

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Introduzione al programma della decoerenza quantistica

Relatore:

Prof. Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:

Giacomo Micheli

Anno Accademico 2022/2023

Sommario

Il programma della decoerenza quantistica, introdotto per la prima volta da H. Dieter Zeh, si pone come alternativa all'interpretazione di Copenaghen nel tentativo di riconciliare il mondo della fisica quantistica con quello della fisica classica. Questo desiderio di riunificazione è pressoché vecchio quanto la teoria quantistica stessa. Da subito le proprietà peculiari del mondo microscopico si sono poste in forte contrasto con la nostra percezione del mondo che ci circonda; prima tra tutte (se non l'unica) è il principio di sovrapposizione che, se esteso al macroscopico, porta inevitabilmente a situazioni paradossali, come riassunto nel celebre esperimento mentale del gatto di Schrödinger. Per anni si è dunque pensato, ragionevolmente, che la discriminante tra un sistema quantistico e uno classico fosse la sua dimensione, che il quantistico stia al classico come il microscopico sta al macroscopico. Sebbene ci sia evidentemente della verità in questa interpretazione, l'approccio della decoerenza pone l'accento sulla distinzione tra sistemi aperti e chiusi. In questa relativamente nuova risposta al problema, l'interazione (e di conseguenza l'entanglement) del sistema con l'ambiente è l'agente che finisce per sopprimere il principio di sovrapposizione, facendo così emergere il mondo classico da quello quantistico. L'obiettivo di questo testo è introdurre il lettore al programma della decoerenza, fornendogli gli strumenti matematici e fisici necessari per poi passare a una trattazione efficace dell'argomento. Così facendo, si spera di dare la possibilità a nuove menti di approcciarsi e interessarsi a questo affascinante argomento, la cui popolarità sta crescendo di pari passo con lo sviluppo delle nuove tecnologie quantistiche.

Indice

Introduzione	4
1 Elementi di base	7
1.1 Stati puri e stati misti	7
1.2 Matrici di densità	9
1.3 Esempio: sistema a due stati	13
1.3.1 Esperimento di Stern-Gerlach	13
1.3.2 La sfera di Bloch	14
2 La decoerenza come effetto dell'interazione con l'ambiente	17
2.1 Lo studio di un sistema aperto	17
2.1.1 Matrici di densità ridotte e tracce parziali	19
2.1.2 Esempio: due qubit in entanglement	21
2.2 Entanglement tra sistema, apparato e ambiente	23
2.3 Esempio: decoerenza senza misura	26
3 Il problema della scelta della base	28
3.1 Le regole di superselezione	29
3.2 Esempio: chiralità	34
4 Studio della decoerenza nel tempo	37
4.1 Master equations	37
4.2 Processi di scattering	39
4.2.1 Localizzazione spaziale	40
4.2.2 Esempio: esperimento della doppia fenditura	43
4.3 Predictability sieve	46
4.3.1 Esempio: particella libera	48

Conclusione	52
Appendici	54
A: Dall'invarianza alla regola di Born	54
Bibliografia	63

Elenco delle figure

Figura 1	Sfera di Bloch. Immagine presa da [1]	15
Figura 2	Due possibili configurazioni di una semplice molecola chirale. Immagine presa da [2]	35
Figura 3	Potenziale associato alla molecola chirale al variare della coordinata z del nucleo 1 e corrispondenti ground state $ 1\rangle$ e stato eccitato $ 2\rangle$. Immagine presa da [2]	35
Figura 4	Rappresentazione in (x, x') di uno stato di sovrapposizione di due onde gaussiane prima (a) e dopo (b) l'intervento della decoerenza da parte dell'ambiente. I picchi non diagonali rappresentanti la coerenza tra i due stati vengono visibilmente soppressi. Immagine presa da [2] .	45
Figura 5	Andamento dell'entropia lineare per una particella libera in bagno termico. I parametri sono il tempo riscalato $\tau = t/m$ e l'ampiezza iniziale b del pacchetto d'onda. Si è posto $\Lambda m = 1$. Immagine presa da [2]	50
Figura 6	Integrale dell'entropia lineare sul tempo in funzione di b . Il minimo individua l'ampiezza ottimale b_{ott} . Immagine presa da [2]	51

Introduzione

Già dai primi albori della teoria quantistica, la sua riconciliazione con la realtà classica che ci circonda è stato uno dei problemi cardine al centro della discussione nella comunità scientifica. La linearità dell'equazione di Schrödinger, che governa l'evoluzione temporale dei sistemi quantistici, porta inevitabilmente all'emergere del noto principio di sovrapposizione: date due soluzioni dell'equazione, anche lo span delle loro combinazioni lineari (o sovrapposizioni, appunto) è necessariamente soluzione. Da un punto di vista fisico, questo porta a una serie di comportamenti peculiari del sistema in analisi; tra i più noti vi è l'osservazione di interferenza nell'esperimento della doppia fenditura anche qualora si mandino singole particelle. Tuttavia, la portata del principio di sovrapposizione è ben più ampia. Esso gioca un ruolo nella delocalizzazione delle particelle, nel loro spin, nei decadimenti nucleari, nella formazione degli orbitali molecolari, nelle recentemente confermate oscillazioni dei neutrini e persino nella nuova branca del quantum computing. Il problema risiede nel fatto che nessuna di queste sovrapposizioni sembra in grado di sopravvivere nella scala macroscopica: un oggetto si trova o in posto o in un altro, mai in una sovrapposizione dei due; il famoso gatto di Schrödinger sarà o vivo o morto quando apriremo la scatola. Per citare uno dei principali pionieri del programma della decoerenza, Wojciech H. Zurek, "Hilbert space is big". Deve esistere un qualche processo, derivante o parallelo all'evoluzione unitaria data dall'equazione di Schrödinger, che giustifichi l'apparentemente improvviso restringimento dello spazio in cui il sistema in analisi può evolversi. Un ruolo importante in questo senso sembra essere ricoperto dall'atto della misura. Si può osservare sperimentalmente come nell'esperimento di Young l'interferenza svanisca nel momento in cui si decida di misurare la traiettoria della particella attraverso una delle fenditure. Un effetto analogo si ha nell'esperimento di Stern-Gerlach, in cui lo spin di una particella, inizialmente in uno stato di sovrapposizione, sarà sempre misurato in una di due configurazioni opposte, ad esempio up o down. Questo fenomeno viene spesso appellato con l'espressione "problema della misura". Sembrerebbe che in qualche modo l'atto di misurare un sistema quantistico lo faccia passare inevitabilmente da uno stato di potenziale sovrapposizione a uno prettamente classico. Un primo tentativo di affrontare la questione ha portato a quella nota come interpretazione di Copenaghen. Secondo questo pensiero, alla ormai ben affermata equazione di Schrödinger andrebbe affiancato un secondo processo indipendente non unitario, un collasso della funzione d'onda che si verifichi qualora in sistema quantistico entri in contatto con il mondo classico. Si viene così a delineare un taglio (spesso

chiamato “Heisenberg cut”) tra la scala microscopica, governata dalla fisica quantistica, e quella macroscopica, di competenza della fisica classica. Secondo questa interpretazione, dunque, mondo quantistico e classico sono considerati equamente fondamentali da un punto di vista ontologico-gnoseologico: non vi può essere collasso della funzione d’onda senza una preesistente concezione di classicità. Per quanto l’interpretazione di Copenaghen sembri risolvere il problema che si era posta di affrontare, essa apre anche la via a nuove questioni non poco problematiche. Il primo punto debole risiede proprio nel collocamento del taglio. A quale scala si dovrebbe apporre il confine tra quantistica e classicità? Recenti esperimenti di interferometria hanno rivelato interferenza anche per molecole composte da centinaia di atomi. Se si considera l’apparato di misura come il punto di contatto del sistema in esame con il mondo classico, si potrebbe argomentare che un qualunque sistema, in quanto composto da particelle, abbia le potenzialità per esibire comportamenti quantistici, qualora si disponga della giusta strumentazione di misura. Spingendo questo ragionamento all’estremo, si potrebbe affermare che ultimamente lo strumento di misura definitivo sia la coscienza umana, ponendo il taglio di Heisenberg sulla soglia della mente. Tuttavia, basta una piccola variazione all’esperimento mentale del gatto di Schrödinger, nota come “Wigner’s friend” per sondare i limiti di questo approccio. Si immagini che ad aprire la scatola non siamo noi ma un nostro amico e che solo in un secondo momento questo ci riferisca lo stato del gatto. Quando è avvenuto il collasso? Quando l’amico ha aperto la scatola o quando ha parlato con noi? C’è forse stato un periodo in cui il gatto e l’amico erano in una condizione di entanglement? A tutto ciò si sommi che il collasso della funzione d’onda non deriva in alcun modo dall’evoluzione unitaria dei sistemi quantistici o da una qualunque altra legge preesistente; bensì, necessita di una nuova legge ad hoc. Inoltre, sia il regime quantistico che quello classico devono essere considerati come autonomi e indipendenti per giustificare il taglio. Per quanto queste assunzioni non siano intrinsecamente inaccettabili, finiscono per allontanarci da quella visione unificata della realtà a cui istintivamente tendiamo e che fino ad ora si è mostrata estremamente efficace, dalla prima fusione tra i reami terrestre e celeste sotto un’unica legge di gravità, alla più recente unificazione elettro-debole nell’ambito delle forze fondamentali. Il programma della decoerenza [3] [4] [5] sembra dare una nuova speranza alla comunità scientifica in questo senso, poiché si pone come obiettivo quello di far emergere il mondo classico da quello quantistico e per fare ciò si basa unicamente su un corretto utilizzo della legge di Schrödinger. L’argomentazione per questa nuova interpretazione comincia affermando come sia del tutto irrealistico trattare un sistema macroscopico, quale è ad esempio l’apparato di misura di un esperimento, come fosse isolato. Al contrario, è proprio la sua inevitabile interazione con l’ambiente circostante, unita alla conseguente perdita di informazione, a dare luogo al passaggio da quantistico a classico nella forma delle regole di superselezione. Con questo termine ci si riferisce al restringimento dello spazio di Hilbert accessibile al sistema in sottospazi stabili rispetto all’interazione con

l'ambiente. Nel programma della decoerenza, dunque, la distinzione tra sistemi quantistici e classici risiede ultimamente nel loro grado di interazione con l'ambiente; in linea di principio, anche un oggetto macroscopico potrebbe sviluppare comportamenti quantistici, se si fosse in grado di isolarlo dall'ambiente. Si noti come in questa interpretazione la coscienza abbia perso il suo ruolo di rilievo. Che l'interazione con l'ambiente sia parte di un vero e proprio atto di misura o meno non fa differenza ai fini della soppressione degli stati di sovrapposizione. Tuttavia, è importante sottolineare che il programma della decoerenza non è sufficiente a risolvere il problema della misura. Sebbene sia in grado di setacciare gli esiti classici, non è in grado di predire ultimamente quale finirà per verificarsi. Per supplire a questa ultima mancanza, se non si desidera ricorrere nuovamente a una qualche forma di collasso, è possibile appellarsi all'interpretazione di Everett, popolarizzata sotto il nome di "interpretazione dei molti mondi", secondo cui tutti gli esiti della misura si verificano in una qualche diramazione di un unico universo quantistico. Tuttavia, anche qualora esistessero, l'ortogonalità di questi rami renderebbe per definizione impossibile a un osservatore verificarne l'esistenza al di là di quello in cui abita. L'obiettivo di questa tesi è quello di introdurre il lettore al programma della decoerenza in modo esaustivo e accessibile. In particolare, nel Capitolo 1 si forniscono alcuni strumenti matematici e concetti fisici che torneranno poi utili nella trattazione; nel Capitolo 2 si fornisce una prima trattazione della decoerenza che ne spieghi i passaggi concettuali; nel Capitolo 3 si affronta l'importante problema della scelta delle basi e della definizione di uno stato classico; nel Capitolo 4 si studia l'evoluzione della decoerenza nel tempo con l'aiuto di appropriate master equations; si forniscono, infine, alcune considerazioni conclusive.

Capitolo 1

Elementi di base

1.1 Stati puri e stati misti

Si comincia introducendo alcuni concetti fisici e matematici che torneranno utili in seguito [6]. Nella notazione di Dirac si è soliti rappresentare lo stato di un sistema attraverso un vettore ket $|\psi\rangle$ nello spazio di Hilbert. Grazie al principio di sovrapposizione, è possibile scrivere un qualunque vettore come combinazione lineare di una qualche base. In questo capitolo ci concentreremo sul caso di base a indice discreto, per cui si ha

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (1.1)$$

ma è bene ricordare che ragionamenti analoghi valgono senza necessità di troppi cambiamenti anche per basi a indice continuo

$$|\psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle, \quad \psi(x) = \langle x|\psi\rangle \quad (1.2)$$

Stati di questo genere sono definiti puri. Ai fini della trattazione della decoerenza, è bene introdurre anche quelli che vengono definiti stati misti [7]. Questi rappresentano un ensemble statistico di vettori di stato $\{|\psi^{(j)}\rangle\}_j$ cui sono associate le rispettive probabilità $\{p^{(j)}\}_j$. L'utilizzo degli stati misti è particolarmente utile quando si sta agendo sotto una qualche forma di ignoranza, ad esempio quando non si è in grado di determinare con certezza lo stato di preparazione di un sistema all'inizio di un esperimento. Intuitivamente si potrebbe pensare che stati puri e misti siano semplicemente due notazioni equivalenti per descrivere una limitatez-

za nella conoscenza dello stato. In fondo, se si avesse la necessità di trattare un sistema con uguale probabilità di trovarsi nello stato $|a\rangle$ o nello stato $|b\rangle$, sarebbe sufficiente descriverlo come $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle)$. Questo ragionamento è in realtà sbagliato. L'unico modo corretto per descrivere un simile sistema è attraverso lo stato misto $\{|a\rangle, |b\rangle\}$. Per capire la differenza concettuale tra i due stati è importante comprendere che una sovrapposizione di stati non rappresenta un'incertezza sullo stato del sistema. Come veloce prova di ciò, basti pensare che con un appropriato cambio di base ogni stato puro può essere rappresentato sotto forma di combinazione lineare o meno. Una sovrapposizione di stati, dunque, per quanto linearmente dipendente dagli elementi della base, è a sua volta uno stato del tutto autonomo, che descrive una realtà fisica diversa da quella delle sue componenti.

