

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

**Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica**

# **Equazioni di Einstein linearizzate e gauge TT per le onde gravitazionali**

**Relatore:  
Prof. Roberto Balbinot**

**Presentata da:  
Edoardo Nanni**

Anno Accademico 2022/2023

# Sommario

In questa tesi affronteremo uno studio introduttivo incentrato sulla radiazione gravitazionale. Nei primi due capitoli si traccia una rapida disamina di concetti inerenti la geometria differenziale che svolgono un ruolo fondamentale nella formulazione della Relatività Generale e si espongono le fondamenta della teoria, dai principi fondamentali alle equazioni di campo di Einstein. Nel terzo capitolo si sviluppa il formalismo matematico con cui tratteremo le onde gravitazionali, definendo il regime di campo debole e le trasformazioni di gauge, e si ricavano le equazioni di Einstein linearizzate, mostrando come semplificarne la risoluzione utilizzando il gauge di Lorentz. Il quarto capitolo è dedicato alla risoluzione delle equazioni di Einstein linearizzate nel gauge di Lorentz in assenza di sorgenti: analizzeremo la soluzione sotto forma di onda piana, determinandone componenti fisiche indipendenti e stati di polarizzazione, e studiandone gli effetti su particelle test libere in moto geodetico. Nel quinto capitolo si analizza il principio di funzionamento di un interferometro gravitazionale, descrivendo inoltre l'attuale rete di rilevazione di onde gravitazionali. Infine nel sesto capitolo si affronta il problema della risoluzione delle equazioni di Einstein linearizzate nel gauge di Lorentz in presenza di sorgenti: si ricava una soluzione particolare tramite funzione di Green ritardata e a partire da questa si determina la formula di quadrupolo, con cui metteremo in luce la natura quadrupolare della radiazione gravitazionale e studieremo un sistema binario di oggetti compatti di massa identica in moto circolare attorno al centro di massa. In appendice si ripercorre rapidamente il percorso delineato nei sei capitoli dell'elaborato, ma applicandolo alla teoria elettromagnetica di Maxwell e alle onde elettromagnetiche, mostrando così la forte analogia con il caso gravitazionale.

# Indice

<b>Introduzione</b> .....	<b>3</b>
<b>1. Capitolo 1: Elementi di geometria differenziale</b> .....	<b>5</b>
1.1. Varietà differenziabili e tensori .....	5
1.2. Tensore metrico .....	7
1.3. Derivata covariante e connessione affine .....	8
1.4. Connessione affine, metrica e parallelismo .....	9
1.5. Tensore di Riemann e curvatura .....	10
<b>2. Capitolo 2: Elementi di teoria della Relatività Generale</b> .....	<b>12</b>
2.1. Principi della Relatività Generale .....	12
2.2. Moto di una particella in caduta libera .....	14
2.3. Equazioni di campo di Einstein .....	15
2.4. Deviazione geodetica .....	17
<b>3. Capitolo 3: Equazioni di campo di Einstein linearizzate</b> .....	<b>18</b>
3.1. Regime di campo debole, trasformazioni di Lorentz e di gauge .....	18
3.2. Confronto con le trasformazioni di gauge elettromagnetiche .....	20
3.3. Equazioni di campo di Einstein linearizzate .....	21
3.4. Gauge di Lorentz .....	23
<b>4. Capitolo 4: Onde gravitazionali in assenza di sorgenti</b> .....	<b>25</b>
4.1. Onde gravitazionali piane .....	25
4.2. Gauge TT .....	26
4.3. Stati di polarizzazione .....	28
4.4. Effetto di un'onda gravitazionale su particelle test - Distanza propria .....	29
4.5. Effetto di un'onda gravitazionale su particelle test - Deviazione geodetica .....	30
4.6. Effetto di un'onda gravitazionale su particelle test - Anello di particelle .....	32
<b>5. Capitolo 5: Rilevazione delle onde gravitazionali</b> .....	<b>35</b>
5.1. Tipologie di rilevatori .....	35
5.2. Interferometri a laser .....	35
5.3. Rete interferometrica attuale .....	39
<b>6. Capitolo 6: Onde gravitazionali in presenza di sorgenti</b> .....	<b>41</b>
6.1. Risoluzione dell'equazione d'onda con sorgente .....	41
6.2. Soluzione mediante una funzione di Green ritardata .....	43
6.3. Verifica del gauge di Lorentz .....	45
6.4. Formula di quadrupolo .....	46
6.5. Sistema binario .....	48
<b>Conclusioni</b> .....	<b>51</b>
<b>Appendice</b> .....	<b>52</b>
<b>A. Appendice A: Onde elettromagnetiche</b> .....	<b>52</b>
A.1. Equazioni di Maxwell e trasformazioni di gauge .....	52
A.2. Gauge di Lorentz .....	53
A.3. Onde elettromagnetiche in assenza di sorgenti .....	54
A.4. Stati di polarizzazione .....	57
A.5. Onde elettromagnetiche in presenza di sorgenti .....	58
<b>Bibliografia</b> .....	<b>59</b>

# Introduzione

La radiazione gravitazionale è uno dei numerosi fenomeni fisici che esulano dalla teoria della gravitazione di Newton e che sono invece predetti dalla teoria della Relatività Generale di Albert Einstein. Intuitivamente, la radiazione gravitazionale consiste nell'insieme di tutti quei fenomeni riguardanti perturbazioni, generate da eventi di natura gravitazionale, che si propagano e comportano come onde. Una tale fenomenologia non emerge nella teoria newtoniana in quanto classicamente la gravitazione è intesa come interazione a distanza in grado di "trasmettersi" a velocità infinita. Nello specifico, in questo elaborato, ci limiteremo a descrivere propagazione e generazione di onde gravitazionali in uno spaziotempo che si discosta lievemente dallo spaziotempo piatto di Minkowski, ossia uno spaziotempo quasi piatto. In virtù di questa ipotesi tratteremo le equazioni di campo di Einstein perturbativamente, ricercando una soluzione che si discosti dalla metrica di Minkowski per effetto di piccole correzioni perturbative, di cui ci limiteremo a considerare soltanto quella al primo ordine. Dimosteremo che tale correzione, che descrive le piccole perturbazioni di curvatura di uno spaziotempo quasi piatto, è soluzione delle cosiddette equazioni di campo di Einstein linearizzate e che queste sono riconducibili ad un'equazione delle onde di d'Alembert: mostreremo così che nel linguaggio della Relatività Generale le onde gravitazionali sono perturbazioni della curvatura dello spaziotempo che si propagano alla velocità della luce. Anticipiamo brevemente il contenuto dei capitoli in cui si articola l'elaborato:

- Il primo capitolo consiste in una rapida rassegna di concetti inerenti la geometria differenziale che svolgono ruoli di rilievo nella formalizzazione matematica della Relatività Generale e a cui faremo riferimento nei capitoli successivi. Dopo aver introdotto alcuni oggetti fondamentali definiti su una varietà differenziabile, descriveremo in particolare tensore metrico, derivazione covariante e connessione affine, parallelismo ed equazione delle geodetiche, curvatura e tensore di Riemann.
- Nel secondo capitolo si espongono brevemente le basi della teoria della Relatività Generale: si enunciano i principi fondamentali, si descrivono i passaggi concettuali che portano alla formalizzazione matematica della teoria e si fornisce una rapida derivazione intuitiva delle equazioni di campo di Einstein. Si descrive infine il concetto di deviazione geodetica.
- Nel terzo capitolo si introducono le ipotesi di lavoro e gli strumenti matematici con cui tratteremo le onde gravitazionali: definiremo i concetti di regime di campo debole e trasformazione di gauge, e ricaveremo le equazioni di Einstein linearizzate, semplificandone la risoluzione utilizzando il gauge di Lorentz. Si sottolinea inoltre la somiglianza tra la teoria descritta dalle equazioni di Einstein linearizzate, invariante per trasformazioni di gauge, e la teoria elettromagnetica descritta dalle equazioni di Maxwell, invariante per trasformazioni di gauge elettromagnetiche.
- Nel quarto capitolo si affronta la risoluzione delle equazioni di Einstein linearizzate nel gauge di Lorentz in assenza di sorgenti analizzando in particolare la soluzione sotto forma di onda gravitazionale piana: utilizzando il gauge di Lorentz trasverso a traccia nulla ne metteremo in luce le componenti fisiche indipendenti e ne definiremo i possibili stati di polarizzazione, ossia lineare, tipo  $+$  e  $\times$ , e circolare. Infine studieremo gli effetti del passaggio di onde gravitazionali piane, nei possibili stati di polarizzazione lineare e circolare, su particelle test libere in moto geodetico, descrivendo in particolare la conseguente variazione della distanza propria che le separa.
- Il quinto capitolo è dedicato ad una elementare analisi dei principi di funzionamento degli interferometri a laser, i rilevatori di onde gravitazionali dotati ad oggi della maggiore sensibilità: descriveremo in particolare la variazione attesa della lunghezza dei bracci di un interferometro al passaggio di un'onda gravitazionale piana e citeremo le principali fonti di rumore e come queste possano essere controllate. Infine descriveremo l'attuale rete di rilevatori e citeremo in particolare il rilevatore LIGO, protagonista nel 2015 della prima rilevazione di un'onda gravitazionale.

- Nel sesto capitolo si tratta infine la risoluzione delle equazioni di Einstein linearizzate nel gauge di Lorentz in presenza di sorgenti: si descrive il metodo di ricerca di una soluzione particolare attraverso una funzione di Green ritardata, precisandone l'interpretazione fisica e dimostrandone la compatibilità con il gauge di Lorentz. A partire dall'espressione per una soluzione particolare si deriva la cosiddetta formula di quadrupolo, con cui mostreremo la natura quadrupolare delle onde gravitazionali e analizzeremo la radiazione prodotta da un sistema binario di due oggetti compatti di massa identica in moto circolare attorno al centro di massa. Utilizzeremo questo esempio particolare per stimare l'ordine di grandezza caratteristico dell'ampiezza di un'onda gravitazionale.
- In appendice si tratta molto rapidamente la teoria elettromagnetica per completare l'analogia con il caso gravitazionale descritta in parte all'interno del terzo capitolo. Si introducono le equazioni di Maxwell e la possibilità di operare trasformazioni di gauge sul quadripotenziale elettromagnetico, si descrive il gauge di Lorentz e il problema della risoluzione delle equazioni di Maxwell nel gauge di Lorentz in assenza e in presenza di sorgenti: nel primo caso si analizza un'onda elettromagnetica piana determinandone le componenti fisiche indipendenti, nel secondo si descrive la risoluzione tramite funzione di Green ritardata e il fatto che, diversamente dal caso gravitazionale, la radiazione elettromagnetica presenta anche contributi di carattere dipolare.

Concludiamo l'introduzione precisando alcune convenzioni che utilizzeremo nell'elaborato. Adotteremo il sistema di unità di misura di Gauss e la corrispondente forma delle equazioni elettromagnetiche, ponendo inoltre la velocità della luce nel vuoto  $c$  pari ad 1. Notiamo che questa scelta implica che le velocità siano grandezze adimensionali e conseguentemente che lunghezze e intervalli temporali abbiano le stesse unità di misura. A proposito dell'indicizzazione delle componenti di quantità tensoriali adotteremo la convenzione di attribuire alla componente temporale il valore 0, mentre a quelle spaziali i valori 1, 2 e 3; inoltre indicheremo con una lettera latina un indice che assume solo i valori spaziali,  $i = 1, 2, 3$ , e con una lettera greca un indice che assume invece anche il valore temporale 0,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  (nel primo capitolo, dove tratteremo brevemente varietà differenziabili  $n$ -dimensionali generiche, gli indici greci assumo valori da 1 a  $n$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ ). Infine riguardo la definizione del tensore metrico per uno spaziotempo generico, e in particolare quindi per lo spaziotempo piatto di Minkowski, sceglieremo per convenzione la segnatura  $(- + + +)$ .

# Capitolo 1

## Elementi di geometria differenziale

La geometria differenziale è lo strumento che permette di formalizzare matematicamente la teoria della Relatività Generale come generalizzazione della Relatività Speciale. Sinteticamente, all'interno di quest'ultima: **I.** non sono contemplati i fenomeni gravitazionali, **II.** ci si riferisce soltanto ad osservatori inerziali e **III.** le trasformazioni di coordinate per passare da un osservatore all'altro sono unicamente quelle del gruppo di Lorentz. Sviluppando la teoria della Relatività Generale emerge la possibilità di: **I.** descrivere i fenomeni gravitazionali, **II.** considerare osservatori non inerziali e **III.** passare da un osservatore all'altro attraverso una trasformazione di coordinate generiche, utilizzando proprio gli strumenti forniti dalla geometria differenziale. Attraverso questi strumenti emerge inoltre che uscire dal contesto della Relatività Speciale significa, fondamentalmente, abbandonare lo spaziotempo di Minkowski, *piatto*, spostandoci in un più generico spaziotempo *curvo*.

### 1.1 Varietà differenziabili e tensori

Sinteticamente la geometria differenziale consiste nello studio di un insieme geometrico di punti e di oggetti definiti al suo interno. A tali punti vengono associate delle *coordinate*, nelle quali gli oggetti saranno caratterizzati da certe *componenti*: uno degli aspetti della geometria differenziale è studiare come cambiano tali componenti sotto un cambio di coordinate *arbitrario*.

Consideriamo come insieme di punti una *varietà differenziabile*, ossia uno spazio topologico  $\mathcal{U}$  ricopribile da un *atlante*, cioè un insieme di *carte compatibili*: una carta è una coppia  $(A, \phi)$  dove  $A \subseteq \mathcal{U}$  è un aperto e  $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una *mappa*, ossia un'applicazione che associa ad un punto  $P \in A$  una n-upla di coordinate  $\phi(P) = x^\mu(P)$   $\mu = 1, \dots, n$ ; la richiesta di compatibilità impone che, date due carte che coprono una stessa regione, le due mappe corrispondenti siano in corrispondenza biunivoca attraverso una funzione invertibile  $M \in C^p(\mathbb{R}^n)$ , la varietà è allora n-dimensionale e p-differenziabile. Per ricoprire  $\mathcal{U}$  le carte  $(A_i, \phi_i)$  dell'atlante devono soddisfare:  $\cup_i A_i \supseteq \mathcal{U}$ . Definiamo adesso alcuni oggetti fondamentali associati alla varietà: *curve*, *funzioni*, *vettori*, *1-forme* e *tensori*.

**Curva:** applicazione continua da un intervallo reale  $I \subseteq \mathbb{R}$  alla varietà:  $\gamma: I \rightarrow \mathcal{U}$

L'immagine di tale applicazione costituirà un sottoinsieme unidimensionale della varietà formato da punti indicizzati da un parametro reale  $\lambda$  che assume valori all'interno dell'intervallo reale  $I$ .

**Funzione:** applicazione da un sottoinsieme della varietà  $A \subseteq \mathcal{U}$  a  $\mathbb{R}$ :  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Introducendo due carte che coprono il sottoinsieme  $A$  con mappe associate  $\phi = x^\mu$  e  $\psi = y^\nu$  dovrà valere  $f(\phi^{-1}(x^\mu(P))) = f(P) = f(\psi^{-1}(y^\nu(P)))$ , cioè indipendentemente dalle coordinate che utilizziamo il risultato deve essere lo stesso. Le funzioni vengono perciò dette anche *campi scalari*.

