

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**Analisi dello spettro di velocità e momento  
in simulazioni cosmologiche di modelli di  
Energia Oscura interagente**

**Relatore:**  
**Prof. Marco Baldi**

**Presentata da:**  
**Camilla Roselli**

Anno Accademico 2022/2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Modello <math>\Lambda</math>CDM</b>	<b>1</b>
1.1	Principio Cosmologico . . . . .	1
1.2	Relatività Generale . . . . .	2
1.3	Composizione dell'Universo . . . . .	3
1.4	Limiti del Modello . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Modelli di Energia Oscura Interagente</b>	<b>7</b>
2.1	Cosmologia di Background . . . . .	7
2.2	Perturbazioni Lineari . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Simulazioni Cosmologiche</b>	<b>16</b>
3.1	Ruolo delle Simulazioni . . . . .	16
3.2	Metodi per le Simulazioni Cosmologiche . . . . .	17
3.3	Codici per Modelli di Energia Oscura Interagente . . . . .	20
3.4	Osservabili . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Analisi</b>	<b>24</b>
4.1	Studi Esistenti . . . . .	25
4.2	Spettro di Potenza di Velocità e di Momento . . . . .	25
4.3	Risultati . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>35</b>
<b>A</b>		<b>37</b>

## Sommario

Il modello cosmologico  $\Lambda$ CDM è considerato, ad oggi, il modello standard per la descrizione dell'Universo; esso tuttavia presenta alcune incongruenze tra previsioni teoriche ed osservazioni. Queste incongruenze sono il motivo per cui sono stati studiati modelli cosmologici alternativi tra cui si possono individuare i modelli di Quintessenza di cui fa parte anche il modello qui trattato. In questo elaborato vengono riassunte le caratteristiche del modello standard  $\Lambda$ CDM, presentati i modelli di Energia Oscura interagente, riassunte le nozioni principali riguardanti le simulazioni cosmologiche, e viene analizzato il modello cosmologico CIDER *Constrained Interacting Dark Energy*. Tale modello si classifica tra i modelli cosmologici di Energia Oscura interagente con accoppiamento costante. In particolare in questa analisi, basandosi sugli studi condotti in [1], sono stati analizzati gli spettri di potenza di velocità e momento per diversi valori di accoppiamento ( $\beta = 0.03$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$ ) del modello CIDER, ed è stato mostrato come all'aumentare dell'accoppiamento diminuisca l'ampiezza degli spettri considerati. Inoltre viene presentato un confronto tra lo spettro di potenza di velocità e momento e tra lo spettro di velocità e materia.

# Capitolo 1

## Modello $\Lambda$ CDM

La nascita della cosmologia contemporanea può essere collocata nei primi anni del Novecento, nei quali, con la pubblicazione dell'articolo sulla relatività generale di Einstein nel 1915 [2], l'osservazione dell'espansione cosmica da parte di Slipher nel 1927 [3] e la formulazione della legge di Hubble nel 1929 [4], vennero gettate le basi per lo studio dell'Universo come un unico ente fisico. Da quel momento vennero formulati diversi modelli cosmologici, fino ad arrivare al modello attuale chiamato modello cosmologico standard o modello  $\Lambda$  Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM), il quale descrive un Universo piatto, in espansione accelerata e composto da quattro fluidi: materia barionica, radiazione, materia oscura ed energia oscura. Nel presente capitolo verranno analizzati le caratteristiche fondamentali di questo modello e i suoi limiti.

### 1.1 Principio Cosmologico

Le prime due proprietà fondamentali dell'Universo sono omogeneità e isotropia, e vengono riassunte nel principio cosmologico.

Il Principio Cosmologico è l'assunzione che, su scale sufficientemente grandi (nell'ordine di  $300Mpc$ <sup>1</sup>), l'Universo sia omogeneo e isotropo, ovvero con le stesse proprietà fisiche in ogni punto dello spazio e in ogni direzione. Questa idea venne inizialmente introdotta come ipotesi teorica per poter sviluppare i primi modelli cosmologici, pur avendo ancora pochi dati empirici sulla distribuzione della materia nell'Universo. Successivamente ottenne diverse conferme sperimentali, tra cui la scoperta della radiazione cosmica di fondo captata inizialmente da Penzias e Wilson [5]. La radiazione cosmica di fondo (CMB) è la luce più antica che possiamo osservare e proviene dalla superficie di ultimo *scattering* ovvero quella regione sferica che, nel nostro caso, ha come centro la Terra e che corrisponde

---

<sup>1</sup>Il parsec, per esteso parallasse-secondo e abbreviato pc, è un'unità di misura di lunghezza molto utilizzata in astronomia. Esso si definisce come la distanza che avrebbe un astro se avesse una parallasse annua di un arco-secondo.

all'era dell'Universo in cui la radiazione interagì con la materia per l'ultima volta. Grazie a questa conferma, oggi il principio cosmologico può essere considerato come effettiva proprietà dell'Universo.

## 1.2 Relatività Generale

Il secondo caposaldo del modello standard è l'assunzione della validità della Relatività Generale, che descrive il funzionamento della gravità come deformazione della metrica, permettendo di definirne una per l'Universo, e la distribuzione di materia in esso. Nella teoria della Relatività Generale, la distanza tra due punti è descritta nel seguente modo, in cui  $g_{\mu\nu}$  è il tensore metrico con  $\mu$  e  $\nu$  indici spazio-temporali che vanno da 0 a 3.

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

In questa equazione  $ds^2$  rappresenta un intervallo spazio-temporale tra due punti dello spazio-tempo, detti eventi, indicati come  $x^j$  e  $x^j + dx^j$ . Se si considera il principio cosmologico, si ha un Universo omogeneo ed isotropo, quindi con una densità di materia uniforme e dunque è possibile definire un tempo proprio, o universale, tale che in ogni istante la metrica spaziale sia data da:

$$dl^2 = \sum_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.2)$$

nella quale  $dl^2$  rappresenta solo la distanza spaziale tra due punti,  $\gamma_{\alpha\beta}$  è il tensore metrico spaziale e in cui gli indici spaziali  $\alpha$  e  $\beta$  vanno da 1 a 3. A questo punto è possibile riscrivere la (1.1) servendosi della (1.2) e, con  $c$  velocità della luce, si ottiene:

$$ds^2 = (cdt)^2 - dl^2 = (cdt)^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (1.3)$$

Ora è possibile generalizzare la componente spaziale esprimendola in coordinate sferiche e si ottiene così la metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), ovvero la metrica che permette di descrivere la geometria dell'Universo:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.4)$$

In questa equazione:

- $(r, \theta, \phi)$  sono le coordinate comoventi, ovvero le coordinate che seguono l'espansione dell'Universo.

- $a(t)$  è detto fattore di scala dell'Universo ed è una funzione dipendente solo dal tempo che misura il tasso di espansione cosmico. Dal momento che l'espansione è uniforme la relazione tra la distanza reale  $\vec{x}$  e la distanza comovente  $\vec{r}$  è data dalla relazione:  $\vec{r} = a(t)\vec{x}$ .
- $t$  è il tempo cosmico, definito anche come il tempo misurato da un osservatore solidale con il sistema di riferimento delle coordinate comoventi.
- $k$  è detta costante di curvatura e descrive una geometria piana, quando assume valore 0, sferica, quando assume valore positivo, o iperbolica, quando assume valore negativo.

La metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (1.4) evolve seguendo le equazioni di campo di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.5)$$

nella quale  $T_{\mu\nu}$  è il tensore energia-impulso,  $R_{\mu\nu}$  è il tensore di Ricci, e  $G$  è la costante di gravitazione universale. Considerando la componente (00) e la componente ( $ii$ ) delle equazioni di campo (1.5) si ottengono le due equazioni di Friedmann, ovvero le equazioni che descrivono l'espansione e l'accelerazione cosmica, nelle quali  $\rho$  e  $p$  sono rispettivamente densità e pressione dell'Universo.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad (1.6)$$

Le equazioni di Friedmann, inoltre, sono importanti perché permettono di spiegare la legge di Hubble  $\vec{v} = H(t)\vec{r}$ , nella quale  $H(t)$  è il parametro di Hubble ed è definito come  $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ . Questa legge rappresenta una prova inequivocabile dell'espansione dell'Universo, al tempo presente si ottiene un tasso di espansione<sup>2</sup> pari ad  $H_0 \sim 70 \text{Kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ . [6][7]

### 1.3 Composizione dell'Universo

Un'altra quantità che deve essere introdotta per completare la descrizione dell'Universo è il parametro  $\Omega$  chiamato parametro di densità:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H(t)^2}\rho \quad (1.7)$$

in cui  $\rho_c = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$  è la densità critica, ovvero la densità che l'Universo dovrebbe avere per essere piatto ( $k = 0$ ), e  $\rho$  è la sua densità effettiva. Dalle osservazioni della CMB

<sup>2</sup>Il valore del parametro di Hubble non è ancora determinato in modo univoco, questa affermazione verrà approfondita nell'ultimo paragrafo del primo capitolo.

eseguite dai satelliti *Planck* [8] e *WAMP* (The Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [9], e dagli studi della *baryon acoustic oscillation* (BAO) [10], si ottiene che nell'epoca attuale  $\Omega_0 \sim 1$ , dunque l'Universo è caratterizzato da una geometria piana.

Al valore di  $\Omega$  contribuiscono tutti i quattro fluidi che costituiscono l'Universo ovvero:

- materia barionica  $\Omega_b = 0.04$
- radiazione<sup>3</sup>  $\Omega_r = 8.24 \times 10^{-5}$  (trascurabile)
- materia oscura  $\Omega_{cdm} = 0.23$
- energia oscura  $\Omega_\Lambda = 0.73$

I parametri di densità di materia barionica e di radiazione sono stati ricavati dalle osservazioni dirette [8], ed è evidente che il loro contributo sia molto inferiore ad 1, richiesto per una geometria piana. Per questo motivo è stato necessario introdurre altre due specie di fluidi non osservabili direttamente ma interagenti per gravità: la materia oscura, definita fredda perché composta da particelle non relativistiche, e l'energia oscura. Le prove dell'esistenza della materia oscura fredda (CDM), vennero ottenute per la prima volta nel 1937 da Zwicky [11], e vennero successivamente confermate da diversi studi sull'anomalia della velocità di rotazione delle galassie, la quale indica la presenza di una massa aggiuntiva che ricopre un volume maggiore di quello della galassia stessa [12][13][14]. Per riuscire a spiegare la frazione ancora mancante di densità e per spiegare la causa dell'accelerazione cosmica, scoperta da Perlmutter [15], Riess [16] e Schimidt [17], venne ipotizzata, e successivamente confermata, l'esistenza dell'energia oscura (DE) [18][19]. Nel modello standard  $\Lambda$ CDM questa energia oscura è introdotta sotto forma della costante cosmologica  $\Lambda$ , ed è caratterizzata da una pressione negativa e da una densità di energia che rimane invariata per tutta l'evoluzione dell'Universo. La costante cosmologica venne inizialmente proposta da Einstein nel 1917 [20] come termine aggiuntivo al fine di ottenere un Universo statico. Dopo la scoperta dell'espansione cosmica da parte di Hubble, l'ipotesi della costante cosmologica come "forza repulsiva" capace di impedire all'Universo di collassare sotto la propria gravità venne rigettata e reintrodotta solo dopo la scoperta dell'accelerazione dell'espansione dell'Universo citata precedentemente. Con l'introduzione della costante cosmologica  $\Lambda$ , le equazioni di campo di Einstein (1.5) e le equazioni di Friedmann (1.6) diventano:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.9)$$

In ultimo è importante sottolineare che nell'evoluzione dell'Universo è possibile individuare tre ere scandite dalla prevalenza di un fluido sugli altri. La prima era è ca-

---

<sup>3</sup>Il fluido di radiazione è composto da fotoni e da neutrini relativistici.

ratterizzata dalla dominanza della radiazione e prende il nome di *Radiation Dominated Era* (RDE). Dato che la densità di energia delle particelle relativistiche diminuisce più rapidamente della materia (intesa come materia barionica e materia oscura), dopo una breve fase di equivalenza tra materia e radiazione, chiamata *Matter-Radiation equality*, l'Universo passa alla successiva. La seconda era è caratterizzata dalla dominanza di materia e prende il nome di *Matter Dominated Era* (MDE). Con il diminuire di tutte le densità al passare del tempo, fatta eccezione per quella di energia oscura, l'Universo passa alla terza era, quella attuale. Quest'ultima è relativamente recente, è caratterizzata dalla dominanza di energia oscura e, nel modello standard, è chiamata  $\Lambda$  *Dominated Era* ( $\Lambda$ DE) [21].

## 1.4 Limiti del Modello

Nonostante il modello  $\Lambda$ CDM permetta di descrivere in modo accurato le osservazioni, presenta alcuni problemi che hanno stimolato lo sviluppo di modelli cosmologici alternativi. Un primo problema riguarda la costante cosmologica  $\Lambda$ , la quale, con il suo valore costante per tutta l'evoluzione dell'Universo, risulta in disaccordo con il quadro descritto dalla teoria dei campi quantizzati. Infatti, quest'ultima, nei primi tempi dell'Universo, richiederebbe una costante con una energia di 123 ordini di grandezza (se si considera la scala di Plank) o 55 ordini di grandezza (se si considera la scala elettrodebole) maggiori di quella osservata [22]. Un secondo problema, detto problema della coincidenza, riguarda il recente inizio dell'era di dominio dell'energia oscura, che ci collocherebbe in un'epoca speciale dall'inizio dell'evoluzione cosmica. Un terzo problema riguarda le tensioni tra i *best-fit* dei parametri ottenuti ad alto e basso *red-shift* della costante di Hubble  $H_0$  e del livello di *clustering*<sup>4</sup>. Nel primo caso si verifica che  $H_0$  presenta valori più alti per misurazioni effettuate nell'Universo locale, ottenute ad esempio dall'osservazione delle supernove di tipo Ia, e presenta valori più bassi per misurazioni ottenute dalla radiazione cosmica di fondo [23]. Nel secondo caso i livelli di *clustering*, quantificati dal parametro di ampiezza  $\sigma_8$ , definito in appendice A, risultano più alti ad alto *red-shift*, e più bassi dallo studio dell'Universo più recente. Il *redshift*  $z$  è una variabile molto utile per studiare l'evoluzione dell'Universo. Per una sorgente luminosa si definisce come:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (1.10)$$

nella quale  $\lambda_0$  è la lunghezza d'onda della radiazione osservata nell'origine O del sistema di riferimento al tempo  $t_0$  e  $\lambda_e$  è la lunghezza d'onda emessa dalla sorgente in un precedente tempo  $t_e$ . Il *redshift* inoltre è legato al parametro di espansione  $a(t)$  dalla seguente

---

<sup>4</sup>Per *clustering* si intende l'aggregazione di materia, per collasso gravitazionale, che forma le strutture cosmiche

relazione:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (1.11)$$

Per come è stato definito, all'aumentare del valore di *redshift*  $z$  aumenta l'antichità dell'Universo. In particolare l'Universo più giovane che si trova "vicino" a noi corrisponde a  $z = 0$ , mentre l'Universo più antico, da cui proviene la CMB, che si trova più "lontano" da noi corrisponde a  $z \sim 1100$

# Capitolo 2

## Modelli di Energia Oscura Interagente

Al fine di risolvere i problemi del modello  $\Lambda$ CDM, presentati nel capitolo precedente, sono stati introdotti nuovi modelli cosmologici, conosciuti come modelli di quintessenza.