Per convincersi ulteriormente della differenza tra stati puri e misti, si consideri un osservabile o associato all'operatore hermitiano \hat{O} e se ne calcoli il valore di aspettazione per i due stati distinti $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ e $\{|n\rangle\}_n, \{p^{(n)}\}_n$. Per lo stato puro si ha

$$\langle o_{\text{puro}} \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \sum_{n,m} c_n^* c_m \langle n | \hat{O} | m \rangle \quad (1.3)$$

Diversamente, per lo stato misto vale

$$\langle o_{\text{misto}} \rangle = \sum_n p^{(n)} o^{(n)} = \sum_n p^{(n)} \langle n | \hat{O} | n \rangle \quad (1.4)$$

dove si è semplicemente calcolata la media pesata tra i valori di aspettazione dell'osservabile $o^{(n)}$ per i vari elementi dell'ensemble. Si può notare come la prima sommatoria abbia molti più termini della seconda, in particolare tutti quelli per cui $n \neq m$. Questi sono detti termini di interferenza e rappresentano la coerenza tra i vari ket della base; sono loro i principali responsabili del diverso comportamento di un sistema quantistico rispetto a uno classico.

1.2 Matrici di densità

Ora che si è verificata la diversa natura di queste due tipologie di sistemi, è opportuno introdurre un nuovo strumento, più generale dei vettori ket, che sia in grado di rappresentarle entrambe. Lo strumento in questione è la matrice (o operatore) di densità ρ [8] [9], definita come

$$\rho = \sum_j p^{(j)} |\psi^{(j)}\rangle \langle \psi^{(j)}| \quad (1.5)$$

Si evince immediatamente dalla definizione che sia hermitiana. Nel caso specifico di stati puri si ha semplicemente $p^{(j)} = 1$ per $j = 1$ e 0 altrimenti, ottenendo

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (1.6)$$

Per facilitare la visualizzazione e l'interpretazione di questo nuovo formalismo, può essere utile passare alla notazione dei vettori complessi. Siano

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle n| = (0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0) \quad (1.7)$$

rispettivamente i vettori riga e colonna con sola componente n-esima non nulla. Allora la matrice di densità associata a uno stato puro $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ sarà

$$\rho = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* & \dots \\ c_2 c_1^* & |c_2|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

mentre quella per uno stato misto $\{|n\rangle\}_n$ con probabilità $\{p^{(n)}\}_n$ sarà

$$\rho = \begin{pmatrix} p^{(1)} & 0 & \dots \\ 0 & p^{(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

dove si è usato $c_n c_n^* = |c_n|^2$. Anche in questo caso, si noti come la differenza tra i due esempi risiede nella presenza o meno dei termini non diagonali di interferenza [10] [11]. Per calcolare il valore di aspettazione di un osservabile, è sufficiente usare la formula

$$\langle o \rangle = \text{Tr}(O\rho) \quad (1.10)$$

dove l'operatore hermitiano può essere espresso in forma matriciale

$$O = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & \dots \\ o_{21} & o_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

con $o_{nm} = \langle n|\hat{O}|m\rangle$. Esplicitando la (1.10) si ottiene

$$\langle o \rangle = \text{Tr}(O\rho) = \sum_{n,m} \rho_{nm} o_{nm} \quad (1.12)$$

che risulta equivalente alla (1.3) e (1.4) se come matrici di densità si usano rispettivamente la (1.8) e (1.9).

La trattazione fatta finora riguardo le matrici di densità può essere ulteriormente generalizzata. In particolare, fino ad ora si sono analizzati nel dettaglio sono stati misti i cui ensemble statistici coincidessero con la base scelta per l'analisi del sistema. Tuttavia, non c'è nulla che vieti di considerare un ensemble che contenga anche sovrapposizioni di stati, sia ciò per la scelta della

base o perché la dimensione dell'ensamble sia maggiore di quella dello spazio degli stati. Si consideri, dunque, lo stato misto $\{|\psi^{(j)}\rangle\}_j$ con $|\psi^{(j)}\rangle = \sum_n c_n^{(j)} |n\rangle$. Esplicitando la (1.5), si ottiene

$$\begin{aligned}
 \rho &= \sum_j p^{(j)} |\psi^{(j)}\rangle \langle \psi^{(j)}| = \\
 &= \sum_j p^{(j)} \left(\sum_{n,m} c_n^{(j)} (c_m^{(j)})^* |n\rangle \langle m| \right) = \\
 &= \sum_{n,m} \left(\sum_j p^{(j)} c_n^{(j)} (c_m^{(j)})^* \right) |n\rangle \langle m| = \\
 &= \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle \langle m|
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

da cui è possibile evincere il significato fisico dei vari elementi della matrice. I valori sulla diagonale corrispondono alla probabilità complessiva associata a ogni stato della base; per normalizzazione ciò implica che $Tr(\rho) = 1$. I termini non diagonali, come già accennato, danno una misura della coerenza tra gli stati.

Il fenomeno della decoerenza consiste nel passaggio da stati quantistici a classici, che nel formalismo delle matrici di densità si manifesta nella transizione da stati puri a misti (una volta scelta la base opportuna). Poiché a discriminare gli uni dagli altri sono i termini non diagonali di interferenza, è utile introdurre una nuova grandezza in grado di quantificarne gli effetti. Definiamo, perciò, la purezza [11]

$$\gamma = Tr(\rho^2) \tag{1.14}$$

Per stati puri è immediato dimostrare che

$$\gamma = Tr(|\psi\rangle \langle \psi| \psi \langle \psi|) = Tr(|\psi\rangle \langle \psi|) = 1 \tag{1.15}$$

Se si considera, invece, uno stato misto di totale ignoranza $\{|n\rangle\}_{n=1}^N$ con $\{p^{(n)} = \frac{1}{N}\}_{n=1}^N$ si ha

$$\gamma = \text{Tr}(\rho^2) = \sum_{n=1}^N (p^{(n)})^2 = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{N}\right)^2 = N \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N} \quad (1.16)$$

Si è così ottenuto che $\frac{1}{N} \leq \gamma \leq 1$.

1.3 Esempio: sistema a due stati

1.3.1 Esperimento di Stern-Gerlach

Ci si concentra ora su un esempio pratico con l'obiettivo di consolidare le conoscenze appena acquisite e prendere dimestichezza con il formalismo. Si consideri un sistema a due stati, quale può essere lo spin di una particella in un esperimento di Stern-Gerlach. Se immaginiamo di impostare l'esperimento in modo che misuri lo spin lungo l'asse z , è conveniente scegliere come base

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

così da poter descrivere lo stato di partenza come

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Calcolandone la matrice di densità si ha

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Trattandosi di uno stato puro, è facile verificare che

$$\gamma = \text{Tr}(\rho^2) = \frac{1}{4} \text{Tr} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \quad (1.20)$$

Si sa dall'esperienza che l'esperimento restituisce con uguale probabilità una misura di spin up o down. Ciò corrisponde allo stato misto

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

che, come ci si aspetta, ha purezza

$$\gamma = \text{Tr}(\rho^2) = \frac{1}{4} \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \quad (1.22)$$

Il sistema ha in qualche modo perso la coerenza tra i suoi vettori di base. Il programma della decoerenza ha come obiettivo quello di ricavare proprio questo passaggio di stato. Tuttavia, si vedrà a breve che per una trattazione esaustiva non si può limitare il proprio studio al sistema in sé, sarà necessario tenere in considerazione anche lo stato dell'apparato di misura e, ultimamente, anche dell'ambiente che lo circonda. Tutto ciò è oggetto del Capitolo 2.

1.3.2 La sfera di Bloch

Si fornisce ora un ulteriore strumento per la visualizzazione e analisi dei sistemi a due stati: la sfera di Bloch [1] [12] (Fig. 1). Data una base $|0\rangle, |1\rangle$, un sistema efficace per descrivere una generica sovrapposizione è la formula

$$|\psi\rangle = e^{i\phi_0} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right] \quad (1.23)$$

poiché garantisce automaticamente la normalizzazione dei moduli quadri delle ampiezze ed evidenzia l'invarianza dalla fase globale ϕ_0 . Interpretando θ e ϕ come coordinate polari, la (1.23) rappresenta una superficie sferica di raggio $r = 1$ su cui giacciono tutti gli stati puri. Calcolando la matrice di densità si ottiene

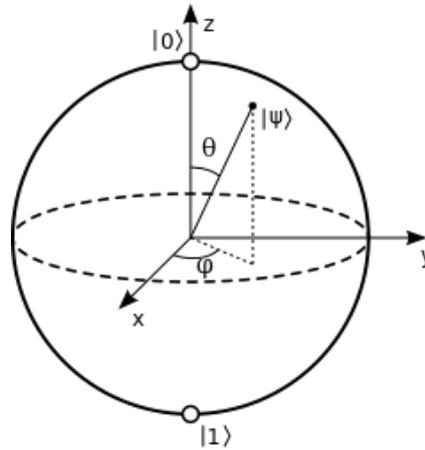


Figura 1: Sfera di Bloch. Immagine presa da [1]

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r \cos \theta & r \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) \\ r \sin \theta (\cos \phi + i \sin \phi) & 1 - r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

dove esplicitare r ci permette di applicare la conversione da coordinate sferiche a cartesiane

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.25)$$

Si ottiene che

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + z & x - iy \\ x + iy & 1 - z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (1.26)$$

che rappresenta una generica matrice di densità in quanto hermitiana e a traccia unitaria. Nell'ultima uguaglianza $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\boldsymbol{\sigma}$ è il vettore delle matrici di Pauli [13]. Abbiamo quindi generalizzato la sfera di Bloch in modo che possa rappresentare ogni tipologia di stato; in

particolare, gli stati puri giacciono sulla superficie, mentre quelli misti hanno $0 < |\mathbf{r}|^2 < 1$. Quest'ultima affermazione può essere dimostrata facilmente se si calcola la purezza di (1.26)

$$\gamma = \frac{1}{2} (1 + |\mathbf{r}|^2) \quad (1.27)$$

È chiaro che $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1] \iff |\mathbf{r}| \in [0, 1]$.

Capitolo 2

La decoerenza come effetto dell'interazione con l'ambiente

2.1 Lo studio di un sistema aperto

Come anticipato, il programma della decoerenza poggia le sue fondamenta sulla distinzione tra sistemi chiusi e sistemi aperti, dove con i secondi ci si riferisce a quei sistemi la cui interazione con il resto del mondo (o parte di esso) non è trascurabile. Con ciò si può intendere l'apparato di misura o, più ampiamente ancora, l'ambiente circostante. Per quanto inizialmente contro-intuitivo, è essenziale ai fini del programma della decoerenza che questi due ulteriori elementi siano trattati come sistemi quantistici a loro volta, ossia descrivibili da vettori nello spazio di Hilbert o da ensemble di essi. Mancando di fare ciò, si starebbe fondamentalmente tornando a una forma di interpretazione di Copenaghen, accettando come assunto di partenza l'esistenza di una realtà classica. Si ricordi, invece, che l'obiettivo principale di questo nuovo programma è quello di far emergere la classicità dal mondo quantistico, senza assunzioni aggiuntive.

Ai fini di presentare al lettore gli strumenti utili allo studio di sistemi aperti, si consideri un generico sistema composto nello spazio di Hilbert $H = A \otimes B$

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{mn} |A_m\rangle |B_n\rangle \quad (2.1)$$

dove $\{|A_m\rangle\}_m$ e $\{|B_n\rangle\}_n$ sono basi rispettivamente dei sottospazi A e B. Qualora non esistano basi in cui il sistema totale può essere fattorizzato nei suoi due sottosistemi, si dice che $|\psi\rangle$ è non-separabile o, equivalentemente, che presenta la cosiddetta quantum non-locality. Con questo termine si intende la proprietà esclusiva di alcuni sistemi quantistici di passarsi istantaneamente informazione sul proprio stato; ciò è possibile solamente quando i due sistemi sono

legati da entanglement. Al contrario, dovesse esistere una base tale per cui

$$|\psi\rangle = |A\rangle |B\rangle \quad (2.2)$$

il sistema composto si direbbe fattorizzabile. Si consideri ora un osservabile locale, ossia riferito a un solo sottosistema (ad esempio $|A\rangle$)

$$\hat{O} = \hat{O}_A \otimes \hat{I}_B \quad (2.3)$$

Calcolarne il valore di aspettazione attraverso la (1.10) porta alla formula

$$\langle o \rangle = \text{Tr}_A(\hat{O}_A \rho_A) \quad (2.4)$$

dove $\text{Tr}_A()$ è la traccia parziale su A [14] e ρ_A è la matrice di densità ridotta del solo sottosistema $|A\rangle$ [15]. Per ottenere quest'ultima si impiega

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) \quad (2.5)$$

dove ancora una volta si è utilizzata la traccia parziale, questa volta su B.

Da un punto di vista di interpretazione fisica, la traccia parziale rappresenta un'operazione di media sui gradi di libertà del sottosistema in questione; normalmente viene usata quando questi sono inaccessibili all'osservatore. Detto ciò, è opportuno ora fornire una descrizione più rigorosa di questo utile strumento e del concetto di matrice di densità ridotta.