**Vettore:** tangente ad una curva  $\gamma$  in  $P$ , funzionale lineare che associa ad una funzione  $f$  la propria derivata lungo la curva calcolata in  $P$ :

$$\vec{v}(f) = \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{P=\gamma(\lambda_P)} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda_P + \Delta\lambda) - f(\lambda_P)}{\Delta\lambda} \quad [1.1]$$

Dove indichiamo  $f \circ \gamma \equiv f$ . Introducendo un set di coordinate  $\phi = x^\mu$  vale:

$$\vec{v}(f) = \frac{d}{d\lambda}(f \circ \gamma) = \frac{d}{d\lambda}(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma) = \frac{d}{d\lambda}f(x^\mu(\lambda)) = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} f \quad [1.2]$$

Formalmente introduciamo così la seguente notazione:

$$\vec{v} = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = v^\mu \vec{e}_\mu \quad \text{con:} \quad v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad \vec{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad [1.3]$$

$\vec{e}_\mu$  è il vettore tangente alla  $\mu$ -esima *curva coordinata* definita da  $x^\nu = \text{cost}$  per  $\forall \nu \neq \mu$ . Questa notazione rende evidente la legge di trasformazione per le componenti dei vettori e per i vettori  $\vec{e}_\mu$ :

$$v^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{d\lambda} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = M^{\mu'}_\nu v^\nu, \quad \vec{e}_{\mu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = M^\nu_{\mu'} \vec{e}_\nu \quad [1.4]$$

Dove  $M^{\mu'}_\nu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}$  e  $M^\nu_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}$  sono rispettivamente la matrice jacobiana del cambio di coordinate  $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\nu)$  e la sua inversa ( $M^{\alpha'}_\nu M^\nu_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$  e  $M^\alpha_\nu M^\nu_\beta = \delta^\alpha_\beta$ ), un cambio di coordinate  $M$  deve infatti essere un'applicazione biunivoca come richiesto dalla compatibilità delle carte della varietà. In particolare quindi dovrà valere  $J = \det\left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}\right) \neq 0$  e ciò implica che i vettori  $\vec{e}_\mu$  siano linearmente indipendenti: essi svolgono dunque il ruolo di base per i vettori definiti in un punto  $P$  della varietà, che sono esprimibili come loro combinazioni lineari; l'insieme di tali vettori forma uno spazio vettoriale detto *spazio tangente* in  $P$ ,  $T_P$ , e i  $\vec{e}_\mu$  sono detti *vettori di base coordinati*. Notiamo infine che il vettore in quanto oggetto geometrico è invariante sotto il cambio di coordinate, infatti:  $\vec{v} = v^\mu \vec{e}_\mu = M^{\alpha'}_\mu M^\mu_{\beta'} v^{\beta'} \vec{e}_{\alpha'} = v^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}$ .

**1-forma:** funzionale lineare che associa ad un vettore in  $P$  un numero reale:  $\tilde{w}: T_P \rightarrow \mathbb{R}$

Lo spazio vettoriale formato dalle combinazioni lineari delle 1-forme è allora lo spazio duale dello spazio tangente  $T_P$  cioè lo *spazio cotangente*  $T_P^*$ . Introduciamo in tale spazio la *base duale* della base coordinata, ossia la base formata dalle 1-forme *duali* ai vettori di base, definite dalla condizione:

$$\tilde{e}^\mu(\vec{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu \quad [1.5]$$

Da cui in particolare segue la seguente relazione per le componenti di un vettore:  $\tilde{e}^\mu(\vec{v}) = v^\mu$ . La base duale è effettivamente una base in quanto: **I.** ogni 1-forma può essere espressa come una combinazione lineare delle 1-forme di base,  $\tilde{w}(\vec{v}) = v^\mu \tilde{w}(\vec{e}_\mu) = w_\mu \tilde{e}^\mu(\vec{v})$  con  $\tilde{w}(\vec{e}_\mu) = w_\mu$ . Allora:

$$\tilde{w} = w_\mu \tilde{e}^\mu \quad [1.6]$$

E inoltre **II.** le 1-forme di base sono linearmente indipendenti, infatti imponendo  $\sum_\mu c_\mu \tilde{e}^\mu = \tilde{0}$  e applicando ad entrambi i membri  $\vec{e}_\nu$  segue  $c_\nu = 0 \forall \nu$ . La legge di trasformazione per le 1-forme di base si trova imponendo che la base trasformata sia ancora in rapporto di dualità con la base coordinata trasformata:  $\tilde{e}^\mu(\vec{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu \rightarrow M^{\alpha'}_\mu \tilde{e}^\mu(\vec{e}_\nu) M^\nu_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'} \rightarrow M^{\alpha'}_\mu \tilde{e}^\mu(\vec{e}_{\beta'}) = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$ . Deve valere:

$$\tilde{e}^{\mu'} = M^{\mu'}_\nu \tilde{e}^\nu, \quad w_{\mu'} = M^\nu_{\mu'} w_\nu \quad [1.7]$$

La legge di trasformazione per le componenti segue direttamente dal fatto che come un vettore anche una 1-forma deve essere invariante sotto cambio di coordinate, cioè  $\tilde{w} = w_\mu \tilde{e}^\mu = w_{\nu'} \tilde{e}^{\nu'}$ : se le 1-forme di base si trasformano con la matrice  $M^{\mu'}_\nu$ , le componenti devono trasformarsi con l'inversa.

**Tensore:** di rango  $(n, m)$ , funzionale lineare che associa ad  $n$  1-forme e  $m$  vettori un numero reale:

$$T: T_P^* \times \dots \times T_P^* \times T_P \times \dots \times T_P \rightarrow \mathbb{R}$$

Le relazioni per determinare componenti di vettori ed 1-forme si generalizzano naturalmente:

$$T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} = T(\tilde{e}^{\mu_1} \dots \tilde{e}^{\mu_n}, \vec{e}_{\nu_1} \dots \vec{e}_{\nu_m}) \quad [1.8]$$

E analogamente sotto un cambio di coordinate la legge di trasformazione diventa:

$$T_{\nu_1' \dots \nu_m'}^{\mu_1' \dots \mu_n'} = M_{\alpha_1}^{\mu_1'} \dots M_{\alpha_n}^{\mu_n'} M_{\nu_1'}^{\beta_1} \dots M_{\nu_m'}^{\beta_m} T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \quad [1.9]$$

Dove sottolineiamo che le matrici di trasformazione sono calcolate nel punto  $P$ . In particolare da questa legge di trasformazione deriva direttamente il notevole risultato che *scrivendo un'equazione tensoriale, questa ha la stessa forma in tutti i sistemi di coordinate, ossia sotto qualunque trasformazione di coordinate*. Infatti data un'equazione che lega due tensori in un punto della varietà:

$$A_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = B_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \rightarrow (M_{\alpha_1}^{\mu_1'} \dots) A_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = (M_{\alpha_1}^{\mu_1'} \dots) B_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \rightarrow A_{\nu_1' \dots \nu_m'}^{\mu_1' \dots \mu_n'} = B_{\nu_1' \dots \nu_m'}^{\mu_1' \dots \mu_n'}$$

Notiamo infatti che la legge di trasformazione [1.9] è formalmente analoga a quella che definisce le quantità tensoriali del formalismo covariante utilizzato in Relatività Speciale, il quale permette proprio di scrivere equazioni invarianti in forma sotto cambi di coordinate, ma mentre nel caso della Relatività Speciale le trasformazioni sono ristrette al gruppo di Lorentz e sono in particolare lineari, in questo caso i cambi di coordinate sono assolutamente arbitrari e in particolare non lineari.

## 1.2 Tensore metrico

Un *tensore metrico* è per definizione un tensore  $(0,2)$ :

- I. Simmetrico:  $g(\vec{v}, \vec{w}) = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = g(\vec{w}, \vec{v}) \rightarrow g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$   
 II. Non degenerare:  $g(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \quad \forall \vec{w} \in T_P \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \det(g_{\mu\nu}) \neq 0$

Assumiamo in particolare che la varietà  $\mathcal{U}$  sia una *varietà metrica*, ossia dotata di un tensore metrico in ogni suo punto: un *campo tensoriale metrico*. Scelto in particolare un punto  $P$  si dimostra che esiste sempre un set di coordinate in cui in un intorno di  $P$  il campo tensoriale metrico vale:

$$g_{\mu\nu}(x) = \pm \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \Big|_P \delta x^\alpha \delta x^\beta + \dots \quad [1.10]$$

Dove notiamo l'assenza del termine di ordine 1, dovuto all'annullamento delle derivate prime. Il termine di ordine 0 indica che in  $P$  la metrica può sempre essere diagonalizzata in modo che sulla diagonale compaiano solo 1 e  $-1$  (non devono comparire degli 0 per la richiesta di non degenerazione), il cui numero dà la *segnatura* della metrica: in particolare quando abbiamo soltanto un 1 e il resto  $-1$ , o viceversa, la varietà è detta *pseudo-riemanniana*. Spostandoci da  $P$  in generale, nelle coordinate scelte, perdiamo la forma diagonale: si dimostra che questo fatto è direttamente collegato alla *curvatura* della varietà, in particolare in una varietà *piatta* sarà invece possibile porre globalmente, in certe coordinate, la metrica in forma diagonale. La differenza tra varietà curve e piatte sarà esprimibile in termini del *tensore di curvatura di Riemann* che descriveremo brevemente nel paragrafo 1.5. Tramite la metrica possiamo inoltre associare ad ogni vettore una 1-forma e viceversa:

$$\tilde{v} = g(\vec{v}, \cdot) \quad [1.11]$$

Per le componenti valgono le seguenti relazioni, note come *abbassamento* e *innalzamento dell'indice*:



$$v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu \quad , \quad v^\mu = g^{\mu\nu} v_\nu \quad [1.12]$$

Generalizzabili a tensori di rango arbitrario. In particolare  $g^{\mu\nu}$  è la *metrica inversa*,  $g_{\alpha\nu} g^{\nu\beta} = \delta_\alpha^\beta$ , che si trasforma come un tensore (2,0). Citiamo infine che attraverso la metrica è possibile definire la lunghezza di una curva  $\gamma$  tra  $A = \gamma(\lambda_A)$  e  $B = \gamma(\lambda_B)$  con vettore tangente  $\vec{v} = \frac{d}{d\lambda}$ :

$$L[\gamma] = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{|g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu|} d\lambda = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{\left| g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right|} d\lambda \quad [1.13]$$

### 1.3 Derivata covariante e connessione affine

L'analogia puntualizzata alla fine del paragrafo 1.1 con il formalismo covariante della Relatività Speciale si rompe considerando la derivata di un tensore: nel nostro caso infatti, in generale, le derivate delle componenti non sono a loro volta le componenti di un tensore. A tal proposito consideriamo la derivata di un vettore  $\vec{v}$  lungo la curva con  $\vec{w} = \frac{d}{d\mu}$  come vettore tangente:

$$\nabla_{\vec{w}} \vec{v} \equiv \frac{d\vec{v}}{d\mu} = w^\nu \frac{\partial \vec{v}}{\partial x^\nu} = w^\nu \left( \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \vec{e}_\mu + v^\mu \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} \right) \quad [1.14]$$

Compaiono in particolare le derivate dei vettori di base, le quali dovranno essere a loro volta dei vettori ed essere così esprimibili in termini degli stessi vettori di base. Definiamo allora:

$$\nabla_{\vec{e}_\nu} \vec{e}_\mu \equiv \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \vec{e}_\alpha \quad [1.15]$$

I coefficienti  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  sono detti *simboli di Christoffel* o *connessione affine* e non costituiscono un tensore (1,2): un metodo rapido per verificarlo è considerare le coordinate cartesiane con i corrispettivi vettori di base, aventi la proprietà di non dipendere dal punto in cui sono calcolati, vale quindi  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \equiv 0$ ; se avessero natura tensoriale questo dovrebbe essere vero in ogni sistema di coordinate, ma come controesempio basta considerare un set di coordinate in cui la base è dipendente dal punto. Allora:

$$\nabla_{\vec{w}} \vec{v} = w^\nu \nabla_\nu v^\alpha \vec{e}_\alpha \quad \text{con:} \quad \nabla_\nu v^\alpha \equiv \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha v^\mu \quad [1.16]$$

Che è la *derivata covariante* del vettore  $\vec{v}$  lungo la curva di  $\vec{w}$ . Nel proseguo utilizzeremo per comodità le notazioni:  $\partial_\nu v^\alpha \equiv v^\alpha_{;\nu}$  e  $\nabla_\nu v^\alpha \equiv v^\alpha_{;\nu}$ . Definendo la derivata covariante per uno scalare:

$$\nabla_{\vec{w}} f \equiv \frac{df}{d\mu} = w^\nu \nabla_\nu f \quad \text{con:} \quad \nabla_\nu f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \quad [1.17]$$

E sfruttando il fatto che data una 1-forma  $\tilde{v}$  l'espressione  $\tilde{v}(\vec{v})$  dà uno scalare, si dimostra:

$$\nabla_{\vec{w}} \tilde{v} = w^\nu \nabla_\nu v_\alpha \vec{e}^\alpha \quad \text{con:} \quad \nabla_\nu v_\alpha \equiv \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu v_\mu \quad [1.18]$$

In particolare segue:  $(u_\alpha v^\alpha)_{;\nu} = u_{\alpha;\nu} v^\alpha + u_\alpha v^\alpha_{;\nu}$ , la derivazione covariante soddisfa cioè la regola di Leibniz come la consueta derivazione e questa si dimostra essere di validità generale. A partire da queste relazioni è possibile ricavare quelle per tensori di rango superiore, in particolare valgono:

$$\nabla_\alpha A^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu A^{\beta\nu} + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu A^{\mu\beta} \quad , \quad \nabla_\alpha B_{\mu\nu} = \frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta B_{\beta\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta B_{\mu\beta} \quad [1.19]$$

## 1.4 Connessione affine, metrica e parallelismo

Connessione affine e tensore metrico sono strettamente connessi. In coordinate cartesiane vale:

$$v^{\alpha}_{;\nu} = v^{\alpha}_{,\nu} = v_{\alpha,\nu} = (g_{\alpha\beta}v^{\beta})_{,\nu} = g_{\alpha\beta}v^{\beta}_{,\nu} = g_{\alpha\beta}v^{\beta}_{;\nu} \quad \rightarrow \quad v^{\alpha}_{;\nu} = g_{\alpha\beta}v^{\beta}_{;\nu} \quad [1.20]$$

Dove abbiamo usato in particolare il fatto che in coordinate cartesiane valgono  $v^{\alpha}_{;\nu} = v^{\alpha}_{,\nu}$ ,  $v^{\alpha} = v_{\alpha}$  e  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ . Abbiamo ottenuto un'equazione tensoriale: la [1.20] deve essere valida per qualsiasi scelta di coordinate. Abbiamo quindi dimostrato che la metrica “passa attraverso” la derivazione covariante, cioè confrontando la [1.20] con  $v^{\alpha}_{;\nu} = (g_{\alpha\beta}v^{\beta})_{;\nu} = g_{\alpha\beta}v^{\beta}_{;\nu} + v^{\beta}g_{\alpha\beta;\nu}$  segue che:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}g_{\beta\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}g_{\mu\beta} = 0 \quad [1.21]$$

E' possibile dimostrare inoltre che per un sistema di vettori coordinati di base, cioè derivanti da un set di coordinate, la connessione affine è necessariamente *simmetrica*, cioè vale:  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$ . Combinando questo risultato con l'espressione per  $g_{\mu\nu;\alpha}$  derivante da [1.21] si dimostra che:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad [1.22]$$