Nel corso degli ultimi vent'anni sono stati proposti numerosi modelli di quintessenza con diverse caratteristiche [24], ma tutti accomunati dal fatto di fornire una nuova interpretazione dell'energia oscura. In particolare, in questa analisi verrà descritto il modello *Constrained Interacting Dark Energy* (CIDER), proposto inizialmente da Barros in [25], che presenta un'energia oscura sotto forma di campo scalare  $\phi$ , detto anche campo di quintessenza, interagente e responsabile dell'espansione accelerata dell'Universo. Tale modello è caratterizzato da una cosmologia di background, ovvero da una cosmologia che descrive le proprietà medie dell'Universo, come l'espansione, identica, per costruzione, a quella del modello  $\Lambda$ CDM, dal quale differisce solo a livello perturbativo. Lo scopo di questo modello è quello di alleviare la tensione su  $\sigma_8$ , definito in appendice A, senza alterare le osservabili di *background* [25]. Nei seguenti paragrafi verranno sinteticamente presentate la cosmologia di *background* e le perturbazioni lineari.

### 2.1 Cosmologia di Background

Per tutti i modelli di quintessenza valgono le considerazioni geometriche fatte per il modello  $\Lambda$ CDM, dunque l'Universo ha una geometria piana descritta dalla metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (1.4), riformulata considerando  $c = 1$  e con  $\delta_{ij}$  delta di Kronecker:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (2.1)$$

ed è composto dai quattro fluidi perfetti presentati nel paragrafo 1.3 . In questo caso però, il ruolo dell'energia oscura non è rivestito da  $\Lambda$  ma dal campo scalare<sup>1</sup>  $\phi$ , che può essere comunque interpretato come un fluido perfetto [27], e che possiede le seguenti densità di energia e pressione intrinseche, dove  $V(\phi)$  è il potenziale scalare autointeragente associato al campo,  $g^{\mu\nu}$  il tensore metrico e  $\partial_\mu$  e  $\partial_\nu$  sono le derivate parziali rispetto a  $\mu$  e  $\nu$ .

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi) \qquad p_\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \quad (2.2)$$

I quattro fluidi (radiazione, materia barionica, materia oscura e campo scalare) sono caratterizzati dal tensore energia-impulso dei fluidi perfetti:

$$T_{\mu\nu}^{(i)} = (\rho_i + p_i)u_\mu^{(i)}u_\nu^{(i)} - p_i g_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

dove  $p$  è la pressione,  $\rho$  è la densità di energia,  $u_\mu$  è il quadrivettore velocità e  $i$  indicizza le quattro specie di fluido che compongono l'Universo. Il tensore energia-impulso totale è quindi  $T_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^4 T_{\mu\nu}^{(i)}$ , e deve conservarsi secondo l'identità di Bianchi, ovvero l'equazione di conservazione dei fluidi perfetti:

$$\nabla_\mu \sum_{i=1}^4 T_{\mu\nu}^{(i)} = 0 \quad (2.4)$$

In particolare si considera, per assunzione, che il fluido di radiazione (r) e quello di materia barionica (b) non interagiscano con il campo scalare e che quindi i loro tensori si conservino separatamente:

$$\nabla_\mu T_\nu^{(r)\mu} = \nabla_\mu T_\nu^{(b)\mu} = 0 \quad (2.5)$$

Al contrario i fluidi di materia oscura (c) e di energia oscura ( $\phi$ ) vengono considerati interagenti<sup>2</sup>e si conservano come:

$$\nabla_\mu T_\nu^{(c)\mu} = C_\nu(\phi) = -\nabla_\mu T_\nu^{(\phi)\mu} \quad (2.6)$$

dove  $C_\nu(\phi) = \kappa\beta\rho_c\nabla_\nu\phi$  è la funzione di accoppiamento che determina l'interazione tra materia ed energia oscura, con  $\kappa \equiv 8\pi G$  e con  $\beta$ , in questo caso costante<sup>3</sup>, che esprime l'intensità dell'accoppiamento. Per le ragioni presentate in [26],  $\beta$  deve rispettare la restrizione  $|\beta| < 0.1$ , ed in particolare, quando  $\beta = 0$  si presenta il caso di un modello di Quintessenza privo di accoppiamento.

<sup>1</sup>A sostegno dell'idea di introdurre un campo di quintessenza, si trovano diverse teorie fondamentali, come la teoria delle stringhe e la teoria di Brans-Dicke, che prevedono in modo indipendente l'esistenza di un campo scalare [26].

<sup>2</sup>L'interazione nasce dalle teorie di accoppiamento tensore-scalare [26].

<sup>3</sup>Nel caso più generale non si tratta di una costante ma di una funzione  $\beta(\phi)$ .

Dalle equazioni di conservazione (2.5), (2.6) e dalle (2.2), considerando la componente temporale ( $\nu = 0$ ), si ottiene l'equazione di Klein-Gordon:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = \kappa\beta\rho_c \quad (2.7)$$

e le equazioni di continuità:

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c = -\kappa\beta\dot{\phi}\rho_c \quad (2.8)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \quad (2.9)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \quad (2.10)$$

Queste quattro equazioni dinamiche di background regolano l'evoluzione dei fluidi che compongono l'Universo nei modelli di energia oscura interagente. Quando  $\beta\dot{\phi} > 0$ , l'accoppiamento può essere interpretato come un trasferimento di energia dalla materia oscura al campo scalare, invece, quando  $\beta\dot{\phi} < 0$  si ha la situazione contraria. Un primo effetto di questo accoppiamento può essere notato integrando l'equazione (2.8) dalla quale si ottiene che la densità di energia della materia oscura fredda evolve come:

$$\rho_c(a) = \rho_{c,0}a^{-3}\exp(-\kappa\beta\phi) \quad (2.11)$$

nella quale il fattore esponenziale è una conseguenza dello scambio di energia tra materia oscura ed il campo di energia oscura. Dall'equazione (2.11) emerge che per una specie che conserva il numero di particelle, la massa a riposo di ogni particella varia nel tempo seguendo:

$$m_c(a) = m_{c,0} \exp(-\kappa\beta\phi) \quad (2.12)$$

Per realizzare la cosmologia di background caratteristica del modello CIDER, ovvero indistinguibile da quella del modello  $\Lambda$ CDM, è necessario imporre:

$$H^2 = H_{\Lambda CDM}^2 \quad (2.13)$$

in cui  $H^2$  è la funzione di Hubble del modello di quintessenza interagente, mentre  $H_{\Lambda CDM}^2$  è la funzione di Hubble nel modello standard:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_r + \rho_c + \rho_b + \rho_\phi) \quad (2.14)$$

$$H_{\Lambda CDM}^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_r + \rho_{cdm} + \rho_b + \rho_\Lambda) \quad (2.15)$$

L'imposizione della (2.13) implica le seguenti equazioni che caratterizzano la dinamica del modello CIDER e la sua relazione con quello  $\Lambda$ CDM [1]. In particolare dall'equazione (2.13) e dalle (2.8)(2.9) si ottengono le espressioni di densità di energia e di pressione del campo di quintessenza:

$$\rho_\phi = \rho_{cdm} + \rho_\Lambda - \rho_c \quad (2.16)$$

$$p_\phi = p_\Lambda = -\rho_c \quad (2.17)$$

le quali, combinate con le (2.2) permettono di arrivare all'equazione:

$$\dot{\phi}^2 = \rho_{cdm} - \rho_\phi \quad (2.18)$$

che a sua volta permette di risalire alla forma del potenziale:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \rho_\Lambda \quad (2.19)$$

E' importante sottolineare che, a differenza degli altri modelli di quintessenza, nei quali il potenziale  $V(\phi)$  è ipotizzato a priori attraverso considerazioni teoriche<sup>4</sup>, nel modello CIDER il potenziale  $V(\phi)$  è determinato a posteriori attraverso il procedimento appena descritto. Infine, dall'equazione (2.18) può essere ricavata l'equazione del moto del campo scalare:

$$2\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \kappa\beta\rho_c = 0 \quad (2.20)$$

che può essere integrata per diversi valori di accoppiamento  $\beta$  per ottenere la soluzione dell'evoluzione dinamica di *background* del sistema. [25] [26] [1]

In figura 2.1, presa da [1], è mostrato l'andamento del parametro di densità  $\Omega_i$  per i fluidi di radiazione, materia (barionica + CDM) ed energia oscura, in funzione della variabile  $N \equiv \ln a$  detta di *e-folding*, per tre valori di accoppiamento  $\beta$  e per il modello  $\Lambda$ CDM. Dal grafico emerge che all'aumentare dell'accoppiamento, diminuisce il parametro di densità della materia (barionica b + materia oscura c)  $\Omega_{c+b}$ , nell'epoca dominata dalla materia, e si nota un corrispondente aumento del parametro di densità del campo scalare  $\Omega_\phi$ .

## 2.2 Perturbazioni Lineari

Le strutture cosmiche si sono formate a partire da piccole fluttuazioni dei campi di densità di materia dell'Universo primordiale, che fino ad ora, in questo elaborato, sono stati considerati omogenei. L'esistenza di fluttuazioni quantistiche è garantita dal principio di indeterminazione di Heisenberg, che enuncia:  $\Delta m \Delta t = \frac{\hbar}{2c^2}$ , permettendo quindi delle variazioni di massa e di conseguenza di densità. Grazie all'inflazione cosmica, ovvero un'espansione estremamente rapida ed accelerata dello spazio-tempo, le fluttuazioni quantistiche hanno aumentato la loro scala diventando macroscopiche e dunque classiche. Queste ultime hanno creato delle regioni con una densità maggiore che, per collasso gravitazionale, hanno originato le strutture dell'Universo. L'esistenza delle fluttuazioni

<sup>4</sup>Alcune scelte di potenziale possono essere, ad esempio, la legge di potenza inversa, l'esponenziale o il potenziale SUGRA [28].

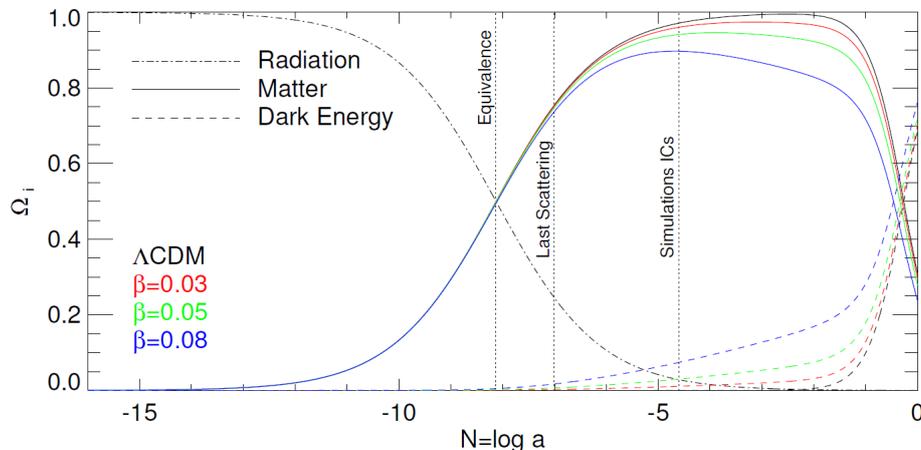


Figura 2.1: Il grafico rappresenta l'evoluzione del parametro di densità  $\Omega_i$  della radiazione (punto-linea), della materia (linea continua) e dell'energia oscura (linea tratteggiata), in funzione della variabile  $N \equiv \ln a$ , per tre valori di accoppiamento: in rosso  $\beta = 0.03$ , in verde  $\beta = 0.05$  e in blu  $\beta = 0.08$  e per il modello standard  $\Lambda$ CDM, in nero.

è inoltre dimostrata delle variazioni di temperatura  $\delta T/T \sim 10^5$ , nella CMB, rivelate per la prima volta dai satelliti RELIKT-1 [29] e COBE [30]. Dato che le fluttuazioni che hanno originato le strutture cosmiche possono essere considerate inizialmente di ampiezza molto piccola, è possibile studiarle servendosi della teoria perturbativa; di seguito viene fornita una breve trattazione delle perturbazioni lineari.