2.1.1 Matrici di densità ridotte e tracce parziali

Le matrici di densità ridotte sono estremamente efficaci nello studio di sistemi composti; in particolare, sono spesso usate nella descrizione dello stato di un sottosistema anche qualora il sistema totale non sia separabile. Si considerino i due sottosistemi $|A\rangle$ e $|B\rangle$, con rispettive basi ortonormali $\{|A_n\rangle\}_{n=1}^N$ e $\{|B_v\rangle\}_{v=1}^M$. Allora, la matrice di densità ridotta sul sottospazio A è calcolabile come

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_{v=1}^M \left(\hat{I}_A \otimes \langle B_v| \right) \rho_{AB} \left(\hat{I}_A \otimes |B_v\rangle \right) \quad (2.6)$$

Si verifica la validità di questa formula nel caso particolare di uno stato puro separabile $|\psi\rangle = |A\rangle |B\rangle$ [14].

La matrice di densità totale è

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle \langle\psi| \quad (2.7)$$

Applicando la (2.6) si ha

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \\ &= \sum_{v=1}^M \left(\hat{I}_A \otimes \langle B_v| \right) |\psi\rangle \langle\psi| \left(\hat{I}_A \otimes |B_v\rangle \right) = \\ &= \sum_{v=1}^M \left(\hat{I}_A \otimes \langle B_v| \right) (|A\rangle |B\rangle \langle A| \langle B|) \left(\hat{I}_A \otimes |B_v\rangle \right) = \\ &= \sum_{v=1}^M (|A\rangle \langle B_v|B\rangle) (\langle A| \langle B|B_v\rangle) = \\ &= \sum_{v=1}^M (\langle B_v|B\rangle)^2 |A\rangle \langle A| = \\ &= |A\rangle \langle A| \end{aligned} \quad (2.8)$$

che corrisponde a quanto ci si aspetta.

È importante notare che nella (2.8), così come nel caso generale che tratteremo a breve, si è impiegata la regola di Born

$$p(B \rightarrow B_v) = (\langle B_v | B \rangle)^2 \quad (2.9)$$

Questo importante risultato della meccanica quantistica è uno dei pilastri della interpretazione probabilistica delle ampiezze degli stati. Per quanto ampiamente impiegata nella trattazione di sistemi quantistici, questa assunzione è stata originariamente ricavata nel contesto della interpretazione di Copenaghen. Per poter usare la regola di Born nella nostra trattazione è, dunque, necessario ricavarla su nuove fondamenta senza l'assunzione di un collasso della funzione d'onda. A tal fine si rimanda il lettore all'Appendice 1.

Per linearità, è ragionevole aspettarsi che la (2.6) sia valida anche per stati non separabili [16]

$$|\psi\rangle = \sum_{n,v} c_{nv} |A_n\rangle |B_v\rangle \quad (2.10)$$

la cui matrice di densità totale è

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &= |\psi\rangle \langle\psi| = \\ &= \left(\sum_{n,v} c_{nv} |A_n\rangle |B_v\rangle \right) \left(\sum_{m,u} c_{mu}^* \langle A_m| \langle B_u| \right) = \\ &= \sum_{n,v,m,u} c_{nv} c_{mu}^* |A_n\rangle \langle A_m| \otimes |B_v\rangle \langle B_u| \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove al posto di $c_{nv} c_{mu}^*$ si può scrivere ρ_{nvmu} . Esplicitando la (2.6) si ottiene

$$\begin{aligned}
 \rho_A &= \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \\
 &= \sum_{t=1}^M \left(\hat{I}_A \otimes \langle B_t | \right) \left(\sum_{n,v,m,u} \rho_{nvmu} |A_n\rangle \langle A_m| \otimes |B_v\rangle \langle B_u| \right) \left(\hat{I}_A \otimes |B_t\rangle \right) = \\
 &= \sum_t \sum_{n,v,m,u} \rho_{nvmu} |A_n\rangle \langle A_m| \otimes \langle B_t | B_v\rangle \langle B_u | B_t\rangle = \\
 &= \sum_{n,v,m,u} \rho_{nvmu} |A_n\rangle \langle A_m| \otimes \text{Tr}(|B_v\rangle \langle B_u|) = \\
 &= \sum_{n,v,m,u} \rho_{nvmu} |A_n\rangle \langle A_m| \otimes \langle B_u | B_v\rangle = \\
 &= \sum_{n,v,m,u} \rho_{nvmu} |A_n\rangle \langle A_m| \otimes \delta_{uv}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Da un punto di vista fisico, la (2.12) fornisce uno stato misto del sottosistema A mediando sugli stati del sottosistema B, che tendenzialmente è inaccessibile all'osservatore. Chiaramente, ragionamenti analoghi sono validi nel caso si voglia ottenere un ensemble degli stati di $|B\rangle$ non avendo accesso ad $|A\rangle$.

2.1.2 Esempio: due qubit in entanglement

Si applicano ora le nozioni appena acquisite a un caso concreto. In particolare, si studia un sistema non separabile di due qubit $|A\rangle$ e $|B\rangle$ in entanglement tra loro [17]

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) \tag{2.13}$$

Un osservatore che abbia accesso solo al qubit $|A\rangle$ e che ne misuri lo stato ripetutamente otterrà entrambi gli stati di base $|0\rangle$ e $|1\rangle$ con frequenza tendenzialmente uguale, indipendentemente dalle trasformazioni unitarie che applichi al qubit. Di conseguenza, tutto ciò che può inferi-

re sul qubit è che esso sia rappresentato da un ensemble statistico $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ con probabilità $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, ossia

$$\rho_A = \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) \quad (2.14)$$

Si verifica ora che la metodologia delle tracce parziali descritta sopra porta effettivamente a questo risultato. Cominciamo esplicitando la matrice di densità totale

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &= |\psi\rangle \langle \psi| = \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) (\langle 0| \langle 0| + \langle 1| \langle 1|) = \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| \otimes |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| \otimes |1\rangle \langle 1| + \\ &\quad + |0\rangle \langle 1| \otimes |0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0| \otimes |1\rangle \langle 0|) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ricavando la matrice di densità ridotta con la (2.6) si ha

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \\ &= \sum_t \left(\hat{I}_A \otimes \langle B_t| \right) \rho_{AB} \left(\hat{I}_A \otimes |B_t\rangle \right) = \\ &= \left(\hat{I}_A \otimes \langle 0| \right) \rho_{AB} \left(\hat{I}_A \otimes |0\rangle \right) + \left(\hat{I}_A \otimes \langle 1| \right) \rho_{AB} \left(\hat{I}_A \otimes |1\rangle \right) = \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| \otimes \langle 0|0\rangle \langle 0|0\rangle + |1\rangle \langle 1| \otimes \langle 0|1\rangle \langle 1|0\rangle + |0\rangle \langle 1| \otimes \langle 0|0\rangle \langle 1|0\rangle + \\ &\quad + |1\rangle \langle 0| \otimes \langle 0|1\rangle \langle 0|0\rangle + |0\rangle \langle 0| \otimes \langle 1|0\rangle \langle 0|1\rangle + |1\rangle \langle 1| \otimes \langle 1|1\rangle \langle 1|1\rangle + \\ &\quad + |0\rangle \langle 1| \otimes \langle 1|0\rangle \langle 1|1\rangle + |1\rangle \langle 0| \otimes \langle 1|1\rangle \langle 0|1\rangle) = \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) \end{aligned} \quad (2.16)$$

che coincide con la (2.14). Equivalentemente è possibile arrivare allo stesso risultato usando la (2.12), dove nell'esempio che si sta studiando $c_{00} = c_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e gli altri sono nulli, da cui $\rho_{0000} = \rho_{0011} = \rho_{1100} = \rho_{1111} = \frac{1}{2}$ e gli altri nulli. Si arriva, dunque, al risultato

$$\begin{aligned}
 \rho_A &= \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \\
 &= \sum_{n,v,m,u} \rho_{nvmu} |A_n\rangle \langle A_m| \otimes \delta_{uv} = \\
 &= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| \otimes \delta_{00} + |0\rangle \langle 1| \otimes \delta_{01} + |1\rangle \langle 0| \otimes \delta_{10} + |1\rangle \langle 1| \otimes \delta_{11}) = \\
 &= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

2.2 Entanglement tra sistema, apparato e ambiente

Ai fini della trattazione di sistemi aperti risulta molto efficace la notazione di Schmidt [2] [18]

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |A_n\rangle |B_n\rangle \tag{2.18}$$

dove i coefficienti di Schmidt a_n sono reali non negativi, inoltre $\sum_n a_n^2 = 1$. Si può dimostrare che qualunque sistema composto in uno spazio $H = A \otimes B$ può essere espresso in questa base. Nel caso particolare in cui $a_n = 1$ per $n = 1$ e 0 altrimenti il sistema è separabile, in quanto i due sottosistemi sono nettamente isolabili. Per tutti gli altri casi, il sistema è non-separabile a causa dell'entanglement tra i due sottosistemi. Ai fini dello studio della decoerenza, i sottosistemi d'interesse sono il vero e proprio sistema in esame $|S\rangle$ (d'ora in poi quando si parlerà di "sistema" ci si starà riferendo unicamente a questo sottosistema, a meno che non si espliciti diversamente), l'apparato di misura $|M\rangle$ e l'ambiente (o environment) $|E\rangle$. Si comincia tenendo in considerazione solo i primi due e analizzando come questi si evolvano durante un processo di misura ideale alla von Neumann, vale a dire associata a una hamiltoniana di interazione tra sistema e apparato della forma

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sum_n |n\rangle \langle n| \otimes \hat{A}_n \quad (2.19)$$

in cui \hat{A}_n è un generico operatore dipendente da n che agisce solo sull'apparato di misura. Normalmente è lecito assumere che sistema e apparato siano inizialmente separabili, di solito a causa di un processo di preparazione. Scriveremo

$$|\psi(0)\rangle = |S\rangle |M\rangle \quad (2.20)$$

o, più in generale,

$$\rho_{SM}(0) = \rho_S \otimes \rho_M \quad (2.21)$$

così da includere anche il caso di stati misti. Attraverso la (2.19), durante l'atto di misura si viene a creare una correlazione tra gli stati di sistema e apparato. Nel caso in cui $|S\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ sia uno stato puro, si può rappresentare l'evoluzione nella forma

$$\begin{aligned} |S\rangle |M_0\rangle &= \sum_n c_n |n\rangle |M_0\rangle \xrightarrow{t} \\ &\xrightarrow{t} e^{-i\hat{H}_{\text{int}}t} \sum_n c_n |n\rangle |M_0\rangle = \sum_n c_n |n\rangle e^{-i\hat{A}_n t} |M_0\rangle = \sum_n c_n |n\rangle |M_n\rangle \end{aligned} \quad (2.22)$$

Usando il formalismo delle matrici di densità si ha

$$\rho_S(0) = \sum_{n,m} c_m^* c_n |n\rangle \langle m| \xrightarrow{t} \rho_S(T) = \text{Tr}_M(\rho_{SM}) = \sum_{n,m} c_m^* c_n \langle M_m | M_n \rangle |n\rangle \langle m| \quad (2.23)$$

dove, se l'apparato è efficace come si spera,

$$\langle M_m | M_n \rangle = \delta_{nm} \quad (2.24)$$

e i termini non diagonali scompaiono, lasciando la forma

$$\rho_S(T) = \sum_n |c_n|^2 |n\rangle \langle n| \quad (2.25)$$

Si è così dimostrato che gli esiti di una misura devono necessariamente essere ortonormali tra loro. Ancora una volta, si noti come gli stati diagonali $|n\rangle$ siano dettati dall'hamiltoniana di interazione. Lo studio dettagliato di questa correlazione e in generale la determinazione degli stati classici sono oggetto del Capitolo 3.

Essendo l'apparato un sistema macroscopico, è naturale che esso interagisca con l'ambiente. Applicando quanto appena osservato ai nuovi sottosistemi sistema + apparato e ambiente si ottiene

$$\left(\sum_n c_n |n\rangle |M_n\rangle \right) |E_0\rangle \xrightarrow{t} \sum_n c_n |n\rangle |M_n\rangle |E_n\rangle \quad (2.26)$$

e per la matrice di densità

$$\rho_{SM} = \text{Tr}_E(\rho_{SME}) = \sum_n |c_n|^2 |n\rangle \langle n| \otimes |M_n\rangle \langle M_n| \quad (2.27)$$

se si assume che

$$\langle E_n | E_m \rangle \approx \delta_{nm} \quad (2.28)$$

ossia che l'informazione trasferita all'ambiente sia sufficiente a determinare lo stato dell'apparato di misura e del sistema. Le modalità con cui questa interazione con l'ambiente può avvenire e i tempi di tali processi vengono studiati nel dettaglio nel Capitolo 4. Si è finalmente così ottenuta una correlazione classica tra sistema e apparato, descritta dalla matrice diagonale ρ_{SA} [2] [18]. Gli stati $|n\rangle$ e $|M_n\rangle$, che sono sopravvissuti all'interazione con l'ambiente, vengono definiti pointer states rispettivamente del sistema e dell'apparato.