In particolare quindi ricordando l'espressione [1.10] per  $g_{\mu\nu}$  nell'intorno di un punto della varietà, dove possiamo sempre scegliere un sistema di coordinate in cui le derivate prime di  $g_{\mu\nu}$  si annullano, segue che in tali coordinate vale:  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}|_p \equiv 0$ . Tale sistema di coordinate locale sarà detto *normale* o *gaussiano*. Ricorriamo ancora alla [1.21], questa implica che:  $\nabla_{\vec{v}}g = 0 \quad \forall \vec{v}$ . Consideriamo allora due campi vettoriali generici  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  tali che:  $\nabla_{\vec{v}}\vec{A} = \vec{0}$  e  $\nabla_{\vec{v}}\vec{B} = \vec{0}$ . Sfruttando la regola di Leibniz per la derivazione covariante e la non degenerazione della metrica si trova:

$$\nabla_{\vec{v}}(g(\vec{A}, \vec{B})) = (\nabla_{\vec{v}}g)(\vec{A}, \vec{B}) + g(\nabla_{\vec{v}}\vec{A}, \vec{B}) + g(\vec{A}, \nabla_{\vec{v}}\vec{B}) \equiv 0 \quad [1.23]$$

Dato che  $g(\vec{A}, \vec{B})$  è una generalizzazione del prodotto scalare euclideo, esso è intuitivamente collegato all'angolo formato dai due vettori. Affermiamo allora che due vettori a derivata covariante nulla lungo una certa curva formano tra di loro, in ogni punto della curva, lo stesso angolo. Questa osservazione ci permette di legare intuitivamente l'operazione di derivazione covariante al *trasporto parallelo* di un vettore lungo una curva, ossia la procedura di costruire un campo vettoriale, definito nei punti della curva, in modo che vettori in punti infinitesimamente vicini della curva siano paralleli e della stessa lunghezza. Nello spazio euclideo applicando questa procedura a due vettori ed una curva si ottiene proprio che l'angolo tra di essi, in ogni punto della curva, non cambia. Generalizzando questa idea a varietà generiche (in particolare curve, al contrario di quella euclidea) un vettore  $\vec{w}$  si definisce *trasportato parallelamente* lungo la curva di  $\vec{v}$  se:

$$\nabla_{\vec{v}}\vec{w} = \vec{0} \quad [1.24]$$

Con la nozione di parallelismo definiamo adesso le curve *geodetiche* della varietà. Una geodetica è una curva *autoparallela*, cioè il cui vettore tangente  $\vec{u} = \frac{d}{d\lambda}$  soddisfa:

$$\nabla_{\vec{u}}\vec{u} = u^{\nu}\nabla_{\nu}u^{\mu}\vec{e}_{\mu} = \vec{0} \quad [1.25]$$

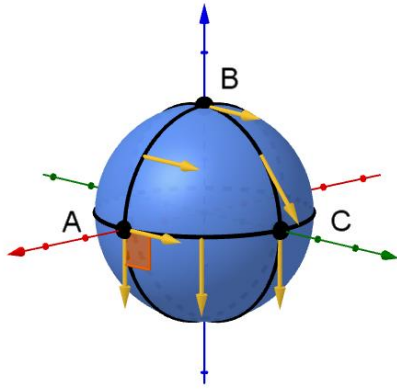
*Il vettore tangente è trasportato parallelamente lungo la curva stessa*: si tratta di una generalizzazione dell'analogia proprietà delle rette nello spazio euclideo. Segue l'equazione delle geodetiche:

$$\boxed{u^\nu \nabla_\nu u^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0} \quad [1.26]$$

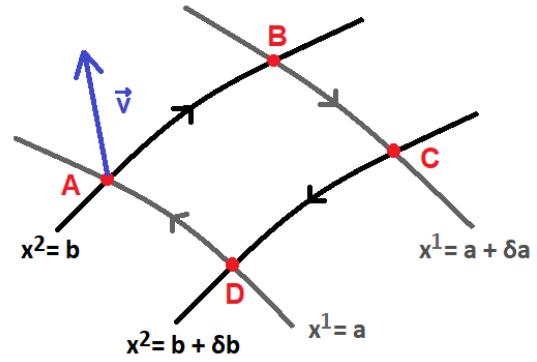
Un insieme di  $n$  equazioni al secondo ordine, non lineari, con condizioni iniziali  $x^\alpha(\lambda_0) = x_0^\alpha$  e  $u^\alpha(\lambda_0) = u_0^\alpha$ ;  $\lambda$  è detto in particolare *parametro affine*. Si dimostra che queste equazioni coincidono con le equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale [1.13] che dà la lunghezza di una curva tra due punti: le geodetiche generalizzano quindi anche la seconda proprietà fondamentale delle rette nello spazio euclideo, quella di *rendere estrema la lunghezza per una curva tra due punti*.

## 1.5 Tensore di Riemann e curvatura

Ci concentreremo in particolare sulla cosiddetta *curvatura intrinseca* della varietà, intuitivamente dovuta alla sua geometria intrinseca; la *curvatura estrinseca* è invece legata all'immersione della varietà in uno spazio a dimensione maggiore. L'idea fondamentale per descrivere la curvatura intrinseca è considerare vettori trasportati parallelamente lungo circuiti chiusi: intuitivamente in uno spazio piatto il vettore finale coincide sempre con quello di partenza, situazione che non si verifica nel caso ad esempio di una superficie sferica, Fig. 1, che definiremo di conseguenza curva.



**Fig. 1:** Esempio di trasporto parallelo sulla sfera.



**Fig. 2:** Circuito lungo le direzioni  $x^1$  e  $x^2$ .

Consideriamo allora un circuito infinitesimamente piccolo lungo le direzioni coordinate  $x^1$  e  $x^2$ , cioè formato dalle linee  $x^1 = a$ ,  $x^1 = a + \delta a$ ,  $x^2 = b$ ,  $x^2 = b + \delta b$  che si incontrano nei punti A, B, C, D indicati in Fig. 2. Trasportiamo parallelamente un vettore  $\vec{v}$  lungo il circuito partendo da A fino a tornarvi. La condizione di trasporto parallelo  $\nabla_{\vec{e}_\nu} \vec{v} = \vec{0}$  impone:

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\nu} = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha v^\mu \quad \nu = 1, 2 \quad [1.27]$$

Possiamo calcolare la variazione subita dalle componenti di  $\vec{v}$  attraverso l'integrale sul circuito:

$$\begin{aligned} \delta v^\alpha &= v^\alpha(A') - v^\alpha(A) = \oint_\gamma \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\nu} dx^\nu = - \oint_\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha v^\mu dx^\nu = \\ &= - \int_a^{a+\delta a} \int_b^{b+\delta b} [\partial_1(\Gamma_{\mu 2}^\alpha v^\mu) - \partial_2(\Gamma_{\mu 1}^\alpha v^\mu)] dx^1 dx^2 \cong - \delta a \delta b [\partial_1(\Gamma_{\mu 2}^\alpha v^\mu) - \partial_2(\Gamma_{\mu 1}^\alpha v^\mu)] \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato il teorema di Stokes e approssimato gli integrali al primo ordine. Valutando le derivate dei termini prodotto e riutilizzando la [1.27] si trova:

$$\delta v^\alpha = -\delta a \delta b (\Gamma_{\mu 2, 1}^\alpha - \Gamma_{\mu 1, 2}^\alpha + \Gamma_{\mu 2}^\gamma \Gamma_{\gamma 1}^\alpha - \Gamma_{\mu 1}^\gamma \Gamma_{\gamma 2}^\alpha) v^\mu \equiv -R^\alpha_{\mu 12} v^\mu \delta a \delta b \quad [1.28]$$

Dove abbiamo definito le componenti del *tensore di curvatura di Riemann*  $R$  nella forma (1,3) in questo caso particolare. Nel caso generale le componenti sono date da:

$$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu} \quad [1.29]$$

Ricordando l'espressione [1.22] per  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ , concludiamo che il tensore di Riemann è dunque non lineare nella metrica e in particolare ne contiene derivate prime e seconde. Geometricamente codifica le informazioni sulla curvatura della varietà: quando è identicamente nullo, in particolare, la varietà è piatta e dotata di una *definizione globale di parallelismo*, cioè un vettore trasportato parallelamente lungo una curva torna sempre in se stesso, come indica la [1.28]. Usando l'espressione [1.22] per  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$  e mettendoci in un riferimento normale dove  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv 0$  (ma non le derivate  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta}$ ) si trova in particolare:

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = g_{\alpha\gamma}R^{\gamma}_{\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\mu\beta} + g_{\mu\beta,\alpha\nu} - g_{\alpha\beta,\mu\nu} - g_{\mu\nu,\alpha\beta}) \quad [1.30]$$

Questa espressione rivela in particolare le seguenti simmetrie, valide in ogni sistema di coordinate:

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = -R_{\mu\alpha\beta\nu} = -R_{\alpha\mu\nu\beta} = R_{\beta\nu\alpha\mu} \quad [1.31]$$

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} + R_{\alpha\beta\nu\mu} + R_{\alpha\nu\mu\beta} = 0 \quad [1.32]$$

È infine possibile dimostrare due teoremi fondamentali riguardanti il tensore di Riemann di cui riportiamo gli enunciati:

**Teorema I:** L'annullamento delle componenti del tensore di Riemann è condizione *necessaria e sufficiente* affinché la varietà sia piatta:

$$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Varietà piatta}$$

**Teorema II:** Il tensore di Riemann è l'*unico* tensore che può essere costruito in modo da:

- Contenere derivate prime e seconde della metrica
- Essere lineare nelle derivate seconde della metrica

Il primo mette in luce la proprietà del tensore di Riemann di agire come un discriminante per stabilire se una varietà è curva oppure piatta. Il secondo indica che il tensore di Riemann è l'unico oggetto tensoriale costruibile con le due proprietà indicate: rilasciandone una o entrambe, cioè utilizzando derivate superiori della metrica o permettendo la presenza di termini non lineari nelle derivate seconde, è possibile costruire infiniti oggetti tensoriali.

# Capitolo 2

## Elementi di teoria della Relatività Generale

### 2.1 Principi della Relatività Generale

La Relatività Speciale è affetta da due limitazioni: **I.** privilegia una classe particolare di sistemi di riferimento, quelli inerziali (ai quali si applica il principio di relatività speciale) e **II.** i fenomeni gravitazionali non rientrano nel framework da essa definito, infatti questi sono classicamente descritti dalla gravitazione newtoniana compatibile con la relatività galileiana e dunque necessariamente incompatibile con quella einsteiniana. Queste due limitazioni sono in realtà intrinsecamente connesse e furono superate congiuntamente da Albert Einstein nei 10 anni successivi alla pubblicazione della teoria della Relatività Speciale, dal 1905 al 1916, quando pubblicò la sua teoria generale della Relatività. Ripercorriamo sinteticamente le idee di Einstein evidenziando innanzitutto la connessione tra gravità e osservatori non inerziali, in sintesi contenuta nel *principio di equivalenza debole*:

**Principio di equivalenza:** Massa gravitazionale  $m_g$  e inerziale  $m_i$  di un corpo coincidono:  
**(debole)**  $m_g = m_i$

Tale principio trae origine dalle osservazioni di Galilei circa il fatto che tutti i gravi cadono sulla superficie terrestre con la stessa accelerazione. Ciò implica in particolare che  $m_i$  e  $m_g$  debbano essere proporzionali, infatti combinando seconda legge della dinamica e la legge di gravitazione di Newton:

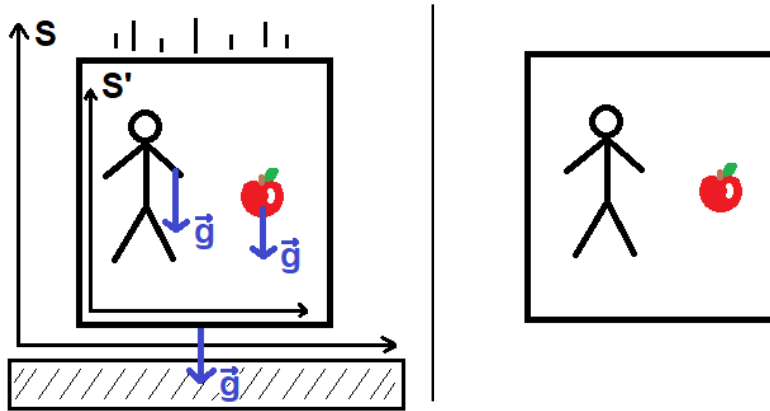
$$G \frac{M_T m_g}{R_T^2} = F = m_i a \quad \rightarrow \quad a = G \frac{M_T}{R_T^2} \cdot \frac{m_g}{m_i} \quad \rightarrow \quad \frac{m_g}{m_i} = \text{costante universale}$$

E in particolare il fatto che tale costante sia 1 è oggi dimostrato con esperimenti di altissima precisione. Da questo principio segue in particolare che: *la forza gravitazionale è l'unica tra le forze fondamentali ad essere proporzionale alla massa inerziale*. Essa possiede dunque la peculiarità di poter essere sempre annullata da un'opportuna forza inerziale, o, in altre parole: *esiste sempre un cambio di coordinate (ossia un sistema di riferimento) in cui i suoi effetti sono cancellati*. Illustriamo la validità di tale affermazione attraverso l'*esperimento mentale dell'ascensore di Einstein*: consideriamo un osservatore all'interno di un ascensore in caduta libera in un campo gravitazionale  $\vec{g}$  uniforme e statico e in grado di compiere solo esperimenti locali, cioè all'interno dell'ascensore. Egli sulla base di tali esperimenti locali non può stabilire se si trovi effettivamente in caduta libera in un campo gravitazionale o nello spazio vuoto in assenza di gravità: sperimenta infatti con i suoi strumenti la stessa accelerazione dei corpi presenti nell'ascensore e non può dunque rilevare l'azione della gravità. In termini newtoniani possiamo passare dall'equazione del moto per un corpo massivo nell'ascensore nel sistema di riferimento inerziale  $S$ , dove l'ascensore è in caduta, a quella nel riferimento accelerato dell'ascensore  $S'$ , attraverso il cambio di coordinate (non galileiano):

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}' + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \\ t = t' \end{cases} : \quad m_i \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m_g \vec{g} \quad \rightarrow \quad m_i \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2} = m_g \vec{g} - m_i \vec{g} = \vec{0}$$

Dove supponiamo  $S'$  inizialmente coincidente con  $S$  e in caduta da fermo con accelerazione uniforme  $\vec{g}$  (senza ruotare), così che la posizione in  $S$  dell'origine  $O'$  sia  $\vec{x}_{O'} = \frac{1}{2} \vec{g} t^2$  e  $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{x}_{O'} = \frac{1}{2} \vec{g} t^2$ .

Cioè nel riferimento accelerato dell'osservatore nell'ascensore compare una forza inerziale che in virtù del principio di equivalenza cancella l'azione della gravità. È fondamentale notare che in questo caso, campo gravitazionale uniforme e costante, siamo riusciti a cancellare gli effetti della gravità attraverso una forza inerziale *globale*, in generale, con  $\vec{g} = \vec{g}(t, \vec{x})$ , sarà possibile solo *localmente*, cioè in una ristretta regione di spaziotempo, dove le variazioni del campo siano trascurabili.



**Fig. 3:** Esperimento mentale dell'ascensore di Einstein.

In conclusione *l'osservatore in caduta libera non sperimenta la gravità e le leggi con cui descrive i fenomeni fisici saranno dunque compatibili con la Relatività Speciale*: in questo senso, nel contesto della Relatività Generale, egli è detto un *osservatore inerziale*. Notiamo che nella concezione newtoniana è invece un osservatore non inerziale, infatti come indica l'equazione del moto per  $S'$  egli vedrà il corpo muoversi di moto rettilineo uniforme pur essendo sottoposto alla forza di gravità, che è l'unica forza "vera" in gioco; inoltre per mantenere la forma consueta della seconda legge di Newton deve introdurre una forza inerziale "fittizia". Alla luce di queste riflessioni Einstein formulò il cosiddetto *principio di equivalenza forte*:

**Principio di equivalenza forte**: Per ogni evento nello spaziotempo esiste un sistema di coordinate localmente inerziale, cioè tale che in un intorno sufficientemente piccolo dell'evento le leggi della fisica siano in accordo con la Relatività Speciale.