Si consideri la metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker perturbata nel gauge Newtoniano, con  $\Psi$  e  $\Phi$  potenziali standard di Bardeen:

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 - a^2(t)(1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (2.21)$$

e si consideri il campo scalare e le equazioni dei fluidi perturbati nella forma:

$$\phi(x, t) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(x, t) \quad (2.22)$$

$$\rho_i(x, t) = \bar{\rho}_i + \delta\rho_i(x, t) \quad (2.23)$$

$$p_i(x, t) = \bar{p}_i + \delta p_i(x, t) \quad (2.24)$$

nelle quali i valori barrati sono i valori medi delle soluzioni delle equazioni di continuità. Per ognuno dei fluidi è possibile definire il contrasto di densità  $\delta_i \equiv \delta\rho_i/\bar{\rho}_i$  utile per lo studio dell'evoluzione delle strutture dell'Universo. Sostituendo le equazioni (2.22), (2.23), (2.24) nell'equazione di Einstein perturbata:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R} = 8\pi G\tilde{T}_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

nella quale,  $c = 1$  e  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  è il tensore metrico espanso in serie, nel quale si assume che le perturbazioni siano piccole  $|h_{\mu\nu}| \ll a^2(t)$  [31]:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

si ottiene l'equazione che descrive la dinamica del contrasto di densità di ogni fluido. In particolare per la materia oscura si ottiene:

$$\ddot{\delta}_c - 3\ddot{\Phi} + \kappa\beta\delta\ddot{\phi} + a^{-2}(\kappa\beta\nabla^2\delta\phi - \nabla^2\Psi) + (\dot{\delta}_c - 3\dot{\Phi} + \kappa\beta\dot{\phi})(2H - \kappa\beta\dot{\phi}) = 0 \quad (2.27)$$

Andando nello spazio di Fourier, eseguendo la trasformazione dell'operatore  $\nabla^2 \rightarrow -k^2$  in cui  $k$  è il numero d'onda, e considerando il limite newtoniano  $(k/a)^2 \gg H^2$ , l'equazione (2.27) si riduce alla seguente:

$$\ddot{\delta}_c + \dot{\delta}_c(2H - \kappa\beta\dot{\phi}) - \frac{\kappa^2}{2}\rho_c\delta_c(1 + 2\beta^2) - \frac{\kappa^2}{2}\rho_b\delta_b = 0 \quad (2.28)$$

A questo punto, l'equazione (2.28) può essere espressa come:

$$\delta_c'' + \delta_c'(2 + \frac{H'}{H} - \kappa\beta\phi') - \frac{3}{2}\delta_c(\Omega_{CDM} - \frac{\kappa^2}{3}\phi'^2)(1 + 2\beta^2) - \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b = 0 \quad (2.29)$$

nella quale l'apice indica la derivata rispetto alla variabile di *e-folding*  $N \equiv \ln a$ . Eseguendo lo stesso procedimento per la materia barionica si ottiene:

$$\delta_b'' + \delta_b'(2 + \frac{H'}{H}) - \frac{3}{2}\delta_b(\Omega_{CDM} - \frac{\kappa^2}{3}\phi'^2) - \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b = 0 \quad (2.30)$$

Per esplicitare gli effetti dell'accoppiamento del campo scalare con la materia oscura l'equazione (2.29) può anche essere espressa nel seguente modo, in cui  $\Gamma_c$  è definito come  $\Gamma_c = 1 + \frac{4}{3}\beta^2$ .

$$\ddot{\delta}_c = -2H \left[ 1 - \beta \frac{\dot{\phi}}{H\sqrt{6}} \right] \dot{\delta}_c + 4\pi G[\rho_b\delta_b + \rho_c\delta_c\Gamma_c] = 0 \quad (2.31)$$

In questa riformulazione il termine  $\Gamma_c$  include l'effetto della forza mediata dal campo scalare, la quale è chiamata quinta forza, mentre il termine  $\beta \frac{\dot{\phi}}{H\sqrt{6}}$ , detto di *extra friction*, è il termine responsabile di un'accelerazione aggiuntiva nella stessa direzione della velocità delle particelle di materia oscura.

Le equazioni (2.29)(2.30) possono essere integrate numericamente per ottenere la crescita lineare delle perturbazioni di densità per la materia oscura e per la componente barionica. Queste equazioni possono anche essere combinate per ottenere la crescita lineare del contrasto di densità totale definito come:

$$\delta \equiv \frac{\Omega_c\delta_c + \Omega_b\delta_b}{\Omega_c + \Omega_b} \quad (2.32)$$

Altre quantità importanti per lo studio dell'evoluzione delle strutture cosmiche sono: la funzione di crescita  $g(t)$ , il tasso di crescita  $f$  e il fattore di crescita lineare  $D_+(z)$ . La funzione di crescita  $g(t)$  descrive in che modo le perturbazioni evolvono fino a *redshift*  $z = 0$  e si definisce come:

$$\delta(\vec{x}, t) = g(t)\delta(\vec{x}, 0) \quad o \quad g \equiv \frac{\delta}{\delta_0} \quad (2.33)$$

Il tasso di crescita descrive quanto velocemente evolve la perturbazione e si definisce come:

$$f \equiv \frac{d \ln \delta}{d \ln a} \quad o \quad f \equiv \frac{\delta'}{\delta} \quad (2.34)$$

Servendosi della funzione di crescita e del tasso di crescita è anche possibile definire il parametro:

$$f\sigma_8(N) = fg\sigma_8(0) = \sigma_8(0) \frac{\delta'(N)}{\delta(0)} \quad (2.35)$$

nella quale  $\sigma_8(0)$  è il parametro  $\sigma_8$  al tempo presente. La quantità  $f\sigma_8(N)$  è particolarmente importante perché può essere direttamente estratta dai dati della distorsione spaziale di *redshift* [32] [33] [34].

Il fattore di crescita lineare si ottiene risolvendo numericamente le (2.29)(2.30) oppure può essere definito come:

$$D_+(z) \equiv \frac{1}{\Omega_c(z) + \Omega_b(z)} [\Omega_c(z)\delta_c(z) + \Omega_b(z)\delta_b(z)] \quad (2.36)$$

Alcuni andamenti delle grandezze appena definite sono presentati nelle seguenti figure prese da [1]. In figura 2.2 è rappresentato l'andamento rispetto al *redshift* del contrasto di densità totale ottenuto integrando numericamente le equazioni (2.29)(2.30) e normalizzando al *redshift* della CMB, per i diversi valori di accoppiamento  $\beta = 0.03$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$ . Da questa emerge che per bassi valori di *redshift*, all'aumentare dell'accoppiamento si verifichi una diminuzione del contrasto di densità. In figura 2.2 è mostrato l'andamento del parametro  $f\sigma_8$ , per i valori di accoppiamento precedentemente citati, a confronto con i dati osservativi provenienti da diverse ricerche[35]. In questo grafico si può notare come all'aumentare dell'accoppiamento corrisponde una soppressione di  $f\sigma_8$ . Infine, in figura 2.2 è presentato l'andamento del fattore di crescita lineare in unità del fattore di scala per tutti i valori di accoppiamento analizzati. In questo caso si può notare come: a basso *redshift*, all'aumentare del accoppiamento diminuisca il fattore di crescita e ad alto *redshift* si abbia invece un andamento crescente e comparabile per tutti i valori di accoppiamento. Inoltre nelle figure 2.2 e 2.2 sono riportati i valori del parametro  $\sigma_8$  che risulta diminuire all'aumentare dell'accoppiamento.

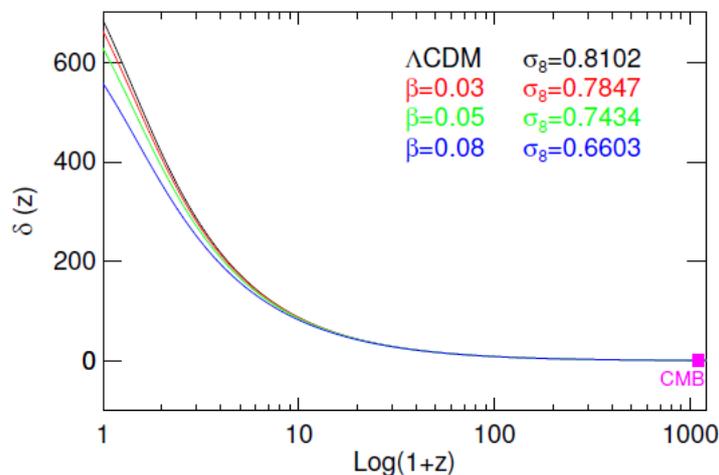


Figura 2.2: Il grafico rappresenta l'andamento rispetto al redshift del contrasto di densità totale, per i diversi valori di accoppiamento  $\beta$ . In rosso si ha  $\beta = 0.03$ , in verde si ha  $\beta = 0.05$ , in blu si ha  $\beta = 0.08$  e in nero si ha il modello  $\Lambda$ CDM. Nella legenda sono inoltre riportati i valori di  $\sigma_8$  per tutti i modelli considerati.

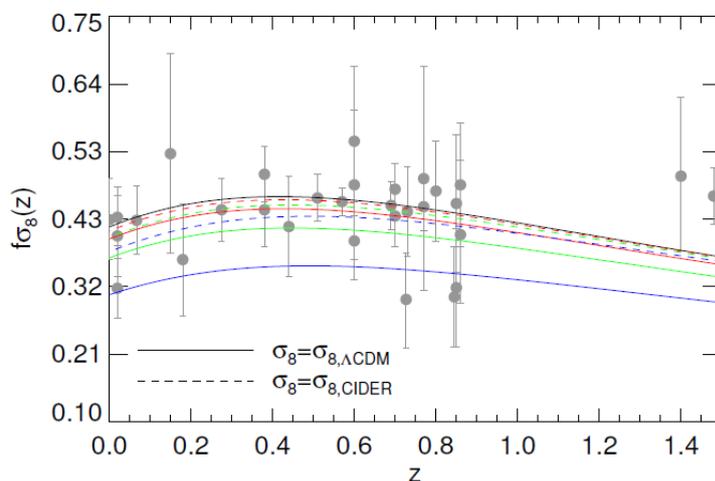


Figura 2.3: Il grafico rappresenta l'andamento del parametro  $f\sigma_8$  in funzione del redshift, per i diversi valori di accoppiamento. Inoltre sono riportati una serie di dati osservativi [35]. A linea continua è stato rappresentato l'andamento con  $\sigma_8$  ottenuto dalle osservazioni, mentre a linea tratteggiata è stato raffigurato l'andamento con i parametri  $\sigma_8$  ottenuti dalle simulazioni.

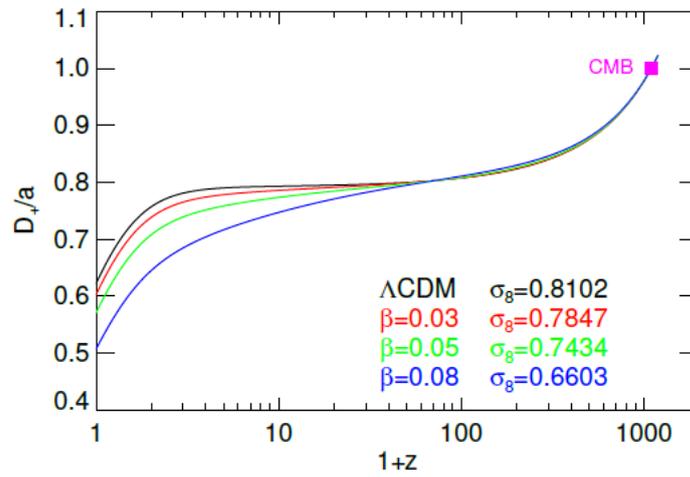


Figura 2.4: Il grafico rappresenta l'andamento del fattore di crescita lineare  $D+$  in unità del fattore di scala  $a$  normalizzato al redshift della CMB  $z \sim 1100$ , per tutti i valori di accoppiamento. In rosso si ha  $\beta = 0.03$ , in verde si ha  $\beta = 0.05$ , in blu si ha  $\beta = 0.08$  e in nero si ha il modello  $\Lambda$ CDM. Inoltre sono riportati i valori del parametro  $\sigma_8$  dai quali risulta che ad una crescita più lenta delle perturbazioni lineari corrisponde un valore minore di  $\sigma_8$ .

# Capitolo 3

## Simulazioni Cosmologiche

I diversi modelli cosmologici, sono stati ampiamente studiati nel corso degli anni ed è stata prestata una particolare attenzione allo studio dell'evoluzione delle strutture cosmiche. Tale evoluzione, come detto anche nel paragrafo 2.2, per via della piccola entità delle perturbazioni, può essere inizialmente indagata per mezzo della teoria perturbativa lineare, che permette un approccio analitico. Dopodiché, all'aumentare dell'entità delle perturbazioni, si entra in un regime non lineare, nel quale non può essere applicata la teoria perturbativa lineare, ma deve essere adottato un approccio numerico molto più complesso. Per questo motivo l'evoluzione delle strutture cosmiche deve essere studiata attraverso simulazioni numeriche di sistemi ad N-corpi. Per simulazioni numeriche si intende un insieme di algoritmi che traducono un modello matematico, descrivente un sistema a più corpi, e che possono essere risolti da potenti calcolatori. Nel settore dello studio dell'Universo le simulazioni numeriche ad N-corpi prendono il nome di simulazioni cosmologiche<sup>1</sup>. In questo capitolo vengono presentati alcuni aspetti generali di queste simulazioni e il loro ruolo nello studio dei modelli di energia oscura interagente.

### 3.1 Ruolo delle Simulazioni

Le simulazioni numeriche, sono un potente strumento per lo studio dell'Universo, poiché sono l'unico esperimento possibile per verificarne le teorie sull'origine e l'evoluzione, e costituiscono un ponte tra modelli teorici ed osservazioni dirette [36] [24].

In cosmologia il confronto tra dati e teoria non è un processo semplice e lineare, ma richiede procedure sempre più complesse per, ad esempio, ridurre i dati grezzi, quantificare gli errori sistematici ed estrarre informazioni cosmologiche significative dalle osservazioni dirette. Inoltre, è difficile fornire previsioni teoriche affidabili per le quantità osservabili,

---

<sup>1</sup>In ambito cosmologico, dato che si assume che l'Universo sia composto da una miscela di fluidi, vengono anche utilizzate le simulazioni idrodinamiche che però in questo elaborato non verranno presentate.

dal momento che queste, spesso, richiedono lo studio di processi altamente non lineari e che comportano la sovrapposizione di diversi meccanismi fisici. Per questi motivi si ricorre all'uso delle simulazioni numeriche, che permettono di studiare l'evoluzione dell'Universo e la formazione delle strutture cosmiche laddove vengono coinvolti complessi processi fisici che, proprio per via della loro complessità, non possono essere studiati se non attraverso le simulazioni. Esse sono quindi uno strumento estremamente prezioso per lo sviluppo della nostra comprensione del Cosmo, sia per lo studio del modello  $\Lambda$ CDM, sia per l'esplorazione di scenari di Energia Oscura più complessi, per i quali si cercano di identificare piccole deviazioni dalle previsioni standard che vengono poi ricercate nei dati [24].

Le simulazioni hanno rivestito un ruolo importante nella scoperta e successiva investigazione del fenomeno dell'energia oscura, infatti, nonostante l'indubbia importanza dell'osservazione dell'accelerazione cosmica da parte di Perlmutter, Riess e Schmidt (1999), è importante sottolineare che la prima evidenza di un Universo dominato dall'energia oscura è stata ottenuta 10 anni prima dal confronto della funzione di correlazione estratta dal catalogo di galassie APM con le predizioni delle simulazioni ad N-corpi [24][37][38]. Un altro importante contributo delle simulazioni è stato dato nell'ambito della materia oscura. Queste hanno permesso di studiare la sua natura e il suo ruolo nella guida della formazione delle strutture cosmiche a partire dalle piccole fluttuazioni di densità generate nell'Universo primordiale, presentate nel paragrafo 2.2, ed è stato possibile stabilire il paradigma della materia oscura fredda come guida principale per la formazione di galassie e ammassi di galassie [24][39][40][41][42]. Nelle ultime decadi si sono verificati grandi sviluppi nell'ambito delle simulazioni cosmologiche per via dell'aumento della potenza di calcolo disponibile e grazie allo sviluppo di algoritmi sempre più sofisticati ed efficienti. L'utilizzo di questi algoritmi ha permesso di testare la natura della energia oscura usando implementazioni capaci di riprodurre le caratteristiche peculiari dei diversi candidati di quest'ultima e ha permesso di sondare una vasta gamma di scenari [24]. Per tutte le considerazioni presentate in questo paragrafo si può affermare l'importanza che le simulazioni numeriche cosmologiche hanno avuto e che tuttora hanno nello studio dell'Universo. Questa importanza potrebbe aumentare con l'aumento della potenza di calcolo dei super computer e attraverso l'implementazione di algoritmi ancora più efficienti.