2.3 Esempio: decoerenza senza misura

Fino ad ora si è parlato di apparato di misura intendendo un sistema da cui si fosse in grado di dedurre lo stato del sistema in esame. Un noto esempio è l'apparato di Stern-Gerlach, in cui la grandezza oggetto della misura (lo spin della particella) viene correlata a una ben distinguibile posizione sullo schermo. Tuttavia, esempi di questo tipo risultano troppo restrittivi per poter apprezzare la piena portata della decoerenza. Si consideri un apparato inizialmente descritto dalla matrice di densità ridotta

$$\rho_M(0) = \frac{1}{N} \sum_k |M_k\rangle \langle M_k| \quad (2.29)$$

che rappresenta uno stato misto di equilibrio tra tutti i suoi pointer states. Si immagini che l'interazione tra sistema e apparato applichi uno shift ciclico su tutti i pointer states di quest'ultimo. In simboli

$$|n\rangle |M_k\rangle \xrightarrow{t} |n\rangle |M_{k+n}\rangle \quad (2.30)$$

L'evoluzione del sistema composto sarà data da

$$\begin{aligned}
 \rho_{SM}(0) &= \sum_{n,m} c_m^* c_n |n\rangle \langle m| \otimes \frac{1}{N} \sum_k |M_k\rangle \langle M_k| \xrightarrow{t} \\
 \xrightarrow{t} \rho_{SM}(T) &= \frac{1}{N} \sum_{n,m,k} c_m^* c_n |n\rangle \langle m| |M_{k+n}\rangle \langle M_{k+m}|
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Si noti come l'apparato non ha compiuto una misura nel senso proprio del termine; infatti, calcolando matrice di densità ridotta associata si ottiene

$$\begin{aligned}
 \rho_M(T) &= \text{Tr}_S(\rho_{SM}(T)) = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n,k} |c_n|^2 |M_{k+n}\rangle \langle M_{k+n}| = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_k |M_k\rangle \langle M_k| = \\
 &= \rho_M(0)
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Dunque, non è possibile ricavare alcuna informazione dall'apparato. Nonostante ciò, il sistema ha comunque subito gli effetti della decoerenza e la sua matrice di densità ridotta

$$\rho_S(T) = \text{Tr}_M(\rho_{SM}(T)) = \sum_n |c_n|^2 |n\rangle \langle n| \tag{2.33}$$

ha perso i termini di interferenza.

Capitolo 3

Il problema della scelta della base

Nel corso dell'elaborato, si è già accennato più volte al problema della scelta della base. Il principio di sovrapposizione fa sì che in teoria la scelta della base per la descrizione di un sistema quantistico non sia univoca. Ciò costituisce un problema nel programma della decoerenza, in quanto gli effetti della diagonalizzazione della matrice di densità dipendono fortemente dalla base con cui si è operato. È evidente che affinché il programma della decoerenza possa essere considerato completo esso debba prevedere un qualche meccanismo che risolva questa ambiguità; in pratica, è necessario un criterio per la scelta di una base preferita rispetto alle altre. L'esperienza suggerisce che questo criterio debba avere la sua origine nell'interazione tra il sistema in esame e il resto del mondo. Si pensi di nuovo, ad esempio, all'esperimento di Stern-Gerlach. Come si è visto, l'atto di misura va a creare una correlazione diagonale classica tra stato della particella e quello dell'apparato. Tuttavia, gli stati di spin che sopravvivono alla decoerenza (up/down o left/right) dipendono da come è stato impostato l'esperimento e di conseguenza dall'hamiltoniana di interazione. Questa correlazione è già stata esplicitata nella (2.19) nel caso di una misura ideale alla von Neumann. Il problema della scelta della base non è da accantonare con superficialità come un semplice tecnicismo; al contrario, in ultima analisi esso è il vero anello di congiunzione tra mondo quantistico e classico. A sopravvivere alla decoerenza sono solo gli elementi della base opportunamente scelta. Ragionando a ritroso, il criterio per l'individuazione di questi pointer states è la loro resistenza all'interazione con l'ambiente. Questa proprietà degli stati classici si traduce nelle cosiddette regole di superselezione indotte dall'ambiente, di cui si parlerà in dettaglio di seguito. Per convincersi ulteriormente della centralità della scelta della base nell'emergere della realtà classica, si considerino le coppie di particelle neutrone e protone e i due kaoni neutri K^0 e \bar{K}^0 . Essi sono rispettivamente autostati di isospin e di sapore; tuttavia, solo i primi due sono effettivamente pointer states (ossia sono osservati in natura, mentre le loro sovrapposizioni sono soppresse). La base selezionata dall'ambiente per lo spazio dei kaoni neutri è quella composta da K_L e K_S , definiti come

$$\begin{pmatrix} |K_S\rangle \\ |K_L\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}} \begin{pmatrix} 1+\epsilon & 1-\epsilon \\ 1+\epsilon & -(1-\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |K^0\rangle \\ |\bar{K}^0\rangle \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ossia come un mix di K^0 e \bar{K}^0 [19]. Dunque, affermare che l'interazione con l'ambiente sopprime il principio di sovrapposizione è estremamente riduttivo e lascia aperta l'ambiguità di cui si è più volte discusso. Il ruolo dell'ambiente è quello di svolgere una vera e propria selezione, per l'intero spazio di Hilbert, degli stati che noi riveliamo come classici.

3.1 Le regole di superselezione

Con “regole di superselezione” si intende il restringimento dello spazio di Hilbert in sottospazi classici. In pratica, esse sono la conseguenza della soppressione mirata del principio di sovrapposizione nel mondo classico. Antecedentemente al programma della decoerenza, l'origine di queste regole è stata ed è in parte tutt'ora attribuita alle simmetrie del sistema. Uno degli esempi più noti è la separazione degli stati di spin in valori interi e seminteri come conseguenza dell'invarianza del sistema per trasformazioni del gruppo $SO(3)$. Il programma della decoerenza si pone come obiettivo quello di dare un'origine dinamica ad alcune (se non tutte) queste regole di superselezione, vale a dire una spiegazione che poggi le sue fondamenta unicamente sull'interazione tra un sistema aperto e l'ambiente. Secondo questa linea di pensiero, le regole di superselezione non sarebbero più da interpretarsi come principi assoluti, bensì come proprietà emergenti dipendenti dal grado di entanglement tra sistema e ambiente. In linea di principio un sistema isolato non dovrebbe esibire alcuna regola di superselezione.

Prima di addentrarci nei dettagli di questa nuova interpretazione, è bene chiarire quali siano le critiche mosse al vecchio modello. C'è chi sostiene che l'imposizione di simmetrie prettamente classiche (come l'invarianza per rotazioni in uno spazio tridimensionale) a sistemi quantistici sia del tutto ingiustificata. Inoltre, è dimostrato che attraverso il processo delle estensioni centrali [2] ogni gruppo responsabile di una regola di superselezione può essere ampliato in un nuovo gruppo in cui tale regola non si verifica. Tornando all'esempio precedente, le rotazioni in $SO(3)$ possono essere generalizzate al gruppo $SU(2)$. Accettati questi presupposti, si può iniziare ad esplorare l'alternativa offerta dal programma della decoerenza.

Si consideri uno stato puro

$$|S\rangle = \sum_n c_n |S_n\rangle \quad (3.2)$$

con hamiltoniana

$$\hat{H}_S = \sum_n h_n |S_n\rangle \langle S_n| \quad (3.3)$$

Per ragioni che saranno poi chiare, è conveniente rinumerare gli indici nella forma

$$|S\rangle = \sum_{\alpha} \sum_{n_{\alpha}=1}^{N_{\alpha}} c_{n_{\alpha}} |S_{n_{\alpha}}\rangle \quad (3.4)$$

$$\hat{H}_S = \sum_{\alpha} \sum_{n_{\alpha}=1}^{N_{\alpha}} h_{n_{\alpha}} |S_{n_{\alpha}}\rangle \langle S_{n_{\alpha}}| \quad (3.5)$$

dove α è un numero quantico e il numero N_{α} di stati appartenenti ad α si conserva. Si introduca ora un operatore di proiezione

$$\hat{P}^{(\alpha)} = \sum_{n_{\alpha}=1}^{N_{\alpha}} |S_{n_{\alpha}}\rangle \langle S_{n_{\alpha}}| \quad (3.6)$$

che definisce i sottospazi di Hilbert associati ad ogni valore di α . Infine, si descriva lo stato dell'ambiente come

$$|E\rangle = \sum_v d_v |E_v\rangle \quad (3.7)$$

con hamiltoniana

$$\hat{H}_E = \sum_v \epsilon_v |E_v\rangle \langle E_v| \quad (3.8)$$

L'interazione tra $|S\rangle$ e $|E\rangle$ sia descritta dall'hamiltoniana

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sum_{\alpha, v} \gamma(\alpha, v) \hat{P}^{(\alpha)} \otimes |E_v\rangle \langle E_v| \quad (3.9)$$

dove γ è una costante di accoppiamento dipendente da α e v ma degenera all'interno dei sottospazi individuati da α . Si noti come la (3.9) definisca univocamente i sottospazi associati ad α , così come la (2.19) aveva definito i pointer states $|n\rangle$. Assumendo che il sistema composto sia inizialmente preparato in uno stato separabile

$$|\psi(0)\rangle = |S\rangle |E\rangle = \left(\sum_{\alpha} \sum_{n_{\alpha}=1}^{N_{\alpha}} c_{n_{\alpha}} |S_{n_{\alpha}}\rangle \right) \otimes \left(\sum_v d_v |E_v\rangle \right) \quad (3.10)$$

questo si evolverà secondo l'hamiltoniana totale

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_E + \hat{H}_{\text{int}} \quad (3.11)$$

nello stato

$$|\psi(T)\rangle = e^{-iHT}|\psi(0)\rangle = \sum_{\alpha, n_\alpha, v} c_{n_\alpha} d_v e^{-iT[h_{n_\alpha} + \epsilon_v + \gamma(\alpha, v)]} |S_{n_\alpha}\rangle |E_v\rangle \quad (3.12)$$

da cui, usando la (2.12), si ottiene la matrice di densità ridotta

$$\begin{aligned} \rho_S(T) &= \sum_{\alpha, n_\alpha, v} \sum_{\beta, m_\beta, u} c_{n_\alpha} d_v e^{-iT[h_{n_\alpha} + \epsilon_v + \gamma(\alpha, v)]} \times \\ &\quad \times c_{m_\beta}^* d_u^* e^{iT[h_{m_\beta} + \epsilon_u + \gamma(\beta, u)]} |S_{n_\alpha}\rangle \langle S_{m_\beta}| \otimes \delta_{uv} = \\ &= \sum_{\alpha, n_\alpha, \beta, m_\beta} c_{n_\alpha} c_{m_\beta}^* e^{-iT[h_{n_\alpha} - h_{m_\beta}]} |S_{n_\alpha}\rangle \langle S_{m_\beta}| \times \\ &\quad \times \sum_v |d_v|^2 e^{-iT[\gamma(\alpha, v) - \gamma(\beta, v)]} \end{aligned} \quad (3.13)$$

dove

$$z_{\alpha\beta} = \sum_v |d_v|^2 e^{-iT[\gamma(\alpha, v) - \gamma(\beta, v)]} \quad (3.14)$$

è il fattore responsabile della decoerenza. Si noti, infatti, come $z_{\alpha\beta} = 1$ per $\alpha = \beta$ mentre è nullo altrimenti. Ciò ha l'effetto di sopprimere la coerenza tra stati appartenenti a diversi sottospazi, mentre quella tra stati con stesso numero quantico α viene preservata. In conclusione, α individua dei sottospazi resistenti all'interazione con l'ambiente, dei settori di superselezione come a volte vengono chiamati. Si tenga a mente, però, che è l'hamiltoniana di interazione a definire α e, di conseguenza, i settori di superselezione. Non vi è una simmetria o un principio che svolga questo compito a priori in modo assoluto e universale. Al contrario, come si è già osservato in precedenza, è la natura dell'interazione tra sistema e ambiente a determinare quali stati sono in grado di emergere nel mondo classico e quali vengono soppressi.

Nella precedente trattazione ci si è limitati allo scenario in cui i pointer states siano anche autostati energetici. In questa ipotesi, α rappresenta una grandezza superconservata (ossia costante durante l'evoluzione del sistema). Gli esempi di questo genere di osservabili sono

innumerevoli, dalla carica elettrica al numero barionico. Tuttavia, l'interazione con l'ambiente può dare origine anche a regole di superselezione su quantità variabili nel tempo, o addirittura dare stabilità a stati che non siano autostati energetici. Per un esempio di ciò, basti guardare alla famiglia delle molecole otticamente attive.

3.2 Esempio: chiralità

Data una molecola, la sua hamiltoniana può essere espressa come la somma dei termini nucleari ed elettronici

$$\hat{H} = - \sum_j \frac{\nabla_j}{2M_j} - \sum_k \frac{\nabla_k}{2m_e} + V(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \quad (3.15)$$

dove \mathbf{x} e \mathbf{X} riassumono rispettivamente le posizioni degli elettroni e dei nuclei. In genere, ci si aspetta di rivelare la molecola in un suo autostato energetico. Tuttavia, esistono alcune tipologie molecolari per cui ciò non avviene; una di queste è la famiglia delle molecole otticamente attive o chirali. Una molecola è detta chirale se ammette due configurazioni molecolari simmetriche per specchiamento (e non rotazione). Da questa definizione consegue che le due configurazioni non possono essere autostati di parità. Ai fini di uno studio qualitativo, si consideri una semplice molecola chirale come quella rappresentata in Fig. 2. L'approssimazione di Born-Oppenheimer ci consente di trattare separatamente i termini nucleari ed elettronici dell'hamiltoniana; per questo esempio siamo interessati solo ai primi. Il potenziale efficace può essere comodamente espresso in funzione della distanza z del nucleo 1 dal piano individuato dagli altri tre. Per simmetria, è ovvio che questo abbia la forma di una doppia valle (Fig. 3). Le regole della fisica quantistica affermano che gli autostati energetici dato un potenziale con parità definita abbiano necessariamente essi stessi parità definita. In questo caso, si ha un ground state $|1\rangle$ con parità positiva e uno stato eccitato $|2\rangle$ con parità negativa. Come già anticipato, questi due stati non possono coincidere con quelli con chiralità definita. Inoltre, si noti come per $|1\rangle$ e $|2\rangle$ il nucleo 1 sia delocalizzato in uno stato di sovrapposizione tra due possibili range di z . Per avere gli stati chirali $|L\rangle$ e $|R\rangle$, essi vanno espressi attraverso le combinazioni lineari

$$\begin{aligned} |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \\ |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ci si trova, dunque, di fronte a due ragionevoli basi da eleggere a pointer states del sistema. L'esperienza ci dice che la scelta giusta è la base $\{|L\rangle, |R\rangle\}$. A cosa è dovuta questa sorprendente stabilità degli stati chirali, tale da superare persino quella degli autostati energetici?