Formulare matematicamente la Relatività Generale consisterà dunque nel generalizzare il formalismo covariante della Relatività Speciale, che permette di scrivere equazioni aventi la stessa forma per tutti gli osservatori inerziali, in modo che le quantità tensoriali generalizzate che andremo a definire: **I.** *in un sistema di coordinate localmente inerziale si riconducano a tensori rispetto alle trasformazioni di Lorentz* e **II.** *permettano di scrivere equazioni invarianti sotto cambi di coordinate arbitrari, in particolare cioè non ristretti al solo gruppo di Lorentz*. Lo strumento che realizza entrambi questi scopi è la *geometria differenziale*: in quest'ottica lo spaziotempo come insieme di eventi costituirà una varietà differenziabile  $\mathcal{U}$  4-dimensionale e pseudo-riemanniana, cioè dotata di un campo tensoriale metrico con segnatura  $(-+++)$ . In questo modo, come descritto nei paragrafi del capitolo 1, localmente, nell'intorno di un evento, esisterà sempre un sistema di coordinate in cui il campo metrico si riduce alla metrica di Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$  e la connessione affine  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  si annulla: *la varietà apparirà localmente come lo spaziotempo di Minkowski  $\mathcal{M}$* . Questa affermazione costituisce esattamente la traduzione matematica del principio di equivalenza forte. Per quanto riguarda il secondo punto, sempre come descritto brevemente nel capitolo 1, utilizzando quantità tensoriali definite sulla varietà possiamo scrivere equazioni invarianti in forma sotto cambi di coordinate del tutto generali, in particolare non lineari, descritti cioè da matrici di trasformazione dipendenti dal punto, a fronte delle sole trasformazioni di Lorentz, lineari e descritte da matrici di

trasformazione a coefficienti costanti, contemplate nella Relatività Speciale. Enunciamo quindi la versione generale del *principio di relatività* con la corrispettiva traduzione matematica:

**Principio di relatività:** Le leggi della fisica hanno la stessa forma per tutti gli osservatori.  
**(generale)** Esse sono cioè esprimibili attraverso quantità tensoriali definite sulla varietà differenziabile rappresentante matematicamente lo spaziotempo fisico.

In conclusione possiamo dunque considerare una legge in accordo con la Relatività Speciale come una legge di validità generale vista in un sistema di coordinate localmente inerziale in cui  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  e  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0 \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu$ . Enunciamo allora il *principio di covarianza generale*:

**Principio di covarianza:** Le leggi della fisica in un riferimento generico si ottengono da quelle delle Relatività Speciale sostituendo le quantità tensoriali per trasformazioni di Lorentz con quantità tensoriali definite sulla varietà differenziabile rappresentante matematicamente lo spaziotempo fisico. In particolare:

- Gli indici tensoriali per trasformazioni di Lorentz devono essere reinterpretati come indici tensoriali generici.
- Sostituiamo:  $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$
- Sostituiamo:  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$

## 2.2 Moto di una particella in caduta libera

Consideriamo una *particella test*, ossia un corpo in grado di sperimentare effetti gravitazionali, ma sufficientemente piccolo da non disturbare le sorgenti di gravità. Immaginiamo una particella massiva di questo tipo in caduta libera, cioè tale che la risultante delle forze *non gravitazionali* agenti su di essa sia nulla. In un sistema di coordinate localmente inerziale  $y^\mu$ , ossia per un osservatore in caduta libera, la particella si muove di moto rettilineo uniforme, cioè con quadriaccelerazione nulla:

$$0 \equiv \frac{d^2 y^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau} = u^\nu \partial_\nu u^\mu \quad [2.1]$$

Dove  $\tau$  è il tempo proprio, ossia il tempo misurato da un osservatore comovente con la particella, e  $u^\mu$  la quadrivelocità della particella. Passando a coordinate generiche  $x^\mu$  attraverso il principio di covarianza generale otteniamo che *una particella test in caduta libera si muove lungo le geodetiche*:

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad [2.2]$$

Dove il tempo proprio svolge il ruolo di parametro affine. Considerando una particella in caduta libera *non massiva*, che deve necessariamente muoversi alla velocità della luce e per la quale quindi non esiste un osservatore comovente, il tempo proprio non è definito: nella visione della Relatività Generale la particella si muove comunque lungo le geodetiche, ma queste dovranno essere parametrizzate con un generico parametro affine. Confrontando le due equazioni [2.1] e [2.2] appare evidente che gli effetti gravitazionali, presenti nel riferimento generico e “cancellati” in quello in caduta libera, sono da ricondurre al termine con  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ : *vedendo questo termine come una sorta di “forza gravitazionale” e tenendo conto che dalla [1.22] la connessione affine è legata alle derivate della metrica, possiamo considerare quest’ultima come una sorta di “potenziale” per l’interazione gravitazionale.*

## 2.3 Equazioni di campo di Einstein

Come notato nel precedente paragrafo gli effetti gravitazionali sembrano essere legati alla metrica dello spaziotempo, e in particolare tramite questa alla connessione affine. Quest'ultima è a sua volta collegata ad altri tensori che descrivono proprietà geometriche dello spaziotempo, in primo luogo il tensore di Riemann. Da queste riflessioni deriva l'idea fondamentale di Einstein che la gravità sia strettamente connessa alla geometria dello spazio tempo: le *equazioni di campo di Einstein* rivelano proprio questa connessione, legando la geometria dello spaziotempo alle sorgenti di gravità. Tali equazioni possono essere costruite intuitivamente ricercando una similitudine con il caso elettromagnetico, cioè con le *equazioni di Maxwell*. Queste, nella formulazione covariante della Relatività Speciale, possono essere scritte nella forma:

$$\text{Omogenee:} \quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad [2.3]$$

$$\text{Inomogenee:} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu$$

Dove  $F^{\mu\nu}$  è il *tensore elettromagnetico*, antisimmetrico, e  $J^\nu = (\rho, \vec{j})$  la *quadricorrente*, che svolge il ruolo di sorgente. Le equazioni omogenee sono automaticamente soddisfatte scrivendo il tensore elettromagnetico in termini delle derivate prime di un *quadripotenziale elettromagnetico*  $A^\mu$ :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad [2.4]$$

Dal fatto che  $F^{\mu\nu}$  è antisimmetrico le equazioni inomogenee implicano l'*equazione di continuità*:

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \partial_\nu J^\nu = 0 \quad [2.5]$$

L'idea che guida la costruzione delle equazioni di Einstein è allora la seguente: il membro di destra dovrà essere un tensore contenente le sorgenti della gravità e soddisfare un'equazione di continuità, quello di sinistra dovrà essere un tensore, di uguale rango, alle derivate seconde in un qualche "potenziale gravitazionale" e che sia compatibile con l'equazione di continuità del membro di destra.

**I. Membro destro:** sicuramente tra le sorgenti di gravità dovrà comparire la massa come nel caso newtoniano, ma come emerge in Relatività Speciale questa è strettamente connessa all'energia. Il candidato principale è allora il *tensore energia-impulso*  $T_{\mu\nu}$ : le sue componenti  $T_{00}, T_{i0}, T_{0i}, T_{ij}$  rappresentano per definizione rispettivamente la *densità di energia*, la componente nella direzione  $i$ -esima del *momento*, la componente nella direzione  $i$ -esima del *flusso di energia* e il cosiddetto *tensore degli sforzi*. Un caso di notevole importanza è quello del fluido relativistico perfetto, per il quale, nel formalismo covariante della Relatività Speciale, vale la seguente espressione per  $T_{\mu\nu}$ :

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p\eta_{\mu\nu} \quad [2.6]$$

Con  $p$  e  $\rho$  rispettivamente la *pressione* e la *densità di energia proprie*, cioè misurate da un osservatore comovente con un elemento di fluido, e  $u_\mu$  la *quadrivelocità* di tale elemento. È simmetrico e soddisfa:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad [2.7]$$

In particolare la componente 0 dà la conservazione della massa mentre le 3 componenti spaziali danno le 3 componenti dell'equazione del moto. Utilizzando il principio di covarianza generale siamo allora autorizzati a scrivere in coordinate generiche:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad [2.8]$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad [2.9]$$

L'equazione [2.9] sarà quella che dovrà soddisfare anche il tensore presente nel membro di sinistra.



**II. Membro sinistro:** come intuito alla fine del paragrafo 2.2 è ragionevole considerare come “potenziale” per l’interazione gravitazionale il tensore metrico: il tensore incognito  $X_{\mu\nu}$  del membro di sinistra dovrà allora contenere le derivate seconde della metrica e soddisfare un’equazione analoga alla [2.9]. In questo modo saremo autorizzati a scrivere, con  $k$  una costante di proporzionalità:

$$X_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad [2.10]$$

Supponendo che la gravità sia collegata alla geometria dello spaziotempo in quanto varietà, come intuito da Einstein, è naturale supporre che  $X_{\mu\nu}$  derivi da contrazioni del tensore di Riemann, che contiene proprio le derivate seconde della metrica ed è unico (teorema II paragrafo 1.5): in quest’ottica allora *la gravità sarà in particolare collegata alla curvatura dello spaziotempo*. In effetti lo spaziotempo di Minkowski, in cui avvengono i fenomeni descritti della Relatività Speciale e tra i quali non compaiono quelli gravitazionali, è proprio, geometricamente parlando, una varietà piatta. L’unicità del tensore di Riemann è fondamentale: *le equazioni gravitazionali [2.10] saranno univocamente determinate*. Consideriamo allora le seguenti contrazioni del tensore di Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R^{\beta}_{\mu\beta\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \quad [2.11]$$

$$R = R^{\nu}_{\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu} \quad [2.12]$$

Rispettivamente il *tensore di Ricci* e la *curvatura scalare*. In effetti esiste una loro specifica combinazione che soddisfa proprio un’equazione analoga alla [2.9]:

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0 \quad [2.13]$$

Un totale di 4 equazioni note come *identità di Bianchi*. Tale combinazione  $G^{\mu\nu}$  è il *tensore di Einstein*:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad [2.14]$$

Tensore simmetrico con sole 6 componenti indipendenti per i 4 vincoli imposti dalle identità di Bianchi alle 10 indipendenti di un tensore di rango 4 simmetrico (la varietà spaziotemporale ha dimensione 4). Brevemente la [2.13] è soddisfatta per la seguente proprietà del tensore di Riemann:

$$R_{\alpha\mu\beta\nu;\gamma} + R_{\alpha\mu\nu\gamma;\beta} + R_{\alpha\mu\gamma\beta;\nu} = 0 \quad [2.15]$$

Che deriva dalla [1.30] generalizzata ad un riferimento non normale. Dalla [2.15] segue infatti:

$$0 \equiv g^{\lambda\gamma} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (R_{\alpha\mu\beta\nu;\gamma} + R_{\alpha\mu\nu\gamma;\beta} + R_{\alpha\mu\gamma\beta;\nu}) = -2g^{\lambda\gamma} \left( R^{\rho}_{\gamma} - \frac{1}{2} R \delta^{\rho}_{\gamma} \right)_{;\rho} = -2 G^{\rho\lambda}_{;\rho}$$

Possiamo dunque riconoscere il tensore incognito  $X_{\mu\nu}$  proprio nel tensore di Einstein  $G_{\mu\nu}$ . Le *equazioni di campo di Einstein* sono allora:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}} \quad [2.16]$$

Con  $G$  la costante di gravitazione universale. È possibile fissare univocamente  $k = 8\pi G$  imponendo l’accordo con la teoria della gravitazione newtoniana nel cosiddetto *regime newtoniano*, ossia la somma delle condizioni di: **I. limite non relativistico**, cioè velocità caratteristiche molto minori di quella della luce, e **II. regime di campo debole**, che discuteremo all’inizio del prossimo capitolo.

Concludiamo notando che per la presenza di contrazioni del tensore di Riemann *le equazioni di campo di Einstein consistono in un sistema di 10 equazioni differenziali ordinarie, al secondo ordine, non lineari, di cui solo 6 indipendenti, a causa delle identità di Bianchi, e aventi come incognite le 10 funzioni delle coordinate che daranno le 10 componenti indipendenti del campo tensoriale metrico*.

## 2.4 Deviazione geodetica

Intuitivamente la *deviazione geodetica* è il fenomeno per cui in uno spazio curvo due geodetiche, passanti per due punti vicini parallelamente l'una all'altra, perdono il reciproco parallelismo allontanandosi dai due punti, al contrario di due rette in uno spazio piatto che invece restano parallele. Per formalizzare questa intuizione ed evidenziare il collegamento con la fisica, consideriamo due particelle che si muovono su due geodetiche vicine. Se all'istante di tempo proprio  $\tau$  sono separate dalla distanza infinitesima  $\xi^\mu(\tau)$ , le rispettive posizioni e quadrivelocità saranno legate da:

$$x_2^\mu(\tau) = x_1^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau) \quad , \quad u_2^\mu(\tau) = u_1^\mu(\tau) + \frac{d\xi^\mu}{d\tau}(\tau) \quad [2.17]$$

Con  $u_1^\alpha = \frac{dx_1^\alpha}{d\tau}$  e  $u_2^\alpha = \frac{dx_2^\alpha}{d\tau}$ . Dall'equazione delle geodetiche per le due particelle deriva allora:

$$\frac{d^2 x_1^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_1^\nu) u_1^\alpha u_1^\beta \quad , \quad \frac{d^2 x_2^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_2^\nu) u_2^\alpha u_2^\beta \quad [2.18]$$

Espandiamo secondo Taylor  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_2^\nu)$  in un intorno di  $x_1^\nu$ :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_2^\nu) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_1^\nu + \xi^\nu) \cong \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x_1^\nu) + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu(x_1^\nu) \xi^\gamma \quad [2.19]$$

Sottraendo le [2.18], usando la [2.19] e trattenendo soltanto il primo ordine in  $\xi^\mu$ , si ottiene:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = -\left( \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu(x^\nu) u^\alpha u^\beta \xi^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x^\nu) u^\alpha \frac{d\xi^\beta}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x^\nu) u^\beta \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) \quad [2.20]$$

Dove in particolare abbiamo eliminato il pedice "1" da  $x_1^\nu$  e  $u_1^\nu$ . Consideriamo adesso la derivata covariante seconda di  $\xi^\mu$  lungo la geodetica della prima particella, dalla [1.16]:

- $(\nabla_{\bar{u}} \xi)^\mu = \mu^\beta \nabla_\beta \xi^\mu = \mu^\beta \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \mu^\beta = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \mu^\beta$
- $(\nabla_{\bar{u}} \nabla_{\bar{u}} \xi)^\mu = \mu^\delta \nabla_\delta \left( \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \mu^\beta \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \mu^\beta \right) + \Gamma_{\varepsilon\delta}^\mu \left( \frac{d\xi^\varepsilon}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\varepsilon \xi^\alpha \mu^\beta \right) \mu^\delta =$   
 $= \frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \left( u^\gamma \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \xi^\alpha \mu^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \mu^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\alpha \frac{d\mu^\beta}{d\tau} \right) + \Gamma_{\varepsilon\delta}^\mu \frac{d\xi^\varepsilon}{d\tau} \mu^\delta + \Gamma_{\varepsilon\delta}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\varepsilon \xi^\alpha \mu^\beta \mu^\delta$

Usando adesso la [2.19], il fatto che  $\frac{d\mu^\beta}{d\tau} = -\Gamma_{\lambda\rho}^\beta u^\lambda u^\rho$  dall'equazione delle geodetiche, la simmetria della connessione affine  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$  e rinominando alcuni indici ripetuti, si trova infine che:

$$\boxed{(\nabla_{\bar{u}} \nabla_{\bar{u}} \xi)^\mu = \left( \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu + \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta \Gamma_{\delta\beta}^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \Gamma_{\delta\gamma}^\mu \right) \mu^\alpha \mu^\beta \xi^\gamma = R_{\alpha\beta\gamma}^\mu \mu^\alpha \mu^\beta \xi^\gamma} \quad [2.21]$$

Che, al contrario della [2.20], è una valida equazione tensoriale. In particolare concludiamo che anche supponendo  $(\nabla_{\bar{u}} \xi)^\mu = 0$  in  $x_1^\mu(\tau)$ , quindi geodetiche distanti  $\xi^\mu(\tau)$  e parallele al tempo  $\tau$ , si ha dalla [2.21] che negli istanti successivi  $(\nabla_{\bar{u}} \nabla_{\bar{u}} \xi)^\mu \neq 0$ , dunque  $\xi^\mu(\tau)$  evolve e le geodetiche si separano. Questo non si verifica soltanto in uno spaziotempo piatto in quanto  $R_{\alpha\beta\gamma}^\mu = 0$  e dunque  $(\nabla_{\bar{u}} \nabla_{\bar{u}} \xi)^\mu = 0$ . Fisicamente  $(\nabla_{\bar{u}} \nabla_{\bar{u}} \xi)^\mu$  dà l'accelerazione relativa sperimentata dalle due particelle: nel contesto della Relatività Generale dove gli effetti gravitazionali sono identificati con la curvatura dello spaziotempo, quest'ultima descrive in particolare le *forze di marea* di un campo gravitazionale, ossia le forze relative, sperimentate da particelle vicine, che ne causano la divergenza delle traiettorie.