## 3.2 Metodi per le Simulazioni Cosmologiche

Come precedentemente menzionato, le simulazioni cosmologiche permettono di studiare l'evoluzione dell'Universo e la formazione delle strutture in esso, servendosi di algoritmi eseguiti da potenti calcolatori. Per fare ciò, queste simulazioni, riproducono una certa frazione dell'Universo, all'interno di un volume cubico, nel quale viene individuato un numero variabile di punti (particelle), a cui si attribuisce un valore di massa, e che hanno il compito di campionare il campo di densità di materia barionica e materia oscura. Per

tenere in considerazione il fatto che l'Universo sia un sistema infinito e senza bordi, vengono considerate condizioni al contorno di tipo periodico, che hanno come conseguenza il fatto che tutte le particelle uscenti da un lato del volume cubico rientrano istantaneamente dal lato opposto. All'interno di questa approssimazione di Universo, come prima cosa devono essere generate le condizioni iniziali, che costituiscono sostanzialmente l'input del codice della simulazione. Queste condizioni iniziali sono generalmente ottenute servendosi di codici capaci di creare campi di densità statisticamente consistenti con le anisotropie osservate nella CMB. Una volta generate le condizioni iniziali l'evoluzione viene simulata seguendo le traiettorie delle particelle sotto effetto della loro reciproca gravità, la quale può essere descritta o dalla legge della gravità Newtoniana:

$$\vec{F}_i = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2} \quad (3.1)$$

o dalla sua forma più generale detta equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}) \quad \text{con} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} \Phi \quad (3.2)$$

nella quale  $\rho$  è la densità di materia e la forza  $\vec{F}$  è descritta attraverso il potenziale  $\Phi$ . Nelle simulazioni che seguono l'evoluzione delle strutture si utilizza la legge di gravità Newtoniana perché, sulle grandi scale su cui si considera l'evoluzione, gli effetti relativistici sono trascurabili nel limite in cui il volume simulato ha dimensioni significativamente inferiori rispetto all'Orizzonte Cosmologico<sup>2</sup>. Inoltre la gravità Newtoniana risulta computazionalmente più agevole.

A seconda della forma di equazione che si considera, esistono tecniche diverse per implementare le simulazioni cosmologiche: nel caso dell'equazione (3.1), nel quale si ha una somma diretta particella-particella, si utilizza il metodo *Particle-Particle (PP)* o i codici *Tree*, detti anche codici ad albero; nel caso dell'equazione (3.2) si utilizzano, invece, i codici *Particle-Mesh (PM)*. [36]

Il metodo *Particle-Particle* tratta masse puntiformi e calcola la forza attraverso una somma diretta servendosi dell'equazione (3.1), nella quale viene inserito un parametro aggiuntivo  $\epsilon$  detto *softening* gravitazionale:

$$\vec{F}_i = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j + \epsilon|^2} \quad (3.3)$$

Il parametro  $\epsilon$  viene introdotto per evitare un fenomeno collisionale che due particelle troppo vicine potrebbero provocare. Infatti, se due particelle sono troppo in prossimità l'una dell'altra, l'interazione gravitazionale tra le due diventa molto forte e possono dare

---

<sup>2</sup>Per Orizzonte Cosmologico si intende la misura di distanza massima entro la quale è possibile osservare l'Universo.

luogo ad una collisione non prevista per un sistema ad N-corpi di scala cosmologica. La tecnica della somma diretta utilizzata dal metodo *PP* è quella più accurata e precisa, ma risulta anche quella meno efficiente. Dato che si è interessati ad ottenere la forza di ogni particella in ogni posizione e dato che le particelle devono essere molto numerose (per poter campionare al meglio il campo di densità di materia nell'Universo), il tempo di calcolo richiesto, proporzionale a  $N^2$  con  $N$  numero di particelle, risulta troppo elevato anche con l'utilizzo degli attuali super computer.

Il metodo *Tree*, come il metodo *PP*, tratta masse puntiformi e calcola la forza attraverso una somma diretta. La particolarità di questo algoritmo consiste nel fatto che, per ridurre il tempo di calcolo utilizza particolari strutture dette "ad albero". Le strutture ad albero prevedono che: se le particelle sono lontane da quella sulla quale si sta calcolando la forza, queste possono essere raggruppate insieme come se fossero una singola particella più massiccia posta nel centro di massa del gruppo di particelle. Grazie a queste strutture viene notevolmente ridotto il numero di calcoli e di conseguenza viene ridotto il tempo di calcolo.

Il metodo *Particle-Mesh* calcola la forza integrando numericamente l'equazione (3.2) e segue l'evoluzione della densità piuttosto che l'interazione delle singole particelle. In pratica questo metodo discretizza la forza servendosi di una griglia regolare composta da celle identificate da una tripletta di indici  $i, j, k$ . Per calcolare la forza nella posizione  $\mathbf{r}_n$  (dove  $n$  indica un punto sulla griglia) dovuta al campo di densità di tutte le particelle, si procede nel seguente modo.

Una volta costruita la griglia, ad ognuna delle sue celle viene assegnato un valore di densità  $\rho_n$ . L'assegnazione viene eseguita facendo uno *smoothing* delle particelle sulle celle in modo da rendere il campo di densità più regolare riducendo le discontinuità ai bordi delle celle:

$$\rho_n = \sum_l m_l W(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_n) \quad (3.4)$$

Nella (3.4):  $n$  sono le celle della griglia,  $m_l$  sono le masse delle particelle,  $\mathbf{r}_n$  sono le posizioni dei centri geometrici di ogni cella della griglia e  $W$  è una funzione interpolante normalizzata in modo da conservare la massa totale. Successivamente, viene eseguita la trasformata di Fourier del campo di densità, e viene risolta l'equazione di Poisson in tale spazio, nel quale, quella che era una convoluzione tra due funzioni nello spazio reale, diventa una moltiplicazione. Una volta ottenuto il potenziale dall'equazione di Poisson, viene ricavata la forza  $\tilde{F}_n$  nello spazio di Fourier, ed infine, si esegue l'antitrasformata per trovare  $F_n$  nello spazio reale. A questo punto si calcola la forza per ogni particella seguendo lo stesso procedimento utilizzato per la densità:

$$F(\mathbf{r}_l) = \sum_n W(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_n) F(\mathbf{r}_n) \quad (3.5)$$

Quando si ha la forza di ogni particella il sistema viene fatto evolvere e si ripete la procedura appena descritta. Il vantaggio di questo metodo è la sua rapidità di calcolo, infatti sono disponibili diverse librerie software che includono metodi sempre più veloci per le trasformate di Fourier.

Il problema principale del metodo *Particle-Mesh* è la mancanza di risoluzione al di sotto di due passi della griglia. Per effetto della gravità le particelle fluiscono da regioni a bassa densità a regioni ad alta densità e questo porta ad un eccesso di particelle in alcune celle, mentre altre diventano sempre più vuote. Le particelle troppo vicine non interagiscono seguendo l'equazione (3.2) e dunque il codice non è in grado di risolvere la formazione delle strutture nelle regioni troppo dense. Questo problema può essere risolto introducendo delle griglie più fini nelle regioni più concentrate e devono quindi avere la capacità di adattarsi liberamente in ogni momento alla effettiva distribuzione delle particelle. La programmazione di queste griglie è però un processo molto complicato. Alcuni esempi di questi codici sono: il codice pubblico MLAPM (Multi-Level-Adaptive-Particle-Mesh) [43][36] e il codice RAMSES [44].

Il metodo migliore per approfittare della risoluzione dei codici *Tree* e dei codici *PP* e la velocità di calcolo dei codici *Particle-Mesh* è quello di utilizzare dei codici ibridi. Questi si caratterizzano a seconda del modo in cui combinano i metodi precedentemente descritti. I principali codici ibridi sono il  $P^3M$  (*Particle-Particle Particle-Mesh*) e il *TreePM*. In particolare quest'ultimo utilizza il metodo *Tree* per calcolare le forze a breve distanza, e il metodo *PM* per calcolare quelle a lunga distanza. Un esempio di codice *TreePM* è il codice GADGET-3 (Galaxies with Dark Matter and Gas intEracT), che venne scritto da Springel e reso pubblico, nella sua prima versione GADGET, nel 2000, aggiornato nei primi anni duemila a GADGET-2 [45] e infine portato all'attuale versione. Il codice utilizzato per ottenere le simulazioni utilizzate in questa analisi è una versione modificata, che verrà meglio trattata in seguito, del codice GADGET-3. [6][36][45]

### 3.3 Codici per Modelli di Energia Oscura Interagente

I diversi scenari di energia oscura interagente, con diversi tipi di accoppiamento, sono stati studiati attraverso diverse simulazioni ad N-corpi. Alcuni studi sono, ad esempio, quello di Macciò et al. [46] o quello di Baldi et al. [47], sull'accoppiamento costante e quello di Baldi [48] sull'accoppiamento dipendente dal tempo. Negli ultimi anni tutti i vari scenari di energia oscura interagente sono stati raccolti in un ampio progetto chiamato *Coupled Dark Energy Cosmological Simulations* (CoDECS), presentato la prima volta nel 2012 da Baldi nell'articolo [49]. Questo progetto aveva lo scopo di fornire un vasto insieme di dati capace di ricoprire un ampio spettro del panorama di modelli di

energia oscura interagente, includendo diversi potenziali auto-interagenti  $V(\phi)$  e diverse funzioni di accoppiamento. Con l'acquisizione di nuovi dati sperimentali si è poi rivelato necessario creare una nuova versione di questo progetto che prende il nome di CoDECS2, del quale fanno parte le simulazioni del modello CIDER analizzate nel capitolo 4.[1]

La presenza di un accoppiamento diretto tra il campo scalare di energia oscura e gli altri fluidi cosmici comporta degli effetti sulla formazione delle strutture cosmiche e sulla loro evoluzione, che devono essere presi in considerazione nei modelli ad N-corpi. Dunque per simulare le cosmologie non standard è necessario modificare i codici già esistenti per tenere in considerazione questi effetti. In questa sezione verranno riassunte le modifiche fatte al codice GADGET3, citato nel paragrafo precedente, con le quali è stata creata la versione C-GADGET usata per le simulazioni del modello CIDER [47][48].

La prima modifica riguarda il calcolo della funzione di Hubble  $H(a)$ . Questa modifica viene effettuata per tenere in considerazione il fatto che l'accoppiamento con il campo scalare  $\phi$  modifichi l'espansione dell'Universo. Per fare ciò, il calcolo della funzione di Hubble  $H(a)$  del codice GADGET3 viene sostituito con un'interpolazione lineare da una tabella di valori di  $H(a)$  pre-calcolati attraverso un codice Bolzamann di perturbazioni lineari. Lo stesso approccio è stato adottato anche per altre quantità rilevanti che allo stesso modo sono state prima calcolate numericamente e poi utilizzate come input per la versione modificata di GADGET3. Alcune di queste grandezze sono: la funzione di accoppiamento per la materia oscura fredda  $\beta_c(\phi)$ , la funzione di accoppiamento per la materia barionica  $\beta_b(\phi)$ , il termine correttivo per le masse delle particelle barioniche e il termine correttivo per la massa delle particelle di materia oscura fredda. Nel caso specifico del modello CIDER trattato in questa analisi, come anticipato nei capitoli precedenti,  $\beta_b(\phi) = 0$  e  $\beta_c(\phi) = \beta$ , perché si considera la materia oscura come unica interagente, con accoppiamento costante, con il campo scalare di energia oscura.

Il significato dei termini di correzione per le masse viene spiegato nella seguente seconda modifica. Come spiegato nel capitolo 2, la specie accoppiata con il campo di energia oscura, in questo caso materia oscura<sup>3</sup>, ha particelle con massa effettiva che cambia nel tempo, e di conseguenza la corrispondente densità avrà un termine di correzione derivante dalla variazione della massa delle particelle. Nelle simulazioni la massa delle particelle di materia oscura fredda viene corretta ad ogni *step* grazie al fattore:

$$\Delta m_c(a) = \exp\left(-\int_a^1 \beta_c(\phi) \frac{d\phi}{da} da\right) \quad (3.6)$$

La terza modifica riguarda la correzione dell'accelerazione gravitazionale. Dato che l'accoppiamento introduce la presenza di una quinta forza mediata dal campo scalare, questa deve essere tenuta in considerazione quando si calcolano le accelerazioni gravitazionali su piccola scala e su larga scala per le particelle di materia oscura fredda.

---

<sup>3</sup>Il codice GADGET2 permetterebbe l'accoppiamento anche con i barioni, che però in questa analisi non viene considerato.

Per questo motivo, sia i codici *Tree* che i codici *Particle-Mesh* vengono modificati per renderli capaci di distinguere le particelle di materia oscura fredda e quelle di materia barionica.

La ultima modifica riguarda l'aggiunta del un termine cosmologico dipendente dalla velocità, menzionato nel paragrafo 2.2, il quale induce un'accelerazione nella stessa direzione delle velocità delle particelle di materia oscura.

### 3.4 Osservabili

Una volta eseguite le simulazioni cosmologiche, da queste vengono estratte alcune osservabili che permettono di studiare il modello simulato. Queste possono essere, ad esempio, la funzione di massa, lo spettro di potenza, l'abbondanza di vuoti cosmici o il *lensing*.

La funzione di massa  $n(M)$  delle strutture cosmiche, è definita dalla relazione:

$$dN = n(M)dM \quad (3.7)$$

nella quale  $N$  è il numero di strutture ed  $M$  è la loro massa. Essa fornisce il numero di strutture per unità di volume che hanno massa contenuta nell'intervallo compreso tra  $M$  e  $M + dM$ . Il calcolo analitico della funzione di massa è generalmente molto complesso e per questo motivo sono state sviluppate diverse tecniche analitiche, la prima di queste, ad esempio, venne presentata da Press e Schechter in [50]. Dato che la funzione di massa fornisce informazioni riguardo all'abbondanza delle strutture cosmiche, risulta molto utile per lo studio dell'evoluzione dell'Universo.