Figura 2: Due possibili configurazioni di una semplice molecola chirale. Immagine presa da [2]

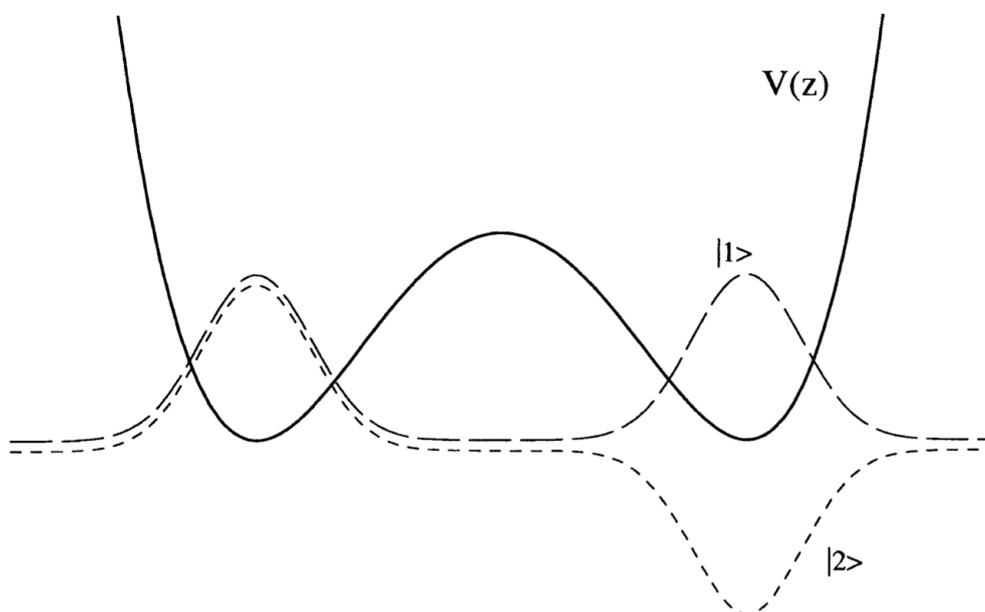


Figura 3: Potenziale associato alla molecola chirale al variare della coordinata z del nucleo 1 e corrispondenti ground state $|1\rangle$ e stato eccitato $|2\rangle$. Immagine presa da [2]

Molte potenziali risposte sono state fornite negli anni e sebbene alcune di esse fossero riuscite a trasformare $|L\rangle$ e $|R\rangle$ in autostati energetici attraverso opportune modifiche all'hamiltoniana, nessuna era stata in grado di giustificare l'assenza di stati di sovrapposizione. Ad oggi, solo il programma della decoerenza sembra in grado di fornire una spiegazione esaustiva. Studiando la molecola come un sistema aperto, si è portati a considerare la continua interazione tra quest'ultima e l'ambiente, che principalmente si traduce in continui processi di scattering ad opera delle molecole e radiazioni circostanti. Poiché l'esito di queste interazioni dipende dalla configurazione molecolare, inclusa la posizione del nucleo 1,

$$|L, R\rangle|E_0\rangle \xrightarrow{t} |R, L\rangle|E_{L,R}\rangle \quad (3.17)$$

essi agiscono come un vero e proprio apparato di misura, che finisce per diagonalizzare la matrice di densità ridotta del sistema come discusso nel Capitolo 2. Per una discussione dettagliata dei processi di scattering nel contesto della decoerenza si rimanda il lettore al Capitolo 4.

Capitolo 4

Studio della decoerenza nel tempo

Fino ad ora ci si è dedicati unicamente allo studio dell'esito finale di un processo di decoerenza, a volte persino assumendo che la soppressione dei termini di interferenza fosse istantanea. Chiaramente quest'assunzione non è corretta, sebbene la nostra esperienza della realtà classica ci suggerisca che la scala temporale della decoerenza debba essere estremamente piccola. Per confermare ulteriormente che il programma della decoerenza sia consistente con l'esperienza, è necessario condurre uno studio quantitativo sui tempi di soppressione della coerenza tra stati. A tal fine, ci si appella alle master equations. In questo capitolo si introduce il ruolo di questo strumento nel contesto della decoerenza per poi usarlo nel caso specifico dei processi di scattering.

4.1 Master equations

Per prima cosa, si vuole ricavare una generica equazione per la dinamica ridotta (vale a dire del solo sottosistema $|S\rangle$) basandosi unicamente sull'assunzione che il sistema totale subisca un'evoluzione unitaria, da cui segue l'equazione di Liouville-von Neumann

$$\frac{d}{dt}\rho_{SE}(t) = -i[\hat{H}_{\text{tot}}, \rho_{SE}] = \hat{L}\rho_{SE}(t) \quad (4.1)$$

dove

$$\hat{H}_{\text{tot}} = \hat{H}_S \otimes \hat{I}_E + \hat{I}_S \otimes \hat{H}_E + \hat{H}_{\text{int}} \quad (4.2)$$

e \hat{L} è l'operatore di Liouville. In questo capitolo si è deciso di porre $\hbar = 1$ per alleggerire la

notazione, fatta eccezione per la (4.10), per ragioni che saranno poi chiare. Assumendo che nell'istante iniziale

$$\rho_{SE} = \rho_S \otimes \rho_E \quad (4.3)$$

dalla (4.1) si può ricavare un'equazione per la dinamica ridotta [2] della forma

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[\hat{H}, \rho_S(t)] + \int_0^t \hat{K}(t - \tau)\rho_S(\tau)d\tau \quad (4.4)$$

dove $\hat{H} = \hat{H}_S + \text{Tr}_E(\hat{H}_{\text{tot}}\rho_E)$ è l'hamiltoniana efficace e l'operatore \hat{K} è legato all'interazione tra sistema e ambiente. Se i tempi di interazione con l'ambiente sono molto minori dei naturali tempi di evoluzione del sistema, si può applicare la cosiddetta approssimazione di Markov. In questo scenario, l'interazione è piccata nel tempo in $\tau = 0$, permettendo di riscrivere la (4.4) come

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[\hat{H}_S, \rho_S(t)] + \int_0^\infty \hat{K}(\tau)\rho_S(\tau)d\tau \quad (4.5)$$

Alternativamente, la (4.5) può essere scritta nella forma di Lindblad [2]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_S(t) = -i[\hat{H}_S, \rho_S] - \frac{1}{2} \sum_k [\hat{L}_k, [\hat{L}_k, \rho_S]] \quad (4.6)$$

dove \hat{L}_k sono operatori hermitiani agenti sullo spazio degli stati.

4.2 Processi di scattering

Uno dei fenomeni più comuni dentro e fuori dal laboratorio è certamente lo scattering tra particelle. In un ambiente controllato, da esso si possono estrapolare profonde informazioni sulla natura del sistema in esame. Inoltre, è facile riconoscere come gli oggetti macroscopici siano costantemente al centro di scattering da parte delle particelle dell'ambiente, siano queste molecole d'aria o radiazioni nello spazio profondo. Data la rilevanza di questa famiglia di interazioni, si dedica questa sezione al loro studio. Si riprenda la (4.6). Essendo gli operatori di Lindblad hermitiani, ciascuno di essi può essere rappresentato in forma diagonale rispetto a una base $\{|n\rangle\}_n$ come

$$\hat{L} = \sum_n f(n)|n\rangle\langle n| \quad (4.7)$$

con $f(n)$ reale. Limitandoci per semplicità a un solo operatore, la parte non unitaria della (4.6) può essere esplicitata nella forma

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \rho_S \right|_{\text{non unitario}} &= -\frac{1}{2} [\hat{L}, [\hat{L}, \rho_S]] = \\ &= -\frac{1}{2} (\hat{L}^\dagger \hat{L} \rho_S + \rho_S \hat{L}^\dagger \hat{L} - 2\hat{L} \rho_S \hat{L}^\dagger) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sum_n f^2(n) |n\rangle\langle n| \rho_S + \sum_n f^2(n) \rho_S |n\rangle\langle n| \right) + \\ &\quad + \sum_{n,m} f(n) f(m) |n\rangle\langle n| \rho_S |m\rangle\langle m| = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_n f^2(n) (|n\rangle\langle n| \rho_S + \rho_S |n\rangle\langle n|) + \\ &\quad + \sum_{n,m} f(n) f(m) |n\rangle \rho_{nm} \langle m| \end{aligned} \quad (4.8)$$

dove si è usato $\langle n| \rho_S |m\rangle = \rho_{nm}$. Per quanto riguarda il singolo elemento di matrice ρ_{kl} si ha

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial t} \rho_{kl} \right|_{\text{non unitario}} &= \langle k | \left. \frac{\partial}{\partial t} \rho_S \right|_{\text{non unitario}} | l \rangle = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_n f^2(n) (\langle k | n \rangle \langle n | \rho_S | l \rangle + \langle k | \rho_S | n \rangle \langle n | l \rangle) + \\
&\quad + \sum_{n,m} f(n) f(m) \langle k | n \rangle \rho_{nm} \langle m | l \rangle = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_n f^2(n) (\delta_{kn} \rho_{nl} + \rho_{kn} \delta_{nl}) + \\
&\quad + \sum_{n,m} f(n) f(m) \delta_{kn} \rho_{nm} \delta_{ml} = \\
&= -\frac{1}{2} f^2(k) \rho_{kl} - \frac{1}{2} f^2(l) \rho_{kl} + f(k) f(l) \rho_{kl} = \\
&= -\frac{1}{2} (f(k) - f(l))^2 \rho_{kl}(t)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Si evince, dunque, che gli elementi diagonali ($k = l$) restano costanti nel tempo, mentre gli altri vengono smorzati esponenzialmente. Ancora una volta la natura dell'interazione, riassunta nella (4.7), ha selezionato gli stati resistenti alla decoerenza.

4.2.1 Localizzazione spaziale

Come accennato nell'esempio sulla chiralità, i processi di scattering possono spesso essere interpretati come strumenti di localizzazione spaziale, vale a dire come una sorta di misura della posizione dell'oggetto in esame. Ciò è vero perché di solito l'evolversi della diffusione è fortemente correlata alla posizione dell'oggetto responsabile dello scattering. Ci sono molti modi di giungere a una descrizione soddisfacente di questi processi. Se ne presentano qui un paio: il primo tratta la localizzazione spaziale come un caso specifico dei risultati appena ottenuti per i processi di scattering, il secondo parte da assunzioni meno generali ma più trasparenti per arrivare allo stesso risultato. Si cominci considerando l'equazione di Caldeira-Leggett [2], usata nella descrizione del moto browniano quantistico,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_S = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_S, \rho_S] + \frac{\gamma}{2}[\hat{x}, \{\hat{p}, \rho_S\}] - \frac{m\gamma k_B T}{\hbar^2}[\hat{x}, [\hat{x}, \rho_S]] \quad (4.10)$$

dove $\gamma = \eta/m$, η è la viscosità, m la massa dell'oggetto in esame, \hat{p} l'operatore di quantità di moto, k_B la costante di Boltzmann e T la temperatura. Il secondo e terzo termine rappresentano rispettivamente gli effetti dell'attrito e della decoerenza sul sistema. Si noti che se l'approssimazione di Markov è valida, ossia se la scala temporale della decoerenza è molto più piccola di quella di rilassamento, il secondo termine può essere ignorato e la (4.10) assume la forma della (4.6)

$$\left. \frac{\partial}{\partial t}\rho_S \right|_{\text{non unitario}} = -m\gamma k_B T[\hat{x}, [\hat{x}, \rho_S]] \quad (4.11)$$

dove si è preso come operatore di Lindblad

$$\hat{L} = \sqrt{2m\gamma k_B T}\hat{x} \quad (4.12)$$

Ciò è evidentemente lecito nel limite classico, come suggerisce la presenza di \hbar al denominatore del primo e terzo termine della (4.10). La (4.9) diventa, quindi,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t}\rho_S(x, x', t) \right|_{\text{non unitario}} &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt{2m\gamma k_B T}(x - x') \right)^2 \rho_S(x, x', t) = \\ &= -m\gamma k_B T(x - x')^2 \rho_S(x, x', t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

da cui si ottiene integrando

$$\rho_S(x, x', t) = \rho_S(x, x', 0)e^{-m\gamma k_B T(x-x')^2 t} \quad (4.14)$$

È ora immediato ricavare una stima del tempo di decoerenza

$$t_{\text{dec}} = \frac{1}{m\gamma k_B T (\Delta x)^2} \quad (4.15)$$

dove si è definito $\Delta x = (x - x')$. A proposito dell'attrito, invece, si ha

$$t_{\text{att}} = \frac{1}{\gamma} \quad (4.16)$$

Noto ciò, è possibile definire il rapporto

$$\frac{t_{\text{att}}}{t_{\text{dec}}} = mk_B T (\Delta x)^2 \approx \left(\frac{\Delta x}{\lambda_{\text{th}}} \right)^2 \quad (4.17)$$

(λ_{th} è la lunghezza d'onda termica di de Broglie dell'oggetto) che quantifica l'efficacia dell'approssimazione di Markov. Si noti come per oggetti macroscopici il rapporto sia estremamente grande.