# Capitolo 3

## Equazioni di campo di Einstein linearizzate

### 3.1 Regime di campo debole, trasformazioni di Lorentz e di gauge

Nella Relatività Generale, come esposto nel capitolo 2, la presenza di un campo gravitazionale è manifestazione della curvatura dello spaziotempo. Diremo allora di essere in *regime di campo debole* se lo spaziotempo è *quasi piatto*, ossia se esiste *un* sistema di coordinate in cui la metrica ha la forma:

$$\boxed{\begin{cases} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad \forall \mu, \nu \end{cases}} \quad [3.1]$$

Cioè, intuitivamente, se lo spaziotempo si discosta soltanto lievemente dallo spaziotempo piatto di Minkowski ( $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$ ) è la metrica di Minkowski). Un sistema di coordinate che soddisfa le [3.1] è dunque detto *quasi lorentziano*. Notiamo in particolare che: **I.** la metrica di uno spaziotempo quasi piatto non apparirà nella forma [3.1] per *tutti* i sistemi di coordinate e **II.** identificato un sistema di coordinate quasi lorentziano, sarà possibile trovarne infiniti altri attraverso specifici cambi di coordinate. A tal proposito consideriamo *trasformazioni di Lorentz e di gauge*.

#### I. Trasformazioni di Lorentz:

Supponiamo di essere in uno spaziotempo quasi piatto e di aver identificato un sistema di coordinate quasi lorentziano  $x^\nu = (t, x, y, z)$  che soddisfi le [3.1]. Applichiamo un cambio di coordinate formalmente identico ad una trasformazione di Lorentz tra riferimenti inerziali con velocità  $\vec{v}$ :

$$x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} x^\nu = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^\nu \quad , \quad \Lambda = \left[ \begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma \vec{v}^T \\ \hline -\gamma \vec{v} & \mathbb{I} + \frac{\gamma-1}{v^2} \vec{v} \vec{v}^T \end{array} \right] \quad [3.2]$$

Con  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$  e dove le componenti di  $\vec{v}$  sono costanti. La metrica [3.1] si trasforma allora come:

$$g_{\mu'\nu'}(x') = \Lambda^{\alpha}_{\mu'} \Lambda^{\beta}_{\nu'} g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\mu'\nu'} + \Lambda^{\alpha}_{\mu'} \Lambda^{\beta}_{\nu'} h_{\alpha\beta}(x) \equiv \eta_{\mu'\nu'} + h_{\mu'\nu'}(x') \quad [3.3]$$

Dove in particolare gli argomenti  $x$  e  $x'$  indicano sinteticamente  $x^\mu$  e  $x^{\mu'}$ . Inoltre notiamo che  $\eta_{\mu'\nu'} = \text{diag}(-1,1,1,1) = \eta_{\mu\nu}$ , in quanto le trasformazioni di Lorentz, per definizione, conservano la metrica di Minkowski. Dato che  $\eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu}$ , possiamo vedere  $h_{\mu'\nu'}(x')$ , definito nella [3.3] da:

$$h_{\mu'\nu'}(x') \equiv \Lambda^{\alpha}_{\mu'} \Lambda^{\beta}_{\nu'} h_{\alpha\beta}(x) \quad [3.4]$$

Come il trasformato di  $h_{\mu\nu}(x)$ : considerando *solo* trasformazioni del tipo [3.2] le componenti di  $h_{\mu\nu}$  si trasformano *come se* fossero autonomamente le componenti di un tensore (0,2) in uno spaziotempo di Minkowski. In conclusione supponendo  $|\vec{v}| \ll 1$  e  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  vale sicuramente anche  $|h_{\mu'\nu'}| \ll 1$  e  $g_{\mu'\nu'}$  ha conseguentemente la forma [3.1]: applicando una trasformazione di Lorentz passiamo da un sistema di coordinate quasi lorentziano ad un altro anch'esso quasi lorentziano.

## II. Trasformazioni di gauge:

Supponiamo di attuare un cambio di coordinate del tipo:

$$x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu(x^\nu) \quad [3.5]$$

Dove le  $\xi^\mu$  sono funzioni delle coordinate. Vale allora:

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \xi^\mu_{,\nu} \quad [3.6]$$

Inoltre dalla [3.5] deriva anche:

$$x^\mu = x^{\mu'} - \xi^\mu(x^\nu) \quad [3.7]$$

Allora utilizzando la regola di derivazione per funzione composta e assumendo:  $|\xi^\mu_{,\nu}| \ll 1 \quad \forall \mu, \nu$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} = \delta_{\nu'}^\mu - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta_{\nu'}^\mu - \delta_{\nu'}^{\alpha'} \xi^\mu_{,\alpha} + O(|\xi^\mu_{,\nu}|^2) \cong \delta_\nu^\mu - \xi^\mu_{,\nu} \quad [3.8]$$

Dove abbiamo usato il fatto che la delta di Kronecker ha la stessa forma in ogni sistema di coordinate. Supponiamo adesso che il sistema di coordinate di partenza sia quasi lorentziano e che la metrica  $g_{\mu\nu}$  sia in forma [3.1], allora per  $g_{\mu\nu'}$  nel nuovo sistema di coordinate vale al primo ordine:

$$g_{\mu\nu'}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta}(x) \cong \left( \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^{\alpha'} \xi^\beta_{,\nu} - \delta_\nu^{\beta'} \xi^\alpha_{,\mu} \right) \eta_{\alpha\beta} + \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta h_{\alpha\beta}(x) \quad [3.9]$$

Sfruttiamo il fatto che le componenti di  $\eta_{\alpha\beta}$  sono costanti e definiamo:

$$\xi_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} \xi^\nu \quad [3.10]$$

Cioè utilizziamo la metrica di Minkowski invece di  $g_{\mu\nu}$  per abbassare l'indice di  $\xi^\mu$ , operazione permessa in quanto stiamo lavorando al primo ordine e sia  $h_{\mu\nu}$  sia  $\xi^\mu$  sono piccoli. Abbiamo quindi:

$$g_{\mu\nu'}(x') = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu}(x) - \xi_{\nu,\mu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu'}(x') \quad [3.11]$$

Dove, per esplicitare una forma del tipo [3.1], abbiamo definito:

$$h_{\mu\nu'}(x') \equiv h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu}(x) - \xi_{\nu,\mu}(x) \quad [3.12]$$

In particolare con  $|\xi^\mu_{,\nu}| \ll 1$  vale sicuramente  $|\xi_{\mu,\nu}| \ll 1$ , quindi  $|h_{\mu\nu'}| \ll 1$  e  $g_{\mu\nu'}$  è ancora nella forma [3.1]: il nuovo sistema di coordinate è ancora quasi lorentziano. Puntualizziamo che le equazioni [3.8] e [3.11] non sono equazioni tensoriali propriamente dette, cioè valide in ogni sistema di coordinate; sono piuttosto equazioni che legano le componenti di tensori in due sistemi di coordinate diverse. Ad esempio con  $\mu = \nu = 0$  la [3.11] ha il significato: “la componente 00 di  $g$  nel nuovo sistema di coordinate è uguale alla componente 00 di  $\eta$  più la componente 00 di  $h$  nel vecchio sistema di coordinate meno due volte la derivata di  $\xi_0$  rispetto a  $x^0$ ”. Alla luce di questa precisazione nel proseguo utilizzeremo per comodità la notazione  $h_{\mu\nu'}(x') \equiv h'_{\mu\nu}(x')$ . Indicheremo quindi una generica *trasformazione di gauge* come:

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu}(x) - \xi_{\nu,\mu}(x) \quad [3.13]$$

Dove sottolineiamo il fatto che, avendo effettuato un cambio di coordinate, nella trasformazione è cambiato anche l'argomento  $h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x')$ . Queste trasformazioni vengono dette di “gauge” perché, come evidenzieremo nei successivi due paragrafi, hanno forti analogie (e una differenza) con le *trasformazioni di gauge elettromagnetiche* nel formalismo covariante della Relatività Speciale.

## 3.2 Confronto con le trasformazioni di gauge elettromagnetiche

Nella teoria elettromagnetica di Maxwell descritta nel formalismo covariante della Relatività Speciale le trasformazioni di gauge elettromagnetiche consistono nel trasformare un quadripotenziale  $A_\mu$  in un quadripotenziale  $A'_\mu$  attraverso la trasformazione:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \chi_{,\mu}(x) \quad [3.14]$$

Dove  $\chi(x)$  è una funzione del punto. Notiamo in particolare che *l'argomento  $x$  non è cambiato*: siamo in un dato riferimento inerziale fissato e la trasformazione di gauge non comporta una trasformazione di coordinate, al contrario di quanto abbiamo nella [3.13]. Tuttavia notiamo che all'ordine in cui lavoriamo possiamo scrivere:

$$h'_{\mu\nu}(x') = h'_{\mu\nu}(x + \xi) = h'_{\mu\nu}(x) + h'_{\mu\nu,\lambda}(x)\xi^\lambda + \dots \cong h'_{\mu\nu}(x) \quad [3.15]$$

Cioè dato che una trasformazione di gauge, supponendo  $|\xi^\mu_{,\nu}| \ll 1$ , è una “piccola” trasformazione di coordinate, possiamo pensare di essere, una volta effettuata, ancora nel vecchio sistema di coordinate, che è stato soltanto “leggermente aggiustato”. In questo senso interpretiamo la [3.13] come una trasformazione di gauge analoga al caso elettromagnetico:

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu}(x) - \xi_{\nu,\mu}(x) \quad [3.16]$$

Nel proseguo una trasformazione di gauge sarà sempre intesa con questo significato. Ometteremo inoltre per semplicità gli argomenti sottintendendo sempre una forma del tipo [3.16].

Concludiamo il paragrafo citando le proprietà fondamentali delle trasformazioni di gauge elettromagnetiche: nel prossimo paragrafo ritroveremo proprietà assolutamente analoghe per le trasformazioni [3.16] nel contesto dell'approssimazione di campo debole della Relatività Generale. Sotto la trasformazione [3.14] si ha che il tensore elettromagnetico espresso dalla [2.4] in termini delle derivate del quadripotenziale va in se stesso:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \quad [3.17]$$

Che deriva dal fatto che:  $\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \chi - \partial_\mu \partial_\nu \chi = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , come conseguenza della commutatività della derivazione parziale. Compatibilmente con questa proprietà si ha inoltre che sotto una trasformazione di gauge [3.14] le equazioni di Maxwell [2.3] inomogenee scritte in termini del quadripotenziale:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = -4\pi J^\nu \quad [3.18]$$

Vanno in se stesse:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = -4\pi J^\nu \rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A'^\mu) = -4\pi J^\nu \quad [3.19]$$

In quanto in modo del tutto analogo si ha:  $\partial_\mu \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A'^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)$ . Si dice allora che *la teoria elettromagnetica ha una simmetria o invarianza di gauge per trasformazioni [3.14]*. L'utilità pratica di questa proprietà risiede nel fatto che sfruttando la libertà concessa dalle trasformazioni di gauge è possibile imporre delle condizioni di semplificazione per l'equazione trasformata in  $A'^\mu$ , ad esempio richiedendo che un termine sia nullo: si dice che avremo *fissato un gauge*, il quale sarà identificato dalla condizione che avremo effettivamente imposto su  $A'^\mu$ .

### 3.3 Equazioni di campo di Einstein linearizzate

Supponiamo di trovarci in uno spaziotempo quasi piatto e di utilizzare coordinate quasi lorentziane, in queste ipotesi le equazioni di campo di Einstein possono essere semplificate notevolmente. Restringiamo i possibili cambi di coordinate a quelli del tipo [3.2], cioè alle trasformazioni di Lorentz: come evidenziato nel paragrafo 3.1 possiamo considerare la perturbazione  $h_{\mu\nu}$  come un tensore (0,2) in uno spazio di Minkowski. Ci aspettiamo che le equazioni che andremo a scrivere siano equazioni tensoriali propriamente dette se interpretate nel formalismo della Relatività Speciale. Allora generalizziamo la [3.10] definendo le seguenti relazioni:

$$v_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} v^\nu \quad , \quad v^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} v_\nu \quad [3.20]$$

E analogamente:

$$h^\mu{}_\nu \equiv \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} \quad , \quad h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\nu\beta} h^\mu{}_\beta \quad , \quad h = h^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad [3.21]$$

L'ultima in particolare sarà detta la *traccia* di  $h_{\mu\nu}$ . Consideriamo adesso la metrica nella forma [3.1] e calcoliamo al primo ordine in  $h_{\mu\nu}$  innanzitutto la connessione affine, utilizzando la [1.22]:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \cong \frac{\eta^{\alpha\beta}}{2} (h_{\mu\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) \quad [3.22]$$

Dove notiamo in particolare che non sono presenti termini di ordine 0. Per il tensore di Riemann al primo ordine vale sicuramente allora, utilizzando la [1.29]:

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta}^\gamma \Gamma_{\gamma\nu}^\alpha \cong \Gamma_{\mu\nu,\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^\alpha \quad [3.23]$$

Allora trattenendo ancora soltanto il primo ordine:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\mu\beta\nu} &= g_{\alpha\gamma} R^\gamma{}_{\mu\beta\nu} \cong \eta_{\alpha\gamma} (\Gamma_{\mu\nu,\beta}^\gamma - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^\gamma) = \\ &= \frac{1}{2} (h_{\mu\gamma,\nu\beta} + h_{\nu\alpha,\mu\beta} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (h_{\mu\alpha,\beta\nu} + h_{\beta\alpha,\mu\nu} - h_{\mu\beta,\alpha\nu}) \end{aligned}$$

Dove i due termini si cancellano per la commutatività della derivazione parziale. Otteniamo allora:

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} \cong \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\alpha\nu} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}) \quad [3.24]$$

A partire dalla [3.24] ricaviamo adesso le espressioni approssimate al primo ordine per il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura:

- $$\begin{aligned} \blacksquare \quad R_{\mu\nu} &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \cong \frac{\eta^{\alpha\beta}}{2} (h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\alpha\nu} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}) = \\ &= \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\mu}{}^{,\alpha} + h_{\alpha\mu,\nu}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha}) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \blacksquare \quad R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \cong \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} (h_{\alpha\nu,\mu}{}^{,\alpha} + h_{\alpha\mu,\nu}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha}) = \\ &= \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu}{}^{,\alpha\nu} + h_{\alpha\mu}{}^{,\alpha\mu} - h_{,\mu}{}^{,\mu} - h_{,\alpha}{}^{,\alpha}) \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato le espressioni [3.21] tenendo conto che le componenti di  $\eta^{\mu\nu}$  sono costanti.