Lo spettro di potenza  $P(k)$  è una grandezza definita come mostrato in appendice A, attraverso la relazione  $P(k) = \delta_k^2$  in cui  $\delta_k$ , è il campo del contrasto di densità. In alternativa, può anche essere definito matematicamente dal teorema di Wiener – Khintchine, il quale enuncia che lo spettro di potenza di un campo coincide con la trasformata di Fourier della funzione di correlazione a due punti  $\xi(r)$  del campo stesso:

$$P(k) \equiv \int \xi(r) \exp(ik \cdot r) dr \quad (3.8)$$

La funzione di correlazione a due punti si definisce a sua volta come:

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}') \rangle \quad (3.9)$$

in cui  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ .

Lo spettro di potenza è una grandezza che permette di scomporre l'andamento del segnale in onde con diversi numeri d'onda  $k$  e ne restituisce l'ampiezza caratteristica. Inoltre per via della sua dipendenza da parametri, quali ad esempio densità e tasso di espansione (come verrà mostrato nel capitolo 4), lo spettro di potenza consente di studiare l'evoluzione dell'Universo e confrontare diversi modelli cosmologici con le osservazioni.

I vuoti cosmici sono regioni dell'Universo in cui si ha una densità inferiore alla densità media di materia. Essi sono utili perché conoscendone l'abbondanza e la dimensione è possibile individuare lo stadio dell'evoluzione dell'Universo. Infatti in uno scenario in cui il collasso gravitazionale domina l'accrescimento delle strutture i vuoti cosmici ne rappresentano la controparte.

Il *lensing* gravitazionale, è il fenomeno che prevede la distorsione della luce per via di un corpo altamente massivo che modifica lo spazio-tempo che questa attraversa. Il fenomeno di *lensing* dipende dalla massa dell'oggetto che lo genera. Può essere suddiviso in due categorie: il *lensing* forte e il *lensing* debole. Il primo, per *cluster* più massivi, permette di studiare la distribuzione di massa nelle parti centrali di questi oggetti; il secondo, permette di ricostruire in maniera statistica la distribuzione di massa su grandi scale. [6][7]

# Capitolo 4

## Analisi

In questo capitolo viene presentata l'analisi fatta sulle simulazioni numeriche cosmologiche del modello CIDER [1] che si trovano al link:

<https://xfer-archive.cr.cnaf.infn.it:8443/cosmown/mbaldi/public/CIDER/>

A questo indirizzo sono presenti le simulazioni cosmologiche del modello  $\Lambda$ CDM e modello CIDER con tre valori di accoppiamento diversi:  $\beta = 0.03$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$ . In particolare sono presenti 25 *snapshot*, ovvero istantanee dell'evoluzione dell'Universo simulato, a vari *redshift* da  $z = 99$  a  $z = 0$ . In questa analisi sono stati considerati gli *snapshot* per i *redshift*  $z = 0$ ,  $z = 0.55$ ,  $z = 1$ ,  $z = 1.6$ . Le simulazioni utilizzate hanno un volume di  $1Gpc^3h^{-3}$  (con  $H_0 = h \times 100 km/s/Mpc$ ) contenente  $2 \times 1024^3$  particelle che campionano il campo di densità di materia barionica e materia oscura. Inoltre hanno condizioni iniziali generate a  $z = 99$  come una realizzazione stocastica dello spettro di potenza di materia, calcolato con il codice Boltzmann CAMB<sup>1</sup>, che permette di calcolare le anisotropie della CMB [51], e servendosi del codice MUSIC<sup>2</sup> (*M*U*L*t*i*-*S*c*a*l*e*-*I*n*i*t*i*a*l*-*C*o*n*d*i*t*i*o*n*s), che permette di avere delle simulazioni un cui possono essere eseguiti degli *zoom* sugli aloni di materia oscura.

In particolare, in questa analisi sono stati considerati lo spettro di potenza del momento e lo spettro di potenza della velocità, estratti dagli *snapshot* ai diversi *redshift* delle simulazioni precedentemente citate, per tutti i tre valori di accoppiamento  $\beta$  presentati in [1].

Nel primo paragrafo vengono presentati i risultati ottenuti da ricerche precedenti, in particolare quelli ottenuti in [1]. Nel secondo paragrafo viene descritto il procedimento seguito per calcolare le quantità oggetto di analisi. Infine, nel terzo paragrafo, vengono presentati i risultati ottenuti.

---

<sup>1</sup><https://camb.readthedocs.io/en/latest/camb>

<sup>2</sup><https://www-n.oca.eu/ohahn/MUSIC/>

## 4.1 Studi Esistenti

Il modello CIDER è stato studiato in modo dettagliato in [1], nel quale viene indagato e quantificato l'impatto che questo modello ha sulla formazione delle strutture su scale non lineari ed infine viene confermata la sua tendenza a sopprimere la formazione delle strutture e, per questo motivo, la sua capacità di fornire un modo per alleviare la tensione su  $\sigma_8$ . Nel *paper* [1] vengono considerate diverse osservabili come la funzione di massa degli aloni di materia oscura, i profili di densità e l'abbondanza dei vuoti cosmici e lo spettro di potenza di materia; per questa analisi, è utile riportare i risultati, illustrati in figura 4.1, riguardanti quest'ultimo. La figura 4.1, estrapolata da [1], mostra, per  $redshift = 0.00$  e  $redshift = 1.00$ , il rapporto tra lo spettro di potenza di densità del modello CIDER, nei suoi valori di accoppiamento  $\beta = 0.03$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$ , e lo spettro di potenza di densità del modello  $\Lambda$ CDM. La linea continua rappresenta il rapporto degli spettri ottenuti dalle simulazioni, la linea tratteggiata orizzontale rappresenta il rapporto atteso degli spettri, basati sulla risoluzione delle equazioni lineari (2.29),(2.30), infine la curva tratto-punto rappresenta i valori attesi dello spettro di potenza non lineare ottenuto dai codici CAMB e HaloFit<sup>3</sup> per un modello  $\Lambda$ CDM con la stessa ampiezza dello spettro di potenza lineare ottenuto, per ciascun valore di  $\beta$ , dalle soluzioni delle equazioni (2.29),(2.30). Da questi grafici emerge che, per i valori  $k < 0.1 hMpc^{-1}$ , ovvero su larga scala, lo spettro in questione subisce una soppressione proporzionale alla costante di accoppiamento  $\beta$ . Per i valori  $k > 0.1 hMpc^{-1}$ , ovvero su scala più piccola, si ottiene un'ulteriore soppressione, sempre proporzionale a  $\beta$ , dovuta al termine di *extra friction* che emerge dall'equazione (2.31), il quale contrasta il collasso gravitazionale delle strutture legate, provocando quindi una diminuzione dello spettro di potenza di densità. Nello specifico si può dire che le deviazioni dal modello standard sono di piccole percentuali per l'accoppiamento più debole ( $\beta = 0.03$ ) e quantificabili ad un 35% per l'accoppiamento più forte ( $\beta = 0.08$ ), a  $z = 0$ .

## 4.2 Spettro di Potenza di Velocità e di Momento

Lo spettro di potenza  $P(k)$  del campo delle perturbazioni di densità  $\delta$ , trattato in appendice A, può essere definito come:

$$P(k) \equiv \delta_k^2 \quad (4.1)$$

in cui  $k$  è il numero d'onda. Per ricavare lo spettro di potenza della velocità si procede nel seguente modo. Si considerino le seguenti equazioni di continuità, di Eulero e di Poisson:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (4.2)$$

---

<sup>3</sup>Per una presentazione più accurata si rimanda a [1][52][53]

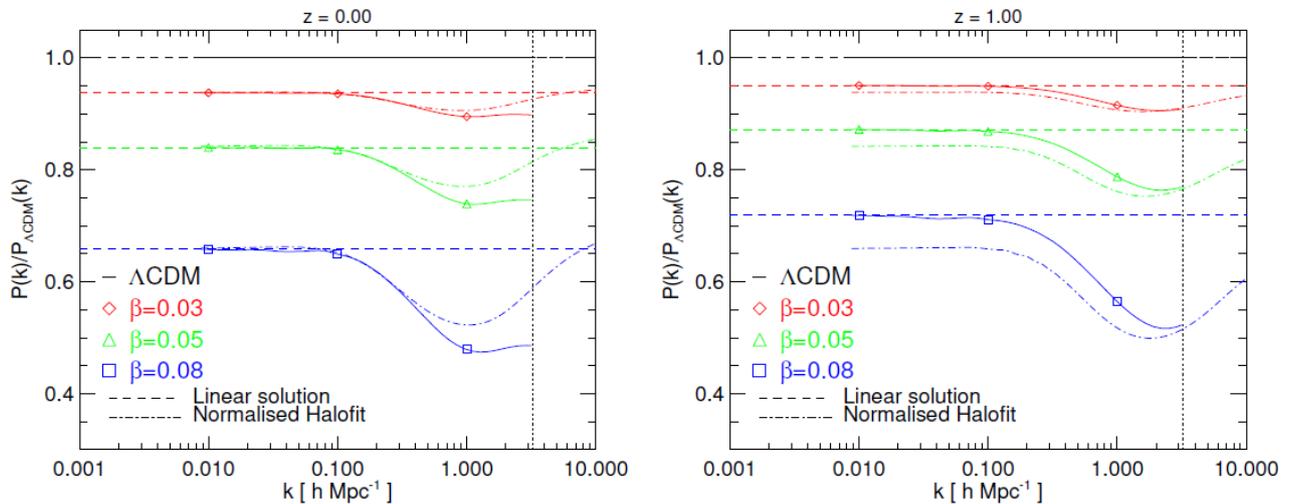


Figura 4.1: La figura mostra il rapporto tra gli spettri di potenza di densità del modello CIDER per i valori di accoppiamento  $\beta = 0.03$  (rosso),  $\beta = 0.05$  (verde),  $\beta = 0.08$  (blue), rispetto allo spettro del modello  $\Lambda$ CDM (nero). La linea tratteggiata rappresenta il rapporto atteso in base alla soluzione delle equazioni delle perturbazioni (2.29), (2.30), la linea tratto-punto rappresenta il valore atteso dello spettro di potenza ottenuto dai codici CAMB e HaloFit ed, infine, la linea continua indica i risultati ottenuti dalle simulazioni. A destra si trovano gli andamenti per  $z = 0.00$  e a sinistra per  $z = 1.00$ .

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \psi = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla^2 \psi - 4\pi G \rho = 0 \quad (4.4)$$

Nelle quali  $\mathbf{v}$  è il campo di velocità,  $\rho$  è il campo di densità e  $\psi$  è il potenziale gravitazionale. Allo scopo di indagare le perturbazioni, si introduce un termine di velocità peculiare  $\mathbf{V} = \mathbf{v} - H\mathbf{r}$  in cui  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  con  $t$  tempo cosmico. A questo punto le equazioni precedenti possono essere riscritte sostituendo  $\mathbf{V}$ ,  $d\tau = dt/a(t)$  e  $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla \cdot [(1 + \delta)\mathbf{V}] = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \psi = 0 \quad (4.6)$$

$$\nabla^2 \psi - 4\pi G \rho a^2 \delta = 0 \quad (4.7)$$

Da queste si ottiene l'equazione per il campo di velocità, e per il contrasto di densità:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = aH \frac{f}{4\pi} \int \frac{\delta(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 \mathbf{x}', \quad (4.8)$$

$$\delta(\mathbf{x}) = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{V}}{aHf} \quad (4.9)$$

nelle quali  $f$  è il tasso di crescita definito nel capitolo 2. Considerando l'equazione (4.1), lo spettro di potenza di velocità si definisce come:

$$P_V(k) = (aHf)^2 P(k) k^{-2} \quad (4.10)$$

dato che  $\mathbf{V}$  è un campo vettoriale, il suo spettro di potenza deve essere interpretato come lo spettro di potenza delle tre componenti, ognuna delle quali è una funzione scalare della posizione.

Per quanto riguarda lo spettro di potenza del momento  $P_p(k)$ , può essere dimostrato [54] che, dato il campo di momento  $\mathbf{p}$ , definito come:

$$\mathbf{p} \equiv (1 + \delta)\mathbf{V} \quad (4.11)$$

nel quale  $\delta$  è il contrasto di densità totale definito nel paragrafo 2.2 e  $\mathbf{V}$  è il campo di velocità peculiare, lo spettro sia dato dalla relazione:

$$P_p(k) \sim P_V(k) + P_{\delta V}(k) \quad (4.12)$$

in cui  $P_{\delta V}$  è lo spettro di potenza del campo  $\delta V$ .

In questa analisi lo spettro di potenza della velocità e del momento sono stati calcolati per mezzo delle librerie PYLIANS (PYthon LIBraries for the Analysis of Numerical Simulations)<sup>4</sup>, ovvero un insieme di librerie, scritte nei linguaggi di programmazione Python, cython e C, il cui scopo è quello di facilitare l'analisi delle simulazioni numeriche. Per il calcolo degli spettri di potenza sono stati creati due *script* e si è proceduto nel seguente modo.

Per primo sono stati dichiarati i tipi di particelle considerati, ovvero materia barionica e materia oscura. Successivamente, servendosi della libreria `readgadget` sono stati letti dallo *snapshot* la dimensione del volume della simulazione, le posizioni e le velocità delle particelle. Per provvedere al calcolo dello spettro di velocità, sono state costruite tre griglie servendosi della *routine*<sup>5</sup> `MASL.MA` e ad ogni griglia è stata associata una componente del vettore velocità delle particelle. La *routine* `MASL.MA` crea il campo di densità e richiede come *input*, la posizione delle particelle, un campo "delta" definito come un *array* 3D con grandezza variabile, la dimensione del volume e il parametro `MAS`. Quest'ultimo determina la modalità con cui viene assegnata la massa della particella alla griglia, in questo caso è stato utilizzato il metodo *CIC* (*Cloud-in-Cell*), il quale assegna la massa di una particella alle 8 celle più vicine alla particella considerata, in proporzione

<sup>4</sup><https://pylians3.readthedocs.io/en/master/>

<sup>5</sup>Per *routine* si intende un insieme di istruzioni invocabile più volte da qualsiasi punto del programma, essa può ricevere dei parametri in *input* e fornire un *output*.

alla frazione di volume che una cella, di uguale dimensione, centrata sulla particella stessa condivide con ciascuna di esse. Dopodiché è stato calcolato lo spettro di potenza di velocità con il metodo `PKL.Pk.theta`. Questo metodo richiede come *input* le tre griglie della velocità precedentemente citate, la dimensione del volume della simulazione, un parametro `axis` che indica l'asse lungo il quale si collocano le distorsioni spaziali del *redshift* (in questo caso inizializzato a zero) e il parametro `MAS`. Gli *output* del metodo `PKL.Pk.theta` sono: lo spettro di potenza di velocità in funzione del numero d'onda e il numero di modi di Fourier indipendenti corrispondenti a quel valore di numero d'onda. Per il calcolo dello spettro di potenza del momento, oltre alle tre griglie per la velocità, è stata creata, sempre servendosi di `MASL.MA`, una griglia a cui sono stati assegnati i valori di massa delle particelle e che rappresenta la densità di massa di queste. Infine è stato calcolato lo spettro di potenza del momento utilizzando il metodo `PKL.XPk.dv`. Questo metodo richiede come *input* tutti gli argomenti di `PKL.Pk.theta` e, in aggiunta, la griglia di densità di materia precedentemente citata. Come *output* restituisce, il numero di modi di Fourier indipendenti corrispondenti al valore di numero d'onda e diversi spettri di potenza del momento in funzione del numero d'onda quali: lo spettro di potenza standard considerato in questa analisi, il *momentum auto-power spectrum* e il *density-momentum cross-power spectrum*.<sup>6</sup>

Tutte le griglie menzionate sono state dichiarate di dimensione "1024", al fine di avere un valore ragionevole in relazione alla risoluzione della simulazione.

