimes B_{\{2, \dots, \infty\}}$ , dove  $A_{\{-\infty, \dots, -2\}}, B_{\{2, \dots, \infty\}}$  sono un qualche prodotto di operatori di Pauli agenti sugli altri qubit. Dopo un timestep si ha:

$$u(A_{\{-\infty, \dots, -2\}} \otimes Y_{-1} \otimes X_0 \otimes Y_1 \otimes B_{\{2, \dots, \infty\}}) = A'_{\{-\infty, \dots, -1\}} \otimes Z_0 \otimes B'_{\{1, \dots, \infty\}} \quad (4.26)$$

usando eq. (4.24) e (4.13).  $A'_{\{-\infty, \dots, -1\}}$  e  $B'_{\{1, \dots, \infty\}}$  sono prodotti di operatori di Pauli agenti ora anche sui siti rispettivamente  $m = -1$  e  $m = 1$ . Otteniamo perciò  $\mu'_0 = 3$  dopo l'azione di  $u$ . Trovando  $\mu'_0$  per tutti i possibili prodotti di operatori di Pauli sui siti  $-1, 0, 1$ , ricaviamo la corrispondente regola di CA. Stiamo però ignorando la fase complessiva: un'operazione di Clifford potrebbe mappare, ad esempio,  $X_n$  a  $-X_n$ . Ciò succede proprio in eq. (4.25), da cui vediamo che  $Y_0$  è mappato in  $-Y_0$ : il QCA di Clifford di eq. (4.24) con  $l = 1$  non potrà essere associato in maniera univoca ad un CA classico. Possiamo invece associare un CA classico ad un QCA di Clifford con la seguente regola di evoluzione

$$\begin{aligned} u(X_n) &= X_{n-1} \otimes Y_n \otimes X_{n+1}, \\ u(Z_n) &= X_n, \end{aligned} \quad (4.27)$$

da cui, usando  $Y = iXZ$  e  $I = ZZ$ , avremo

$$\begin{aligned} u(Y_n) &= X_{n-1} \otimes Z_n \otimes X_{n+1}, \\ u(I_n) &= I_n. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Non si hanno perciò cambiamenti di fase complessiva.

I QCA di Clifford su una reticolo 1-dimensionale, possono essere suddivisi in tre classi:

- QCA che presentano **gliders**, cioè osservabili che semplicemente si spostano lungo il reticolo ad ogni timestep;
- QCA **periodici** nel tempo;
- QCA **frattali**, i quali sono autosimilari su grandi scale dei diagrammi spazio-tempo.

Il QCA in eq. (4.24) con  $l = 1$  presenta gliders, come  $X_0 \otimes Z_1$ , che dopo un timestep diventa  $u(X_0 \otimes Z_1) = X_1 \otimes Z_2$ , venendo perciò traslato a destra. Al contrario,  $Z_0 \otimes X_1$  viene traslato a sinistra.

Si può andare oltre all'esempio più semplice trattato sopra e considerare **qudits p-dimensionali** e **operatori di Weyl discreti**. Questi ultimi generalizzano gli operatori di Pauli. Fissando una base ortonormale  $|q\rangle$  per un qudit di questo tipo, con  $q \in \{0, \dots, p-1\}$ , gli operatori di Weyl che generalizzano  $X$  e  $Z$  risultano essere definiti come

$$\begin{aligned}\mathcal{X}|q\rangle &= |q+1\rangle \\ \mathcal{Z}|q\rangle &= e^{2\pi iq/p}|q\rangle\end{aligned}\tag{4.29}$$

dove l'addizione nella prima riga è da intendersi modulo  $p$ . Il vincolo diventa che prodotti di operatori di Weyl vengano mappati in prodotti di operatori di Weyl.

I QCA di Clifford forniscono dunque un buon esempio che permette di collegare automi cellulari classici ad automi cellulari quantistici, permettendo anche di avere una rappresentazione più facilmente comprensibile di questi ultimi.

# Bibliografia

- [1] E. Domany and W. Kinzel. *Equivalence of Cellular Automata to Ising Models and Directed Percolation*. Phys. Rev. Lett. 53,311 (1984).
- [2] S. Succi. *The Lattice Boltzmann Equation: for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press, 2001.
- [3] S. Wolfram. *Statistical Mechanics of Cellular Automata*. Rev. Mod. Phys. 55,601 (1983).
- [4] S. Wolfram. *Universality and Complexity in Cellular Automata*. Physica D 10,1 (1984).
- [5] S. Wolfram. *Cellular Automata as Models of Complexity*. Nature 311,419 (1984).
- [6] O. Martin, A. M. Odlyzko, and S. Wolfram. *Algebraic Properties of Cellular Automata*. Commun. Math. Phys. 93,219 (1984).
- [7] A. L. Retore. *Introduction to Classical and Quantum Integrability*. J. Phys. A: Math. Theor. 55,173001 (2022).
- [8] G. S. Krishnaswami and T. R. Vishnu. *An Introduction to Lax Pairs and the Zero Curvature Representation*. arXiv:2004.05791 (2020).
- [9] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge University Press, 2003.
- [10] A. Torrielli. *Classical Integrability*. J. Phys. A: Math. Theor. 49,323001 (2016).
- [11] J. Kari. *Reversible Cellular Automata*. In "Developments in Language Theory: 9th International Conference", DLT 2005, Palermo, Italy, July 4-8, 2005. Proceedings 9, pages 57–68. Springer, 2005.
- [12] G. A. Hedlund. *Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical System*. Mathematical Systems Theory 3,320 (1969).

- [13] E. F. Moore. *Machine Models of Self-Reproduction*. In "Proceedings of Symposia in Applied Mathematics", volume 14, pages 17–33. American Mathematical Society New York, 1962.
- [14] J. Myhill. *The Converse of Moore's Garden-of-Eden Theorem*. Proc. Am. Math. Soc. 14,685 (1963).
- [15] J. K. Park, K. Steiglitz, and W. P. Thurston. *Soliton-Like Behavior in Automata*. Physica D 19, 423 (1986).
- [16] M. J. Ablowitz, J. M. Keiser, and L. A. Takhtajan. *Stable, Multi-State, Time-Reversible Cellular Automata with Rich Particle Content*. Quaestiones Math. 15,325 (1992).
- [17] M. Bruschi, P. M. Santini, and O. Ragnisco. *Integrable Cellular Automata*. Phys. Lett. A 169,151 (1992).
- [18] T. Farrelly. *A Review of Quantum Cellular Automata*. Quantum 4,368 (2020).
- [19] B. Schumacher and R. F. Werner. *Reversible Quantum Cellular Automata*. arXiv:quant-ph/0405174 (2004).
- [20] J. Watrous. *On One-Dimensional Quantum Cellular Automata*. In "Proceedings of IEEE 36th annual foundations of computer science", pages 528–537. IEEE, 1995.