Quindi usando la notazione  $\partial_\mu \partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) = \square$  per l'operatore *d'Alembertiano*:

$$R_{\mu\nu} \cong \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\mu}{}^{,\alpha} + h_{\alpha\mu,\nu}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} - \square h_{\mu\nu}) \quad [3.25]$$

$$R \cong h_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \square h \quad [3.26]$$

Da [3.25] e [3.26] otteniamo così la seguente espressione al primo ordine per il tensore di Einstein:

$$G_{\mu\nu} \cong R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[ h_{\alpha\nu,\mu}{}^{,\alpha} + h_{\alpha\mu,\nu}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \square h) \right] \quad [3.27]$$

Che può essere riscritta utilizzando la versione di  $h_{\mu\nu}$  a traccia inversa:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \quad [3.28]$$

Il cui nome deriva dal fatto che  $\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = h - 2h = -h$ , con  $\eta^\mu{}_\mu = 4$ . La [3.27] diventa allora:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\cong \frac{1}{2} \left[ \bar{h}_{\alpha\nu,\mu}{}^{,\alpha} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\nu} h_{,\mu}{}^{,\alpha} + \bar{h}_{\alpha\mu,\nu}{}^{,\alpha} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu} h_{,\nu}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h + \right. \\ &\quad \left. - \eta_{\mu\nu} \left( \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} - \square h \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \bar{h}_{\alpha\nu,\mu}{}^{,\alpha} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\nu} h_{,\mu}{}^{,\alpha} + \bar{h}_{\alpha\mu,\nu}{}^{,\alpha} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu} h_{,\nu}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h - \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h + \eta_{\mu\nu} \square h \right] \end{aligned}$$

Dove abbiamo sfruttato ancora il fatto che le componenti di  $\eta^{\mu\nu}$  sono costanti e passano attraverso la derivazione. Cancellando i termini analoghi segue infine:

$$G_{\mu\nu} \cong -\frac{1}{2} \left( \square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\mu,\nu}{}^{,\alpha} - \bar{h}_{\alpha\nu,\mu}{}^{,\alpha} \right) \quad [3.29]$$

Possiamo in conclusione scrivere le cosiddette *equazioni di campo di Einstein linearizzate*:

$$\boxed{\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\mu,\nu}{}^{,\alpha} - \bar{h}_{\alpha\nu,\mu}{}^{,\alpha} = -16\pi G T_{\mu\nu}} \quad [3.30]$$

Valide in uno spaziotempo quasi piatto in coordinate quasi lorentziane e aventi come incognite le componenti della perturbazione  $h_{\mu\nu}$  per la metrica scritta in forma [3.1].

Per concludere consideriamo adesso una generica trasformazione di gauge del tipo [3.16]. Innanzitutto notiamo che, supponendo  $|\xi_{\mu,\nu}| \ll 1$ , siamo sempre autorizzati ad attuare una tale trasformazione, infatti come illustrato nel paragrafo 3.1 questa ci farà sicuramente restare nei limiti dell'ipotesi di coordinate quasi lorentziane. Appurato questo punto, mettiamo adesso in evidenza la notevole analogia con la teoria elettromagnetica e la trasformazioni di gauge elettromagnetiche anticipata nel paragrafo 3.1. Consideriamo in particolare le due equazioni che descrivono rispettivamente le due teorie, ossia le [3.18] e le [3.30]. Proprio come il tensore elettromagnetico, da cui deriva il membro sinistro dell'equazione [3.18], è invariante sotto una trasformazione di gauge elettromagnetica, abbiamo, in analogia con l'equazione [3.17], che: *le componenti del tensore di Riemann sono invarianti, al primo ordine, sotto trasformazioni di gauge [3.16]:*

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} \rightarrow R'_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\alpha\mu\beta\nu} \quad [3.31]$$

Infatti usando la [3.24] segue, dalla commutatività della derivazione parziale:

$$\begin{aligned}
R'_{\alpha\mu\beta\nu} &= \frac{1}{2}(h'_{\alpha\nu,\mu\beta} + h'_{\mu\beta,\alpha\nu} - h'_{\alpha\beta,\mu\nu} - h'_{\mu\nu,\alpha\beta}) = \\
&= \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\mu\beta} - \xi_{\alpha,\nu\mu\beta} - \xi_{\nu,\alpha\mu\beta} + h_{\mu\beta,\alpha\nu} - \xi_{\mu,\beta\alpha\nu} - \xi_{\beta,\mu\alpha\nu} + \\
&\quad - h_{\alpha\beta,\mu\nu} + \xi_{\alpha,\beta\mu\nu} + \xi_{\beta,\alpha\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta} + \xi_{\mu,\nu\alpha\beta} + \xi_{\nu,\mu\alpha\beta}) = R_{\alpha\mu\beta\nu}
\end{aligned}$$

Dal momento che il membro sinistro delle [3.30] deriva direttamente dal tensore di Riemann segue che sotto una trasformazione di gauge [3.16] le equazioni di Einstein linearizzate vanno in se stesse:

$$\begin{aligned}
\Box \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\mu,\nu}{}^{,\alpha} - \bar{h}_{\alpha\nu,\mu}{}^{,\alpha} &= -16\pi G T_{\mu\nu} \\
\downarrow \\
\Box \bar{h}'_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \bar{h}'_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \bar{h}'_{\alpha\mu,\nu}{}^{,\alpha} - \bar{h}'_{\alpha\nu,\mu}{}^{,\alpha} &= -16\pi G T_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Esattamente come nel caso della [3.19]. Diremo dunque analogamente che *la teoria descritta dalle equazioni di Einstein linearizzate possiede una simmetria o invarianza di gauge per trasformazioni del tipo [3.16]*. Come nel caso elettromagnetico potremo dunque usare la libertà che deriva da questa proprietà per imporre delle condizioni di semplificazione fissando dei gauge particolari, in cui uno o più termini delle equazioni di Einstein linearizzate risulta nullo.

Riassumiamo le conclusioni che è possibile trarre da questi primi paragrafi: *la teoria della Relatività Generale linearizzata per uno spaziotempo quasi piatto è descrivibile come una teoria effettiva Lorentz invariante per un campo tensoriale simmetrico  $h_{\mu\nu}$  che soddisfa le equazioni di campo di Einstein linearizzate [3.30]; l'invarianza per cambi di coordinate della Relatività Generale induce in questa teoria effettiva una simmetria di gauge, per cui sotto una trasformazione di gauge del tipo [3.16] le equazioni di Einstein linearizzate [3.30] sono invarianti.*

## 3.4 Gauge di Lorentz

Utilizziamo adesso la libertà garantita dalle trasformazioni di gauge [3.16] per semplificare la forma delle equazioni di Einstein linearizzate [3.30]. Definiamo la condizione:

$$\boxed{\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0} \tag{3.33}$$

Detta *gauge di Lorentz*, di *de Donder* o *armonico*. Supponendo che tale condizione sia effettivamente accessibile attraverso una trasformazione di gauge, deriva immediatamente:

$$0 = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = (\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\bar{h}_{\alpha\beta})_{,\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\bar{h}_{\alpha\beta,\nu} = \eta^{\mu\alpha}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\beta} \rightarrow \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\beta} = 0 \tag{3.34}$$

E conseguentemente tre dei quattro termini del membro di sinistra delle [3.30] si cancellano:

$$\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} = (\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\beta}){}^{,\alpha} = 0 \quad , \quad \bar{h}_{\alpha\mu,\nu}{}^{,\alpha} = (\bar{h}_{\alpha\mu}{}^{,\alpha})_{,\nu} = 0 \quad , \quad \bar{h}_{\alpha\nu,\mu}{}^{,\alpha} = (\bar{h}_{\alpha\nu}{}^{,\alpha})_{,\mu} = 0$$

Allora nel gauge di Lorentz le equazioni di Einstein linearizzate diventano:

$$\boxed{\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}} \tag{3.35}$$

Otteniamo quindi il notevole risultato che le componenti di  $\bar{h}_{\mu\nu}$  soddisfano ognuna, separatamente, un'equazione d'onda con a secondo membro un termine sorgente. Dimostriamo adesso che:



**I. Passaggio al gauge di Lorentz:** partendo da un'arbitraria  $h_{\mu\nu}^{(0)}$  è sempre possibile attuare una trasformazione di gauge per porci nel gauge di Lorentz. Definiamo:

$$h_{\mu\nu}^{(L)} = h_{\mu\nu}^{(0)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad [3.36]$$

Troviamo  $\xi_\mu$  tale che  $h_{\mu\nu}^{(L)}$  soddisfi il gauge di Lorentz. Consideriamo quindi  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(L)} = h_{\mu\nu}^{(L)} - \frac{1}{2}h^{(L)}\eta_{\mu\nu}$ :

$$\bar{h}^{(L)\mu\nu} = h^{(0)\mu\nu} - \xi^{\mu,\nu} - \xi^{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h^{(0)} - 2\xi^\alpha{}_{,\alpha}) = \bar{h}^{(0)\mu\nu} - \xi^{\mu,\nu} - \xi^{\nu,\mu} + \eta^{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha} \quad [3.37]$$

$$\bar{h}^{(L)\mu\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{(0)\mu\nu}{}_{,\nu} - \square\xi^\mu - \xi^{\nu,\prime}{}_{,\nu}{}^\mu + \eta^{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha\nu} = \bar{h}^{(0)\mu\nu}{}_{,\nu} - \square\xi^\mu \quad [3.38]$$

Imponendo quindi che  $\bar{h}^{(L)\mu\nu}{}_{,\nu} \equiv 0$ , la trasformazione di gauge che dovremo operare per passare al gauge di Lorentz dovrà infine essere caratterizzata da  $\xi_\mu$  tale che:

$$\square\xi^{(0\rightarrow L)\mu} = \bar{h}^{(0)\mu\nu}{}_{,\nu} \quad [3.39]$$

E l'esistenza di soluzioni è garantita dalla teoria delle equazioni differenziali del secondo ordine.

**II. Libertà di gauge residua:** supponiamo che  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(L)}$  soddisfi il gauge di Lorentz [3.33] e sia una soluzione delle equazioni di Einstein [3.35]. È possibile attuare una trasformazione di gauge con certe restrizioni per trasformare  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(L)}$  in un'altra soluzione  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(L')}$  che soddisfa ancora il gauge di Lorentz [3.33] e le [3.35]. Consideriamo una trasformazione di gauge con  $\zeta_\mu$  tale che:

$$\square\zeta^{(L\rightarrow L')\mu} = 0 \quad [3.40]$$

Verifichiamo che  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(L')} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(L)} - \zeta_{\mu,\nu} - \zeta_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\zeta^\alpha{}_{,\alpha}$  soddisfa [3.33] e [3.35]:

- $\bar{h}^{(L')\mu\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{(L)\mu\nu}{}_{,\nu} - \square\zeta^\mu = 0 - 0 = 0$
- $\square\bar{h}_{\mu\nu}^{(L')} = \square\bar{h}_{\mu\nu}^{(L)} - (\square\zeta_\mu)_{,\nu} - (\square\zeta_\nu)_{,\mu} + \eta_{\mu\nu}(\square\zeta^\alpha)_{,\alpha} = \square\bar{h}_{\mu\nu}^{(L)} - 0 - 0 + 0 = -16\pi GT_{\mu\nu}$

Dove abbiamo utilizzato l'ipotesi che  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(L)}$  soddisfi [3.33] e [3.35] ed inoltre: nella prima, l'equazione [3.38] riadattata con  $\zeta^\mu$  al posto di  $\xi^\mu$ ,  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(L)}$  come componenti di partenza e  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(L')}$  come componenti trasformate; nella seconda, il fatto che dalla commutatività della derivazione parziale segue che possiamo commutare  $\square = \partial^\mu\partial_\mu$  con una derivata parziale.

Possiamo quindi concludere che trovata una soluzione delle equazioni di Einstein nel gauge di Lorentz questa sarà in realtà soggetta ad un'indeterminazione per trasformazioni di gauge che soddisfano la [3.40]: per fissare completamente tale soluzione dovremo scegliere una  $\zeta_\mu$  particolare. Quindi riassumendo: **I.**  $\bar{h}_{\mu\nu}$  è simmetrico, in partenza possiede quindi 10 componenti indipendenti; **II.** il gauge di Lorentz, costituito da un insieme di 4 equazioni, impone 4 vincoli alle componenti di  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , quelle indipendenti si riducono quindi a 6; **III.** si dimostra che la scelta di una  $\zeta_\mu$  particolare permette di imporre ulteriori 4 vincoli, le componenti indipendenti di una soluzione completamente determinata si riducono quindi a 2. Concludiamo che *delle 10 componenti di una soluzione delle equazioni di Einstein linearizzate 8 possono essere fissate, ed in particolar modo annullate, attraverso trasformazioni di gauge, cioè mettendoci nel gauge di Lorentz e fissandolo completamente sfruttando la libertà di gauge residua.* Applicheremo questa procedura in un caso particolare nel paragrafo 4.2.

# Capitolo 4

## Onde gravitazionali in assenza di sorgenti

### 4.1 Onde gravitazionali piane

Consideriamo, per uno spaziotempo quasi piatto, le equazioni di Einstein linearizzate nel gauge di Lorentz [3.35] e assumiamo di essere nel vuoto, ossia in assenza di un termine sorgente  $T_{\mu\nu}$ :

$$\boxed{\begin{cases} \square \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \\ \bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \end{cases}} \quad [4.1]$$

Dove abbiamo evidenziato la necessità di soddisfare il gauge di Lorentz. Utilizzando unità di misura non naturali in cui la velocità della luce nel vuoto è  $c$ , l'operatore nella prima delle [4.1] avrebbe la forma:  $\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$ . Segue quindi che le equazioni di Einstein linearizzate nel gauge di Lorentz assumono la forma di equazioni di d'Alembert con velocità caratteristica pari a quella della luce nel vuoto: le soluzioni, secondo la teoria ondulatoria, saranno perciò *onde che si propagano alla velocità della luce nel vuoto*. Inoltre, dal momento che le componenti  $\bar{h}_{\mu\nu}$  rappresentano la deviazione rispetto alla metrica di Minkowski della metrica di uno spaziotempo quasi piatto, le soluzioni delle [4.1], che chiameremo *onde gravitazionali*, sono visualizzabili più precisamente come *perturbazioni della curvatura di uno spaziotempo piatto che si propagano alla velocità della luce nel vuoto*.