Un modo alternativo per giungere al medesimo risultato è il seguente. Si assuma che i processi di scattering siano molto frequenti, ma non individualmente sufficienti per determinare lo stato (in questo caso la posizione) del sistema. In simboli si usa una versione al continuo della (2.23)

$$\rho_S(x, x', 0) \xrightarrow{t} \rho_S(x, x', t) = \rho_S(x, x', 0) \langle E_x | E_{x'} \rangle \quad (4.18)$$

dove però al posto della (2.24) vale

$$\langle E_x | E_{x'} \rangle = \langle E_0 | \hat{S}_x^\dagger \hat{S}_{x'} | E_0 \rangle = 1 - \epsilon \quad (4.19)$$

con \hat{S}_x e $\hat{S}_{x'}$ operatori di scattering. Se gli eventi avvengono a una frequenza Γ , l'effetto complessivo sarà dato da

$$\begin{aligned}\rho_S(x, x', t) &= \rho_S(x, x', 0)(1 - \epsilon)^{\Gamma t} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \rho_S(x, x', 0)e^{-\Gamma \epsilon t} = \\ &= \rho_S(x, x', 0)e^{-\Gamma(1 - \langle E_0 | \hat{S}_x^\dagger \hat{S}_{x'} | E_0 \rangle)t}\end{aligned}\quad (4.20)$$

Risolvere esplicitamente il problema dello scattering [2] nel limite $k|x - x'| \ll 1$ porta ha

$$\rho_S(x, x', t) = \rho_S(x, x', 0)e^{-\Lambda t(x-x')^2} \quad (4.21)$$

dove formula $\Lambda = \frac{k^2 N v \sigma_{\text{eff}}}{V}$ è il rateo di localizzazione, in cui k è il modulo del vettore d'onda, $\frac{Nv}{V}$ è il flusso incidente e σ_{eff} è dell'ordine della sezione d'urto totale. Al di fuori del limite preso, un singolo evento potrebbe avrebbe risoluzione sufficiente per determinare la posizione del sistema entro un'incertezza $|x-x'|$, andando contro la nostra assunzione di partenza. Si è, dunque, giunti a una versione alternativa della (4.14).

4.2.2 Esempio: esperimento della doppia fenditura

Per farsi un'idea pratica del fenomeno appena discusso, si consideri un esperimento alla Young. A seguito del passaggio attraverso le fenditure, la particella è in uno stato di sovrapposizione descritto da

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) = N_1 e^{-(x-a_1)^2} + N_2 e^{-(x-a_2)^2} \quad (4.22)$$

dove si sono scelte due gaussiane come onde parziali. La matrice di densità associata è

$$\begin{aligned}
\rho_S(x, x') &= \psi^*(x)\psi(x') = \\
&= N_1^2 e^{-(x-a_1)^2-(x'-a_1)^2} + N_2^2 e^{-(x-a_2)^2-(x'-a_2)^2} + \\
&\quad + N_1 N_2 e^{-(x-a_1)^2-(x'-a_2)^2} + N_1 N_2 e^{-(x-a_2)^2-(x'-a_1)^2}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Si noti come $\rho_S(x, x')$ presenti quattro picchi (Fig. 4), due sulla diagonale e due come risultato della coerenza tra $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$. Se l'apparato fosse sufficientemente isolato, ciò darebbe origine al ben noto pattern di interferenza. Al contrario, in presenza di interazione con l'ambiente la (4.14) va a smorzare i termini non diagonali, dando luogo nel limite a uno stato misto diagonale rispetto alla posizione.

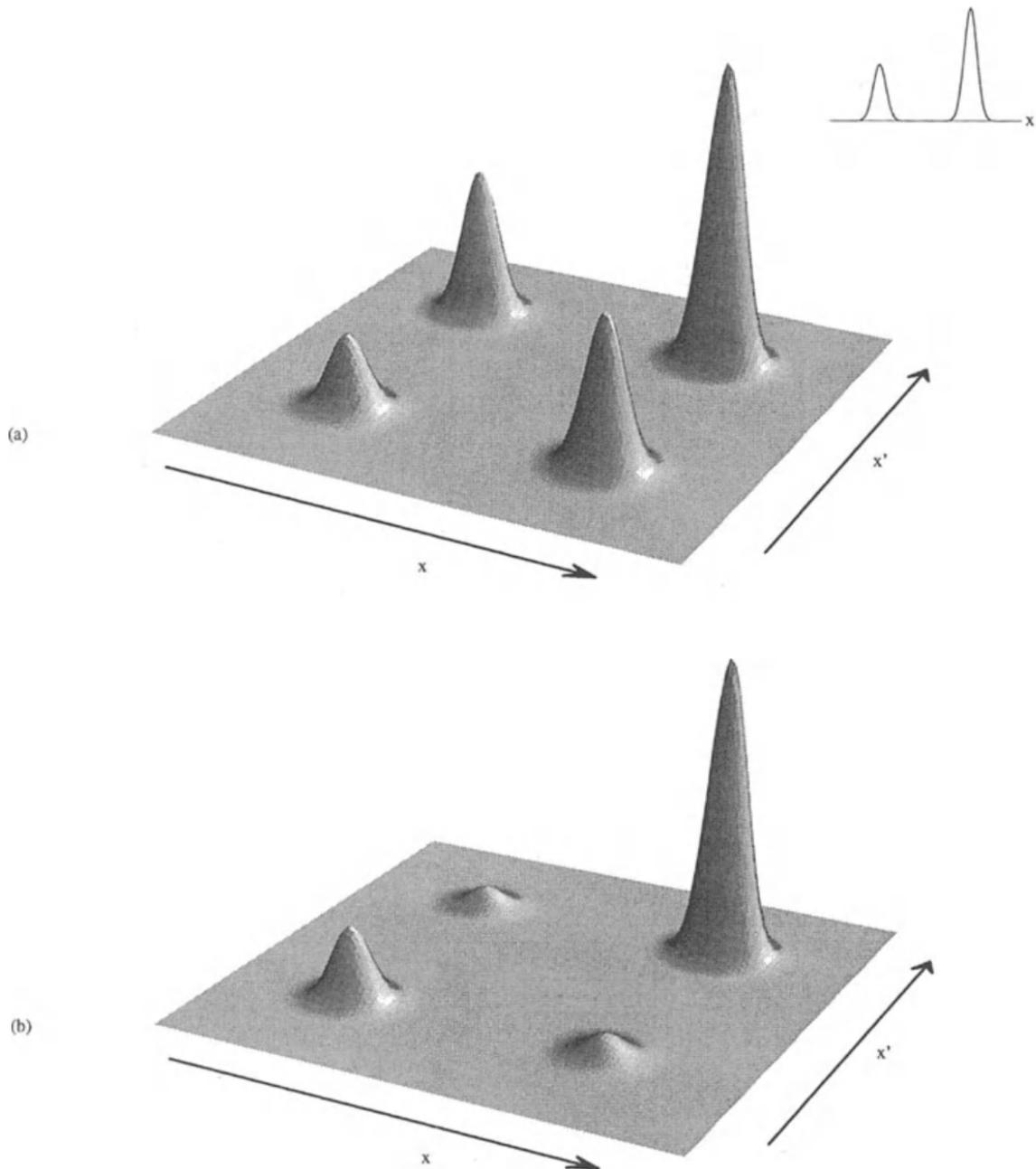


Figura 4: Rappresentazione in (x, x') di uno stato di sovrapposizione di due onde gaussiane prima (a) e dopo (b) l'intervento della decoerenza da parte dell'ambiente. I picchi non diagonali rappresentanti la coerenza tra i due stati vengono visibilmente soppressi. Immagine presa da [2]

4.3 Predictability sieve

Come si è già avuto modo di affermare, i pointer states sono contraddistinti dalla loro resistenza all'entanglement con l'ambiente. Fino ad ora, ciò coincideva con l'individuare gli autostati dell'hamiltoniana di interazione \hat{H}_{int} . Tuttavia, questo sistema non ha valenza generale, specialmente quando gli autostati di \hat{H}_{int} non coincidono con quelli dell'hamiltoniana propria del sistema \hat{H}_S . Per trovare i veri pointer states, sarebbe necessario considerare gli effetti combinati di entrambi i processi. Poiché un'analisi di tale portata non è sempre possibile, nella maggior parte dei casi si preferisce ricorrere a una qualche forma di "predictability sieve", vale a dire un criterio alternativo che misuri l'aumento di entanglement tra sistema e ambiente. La scelta più logica a tal fine è l'entropia di Boltzman locale [2]

$$S \propto -\text{Tr}(\rho_S \ln(\rho_S)) \quad (4.24)$$

Un aumento dell'entropia nel tempo corrisponde a un crescente grado di entanglement con l'ambiente. Ciò non dovrebbe sorprendere se si pensa che passare da uno stato puro a uno misto implica una perdita di informazione. Per un pointer state ci si aspetta che S resti pressoché immutata. Operativamente, è pratica comune preferire l'entropia lineare

$$S_{\text{lin}} = \text{Tr}(\rho_S - \rho_S^2) \quad (4.25)$$

a quella di Boltzman; questa, infatti, risulta più facile da computare. Inoltre, le due entropie portano praticamente ad individuare gli stessi pointer states. Ciò è logico se si nota che

$$\begin{aligned} S &\propto -\text{Tr}(\rho_S \ln \rho_S) = \\ &= \text{Tr} \left(\rho_S \left\{ (\hat{I} - \rho_S) - \frac{1}{2}(\hat{I} - \rho_S)^2 + \dots \right\} \right) \approx \\ &\approx \text{Tr}(\rho_S - \rho_S^2) = \\ &= S_{\text{lin}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ricordando la (1.14), ci si rende conto che ai fini del predictability sieve entropia lineare e purezza sono equivalenti. Vale, infatti, che

$$\begin{aligned}
 S_{\text{lin}} &= \text{Tr}(\rho_S - \rho_S^2) = \\
 &= \text{Tr}(\rho_S) - \text{Tr}(\rho_S^2) = \\
 &= 1 - \gamma
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Se ne deduce che $S_{\text{lin}} \in [0, 1]$, dove $S_{\text{lin}} = 0$ per stati puri. Si applichi questo nuovo strumento allo studio del moto browniano quantistico. La variazione di S_{lin} nel tempo è data da

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} S_{\text{lin}} &= \frac{d}{dt} \text{Tr}(\rho_S) - \frac{d}{dt} \text{Tr}(\rho_S^2) = \\
 &= \frac{d}{dt}(1) - \text{Tr}\left(\frac{d}{dt} \rho_S^2\right) = \\
 &= -\text{Tr}(\rho_S \dot{\rho}_S + \dot{\rho}_S \rho_S) = \\
 &= -2\text{Tr}(\rho_S \dot{\rho}_S)
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

dove si è usata la proprietà delle matrici quadrate $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Definendo $\dot{\rho}_S$ attraverso la (4.11) nel contesto dell'approssimazione di Markov si ottiene

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} S_{\text{lin}} &= -2\text{Tr}(\rho_S \dot{\rho}_S) = \\
 &= -2\text{Tr}(\rho_S (-\Lambda[\hat{x}, [\hat{x}, \rho]])) = \\
 &= 2\Lambda \text{Tr}(\rho_S \hat{x}^2 \rho_S - 2\rho_S \hat{x} \rho_S \hat{x} + \rho_S^2 \hat{x}^2) = \\
 &= 4\Lambda \text{Tr}(\rho_S^2 \hat{x}^2 - \rho_S \hat{x} \rho_S \hat{x})
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

dove si è posto $\Lambda = k\gamma k_B T$. Nell'istante iniziale, sia la particella nello stato puro $|\psi\rangle$. Allora si ha

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\rho_S^2 \hat{x}^2) &= \text{Tr}(\rho_S \hat{x}^2) = \langle x^2 \rangle \\
\text{Tr}(\rho_S \hat{x} \rho_S \hat{x}) &= \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \hat{x} |\psi\rangle\langle\psi| \hat{x}) = \\
&= \langle\psi|\psi\rangle \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \\
&= \langle x \rangle^2
\end{aligned} \tag{4.30}$$

e la (4.29) diventa

$$\frac{d}{dt} S_{\text{lin}} = 4\Lambda(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) \tag{4.31}$$

Si è ottenuto che i pointer states sono quegli stati con dispersione spaziale nulla. Purtroppo, questa trattazione risulta incompleta, poiché la posizione non è di norma un osservabile conservato: gli stati con posizione definita non sono autostati dell'hamiltoniana del sistema. Per il risultato corretto, è necessario tenere conto anche del ruolo svolto da \hat{H}_S nell'evoluzione del sistema.

4.3.1 Esempio: particella libera

Si porta qui a termine lo studio iniziato sopra nel caso di una particella libera. L'hamiltoniana del sistema è

$$\hat{H}_S = \frac{\hat{p}^2}{2m} \tag{4.32}$$

Descrivendo la particella attraverso una gaussiana, si giunge alla formula per l'entropia lineare [2]

$$S_{\text{lin}} = 1 - \left(\frac{3b^2}{4(\Lambda m)^2 b^2 \tau^4 + 2\Lambda m \tau^3 + 24\Lambda m b^4 \tau + 3b^2} \right)^{1/2} \quad (4.33)$$

dove $\tau = t/m$ e b è l'ampiezza dello stato iniziale. Come si può vedere in Fig. 5, allo scorrere di τ , S_{lin} cresce fino a 1, con un minimo in $b_{\text{min}} \approx \sqrt{\frac{\tau}{2\sqrt{3}}}$. Poiché b_{min} dipende dal tempo, non esiste uno stato totalmente robusto. La stima migliore per il pointer state è ottenibile integrando l'entropia nel tempo (Fig. 6)

$$I(b) = \int_0^\infty (S_{\text{lin}}(\tau) - 1) d\tau \quad (4.34)$$

e minimizzando il risultato rispetto a b . Si giunge così all'ampiezza ottimale $b_{\text{ott}} \approx \frac{1}{2}(\Lambda m)^{-1/4}$ [2].