Gli spettri di potenza di velocità e di momento sono stati calcolati per il modello  $\Lambda$ CDM e per le tre varianti del modello CIDER con costante di accoppiamento:  $\beta = 0.03$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$  ai valori di *redshift*:  $z = 0$ ,  $z = 0.55$ ,  $z = 1$ ,  $z = 1.6$ .

### 4.3 Risultati

Gli spettri di potenza di velocità e momento, in funzione del numero d'onda, sono stati organizzati nelle seguenti figure. Per tutti e quattro i valori di *redshift* considerati sono stati realizzati due grafici, uno per  $P_V(k)$  e uno per  $P_p(k)$ , nei quali sono raffigurati gli andamenti dei rispettivi spettri per i quattro modelli considerati ( $\Lambda$ CDM,  $\beta = 0.03$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$ ). In ogni figura è anche presente un sotto-grafico in cui è rappresentato il rapporto tra lo spettro di potenza dei diversi modelli CIDER considerati e lo spettro di potenza del modello  $\Lambda$ CDM. Tutti i grafici sono stati realizzati impostando una scala logaritmica su entrambi gli assi.

Dai grafici dello spettro di potenza di velocità in funzione del numero d'onda, presentati nelle figure 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, si può notare che l'andamento dello spettro di potenza di velocità, per tutti i *redshift*, subisce una soppressione direttamente proporzionale alla costante di accoppiamento  $\beta$ . Inoltre si può notare che all'aumentare del *redshift* si verifica una diminuzione di questa soppressione. In particolare, nel regime lineare, si possono

<sup>6</sup>Per una descrizione più dettagliata degli ultimi due si rimanda alle librerie PYLIANS.

estrapolare le seguenti quantità. A  $z = 0.00$ : per  $\beta = 0.03$  si nota una soppressione del 10%, per  $\beta = 0.05$  del 22% e per  $\beta = 0.08$  del 50%; a  $z = 0.55$  le soppressioni sono circa le medesime tranne quella per  $\beta = 0.08$  che diminuisce ad un 45% circa. A  $z = 1.00$ : per  $\beta = 0.03$  è evidente una soppressione del 5%, per  $\beta = 0.05$  del 18% e per  $\beta = 0.08$  del 40%. A  $z = 1.60$ : per  $\beta = 0.03$  si ha una soppressione del 5%, per  $\beta = 0.05$  del 10% e per  $\beta = 0.08$  del 22%. Per il regime non lineare invece si raggiungono i seguenti valori di soppressione. A  $z = 0.00$ : per  $\beta = 0.03$  si raggiunge una soppressione del 20%, per  $\beta = 0.05$  del 40% e per  $\beta = 0.08$  del 75%. A  $z = 0.55$  ed a  $z = 1.00$  si raggiungono gli stessi valori massimi di soppressione raggiunti a  $z = 0.00$ , tranne che per  $\beta = 0.08$ , per il quale raggiunge una soppressione del 30%. A  $z = 1.60$ : per  $\beta = 0.03$  si arriva ad una soppressione del 15%, per  $\beta = 0.05$  del 40% e per  $\beta = 0.08$  del 60%

Considerazioni analoghe possono essere fatte per lo spettro di potenza di momento, per il quale si può notare una soppressione direttamente proporzionale alla costante di accoppiamento  $\beta$ , per tutti i *redshift* considerati. Anche in questo caso la soppressione diminuisce all'aumentare del *redshift*. In particolare per il regime lineare si ottengono i seguenti valori. A  $z = 0.00$  e  $z = 0.55$ : per  $\beta = 0.03$  emerge una soppressione del 8%, per  $\beta = 0.05$  del 18% e per  $\beta = 0.08$  del 37%. A  $z = 1.00$  e a  $z = 1.60$ : per  $\beta = 0.03$  si nota una soppressione del 5%, per  $\beta = 0.05$  del 15% e per  $\beta = 0.08$  del 30%. Nel regime non lineare si ottengono i seguenti valori massimi di soppressione. Per tutti i valori di *redshift*, per  $\beta = 0.03$  si ottiene una soppressione massima circa del 10%. A  $z = 0.00$ : per  $\beta = 0.05$  si raggiunge una soppressione del 30% e per  $\beta = 0.08$  del 57%. A  $z = 0.55$ : per  $\beta = 0.05$  si raggiunge una soppressione del 27% e per  $\beta = 0.08$  del 52%. A  $z = 1.00$  e  $z = 1.60$ :  $\beta = 0.05$  si ha una soppressione massima del 25% e per  $\beta = 0.08$  del 50%.

Tra i due spettri considerati emergono due differenze: la prima riguarda l'entità della soppressione e la seconda riguarda il loro andamento al diminuire del numero d'onda  $k$ . In merito alla prima, dai grafici si può notare che lo spettro di potenza di velocità  $P_V(k)$ , all'aumentare della costante di accoppiamento  $\beta$ , subisce una soppressione maggiore rispetto allo spettro di potenza di momento  $P_p(k)$ . Per quanto riguarda la seconda, si può affermare che, all'aumentare di  $k$ , lo spettro  $P_V(k)$  risale in modo evidente, al contrario di  $P_p(k)$ , per il quale non si nota alcuna risalita. Tale fenomeno è dovuto al fatto che, per via della dipendenza del momento  $p$  dal contrasto di densità  $\delta$ , lo spettro  $P_p(k)$ , segue in modo abbastanza fedele l'andamento qualitativo dello spettro di potenza di materia, il quale, come mostrato in [48], ha una pendenza negativa e priva di una risalita. Per lo spettro  $P_V(k)$ , questo vincolo non si pone e dunque, in un regime lineare segue, indicativamente lo spettro  $P_p(k)$ , ma in un regime non lineare, all'aumentare di  $k$ , esso aumenta rapidamente. Questo dimostra che, nel regime non lineare, le perturbazioni di velocità hanno una maggiore potenza rispetto a quelle di densità e di momento. Questi risultati, nel regime lineare, sono in accordo con quanto atteso poiché dall'equazione (4.10) emerge la dipendenza di  $P_V(k)$  da:  $P(k)$ , spettro di potenza di densità e  $f$ , tasso di crescita. Dalla dipendenza da  $P(k)$ , ci si aspetta che lo spettro di potenza di velocità subisca la soppressione, proporzionale alla costante di accoppiamento  $\beta$ , rilevata. Tale

soppressione è anche attesa per via della dipendenza da  $f$ , che, come mostrato in figura 2.2, presenta valori minori all'aumentare di  $\beta$ . Inoltre si può anche sottolineare che la differenza tra la soppressione di  $P_V(k)$  e  $P_p(k)$ , è giustificata dal fatto che  $P_p(k)$ , come si può notare dall'equazione (4.12), presenta un contributo derivante da  $P_{\delta V}(k)$ , che compensa tale soppressione.

Considerando i sotto-grafici presenti nelle figure 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, nei quali sono stati rappresentati gli andamenti dei vari spettri dei modelli con accoppiamento ( $\beta = 0.03$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$ ) in rapporto a quello del modello  $\Lambda$ CDM, si può notare un effetto analogo a quello emergente dallo studio dello spettro di potenza di densità, presentato nel paragrafo 4.1. Infatti, per tutti i valori di *redshift* considerati si verifica che, per i valori  $k < 0.1 \text{ hMpc}^{-1}$ , ovvero su grandi scale, sia lo spettro di potenza di velocità, sia quello di momento, subiscono una soppressione costante, proporzionale alla costante di accoppiamento  $\beta$  e indipendente dal valore di  $k$ . Per i valori  $k > 0.1 \text{ hMpc}^{-1}$ , ovvero su piccole scale, si ottiene un'ulteriore soppressione, sempre proporzionale a  $\beta$ , ma dipendente da  $k$ , dovuta al termine di *extra friction* che emerge dall'equazione (2.31), il quale contrasta il collasso gravitazionale delle strutture. Tale risultato è in accordo, nel regime lineare, con quello atteso poiché dall'equazione (4.10) emerge la dipendenza di  $P_V(k)$  da  $P(k)$  e, dunque, è ragionevole che i due abbiano un comportamento simile in funzione del numero d'onda. Per lo spettro di potenza del momento può essere fatto un ragionamento analogo, infatti, dall'equazione (4.12) emerge la dipendenza di  $P_p(k)$  da  $P_V(k)$  e dunque da  $P(k)$ . Per questo motivo anche per  $P_p(k)$ , si attende il comportamento simile a quello di  $P(k)$ , che emerge dai sotto-grafici. Per quanto riguarda il regime non lineare, anche in questo i risultati sono in accordo con quelli attesi poiché dai sotto-grafici emerge lo stesso andamento presentato in [1].

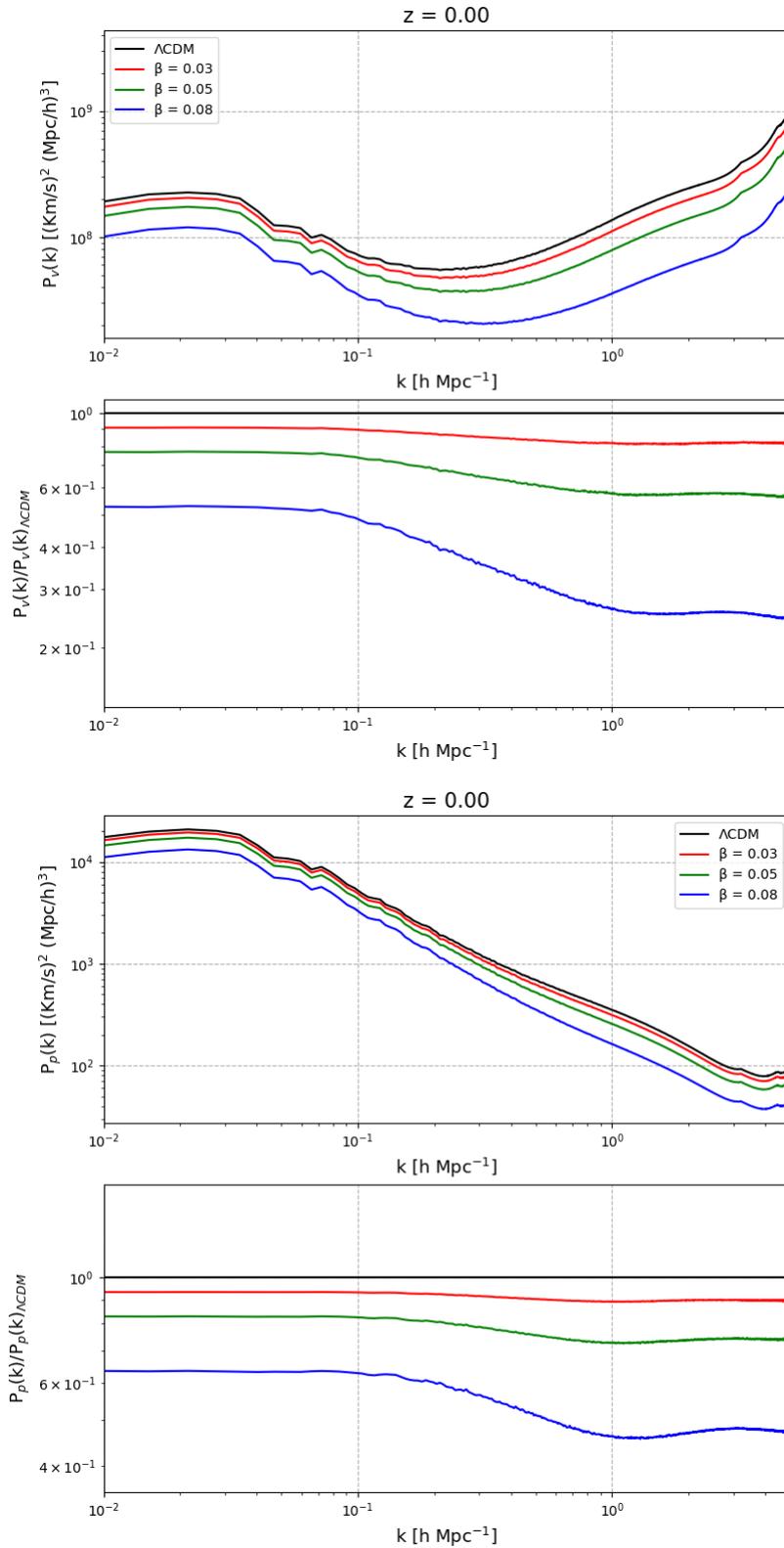


Figura 4.2: A  $z = 0.00$ . Nel primo e terzo riquadro sono rappresentati rispettivamente lo spettro di potenza di velocità e momento, in funzione del numero d'onda, del modello  $\Lambda\text{CDM}$  (nero), e del modello CIDER per i valori di accoppiamento  $\beta = 0.03$  (rosso),  $\beta = 0.05$  (verde),  $\beta = 0.08$  (blu). Nel secondo e quarto riquadro sono rappresentati i rapporti degli spettri rispetto a quello del modello  $\Lambda\text{CDM}$ . Tutti gli assi hanno una scala logaritmica.