La più semplice soluzione per le [4.1] è un'onda piana:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \mathcal{R}e(A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) \quad [4.2]$$

Con  $\mathcal{R}e$  che indica la parte reale dell'espressione.  $A_{\mu\nu}$  e  $k_\alpha$  sono tensori costanti detti rispettivamente *ampiezza d'onda* e *vettore d'onda* e non sono totalmente arbitrari: risentono infatti della restrizione imposta dal gauge di Lorentz e quella necessaria a soddisfare l'equazione d'onda. In particolare:

- $0 = \square \bar{h}_{\mu\nu} = \mathcal{R}e(\partial^\beta \partial_\beta A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) = \mathcal{R}e(-k^\beta k_\beta A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha})$
- $0 = \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu} = \mathcal{R}e(\partial^\nu A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) = \mathcal{R}e(ik^\nu A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha})$

Quindi il vettore  $k^\nu$  deve essere un *vettore nullo* ed *ortogonale* alle componenti dell'ampiezza  $A_{\mu\nu}$ :

$$k^\alpha k_\alpha = 0 \quad [4.3]$$

$$k^\nu A_{\mu\nu} = k_\nu A^{\mu\nu} = 0 \quad [4.4]$$

In particolare scrivendo  $k^\nu = (\omega, \vec{k})$  la [4.3] implica:

$$\omega = |\vec{k}| \quad [4.5]$$

Che è la tipica *equazione di dispersione* per un'onda che si muove alla velocità della luce, riconoscendo in  $\omega$  la *frequenza* e in  $\vec{k}$  il *vettore d'onda* che dà la direzione di propagazione. Notiamo infine che nonostante la loro semplicità questo tipo di soluzioni è molto utile: è infatti possibile costruire una generica soluzione delle [4.1] come sovrapposizione secondo Fourier, discreta o continua, di onde piane del tipo [4.2].

## 4.2 Gauge TT

Dalla discussione in fondo al paragrafo 3.4 sappiamo che una soluzione  $\bar{h}_{\mu\nu}$  completamente determinata delle equazioni di Einstein linearizzate, quindi in particolare delle [4.1], ha 2 componenti indipendenti *fisiche*, le altre possono essere eliminate attraverso trasformazioni di gauge: diremo quindi che *un'onda gravitazionale ha 2 componenti indipendenti*. Considerando in particolare un'onda piana i primi 4 vincoli imposti dal gauge di Lorentz alle 10 componenti di  $\bar{h}_{\mu\nu}$  sono dati dalla [4.4]. Ulteriori 4 vincoli possono essere imposti sfruttando la libertà di gauge residua: vediamo adesso come utilizzarla per ottenere una forma molto semplice per  $\bar{h}_{\mu\nu}$  in cui compaiono solo i due termini indipendenti. Consideriamo innanzitutto un'onda piana che si propaga lungo l'asse  $z$  positivo:

$$k^\mu = (\omega, k^1, k^2, k^3) \equiv (\omega, 0, 0, k) = (k, 0, 0, k) \quad [4.6]$$

$$k_\mu = \eta_{\mu\nu}k^\nu = (-\omega, k^1, k^2, k^3) \equiv (-\omega, 0, 0, k) = (-k, 0, 0, k) \quad [4.7]$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo imposto la [4.3] necessaria a soddisfare le equazioni di Einstein. Dalla [4.4], derivante dal gauge di Lorentz, abbiamo invece:

$$0 = k_\nu A^{\mu\nu} = -kA^{\mu 0} + kA^{\mu 3} \quad \rightarrow \quad A^{\mu 0} = A^{\mu 3} \quad [4.8]$$

Quindi in generale le componenti di  $A^{\mu\nu}$  si organizzano nella seguente matrice:

$$A^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{23} \\ A^{03} & A^{13} & A^{23} & A^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{01} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{02} \\ A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \end{bmatrix} \quad [4.9]$$

Attuiamo adesso una delle trasformazioni permesse dalla libertà di gauge residua, cioè con  $\zeta^\mu$  tale che  $\square\zeta^\mu = 0$ . In particolare prendiamo quindi  $\zeta^\mu$  della forma:

$$\zeta^\mu = \mathcal{R}e(B^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}) \quad [4.10]$$

Riadattiamo l'espressione [3.37] per una trasformazione di gauge usando come componenti di partenza le  $\bar{h}^{\mu\nu}$  dell'onda piana [4.2] e come componenti trasformate  $\bar{h}'^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \bar{h}'^{\mu\nu} &= \bar{h}^{\mu\nu} - \zeta^{\mu,\nu} - \zeta^{\nu,\mu} + \eta^{\mu\nu}\zeta^\alpha{}_{,\alpha} = \\ &= \mathcal{R}e\left[(A^{\mu\nu} - iB^\mu k^\nu - iB^\nu k^\mu + \eta^{\mu\nu}iB^\beta k_\beta)e^{ik_\alpha x^\alpha}\right] \end{aligned} \quad [4.11]$$

Riconosciamo allora l'ampiezza d'onda trasformata in:

$$A'^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - iB^\mu k^\nu - iB^\nu k^\mu + \eta^{\mu\nu}iB^\beta k_\beta \quad [4.12]$$

Ricordiamo che una trasformazione concessa dalla libertà di gauge residua permette di restare nel gauge di Lorentz, allora anche per  $A'^{\mu\nu}$  vale la relazione:

$$k^\nu A'_{\mu\nu} = k_\nu A'^{\mu\nu} = 0 \quad [4.13]$$

Quindi anche  $A'^{\mu\nu}$  ha la forma [4.9]. Allora dalla [4.12] otteniamo esplicitamente le 6 equazioni:

$$\begin{array}{l|l|l} A'^{00} = A^{00} - ik(B^0 + B^3) & A'^{11} = A^{11} - ik(B^0 - B^3) & A'^{22} = A^{22} - ik(B^0 - B^3) \\ A'^{01} = A^{01} - ikB^1 & A'^{02} = A^{02} - ikB^2 & A'^{12} = A^{12} \end{array}$$

Possiamo quindi scegliere le 4 componenti del vettore  $B^\mu$  in modo da semplificare a nostro piacimento  $A'^{\mu\nu}$ . Una scelta comune consiste nell'imporre:

$$\begin{cases} A'^{00} = 0 \\ A'^{01} = 0 \\ A'^{02} = 0 \\ A'^{22} = -A'^{11} \end{cases} \quad [4.14]$$

In particolare le componenti del vettore  $B^\mu$  devono avere allora le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} (B^0 + B^3) = \frac{A^{00}}{ik} \\ B^1 = \frac{A^{01}}{ik} \\ B^2 = \frac{A^{02}}{ik} \\ (B^0 - B^3) = \frac{A^{11} + A^{22}}{2ik} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B^0 = \frac{2A^{00} + A^{11} + A^{22}}{4ik} \\ B^1 = \frac{A^{01}}{ik} \\ B^2 = \frac{A^{02}}{ik} \\ B^3 = \frac{2A^{00} - A^{11} - A^{22}}{4ik} \end{cases} \quad [4.15]$$

Così facendo abbiamo scelto una  $\zeta^\mu$  specifica e conseguentemente fissato completamente la soluzione delle equazioni di Einstein. Questa scelta particolare per rimuovere la libertà di gauge residua dal gauge di Lorentz è detta *gauge di Lorentz trasverso a traccia nulla* o *gauge TT*, infatti dalle [4.14] segue che le componenti  $A'^{\mu\nu}$ , che andiamo a rinominare  $A^{(TT)\mu\nu}$ , si organizzano nella matrice:

$$A^{(TT)\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{(TT)11} & A^{(TT)12} & 0 \\ 0 & A^{(TT)12} & -A^{(TT)11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [4.16]$$

Da cui in particolare seguono le proprietà che suggeriscono il nome del gauge:

$$\text{I. } \underline{\text{Trasverso:}} \quad A^{(TT)\mu 3} = 0 \quad \forall \mu \quad [4.17]$$

$$\text{II. } \underline{\text{Traccia nulla:}} \quad A^{(TT)\mu}_{\mu} = A^{(TT)} = 0 \quad [4.18]$$

Cioè: **I.** la perturbazione non ha componenti nella direzione di propagazione, che non è quindi interessata dai suoi effetti e **II.** la traccia di  $A^{(TT)\mu\nu}$  è nulla. Per  $\bar{h}^{(TT)\mu\nu}$  vale infine:

$$\bar{h}^{(TT)\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}^{(TT)11} & \bar{h}^{(TT)12} & 0 \\ 0 & \bar{h}^{(TT)12} & -\bar{h}^{(TT)11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [4.19]$$

Dove in particolare:

$$\begin{aligned} \bar{h}^{(TT)11} &= \mathcal{R}e(A^{(TT)11} e^{ik_\alpha x^\alpha}) \\ \bar{h}^{(TT)12} &= \mathcal{R}e(A^{(TT)12} e^{ik_\alpha x^\alpha}) \end{aligned} \quad [4.20]$$

In particolare rimangono soltanto le due componenti indipendenti dell'onda gravitazionale, rappresentate da  $\bar{h}^{(TT)11}$  e  $\bar{h}^{(TT)12}$ . Notiamo in particolare che la traccia nulla implica:

$$\bar{h}^{(TT)}_{\mu\nu} = h^{(TT)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{(TT)} \eta_{\mu\nu} = h^{(TT)}_{\mu\nu} \quad [4.21]$$

Cioè non abbiamo ovviamente differenza tra la perturbazione  $h^{(TT)}_{\mu\nu}$  e la versione a traccia inversa. Nel proseguo, quando utilizzeremo il gauge TT, faremo riferimento alle proprietà dimostrate in questo paragrafo attribuendole, in virtù della [4.21], anche a  $h^{(TT)}_{\mu\nu}$ .

### 4.3 Stati di polarizzazione

Le due componenti indipendenti di  $h_{\mu\nu}^{(TT)}$ ,  $h^{(TT)11}$  e  $h^{(TT)12}$ , vengono comunemente indicate  $h_+$  e  $h_\times$ , rispettivamente. Esse non sono intrinsecamente separate, infatti la distinzione tra l'una e l'altra dipende dall'osservatore: *esiste un cambio di coordinate in cui le componenti si scambiano di ruolo*. Consideriamo in particolare una rotazione di un angolo  $\frac{\pi}{4}$  sul piano  $x$ - $y$  attorno all'asse  $z$ :

$$R^{\mu'}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [4.22]$$

Sotto questa trasformazione avremo che  $h^{(TT)\mu\nu} \rightarrow h^{(TT')\mu'\nu'} = R^{\mu'}_{\alpha} R^{\nu'}_{\beta} h^{(TT)\alpha\beta}$ . Esplicitamente:

$$h^{(TT')\mu'\nu'} = R^{\mu'}_{\alpha} R^{\nu'}_{\beta} h^{(TT)\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^{(TT)12} & -h^{(TT)11} & 0 \\ 0 & -h^{(TT)11} & -h^{(TT)12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [4.23]$$

In particolare quindi:

$$\begin{cases} h^{(TT)11} \rightarrow h^{(TT')11} = h^{(TT)12} \\ h^{(TT)12} \rightarrow h^{(TT')12} = -h^{(TT)11} \end{cases} \quad [4.24]$$

Le componenti si sono cioè effettivamente scambiate di ruolo: tecnicamente si dice dunque che *un'onda gravitazionale possiede due stati di polarizzazione indipendenti separati da un angolo di  $\frac{\pi}{4}$  radianti*,  $h_+$  e  $h_\times$ . Inoltre in alcune circostanze la distinzione tra  $h_+$  e  $h_\times$  può essere descritta in modo indipendente dall'osservatore. A tal proposito consideriamo:

$$h_+ = \text{Re}(A_+ e^{ik_\alpha x^\alpha}) \quad , \quad h_\times = \text{Re}(A_\times e^{ik_\alpha x^\alpha}) \quad [4.25]$$

Con  $A_+$  e  $A_\times$  due costanti complesse indipendenti dalle coordinate. Saranno costanti anche i rapporti:

$$R = \frac{A_\times}{A_+} \quad , \quad S = \frac{A_+}{A_\times} \quad [4.26]$$

Valutiamo in particolare i seguenti casi particolari:

**I.**  $\boxed{R, S \in \mathbb{R}}$  :  $\frac{h_\times}{h_+} = \frac{\text{Re}(RA_+ e^{ik_\alpha x^\alpha})}{\text{Re}(A_+ e^{ik_\alpha x^\alpha})} = R \frac{\text{Re}(A_+ e^{ik_\alpha x^\alpha})}{\text{Re}(A_+ e^{ik_\alpha x^\alpha})} = R = S^{-1}$

Il rapporto tra le componenti è costante (quando una delle due è nulla consideriamo tra i due rapporti quello nullo), possiamo quindi ruotare gli assi  $x$  e  $y$  di un certo angolo attorno all'asse  $z$  in modo che o  $h_+ = 0$  o  $h_\times = 0$ . L'onda si dice *polarizzata linearmente*.

**II.**  $\boxed{R, S = \pm i}$  :  $\sqrt{h_+^2 + h_\times^2} = \sqrt{\text{Re}(A_+ e^{ik_\alpha x^\alpha})^2 + \text{Im}(A_+ e^{ik_\alpha x^\alpha})^2} = |A_+| = |A_\times|$

L'ampiezza dell'onda gravitazionale è costante in quanto  $h_+$  e  $h_\times$  evolvono come un seno ed un coseno moltiplicati per una certa ampiezza. L'onda si dice *polarizzata circolarmente*.

Nel paragrafo 4.6 studieremo il differente comportamento di onde gravitazionali polarizzate linearmente e circolarmente, analizzandone gli effetti su un insieme di particelle test.

## 4.4 Effetto di un'onda gravitazionale su particelle test – Distanza propria

Studieremo adesso gli effetti di un'onda gravitazionale. A tal proposito considereremo delle particelle test libere in uno spaziotempo quasi piatto e ne studieremo le traiettorie geodetiche al passaggio di un'onda gravitazionale piana che si propaga lungo l'asse  $z$ .

Consideriamo in primo luogo un'unica particella test libera in uno spaziotempo quasi piatto in cui si propaga un'onda gravitazionale piana lungo l'asse  $z$ . Supponiamo di usare un sistema di coordinate che realizza il gauge di Lorentz trasverso a traccia nulla e in cui la particella è inizialmente ferma, vale a dire con quadrivelocità iniziale  $u^\mu|_0 = (1, \vec{0})$ . Il moto avviene lungo le geodetiche [2.2]:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0 \quad [4.27]$$

Usando la [3.22] per la connessione affine in uno spaziotempo quasi piatto e la condizione iniziale:

$$\left. \frac{du^\mu}{d\tau} \right|_0 = -\Gamma_{00}^\mu = -\frac{\eta^{\mu\alpha}}{2} (h_{0\alpha,0}^{(TT)} + h_{0\alpha,0}^{(TT)} - h_{00,\alpha}^{(TT)}) \quad [4.28]$$

Dalle proprietà [4.17] e [4.21] valide nel gauge TT e tenendo conto che  $A^{\mu 0} = A^{\mu 3}$  dalla [4.8], deriva:

$$A_{\mu 0} = A_{\mu 3} = 0 \quad \rightarrow \quad h_{\mu 0}^{(TT)} = h_{\mu 3}^{(TT)} = 0 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{du^\mu}{d\tau} \right|_0 = 0 \quad [4.29]$$

Otteniamo quindi che l'accelerazione iniziale della particella è anch'essa nulla: se inizialmente a riposo, la particella è a riposo anche l'istante successivo. Ripetendo l'argomento concludiamo che *al passaggio dell'onda gravitazionale la particella rimane indefinitamente a riposo*: nelle coordinate utilizzate le geodetiche sono le curve per cui le coordinate spaziali sono fissate. Notiamo che “rimanere a riposo” significa semplicemente che le coordinate spaziali della particella non cambiano, e questo è un effetto diretto della scelta di un sistema di coordinate dove vale il gauge TT.