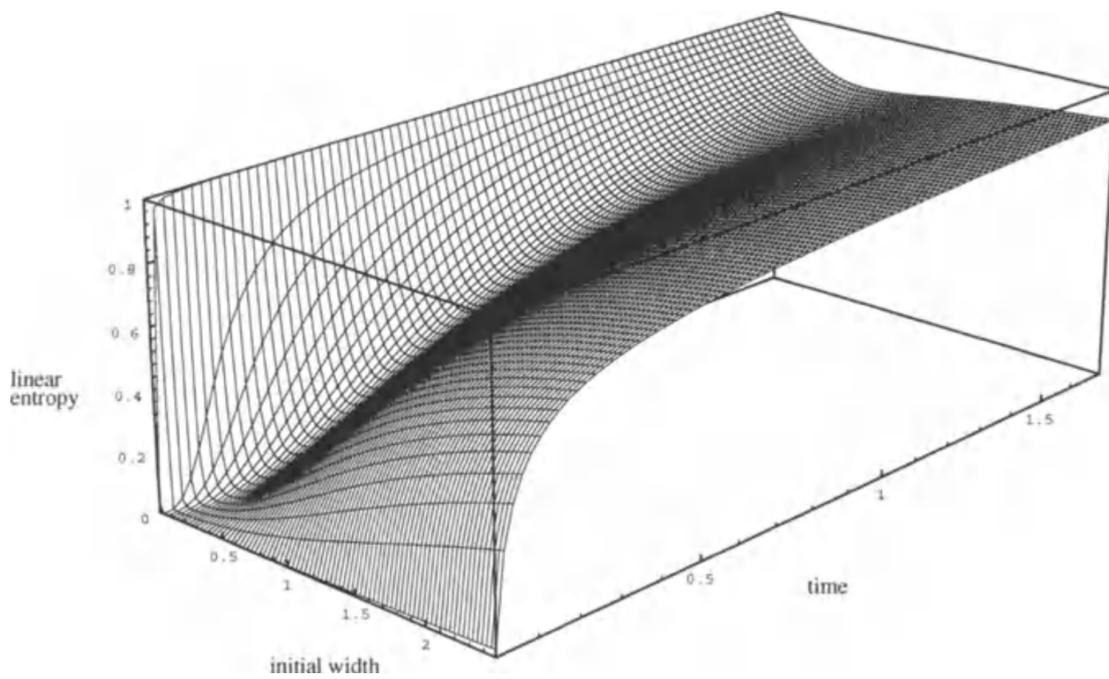


Figura 5: Andamento dell'entropia lineare per una particella libera in bagno termico. I parametri sono il tempo riscaldato $\tau = t/m$ e l'ampiezza iniziale b del pacchetto d'onda. Si è posto $\Lambda m = 1$. Immagine presa da [2]

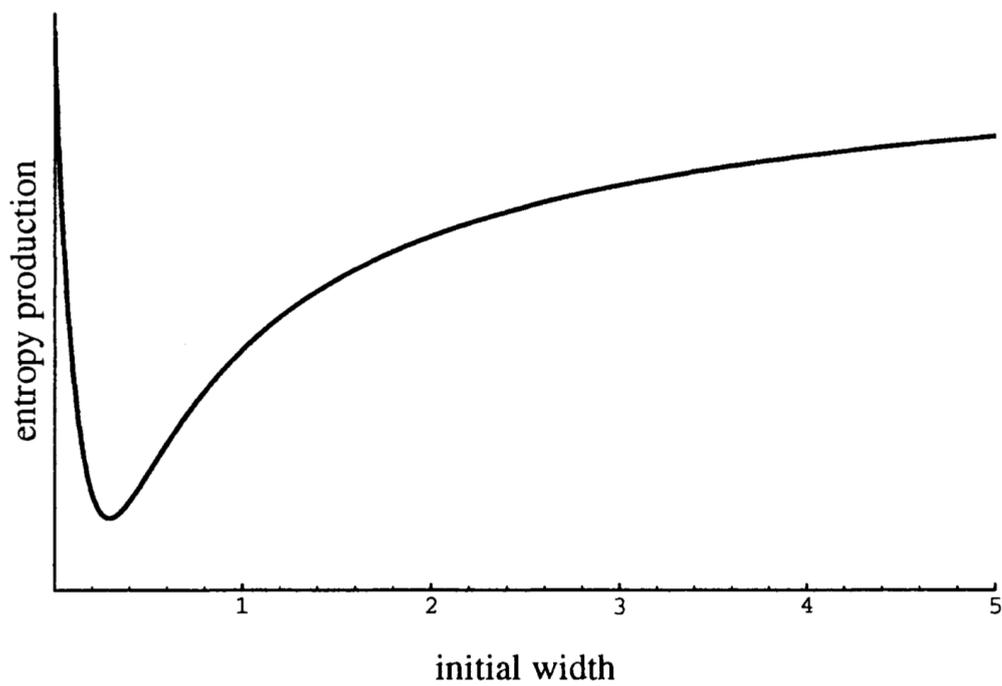


Figura 6: Integrale dell'entropia lineare sul tempo in funzione di b . Il minimo individua l'ampiezza ottimale b_{ott} . Immagine presa da [2]

Conclusione

In questo elaborato si è voluto introdurre il lettore al programma della decoerenza seguendo un approccio didattico, ossia tale da rendere l'argomento accessibile a un maggior pubblico e, auspicabilmente, da instillare in nuove menti il desiderio di approfondire i loro studi in questa affascinante branca della fisica moderna. Così facendo, si spera di aver affiancato al valore intrinseco dell'argomento trattato quello altrettanto prezioso della divulgazione scientifica.

A tal fine, si è cominciato introducendo alcuni concetti di base quali la distinzione tra stati puri e misti, oltre che il formalismo e l'interpretazione fisica delle matrici di densità totali e parziali e la relazione di queste ultime con l'operatore di traccia parziale.

Solo in un secondo momento si è passati a una vera e propria trattazione del programma della decoerenza. Se ne sono evidenziate le caratteristiche principali e i maggiori punti di contrasto con l'alternativa interpretazione di Copenahgen, primo tra tutti la centralità del concetto di sistema aperto. Sono, infatti, i sistemi aperti i nuovi protagonisti del programma della decoerenza, capaci di esibire comportamenti classici a seguito dell'interazione con l'ambiente. Quest'ultima è vista come l'unica responsabile della soppressione del principio di sovrapposizione, senza la necessità di invocare un collasso della funzione d'onda.

Dopo aver illustrato la capacità del programma della decoerenza di far emergere la classicità dal mondo quantistico, ci si è soffermati su uno dei punti nevralgici di questa nuova interpretazione, vale a dire il problema della scelta della base. A causa del principio di sovrapposizione, infatti, sussiste a priori un certo grado di ambiguità per quanto riguarda il riconoscimento dei pointer states, ossia quegli stati che poi saranno eletti a classici a seguito dell'effetto della decoerenza. L'esperienza suggerisce che la scelta ricada sull'hamiltoniana di interazione tra sistema e ambiente. Si è confermata tale intuizione in casi ideali, dimostrando come sia la natura stessa dell'interazione a dettare l'emergere di regole di superselezione, che suddividono lo spazio di Hilbert in settori in grado di preservare la coerenza fra gli stati al loro interno.

Per prepararsi allo studio di scenari meno ideali, si è introdotto il concetto di master equation nel contesto del programma della decoerenza. In particolare, si è sfruttata l'approssimazione di Markov per giungere all'equazione di Lindblad. Si è poi dimostrato come questa sia una buona approssimazione della master equation di Caldeira e Leggett, impiegata nello studio di processi di scattering.

Infine, si è trattato del “predictability sieve”: un setaccio per il riconoscimento dei pointer states che si basa sull’andamento dell’entropia (o, quasi equivalentemente, della purezza) del sistema nel tempo.

Appendici

A: Dall'envariance alla regola di Born

Si riporta una relativamente nuova dimostrazione della regola di Born

$$p(S \rightarrow S_n) = (\langle S_n | S \rangle)^2 \quad (\text{A.1})$$

che non richieda l'implementazione di un collasso della funzione d'onda [20] [21] [22]. Al contrario, essa si basa sul concetto di envariance (environment-assisted invariance)[23], una nuova simmetria dei sistemi quantici in entanglement introdotta da Wojciech H. Zurek. Nella seguente trattazione, si introduce il lettore a questa nuova proprietà, infine la si usa per ricavare la regola di Born.

Un sistema composto $|\psi\rangle$ nello spazio prodotto $H = S \otimes E$ gode di envariance rispetto a una trasformazione

$$\hat{U}_S = \hat{u}_S \otimes \hat{I}_E \quad (\text{A.2})$$

che agisca unicamente in S se esiste un'altra trasformazione

$$\hat{U}_E = \hat{I}_S \otimes \hat{u}_E \quad (\text{A.3})$$

agente solo in E che annulli l'effetto della prima. In simboli

$$|\psi\rangle \longrightarrow \hat{U}_S|\psi\rangle = |\eta\rangle \longrightarrow \hat{U}_E|\eta\rangle = |\psi\rangle \quad (\text{A.4})$$

Alternativamente, si può anche dire che \hat{u}_S sia envariant. Dovrebbe essere chiara ora la ragione per cui l'envariance è definita simmetria assistita. Nel contesto di nostro interesse, $|S\rangle$ rappresenta lo stato del sistema e $|E\rangle$ quello dell'ambiente. È evidente che nel mondo classico, dove la conoscenza completa del sistema composto implica la conoscenza dei suoi sottosistemi, una simmetria del genere non possa sussistere (se non prendendo come E l'intero universo). Al contrario, l'entanglement tra sottosistemi quantistici fa sì che lo stato del sistema totale sia definito dalla relazione tra i sottosistemi, non dagli stati stessi. Ciò lascia sufficiente flessibilità per consentire l'emergere dell'envariance. Ci si dedica ora allo studio dell'envariance per stati composti puri, tenendo presente che la generalizzazione a stati misti è sempre possibile. Ogni stato puro può essere rappresentato nella notazione di Schmidt

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |S_n\rangle |E_n\rangle \quad (\text{A.5})$$

dove $\{|S_n\rangle\}_n$ e $\{|E_n\rangle\}_n$ sono basi ortonormali rispettivamente dei sottospazi S ed E .

Lemma 1: $|\psi\rangle$ gode di envariance rispetto a ogni trasformazione unitaria che abbia gli stati di Schmidt $\{|S_n\rangle\}_n$ come autostati

$$\hat{u}_S = \sum_n e^{i\phi_n} |S_n\rangle \langle S_n| \quad (\text{A.6})$$

Dimostrazione: Per ogni \hat{u}_S esistono infinite contro-rotazioni

$$\hat{u}_E = \sum_n e^{-i\phi_n + 2\pi l_n} |E_n\rangle \langle E_n| \quad (\text{A.7})$$

con l_n intero che ne annullino l'effetto.

Lemma 2: $|\psi\rangle$ gode di enviance solo rispetto a trasformazioni unitarie che abbiano gli stati di Schmidt $\{|S_n\rangle\}_n$ come autostati.

Dimostrazione: Si procede per contraddizione. Si consideri una trasformazione unitaria \hat{u}_S non esprimibile nella forma (A.6); essa deve necessariamente trasformare gli stati $\{|S_n\rangle\}_n$ di S

$$(\hat{u}_S \otimes \hat{I}_E)|\psi\rangle = \sum_n a_n(\hat{u}_S|S_n\rangle)|E_n\rangle = \sum_n a_n|\tilde{S}_n\rangle|E_n\rangle = |\tilde{\eta}\rangle \quad (\text{A.8})$$

Affinché \hat{u}_S sia enviant, dovrebbe esistere una trasformazione \hat{u}_E tale che

$$(\hat{I}_S \otimes \hat{u}_E)|\tilde{\eta}\rangle = |\psi\rangle \quad (\text{A.9})$$

Tuttavia, una trasformazione che agisca solo su $|E\rangle$ non può modificare gli stati in S . Dunque, si è arrivati a un assurdo.

Unendo Lemma 1 e 2 si giunge alla conclusione che \hat{u}_S è enviant se e solo se è diagonale nella base di Schmidt di $|\psi\rangle$. Come conseguenza immediata, trasformazioni enviant possono agire solo sulla fase dei coefficienti di Schmidt. Si può ora dimostrare il seguente teorema.

Teorema 1: Dato lo stato composto non separabile $|\psi\rangle$, tutte le proprietà misurabili di S non dipendono dalle fasi dei coefficienti di Schmidt e $|S\rangle$ è univocamente definito dalle coppie $\{|a_n|, |S_n\rangle\}_n$.

Dimostrazione: Si applichi al sistema $|\psi\rangle$ la trasformazione enviant \hat{u}_S , che potrebbe potenzialmente modificare lo stato $|S\rangle$. Si applichi ora la trasformazione associata \hat{u}_E che, per enviance, riporta $|\psi\rangle$ allo stato di partenza. A seguito delle due trasformazioni, $|S\rangle$ e $|E\rangle$ sono necessariamente ritornati alla condizione iniziale. Tuttavia, \hat{u}_E non può aver agito su $|S\rangle$ per definizione. Dunque, l'unico modo per cui $|S\rangle$ sia tornato allo stato iniziale e che non sia stato modificato neanche da \hat{u}_S . Poiché si è dimostrato che le trasformazioni enviant possono solo modificare la fase dei coefficienti di Schmidt, questi ultimi non possono partecipare alla determinazione dello stato $|S\rangle$ e delle sue proprietà.