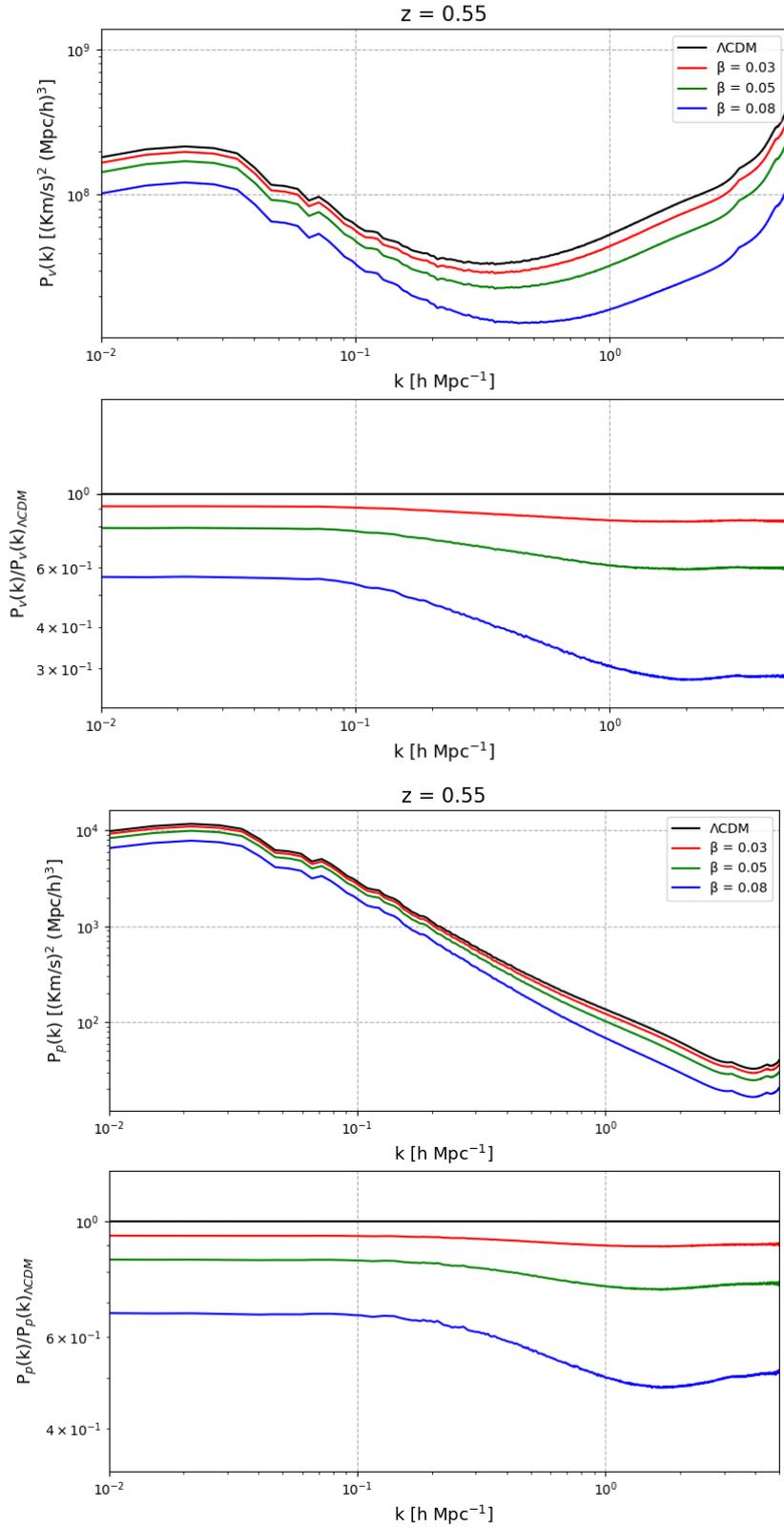


Figura 4.3: A  $z = 0.55$ . Nel primo e terzo riquadro sono rappresentati rispettivamente lo spettro di potenza di velocità e momento, in funzione del numero d'onda, del modello  $\Lambda\text{CDM}$  (nero), e del modello CIDER per i valori di accoppiamento  $\beta = 0.03$  (rosso),  $\beta = 0.05$  (verde),  $\beta = 0.08$  (blu). Nel secondo e quarto riquadro sono rappresentati i rapporti degli spettri rispetto a quello del modello  $\Lambda\text{CDM}$ . Tutti gli assi hanno una scala logaritmica.

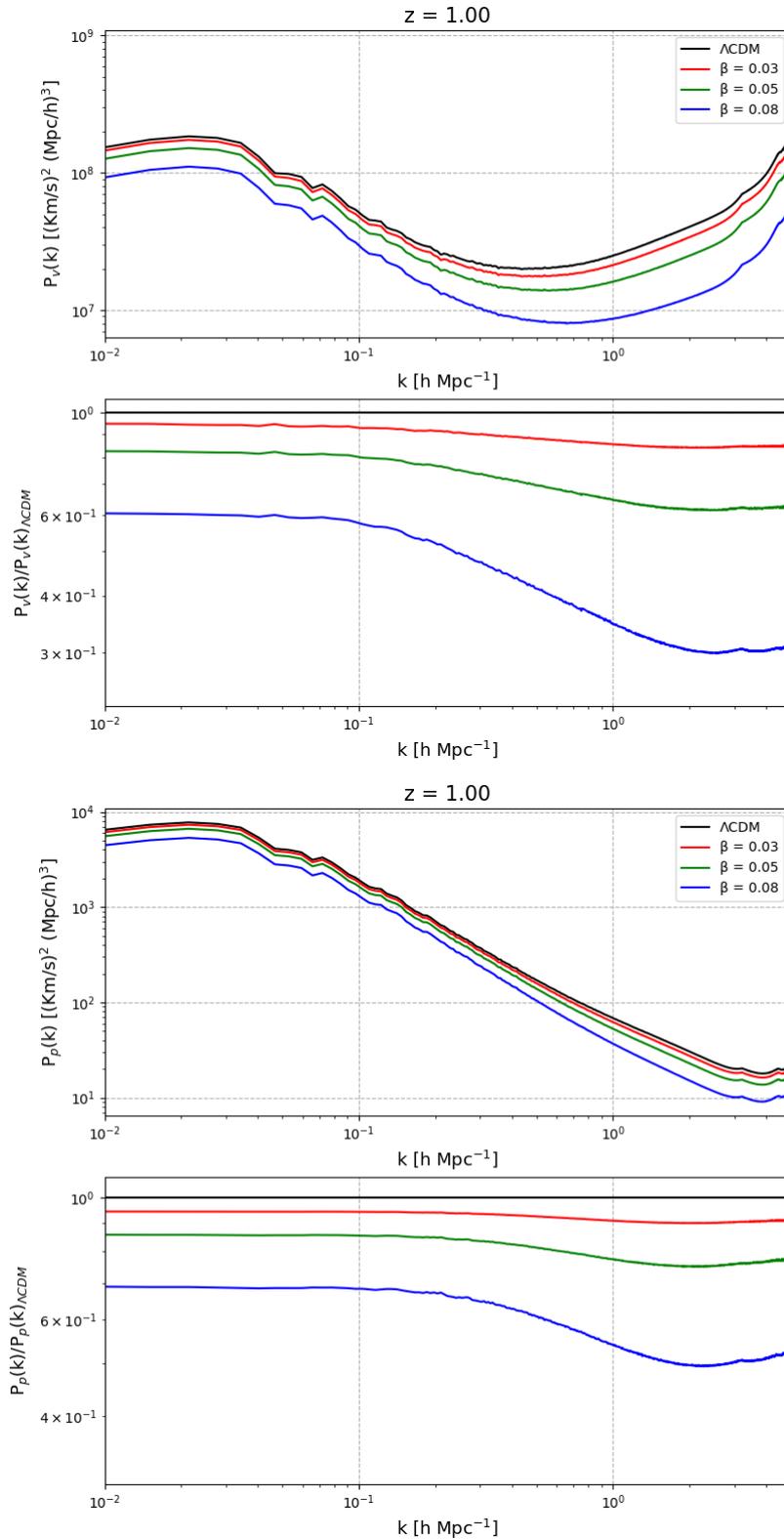


Figura 4.4: A  $z = 1.00$ . Nel primo e terzo riquadro sono rappresentati rispettivamente lo spettro di potenza di velocità e momento, in funzione del numero d'onda, del modello  $\Lambda$ CDM (nero), e del modello CIDER per i valori di accoppiamento  $\beta = 0.03$  (rosso),  $\beta = 0.05$  (verde),  $\beta = 0.08$  (blu). Nel secondo e quarto riquadro sono rappresentati i rapporti degli spettri rispetto a quello del modello  $\Lambda$ CDM. Tutti gli assi hanno una scala logaritmica.

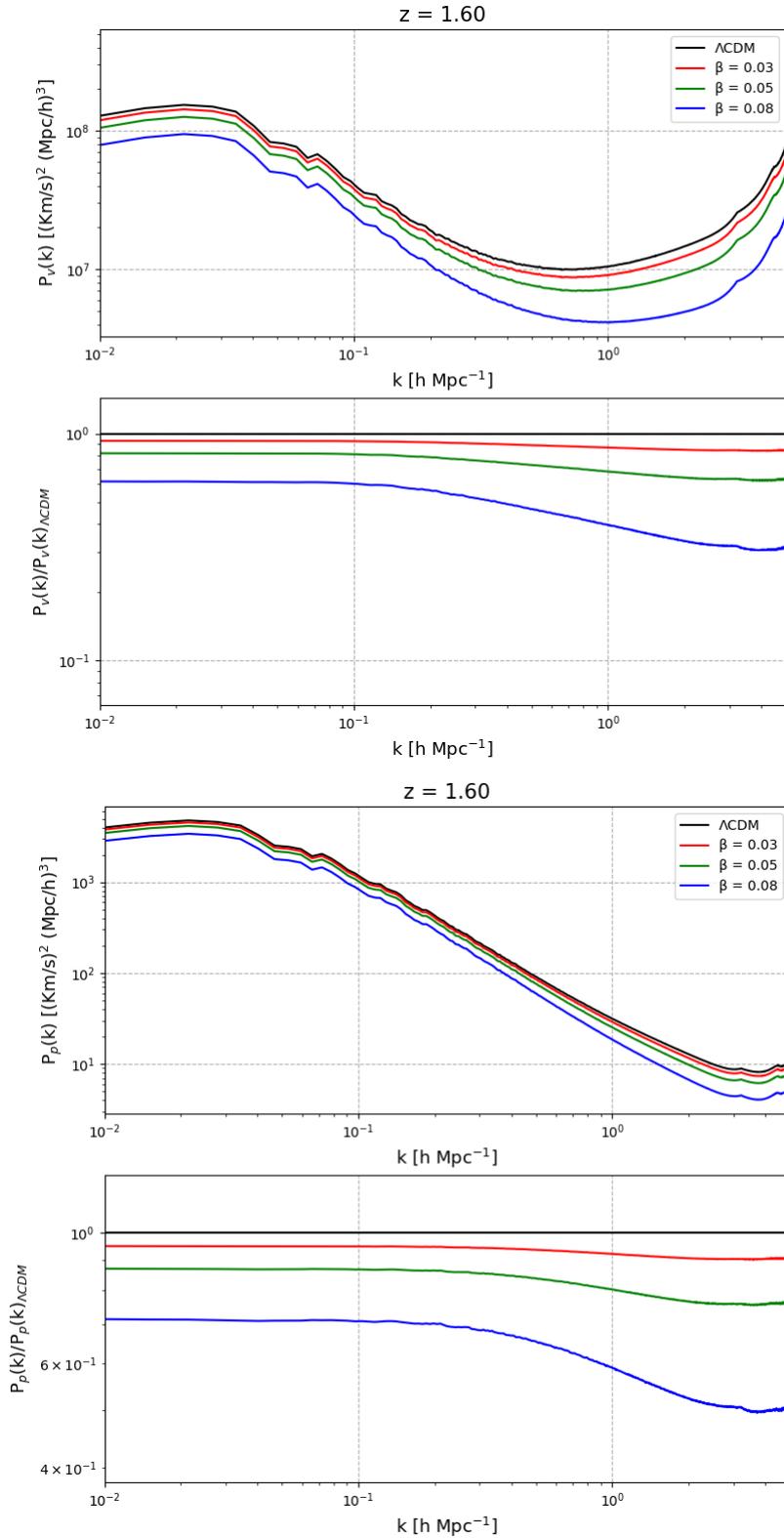


Figura 4.5: A  $z = 1.60$ . Nel primo e terzo riquadro sono rappresentati rispettivamente lo spettro di potenza di velocità e momento, in funzione del numero d'onda, del modello  $\Lambda$ CDM (nero), e del modello CIDER per i valori di accoppiamento  $\beta = 0.03$  (rosso),  $\beta = 0.05$  (verde),  $\beta = 0.08$  (blu). Nel secondo e quarto riquadro sono rappresentati i rapporti degli spettri rispetto a quello del modello  $\Lambda$ CDM. Tutti gli assi hanno una scala logaritmica.

# Capitolo 5

## Conclusioni

In questo elaborato è stato presentato il modello cosmologico di Energia Oscura interagente CIDER (*Constrained Interacting Dark Energy*), presentato la prima volta in [25] e successivamente studiato in [1]. Tale modello è realizzato in modo tale da avere una cosmologia di *background* che, per costruzione, è indistinguibile dal modello standard  $\Lambda$ CDM e differisce da questo solo a livello perturbativo. Come per tutti i modelli di Quintessenza, il modello CIDER interpreta l'Energia Oscura come un campo scalare  $\phi$  a cui è associato il potenziale  $V(\phi)$ ; a differenza degli altri modelli di Quintessenza, questo potenziale legato al campo scalare  $\phi$  è determinato a posteriori e non a priori, imponendo che l'espansione cosmica abbia esattamente lo stesso andamento che si ha nel modello standard  $\Lambda$ CDM. Il modello CIDER, inoltre, presenta un accoppiamento costante tra il campo scalare di Energia Oscura  $\phi$  e la componente di materia oscura; più precisamente, in questa analisi vengono considerati i valori di accoppiamento  $\beta = 0.03$ ,  $\beta = 0.05$ ,  $\beta = 0.08$ . Gli effetti di questo accoppiamento sono l'introduzione di una nuova forza, chiamata quinta forza, mediata dal campo scalare di Energia Oscura e un termine detto di *extra friction* che causa un'accelerazione aggiuntiva nella stessa direzione della velocità delle particelle di materia oscura.