Ci si dedica ora al caso particolare di stati pari, ossia con coefficienti di Schmidt di stesso modulo

$$|\psi\rangle \propto \sum_n e^{i\phi_n} |S_n\rangle |E_n\rangle \quad (\text{A.10})$$

Lemma 3: Stati pari godono di invarianza rispetto a operatori di scambio del tipo

$$\hat{u}_S(l \leftrightarrow k) = |S_l\rangle\langle S_k| + |S_k\rangle\langle S_l| \quad (\text{A.11})$$

Dimostrazione: Si consideri la base di Hadamard

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|S_l\rangle \pm |S_k\rangle) \quad (\text{A.12})$$

da cui

$$\begin{aligned} |S_l\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \\ |S_k\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

L'operatore di scambio $\hat{u}_S(l \leftrightarrow k)$ può essere scritto in forma diagonale nella base di Hadamard

$$\begin{aligned} \hat{u}_S(l \leftrightarrow k) &= |S_l\rangle\langle S_k| + |S_k\rangle\langle S_l| = \\ &= \frac{1}{2}(|+\rangle\langle +| - |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle -|) = \\ &= |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Inoltre, la nuova base $\{|S_n\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}_{n \neq l, k}$ è ancora una base di Schmidt; infatti,

$$\langle S_n | \pm \rangle = \langle + | - \rangle = 0 \quad (\text{A.15})$$

e riscrivendo $|\psi\rangle$ come

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{n \neq l, k} e^{i\phi_n} |S_n\rangle |E_n\rangle + e^{i\phi_l} |S_l\rangle |E_l\rangle + e^{i\phi_k} |S_k\rangle |E_k\rangle = \\ &= \sum_{n \neq l, k} \dots + e^{i\phi_l} \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) |E_l\rangle + e^{i\phi_k} \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle) |E_k\rangle = \\ &= \sum_{n \neq l, k} \dots + e^{i\phi_l} \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle |E_l\rangle + e^{i\phi_l} \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle |E_l\rangle + e^{i\phi_k} \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle |E_k\rangle - e^{i\phi_k} \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle |E_k\rangle = \\ &= \sum_{n \neq l, k} \dots + |+\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\phi_l} |E_l\rangle + e^{i\phi_k} |E_k\rangle) + |-\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\phi_l} |E_l\rangle - e^{i\phi_k} |E_k\rangle) = \\ &= \sum_{n \neq l, k} \dots + |+\rangle |E_+\rangle + |-\rangle |E_-\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

dove si sono definiti

$$\begin{aligned} |E_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\phi_l} |E_l\rangle + e^{i\phi_k} |E_k\rangle) \\ |E_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\phi_l} |E_l\rangle - e^{i\phi_k} |E_k\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

è immediato verificare che

$$\langle E_n | E_\pm \rangle = \langle E_+ | E_- \rangle = 0 \quad (\text{A.18})$$

Si è, dunque, dimostrato che la base $\{|S_n\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}_{n \neq l, k}$ è di Schmidt e che i suoi elementi

sono autostati dell'operatore di scambio \hat{u}_S . Per Lemma 1 e 2, ciò è sufficiente a dimostrare che \hat{u}_S sia envariant. Per una dimostrazione alternativa più operativa, è facile verificare che l'operatore di scambio su E

$$\hat{u}_E(l \leftrightarrow k) = e^{i(\phi_l - \phi_k)} |E_l\rangle\langle E_k| + e^{-i(\phi_l - \phi_k)} |E_k\rangle\langle E_l| \quad (\text{A.19})$$

ricostituisca lo stato iniziale di $|\psi\rangle$.

Si può finalmente dimostrare una prima versione della regola di Born.

Teorema 2: Stati di Schmidt $\{|S_n\rangle\}_n$ aventi coefficienti con stesso modulo hanno anche stessa probabilità.

Dimostrazione: Dal Teorema 1 e Lemma 3 è noto che lo scambio di due elementi della base di Schmidt ad opera della trasformazione envariant $\hat{u}_S(l \leftrightarrow k)$ non modifica le proprietà di $|S\rangle$, incluse le probabilità associate ai vari $|S_n\rangle$. Dunque, per simmetria $|S_l\rangle$ e $|S_k\rangle$ devono avere stessa probabilità associata. In generale, dato $|\psi\rangle \propto \sum_{n=1}^N e^{i\phi_n} |S_n\rangle |E_n\rangle$ si avrà

$$p_n = p(|S_n\rangle) = \frac{1}{N} \quad \forall n \quad (\text{A.20})$$

per normalizzazione delle probabilità.

Resta ora solo da generalizzare questo risultato al caso con coefficienti di Schmidt non aventi stesso modulo. In particolare, ci si dedica al caso in cui i moduli dei coefficienti di Schmidt siano radici di numeri razionali. Si consideri cioè

$$|\psi\rangle \propto \sum_{k=1}^N \sqrt{m_k} e^{i\phi_k} |S_k\rangle |E_k\rangle \quad (\text{A.21})$$

dove m_k è un numero naturale. Alla (A.21) si aggiunga un ulteriore sottosistema $|C\rangle$ con $\{|C_k\rangle\}_k$ base ortonormale.

$$|\psi\rangle \propto \sum_{k=1}^N \sqrt{m_k} e^{i\phi_k} |S_k\rangle |E_k\rangle |C_k\rangle \quad (\text{A.22})$$

Inoltre, il sottospazio C è scelto con dimensione tale da consentire

$$|C_k\rangle = \sum_{j_k=\mu_{k-1}+1}^{\mu_k} \frac{1}{\sqrt{m_k}} |c_{j_k}\rangle \quad (\text{A.23})$$

dove $\mu_k = \mu_{k-1} + m_k$ e $\mu_0 = 0$. Immaginiamo che $|E\rangle$ e $|C\rangle$ interagiscano instaurando una correlazione

$$|c_{j_k}\rangle |E_k\rangle \rightarrow |c_{j_k}\rangle |e_{j_k}\rangle \quad (\text{A.24})$$

dove $\{e_{j_k}\}_{j_k}$ sono stati ortonormali di E . La (A.22) si è quindi evoluta in

$$|\psi\rangle \propto \sum_{j_k=1}^M e^{i\phi_{j_k}} |S_{k(j_k)}\rangle |c_{j_k}\rangle |e_{j_k}\rangle \quad (\text{A.25})$$

dove $M = \sum_{k=1}^N m_k = \mu_N$ e $k(j_k)$ è la funzione "a gradini" tale che $k(j_k) = k$ quando $\mu_{k-1} < j_k \leq \mu_k$. Ci si è così ricondotti al caso di $|\psi\rangle$ pari. Dunque, è lecito affermare che

$$p_{j_k} = p(|S_{k(j_k)}\rangle |c_{j_k}\rangle) = \frac{1}{M} \quad (\text{A.26})$$

da cui, per somma di probabilità di eventi indipendenti, si ottiene

$$p_k = \sum_{j_k=\mu_{k-1}+1}^{\mu_k} p(|S_k(j_k)\rangle|c_{j_k}\rangle) = \frac{m_k}{M} \quad (\text{A.27})$$

che è la regola di Born.

Si riconosce che la precedente trattazione possa apparire poco chiara o, comunque, non banale. Si fornisce, perciò, un esempio concreto con l'intento di favorire una comprensione più esperienziale della strada appena seguita. Si consideri

$$|\psi\rangle \propto \sqrt{2}e^{i\phi_1}|S_1\rangle|E_1\rangle|C_1\rangle + \sqrt{3}e^{i\phi_2}|S_2\rangle|E_2\rangle|C_2\rangle \quad (\text{A.28})$$

Dalla (A.23) si ottiene che

$$\begin{aligned} |C_1\rangle &= \sum_{j_1=\mu_0+1}^{\mu_1} \frac{1}{\sqrt{2}}|c_{j_1}\rangle = \sum_{j_1=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2}}|c_{j_1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|c_1\rangle + |c_2\rangle) \\ |C_2\rangle &= \sum_{j_2=\mu_1+1}^{\mu_2} \frac{1}{\sqrt{3}}|c_{j_2}\rangle = \sum_{j_2=3}^5 \frac{1}{\sqrt{3}}|c_{j_2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|c_3\rangle + |c_4\rangle + |c_5\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

dove si è usato $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = \mu_0 + 2 = 2$ e $\mu_2 = \mu_1 + 3 = 5$. A seguito dell'interazione tra $|E\rangle$ e $|C\rangle$, $|\psi\rangle$ diventa della forma (A.25). Nel nostro esempio $M = \sum_{k=1}^2 m_k = 2 + 3 = 5$; inoltre, $k(1) = k(2) = 1$ e $k(3) = k(4) = k(5) = 2$. Dunque, la (A.25) può essere esplicitata come

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\propto e^{i\phi_1}|S_k(1)\rangle|c_1\rangle|e_1\rangle + e^{i\phi_2}|S_k(2)\rangle|c_2\rangle|e_2\rangle + e^{i\phi_3}|S_k(3)\rangle|c_3\rangle|e_3\rangle + \\ &\quad + e^{i\phi_4}|S_k(4)\rangle|c_4\rangle|e_4\rangle + e^{i\phi_5}|S_k(5)\rangle|c_5\rangle|e_5\rangle = \\ &= e^{i\phi_1}|S_1\rangle|c_1\rangle|e_1\rangle + e^{i\phi_2}|S_1\rangle|c_2\rangle|e_2\rangle + e^{i\phi_3}|S_2\rangle|c_3\rangle|e_3\rangle + \\ &\quad + e^{i\phi_4}|S_2\rangle|c_4\rangle|e_4\rangle + e^{i\phi_5}|S_2\rangle|c_5\rangle|e_5\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

da cui

$$p_{j_k} = p(|S_{k(j_k)}\rangle|c_{j_k}\rangle) = \frac{1}{M} = \frac{1}{5} \quad (\text{A.31})$$

Infine, sommando sugli eventi con stesso $|S_k\rangle$ si ottiene $p_1 = 2/5$ e $p_2 = 3/5$, come previsto dalla regola di Born.

Per generalizzare al caso di coefficienti con moduli reali basti ricordare che \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} .

Bibliografia

- [1] Sfera di bloch. https://it.wikipedia.org/wiki/Sfera_di_Bloch.
- [2] Erich Joos, H. Dieter Zeh, Claus Kiefer, Domenico J. W. Giulini, Joachim Kupsch, and Ion-Olimpiu Stamatescu. *Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] H. Dieter Zeh. On the interpretation of measurement in quantum theory. *Foundations of Physics*, 1:69–76, 1970.
- [4] H. Dieter Zeh. Toward a quantum theory of observation. *Foundations of Physics*, 3(1):109–116, 1973.
- [5] H. Dieter Zeh. Emergence of classical time from a universal wavefunction. *Physics Letters A*, 116(1):9–12, 1986.
- [6] D. Ter Haar. Theory and applications of the density matrix. *Reports on progress in Physics*, 24(1):304, 1961.
- [7] Diego Emilio. Introduction to mixed states and the density matrix. <https://www.youtube.com/watch?v=lh-OGRGrMwE&list=PLhI5X1mNN8ghnH1ckAcclxY6-CPmZvWrk>.
- [8] Diego Emilio. Density matrix of pure states. https://www.youtube.com/watch?v=Tka-B1E4_14&list=PLhI5X1mNN8ghnH1ckAcclxY6-CPmZvWrk&index=2.
- [9] Diego Emilio. Density matrix of mixed states. <https://www.youtube.com/watch?v=8ADpP6tEqBU&list=PLhI5X1mNN8ghnH1ckAcclxY6-CPmZvWrk&index=3>.
- [10] Diego Emilio. Diagonal elements of the density matrix. <https://www.youtube.com/watch?v=e2uvpqJm9Jk&list=PLhI5X1mNN8ghnH1ckAcclxY6-CPmZvWrk&index=7>.
- [11] Diego Emilio. Off-diagonal elements of the density matrix state purity. <https://www.youtube.com/watch?v=n54d5R96SPQ&list=PLhI5X1mNN8ghnH1ckAcclxY6-CPmZvWrk&index=8>.

-
- [12] Diego Emilio. The bloch sphere mixed states (the bloch ball). <https://www.youtube.com/watch?v=ZZVQ9kaGzt0&list=PLhI5X1mNN8ghnH1ckAcclxY6-CPmZvWrk&index=15>.
- [13] Diego Emilio. Pauli string decomposition of density matrices. <https://www.youtube.com/watch?v=kgkap7-Kt4Y&list=PLhI5X1mNN8ghnH1ckAcclxY6-CPmZvWrk&index=17>.
- [14] Diego Emilio. The partial trace. <https://www.youtube.com/watch?v=L70TVZHYOsM&list=PLhI5X1mNN8ghnH1ckAcclxY6-CPmZvWrk&index=11>.
- [15] Diego Emilio. The reduced density matrix. <https://www.youtube.com/watch?v=rUx2uYZpLkA&list=PLhI5X1mNN8ghnH1ckAcclxY6-CPmZvWrk&index=10>.
- [16] Diego Emilio. The partial trace (additional details). <https://www.youtube.com/watch?v=Vu4arfkOsZQ&list=PLhI5X1mNN8ghnH1ckAcclxY6-CPmZvWrk&index=12>.
- [17] Diego Emilio. Reduced density matrix - example. <https://www.youtube.com/watch?v=grLMjvHE3gs&list=PLhI5X1mNN8ghnH1ckAcclxY6-CPmZvWrk&index=13>.
- [18] Andrei O. Barvinsky and Alexander Yu Kamenshchik. Preferred basis, decoherence and the quantum state of the universe. In *From Quantum to Classical: Essays in Honour of H.-Dieter Zeh*, pages 97–120. Springer, 2022.
- [19] Particle physics - chapter 5 - K^0 mesons - ckm matrix. https://www.roma1.infn.it/~bagnaia/obsolete/particle_physics_12/05_k0_meson.pdf.
- [20] Wojciech H. Zurek. Probabilities from entanglement, born's rule $p_k = |\psi_k|^2$ from envariance. *Physical Review A*, 71(5):052105, 2005.
- [21] Decoherence and the quantum theory of the classical – ictp colloquium. <https://www.youtube.com/watch?v=7Sn63t3BeMc>.
- [22] Wojciech zurek — emergence of the classical from within the quantum universe. <https://www.youtube.com/watch?v=kEt38oCjQzo&t=1773s>.
- [23] Wojciech H. Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of modern physics*, 75(3):715, 2003.