In questa analisi, servendosi delle librerie pubbliche Pylians3, sono stati calcolati dagli *snapshot* delle simulazioni cosmologiche del modello CIDER, lo spettro di potenza di velocità e lo spettro di potenza di momento, in funzione del numero d'onda. Nello specifico sono stati studiati i loro andamenti per i diversi valori di accoppiamento  $\beta$ , precedentemente citati, a diversi valori di *redshift*  $z = 0.00, z = 0.55, z = 1.00, z = 1.60$ .

Dall'analisi condotta è emerso che sia lo spettro di potenza di velocità, che lo spettro di potenza del momento, all'aumentare del valore di accoppiamento subiscono una soppressione. Tale soppressione risulta maggiore per lo spettro di potenza di velocità.

Si può anche notare che la soppressione aumenta per entrambi gli spettri, per tutti i valori di accoppiamento, al diminuire del *redshift*.

Inoltre si è potuto riscontrare che nel regime non lineare lo spettro di potenza di velocità presenta una ripida risalita che lo spettro di potenza del momento non presenta.

Dai grafici dei rapporti degli spettri di potenza del modello CIDER per i suoi accoppiamenti, rispetto a quelli del modello  $\Lambda$ CDM, è stato riscontrato che la soppressione degli andamenti, oltre ad essere proporzionale a  $\beta$ , risulta: costante ed indipendente da  $k$ , per il regime lineare, ovvero per  $k < 0.1 \text{ hMpc}^{-1}$ , dipendente da  $k$  e più accentuata, per il regime non lineare, ovvero per  $k > 0.1 \text{ hMpc}^{-1}$ . L'ulteriore soppressione nel regime non lineare è dovuta al termine di *extra friction*, che si oppone al collasso gravitazionale delle strutture, dovuto all'accoppiamento tra il campo scalare di Energia Oscura e la materia oscura.

In seguito a questi risultati è possibile affermare che il modello CIDER presenta una soppressione dello spettro di potenza di velocità, momento e materia (mostrato in [1]), ne consegue una soppressione delle perturbazioni di velocità, momento e materia e dunque della formazione delle strutture cosmiche. Per questa ragione tale modello di Energia Oscura Interagente può rappresentare un modo per alleviare la tensione sul parametro  $\sigma_8$ , come sostenuto in [1].

L'analisi condotta in questo elaborato può essere potenzialmente ampliata nel contesto del modello CIDER in vari modi. Essendo presenti altri 21 *snapshot* a *redshift* differenti, è possibile integrare il lavoro presentato con tali *redshift* qui non considerati, oppure può essere integrata aumentando il numero dei valori di accoppiamento  $\beta$ .

Avendo condotto l'analisi su un modello con accoppiamento costante, è possibile estendere la stessa a modelli di Quintessenza con accoppiamento variabile, per poterla confrontare con il modello CIDER e al fine di migliorare l'accordo tra previsioni teoriche e dati sperimentali. Si confida che alla riduzione di tali incongruenze concorrano anche lo sviluppo delle tecnologie per l'osservazione, l'aumento della potenza di calcolo dei super computer e la creazione di algoritmi sempre più efficienti, in modo tale da rendere disponibili simulazioni cosmologiche più sofisticate.

# Appendice A

Per definire il parametro  $\sigma_8$  si procede nel seguente modo.

Si consideri un volume  $V$ , si consideri  $\rho(\mathbf{x})$  la densità in un punto identificato dal vettore posizione  $\mathbf{x}$  e sia  $\langle \rho \rangle$  la densità media nel volume  $V$ .

Il contrasto di densità può essere definito come:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{[\rho(\mathbf{x}) - \langle \rho \rangle]}{\langle \rho \rangle} \quad (\text{A.1})$$

e può anche essere espresso attraverso le serie di Fourier prendendo la forma:

$$\delta(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (\text{A.2})$$

dove  $\mathbf{k}$  è il numero d'onda.

I coefficienti di Fourier  $\delta_{\mathbf{k}}$  sono coefficienti complessi definiti:

$$\delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \int_V \delta(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{A.3})$$

E' possibile ora definire la varianza  $\sigma^2$  come:

$$\sigma^2 \equiv \langle \delta^2 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \delta_k^2 \quad (\text{A.4})$$

e, assumendo che si stia trattando di un campo di densità omogeneo ed isotropo, si può affermare che non ci sia dipendenza dalla direzione di  $\mathbf{k}$  ma solo dal suo modulo  $k = |\mathbf{k}|$  e, nel limite in cui  $V$  tende ad infinito, si ottiene:

$$\sigma^2 = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \delta_k^2 \rightarrow \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk \quad (\text{A.5})$$

nella quale è stato posto  $\delta_k^2 = P(k)$ . La quantità  $P(k)$  è detta funzione di densità spettrale di potenza del campo  $\delta$  o, più sinteticamente, spettro di potenza.

A questo punto si ha la grandezza  $\sigma^2$  che fornisce l'ampiezza delle perturbazioni e può essere utilizzata per lo studio dell'accrescimento delle strutture. In particolare è possibile studiare determinate regioni dell'Universo andando ad inserire delle funzioni selezionatrici  $F(\mathbf{x}, R)$ , con trasformata di Fourier  $\tilde{F}(\mathbf{x}, R)$ , che si annullano al di fuori della regione considerata e per le quali vale:

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) \tilde{F}(\mathbf{x}, R) k^2 dk \quad (\text{A.6})$$

In cosmologia, in genere, si considera la regione sferica di raggio 8 Mpc, e dunque  $\sigma_8$  si definisce come la radice quadrata della varianza dell'ampiezza delle perturbazioni di densità nella sfera di raggio  $R = 8Mpc$ . [6]

# Bibliografia

- [1] Marco Baldi. The cider simulations: Nonlinear structure formation in the constrained interacting dark energy scenario. *Classical and Quantum Gravity*, 2022.
- [2] A. Einstein. On the general theory of relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, pages 778–786, 1915.
- [3] V. M. Slipher. The Lowell Observatory. , 39(228):143, April 1927.
- [4] Edwin Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15(3):168–173, March 1929.
- [5] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. , 142:419–421, July 1965.
- [6] Francesco Lucchin Peter Coles. *Cosmology. The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. Jhon Wiley Sons,Ltd, UK, 2 edition, 2015.
- [7] Andrew Liddle. *An introduction to modern cosmology*. Jhon Wiley Sons,Ltd, UK, 3 edition, 2015.
- [8] Planck Collaboration. iplanck/i2018 results. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, sep 2020.
- [9] G. Hinshaw et al. Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap\*) observations: Temperature analysis. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 170(2):288, jun 2007.
- [10] Rafael C Nunes, Santosh K Yadav, J F Jesus, and Armando Bernui. Cosmological parameter analyses using transversal BAO data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 497(2):2133–2141, jul 2020.
- [11] F. Zwicky. Nebulae as gravitational lenses. *Phys. Rev.*, 51:290–290, Feb 1937.

- [12] Joseph Silk Gianfranco Bertone, Dan Hooper. Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints. *Phys.Rept.*405:279-390,2005, 2004.
- [13] Alexander Viznyuk and Yuri Shtanov. Spherically symmetric problem on the brane and galactic rotation curves. *Physical Review D*, 76(6), sep 2007.
- [14] L. Bergström. Dark matter evidence, particle physics candidates and detection methods. *Annalen der Physik*, 524(9-10):479–496, aug 2012.
- [15] S. Perlmutter et al. Measurements of  $\{upOmega$  and  $\{upLambda$  from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565–586, jun 1999.
- [16] Adam G. Riess at al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, sep 1998.
- [17] Brian P. Schmidt et al. *The Astrophysical Journal*, 507(1):46, nov 1998.
- [18] Luca Amendola and Miguel Quartin. Measuring the hubble function with standard candle clustering. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 504(3):3884–3889, mar 2021.
- [19] Yun Wang. Observational probes of dark energy. In *AIP Conference Proceedings*. AIP, 2012.
- [20] Albert Einstein. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )*, 1917:142–152, 1917.
- [21] José Carlos N. de Araujo. The dark energy–dominated universe. *Astroparticle Physics*, 23(2):279–286, mar 2005.
- [22] Varun Sahni. The cosmological constant problem and quintessence. *Classical and Quantum Gravity*, 19(13):3435–3448, jun 2002.
- [23] Adam G. Riess. The expansion of the universe is faster than expected.
- [24] Marco Baldi. Dark energy simulations, 2012.
- [25] Bruno J. Barros, Luca Amendola, Tiago Barreiro, and Nelson J. Nunes. Coupled quintessence with a  $\{upLambda$ CDM background: removing the sub8/sub tension. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(01):007–007, jan 2019.
- [26] Luca Amendola. Coupled quintessence. *Physical Review D*, 62(4), jul 2000.
- [27] Valerio Faraoni. The correspondence between a scalar field and an effective perfect fluid. 2012.

- [28] Ph. Brax and J. Martin. Quintessence and supergravity. *Physics Letters B*, 468(1-2):40–45, nov 1999.
- [29] I. A. Strukov, A. A. Brukhanov, D. P. Skulachev, and M. V. Sazhin. The Relikt-1 experiment – new results. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 258(1):37P–40P, 09 1992.
- [30] George F Smoot, Charles L Bennett, A Kogut, EL Wright, J Aymon, NW Boggess, ES Cheng, G De Amici, S Gulkis, MG Hauser, et al. Structure in the coBE differential microwave radiometer first-year maps. *Astrophysical Journal, Part 2-Letters (ISSN 0004-637X)*, vol. 396, no. 1, Sept. 1, 1992, p. L1-L5. Research supported by NASA., 396:L1–L5, 1992.
- [31] J. Silk G. Efstathiou. The formation of galaxies. *Cosmic Physics*, 9:1–138, 1983.
- [32] Imanol Albarran, Mariam Bouhmadi-López, and João Morais. Cosmological perturbations in an effective and genuinely phantom dark energy universe. *Physics of the Dark Universe*, 16:94–108, jun 2017.
- [33] Philip Bull. EXTENDING COSMOLOGICAL TESTS OF GENERAL RELATIVITY WITH THE SQUARE KILOMETRE ARRAY. *The Astrophysical Journal*, 817(1):26, jan 2016.
- [34] E. Macaulay, I. K. Wehus, and H. K. Eriksen. Lower growth rate from recent redshift space distortion measurements than expected from planck. *Physical Review Letters*, 111(16), oct 2013.
- [35] Federico Marulli, Alfonso Veropalumbo, Jorge Enrique García-Farieta, Michele Moresco, Lauro Moscardini, and Andrea Cimatti. C3 cluster clustering cosmology i. new constraints on the cosmic growth rate at  $z \approx 0.3$  from redshift-space clustering anisotropies. *The Astrophysical Journal*, 920(1):13, oct 2021.
- [36] Alexander Knebe. How to simulate the universe in a computer.
- [37] Sutherland-Loveday Maddox, Efstathiou. Galaxy correlations on large scales. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 242?, 1990.
- [38] G. Efstathiou, W. J. Sutherland, and S. J. Maddox. The cosmological constant and cold dark matter. , 348(6303):705–707, December 1990.
- [39] Michael Kuhlen, Mark Vogelsberger, and Raul Angulo. Numerical simulations of the dark universe: State of the art and the next decade, 2012.
- [40] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D. M. White. The Structure of Cold Dark Matter Halos. , 462:563, May 1996.

- [41] Ben Moore, Sebastiano Ghigna, Fabio Governato, George Lake, Thomas Quinn, Joachim Stadel, and Paolo Tozzi. Dark matter substructure within galactic halos. *The Astrophysical Journal*, 524(1):L19–L22, oct 1999.
- [42] R. E. Angulo, V. Springel, S. D. M. White, A. Jenkins, C. M. Baugh, and C. S. Frenk. Scaling relations for galaxy clusters in the millennium-XXL simulation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 426(3):2046–2062, oct 2012.
- [43] Alexander Knebe, Andrew Green, and James Binney. Multi-level adaptive particle mesh (MLAPM): a c code for cosmological simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 325(2):845–864, 08 2001.
- [44] R. Teyssier. Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement. *Astronomy & Astrophysics*, 385(1):337–364, apr 2002.
- [45] Volker Springel. The cosmological simulation code gadget-2. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 364:1105–1134, 2005.
- [46] A.V. Macciò, C. Quercellini, R. Mainini, L. Amendola, and S.A. Bonometto. Coupled dark energy: Parameter constraints from n-body simulations. *Phys. Rev. D*, 69:123516, Jun 2004.
- [47] G. Robbers V. Springel M. Baldi, V. Pettorino. Hydrodynamical n-body simulations of coupled dark energy cosmologies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 409:1684–1702, April 2010.
- [48] Marco Baldi. Time-dependent couplings in the dark sector: from background evolution to non-linear structure formation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 411(2):1077–1103, 02 2011.
- [49] Marco Baldi. The codecs project: a publicly available suite of cosmological n-body simulations for interacting dark energy models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 422:1028–1044, 2012.
- [50] William H. Press and Paul Schechter. Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. , 187:425–438, February 1974.
- [51] Antony Lewis, Anthony Challinor, and Anthony Lasenby. Efficient computation of cosmic microwave background anisotropies in closed friedmann-robertson-walker models. *The Astrophysical Journal*, 538(2):473–476, aug 2000.
- [52] Ryuichi Takahashi, Masanori Sato, Takahiro Nishimichi, Atsushi Taruya, and Masamune Oguri. Revising the halofit model for the nonlinear matter power spectrum. *The Astrophysical Journal*, 761(2):152, dec 2012.

- [53] R. E. Smith, J. A. Peacock, A. Jenkins, S. D. M. White, C. S. Frenk, F. R. Pearce, P. A. Thomas, G. Efstathiou, and H. M. P. Couchman. Stable clustering, the halo model and non-linear cosmological power spectra. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 341(4):1311–1332, 06 2003.
- [54] Chan-Gyung Park and Changbom Park. Power spectrum of cosmic momentum field measured from the SFI galaxy sample. *The Astrophysical Journal*, 637(1):1–11, jan 2006.

# Ringraziamenti

Un doveroso ringraziamento deve essere fatto al professore Marco Baldi, per la sua infinita pazienza e per aver sempre trovato il tempo per aiutarmi e correggermi.

Ringrazio il gruppo dei Vettori Spuri, con i quali ho condiviso lezioni, laboratori, pranzi, esami, cene, ore di studio e birre. Grazie per tutto l'aiuto che mi avete dato e per non avermi fatta sentire sola.

Ringrazio le coinquiline che ho avuto in questi tre anni, con le quali mi sono divertita, e da ognuna delle quali ho imparato qualcosa.

Ringrazio mia nonna, per il suo supporto prima di ogni esame, i miei genitori e tutte le persone che in questi anni sono state più o meno coinvolte nel mio percorso.

Ringrazio Luca, per ogni cosa.