Le coordinate non hanno tuttavia valenza geometrica intrinseca. Consideriamo a tal proposito due particelle test libere inizialmente ferme: una nell'origine  $x = y = z = 0$  e l'altra sull'asse  $x$  in  $x = \epsilon$ ,  $y = z = 0$ , con  $\epsilon \ll 1$ . Valutiamo la *distanza propria* che le separa, ossia la lunghezza (indipendente dalle coordinate) del segmento che le unisce, pensato come curva sulla varietà. Usiamo la coordinata  $x$  come parametro: possiamo calcolarne la lunghezza utilizzando la metrica, attraverso il funzionale lunghezza [1.13]. Dal momento che ci muoviamo solo lungo  $x$  e dal fatto che  $\epsilon$  è piccolo abbiamo:

$$\Delta l = \int_0^\epsilon \sqrt{|g_{\mu\nu} \delta_1^\mu \delta_1^\nu|} dx = \int_0^\epsilon \sqrt{|g_{11}(x)|} dx \cong \sqrt{|g_{11}(x=0)|} \epsilon \quad [4.30]$$

Dalla condizione di campo debole abbiamo che:

$$g_{11}(x=0) = \eta_{11} + h_{11}^{(TT)}(x=0) = 1 + h_{11}^{(TT)}(x=0) \quad [4.31]$$

Quindi infine approssimativamente:

$$\Delta l \cong \left( 1 + \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)}(x=0) \right) \epsilon \quad [4.32]$$

In generale  $h_{11}^{(TT)}(x=0)$  non è costante: *il passaggio dell'onda gravitazionale si manifesta quindi in una variazione della distanza propria che separa particelle test libere in moto geodetico.*

## 4.5 Effetto di un'onda gravitazionale su particelle test – Deviazione geodetica

Un altro approccio per studiare l'effetto di un'onda gravitazionale su particelle test è utilizzare la deviazione geodetica, vedremo infatti che l'azione di un'onda gravitazionale consiste nella generazione di forze di marea tra le particelle.

Consideriamo ancora due particelle test libere separate dal vettore  $\xi^\mu$ . Lavorando in coordinate che realizzano il gauge TT, come nel precedente paragrafo, le particelle restano ancorate ai corrispettivi punti, dove si trovavano inizialmente, nel sistema coordinato, dunque le componenti  $\xi^\mu$  sono costanti. Mettiamoci dunque in un altro sistema di coordinate, quello localmente inerziale in caduta libera con le particelle in modo che: **I.** la prima particella si trovi nell'origine, collegata dal vettore  $\xi^\mu$  alla seconda particella e **II.** le due particelle siano inizialmente, prima dell'arrivo dell'onda gravitazionale, a riposo. Riportiamo innanzitutto l'equazione della deviazione geodetica [2.21]:

$$(\nabla_{\bar{u}}\nabla_{\bar{u}}\xi)^\mu = R^\mu_{\alpha\beta\gamma}\mu^\alpha\mu^\beta\xi^\gamma \quad [4.33]$$

Dove  $\mu^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  è la quadrivelocità della prima particella. Riportiamo dal paragrafo 2.4 anche l'espressione esplicita per  $(\nabla_{\bar{u}}\nabla_{\bar{u}}\xi)^\mu$ :

$$(\nabla_{\bar{u}}\nabla_{\bar{u}}\xi)^\mu = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\xi^\alpha\mu^\beta\right) + \Gamma^\mu_{\varepsilon\delta}\left(\frac{d\xi^\varepsilon}{d\tau} + \Gamma^\varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\alpha\mu^\beta\right)\mu^\delta = \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} \quad [4.34]$$

In quanto in questo riferimento  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$ . Inoltre, per ipotesi, le particelle sono inizialmente ferme con quadrivelocità  $\mu^\alpha = (1, \vec{0})$ , segue dunque, negli istanti immediatamente successivi a quello iniziale:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = \mu^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\mu^\alpha \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial t^2} \quad [4.35]$$

Combinando [4.34] e [4.35] e dal fatto che inizialmente vale  $\mu^\alpha = (1, \vec{0})$ , la [4.33] diventa:

$$\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial t^2} = R^\mu_{00\gamma}\xi^\gamma \quad [4.36]$$

Che descrive l'evoluzione della distanza tra le due particelle. Dal momento che l'ampiezza di un'onda gravitazionale è data dalle componenti  $h_{\mu\nu}$  e siamo per ipotesi in uno spaziotempo quasi piatto, ci aspettiamo che il passaggio dell'onda risulti in una piccola perturbazione dello stato iniziale delle particelle: assumeremo la [4.36] valida anche negli istanti successivi a quello iniziale, supponendo che la velocità delle particelle rimanga piccola. Inoltre dal momento che a secondo membro nella [4.36] è già presente il tensore di Riemann, di ordine 1 in  $h_{\mu\nu}$ , potremo sostituire  $\xi^\gamma$  con il valore che assume inizialmente. Consideriamo a tal proposito due casi particolari, ossia con la seconda particella inizialmente alla distanza coordinata  $\epsilon$  dall'origine, dove si trova la prima, lungo gli assi  $x$  e  $y$ :

**I. Separazione lungo  $x$ :** per costruzione vale  $\xi^\gamma = (0, \epsilon, 0, 0)$ . Allora la [4.36] diventa:

$$\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial t^2} = R^\mu_{00\gamma}\xi^\gamma = R^\mu_{001}\epsilon = -R^\mu_{010}\epsilon \quad [4.37]$$

Come dimostrato nel paragrafo 3.2 le componenti del tensore di Riemann sono invarianti sotto trasformazioni di gauge, e saranno in particolare le stesse nel sistema localmente inerziale e nelle

coordinate, leggermente modificate, che realizzano il gauge TT. Per determinarle possiamo quindi usare per comodità il gauge TT dove  $h_{\mu 0}^{(TT)} = h_{\mu 3}^{(TT)} = 0$ . Usando l'espressione [3.24] segue allora:

$$\begin{aligned} R^0_{010} &= \eta^{0\alpha} R_{\alpha 010} = \eta^{00} R_{0010} = \frac{-1}{2} \left( h_{00,01}^{(TT)} + h_{01,00}^{(TT)} - h_{01,00}^{(TT)} - h_{00,01}^{(TT)} \right) = 0 \\ R^1_{010} &= \eta^{1\alpha} R_{\alpha 010} = \eta^{11} R_{1010} = \frac{1}{2} \left( h_{10,01}^{(TT)} + h_{01,10}^{(TT)} - h_{11,00}^{(TT)} - h_{00,11}^{(TT)} \right) = -\frac{1}{2} h_{11,00}^{(TT)} \\ R^2_{010} &= \eta^{2\alpha} R_{\alpha 010} = \eta^{22} R_{2010} = \frac{1}{2} \left( h_{20,01}^{(TT)} + h_{01,20}^{(TT)} - h_{21,00}^{(TT)} - h_{00,21}^{(TT)} \right) = -\frac{1}{2} h_{12,00}^{(TT)} \\ R^3_{010} &= \eta^{3\alpha} R_{\alpha 010} = \eta^{33} R_{3010} = \frac{1}{2} \left( h_{30,01}^{(TT)} + h_{01,30}^{(TT)} - h_{31,00}^{(TT)} - h_{00,31}^{(TT)} \right) = 0 \end{aligned}$$

In particolare quindi le componenti non nulle sono:

$$\begin{aligned} R^1_{010} &= -\frac{1}{2} h_{11,00}^{(TT)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{11}^{(TT)}}{\partial t^2} \\ R^2_{010} &= -\frac{1}{2} h_{12,00}^{(TT)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{12}^{(TT)}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad [4.38]$$

La distanza coordinata tra le particelle evolve dunque secondo le equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} &= +\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2 h_{11}^{(TT)}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} &= +\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2 h_{12}^{(TT)}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad [4.39]$$

**II. Separazione lungo  $y$ :** per costruzione vale  $\xi^\nu = (0, 0, \epsilon, 0)$ . Allora la [4.36] diventa:

$$\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial t^2} = R^\mu_{00\nu} \xi^\nu = R^\mu_{002} \epsilon = -R^\mu_{020} \epsilon \quad [4.40]$$

In modo analogo al caso precedente valutiamo  $R^\mu_{020}$  nel gauge TT:

$$\begin{aligned} R^0_{020} &= \eta^{0\alpha} R_{\alpha 020} = \eta^{00} R_{0020} = \frac{-1}{2} \left( h_{00,02}^{(TT)} + h_{02,00}^{(TT)} - h_{02,00}^{(TT)} - h_{00,02}^{(TT)} \right) = 0 \\ R^1_{020} &= \eta^{1\alpha} R_{\alpha 020} = \eta^{11} R_{1020} = \frac{1}{2} \left( h_{10,02}^{(TT)} + h_{02,10}^{(TT)} - h_{12,00}^{(TT)} - h_{00,12}^{(TT)} \right) = -\frac{1}{2} h_{12,00}^{(TT)} \\ R^2_{020} &= \eta^{2\alpha} R_{\alpha 020} = \eta^{22} R_{2020} = \frac{1}{2} \left( h_{20,02}^{(TT)} + h_{02,20}^{(TT)} - h_{22,00}^{(TT)} - h_{00,22}^{(TT)} \right) = -\frac{1}{2} h_{22,00}^{(TT)} \\ R^3_{020} &= \eta^{3\alpha} R_{\alpha 020} = \eta^{33} R_{3020} = \frac{1}{2} \left( h_{30,02}^{(TT)} + h_{02,30}^{(TT)} - h_{32,00}^{(TT)} - h_{00,32}^{(TT)} \right) = 0 \end{aligned}$$

Dal fatto che  $h_{22}^{(TT)} = -h_{11}^{(TT)}$ , le componenti non nulle sono:

$$\begin{aligned} R^1_{020} &= -\frac{1}{2} h_{12,00}^{(TT)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{12}^{(TT)}}{\partial t^2} \\ R^2_{020} &= +\frac{1}{2} h_{11,00}^{(TT)} = +\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{11}^{(TT)}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad [4.41]$$

Allora in questo caso la distanza tra le particelle evolve seguendo le equazioni differenziali:



$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} &= +\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2 h_{12}^{(TT)}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} &= -\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2 h_{11}^{(TT)}}{\partial t^2}\end{aligned}\quad [4.42]$$

Concludiamo il paragrafo sottolineando la differenza tra i due metodi usati per descrivere l'effetto di un'onda gravitazionale su due particelle test, sintetizzati nelle equazioni [4.32] e [4.36]. Il primo evidenzia che due particelle test in caduta libera, su cui quindi non agiscono forze non gravitazionali, sperimentano una variazione della lunghezza propria che le separa. Il secondo fornisce un'equazione differenziale che dà l'accelerazione della seconda particella misurata in un riferimento localmente inerziale che coincide inizialmente con il moto della prima: in questo riferimento la seconda particella sperimenta, come conseguenza dell'arrivo dell'onda gravitazionale, un effetto agente a livello efficace come una forza rispetto alla prima, a seconda della distanza da quest'ultima. Si dice quindi che *il passaggio di un'onda gravitazionale si manifesta nella comparsa di forze di marea tra le particelle*.

## 4.6 Effetto di un'onda gravitazionale su particelle test – Anello di particelle

Le due coppie di espressioni trovate nel precedente paragrafo, [4.39] e [4.42], sono generalizzabili al caso in cui la seconda particella si trova inizialmente alle coordinate  $x = \epsilon \cos \theta$ ,  $y = \epsilon \sin \theta$ ,  $z = 0$ . In questo caso infatti  $\xi^\gamma = (0, \epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta, 0)$  e dunque la [4.36] diventa:

$$\frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial t^2} = R^\mu_{00\gamma} \xi^\gamma = -R^\mu_{010} \epsilon \cos \theta - R^\mu_{020} \epsilon \sin \theta \quad [4.43]$$

Seguono allora, utilizzando le [4.38] e [4.41]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} &= -R^1_{010} \epsilon \cos \theta - R^1_{020} \epsilon \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{11}^{(TT)}}{\partial t^2} \epsilon \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{12}^{(TT)}}{\partial t^2} \epsilon \sin \theta \\ \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} &= -R^2_{010} \epsilon \cos \theta - R^2_{020} \epsilon \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{12}^{(TT)}}{\partial t^2} \epsilon \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{11}^{(TT)}}{\partial t^2} \epsilon \sin \theta\end{aligned}\quad [4.44]$$

Immaginiamo in particolare che per ogni valore dell'angolo  $\theta \in [0, 2\pi[$  si abbia una particella inizialmente posizionata in  $x = \epsilon \cos \theta$ ,  $y = \epsilon \sin \theta$ ,  $z = 0$ : consideriamo cioè un *anello di particelle test* inizialmente equidistanti dall'origine nel piano  $x$ - $y$  e investite da un'onda gravitazionale che si propaga lungo l'asse  $z$ . Risolviamo le [4.44] in due casi particolari, onda gravitazionale polarizzata linearmente e circolarmente, secondo le definizioni date nel paragrafo 4.3:

**I. Lineare:** usiamo le [4.20] sfruttando il fatto che nel gauge TT  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(TT)} = h_{\mu\nu}^{(TT)}$ :

$$\begin{aligned}h_{11}^{(TT)} &= A_+ \sin[k(z - t)] \\ h_{12}^{(TT)} &= A_\times \sin[k(z - t)]\end{aligned}\quad [4.45]$$

Dove abbiamo supposto  $A_{11}^{(TT)} = -iA_+$  e  $A_{12}^{(TT)} = -iA_\times$ , con  $A_+$  e  $A_\times$  due costanti reali in modo da avere polarizzazione lineare:  $\frac{A_{12}^{(TT)}}{A_{11}^{(TT)}} \in \mathbb{R}$ . Sostituendo nelle [4.44] vale allora:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} &= -k^2 \left( \frac{1}{2} A_+ \epsilon \cos \theta + \frac{1}{2} A_\times \epsilon \sin \theta \right) \sin(-kt) \\ \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} &= -k^2 \left( \frac{1}{2} A_\times \epsilon \cos \theta - \frac{1}{2} A_+ \epsilon \sin \theta \right) \sin(-kt)\end{aligned}\quad [4.46]$$

Dove abbiamo valutato in  $z = 0$  gli argomenti delle funzioni trigonometriche in quanto le [4.43] sono state ricavate imponendo che  $\xi^\gamma$ , nel membro di destra delle [4.36], sia approssimativamente uguale al valore iniziale, quando per costruzione le particelle si trovano nel piano  $x$ - $y$  a  $z = 0$ . Con la condizione sulla posizione iniziale  $\xi^\gamma = (0, \epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta, 0)$  possiamo identificare la soluzione:

$$\begin{aligned}\xi^1(t) &= \epsilon \cos \theta - \left( \frac{1}{2} A_+ \epsilon \cos \theta + \frac{1}{2} A_\times \epsilon \sin \theta \right) \sin(kt) \\ \xi^2(t) &= \epsilon \sin \theta - \left( \frac{1}{2} A_\times \epsilon \cos \theta - \frac{1}{2} A_+ \epsilon \sin \theta \right) \sin(kt)\end{aligned}\quad [4.47]$$

Concludiamo quindi che *ciascuna particella oscilla armonicamente attorno alla propria posizione iniziale avvicinandosi ed allontanandosi dall'origine*. In particolare:

$$\begin{aligned}\square A_+ \neq 0 \text{ e } A_\times = 0: \quad & \xi^1(t) = \epsilon \cos \theta \left( 1 - \frac{1}{2} A_+ \sin(kt) \right) \\ & \xi^2(t) = \epsilon \sin \theta \left( 1 + \frac{1}{2} A_+ \sin(kt) \right)\end{aligned}\quad [4.48]$$

Come illustrato nella prima riga in Fig. 4a l'anello di particelle oscilla contraendosi lungo l'asse  $x$  e allungandosi lungo l'asse  $y$  e viceversa. In particolare per  $kt = n\pi$  con  $n \in \mathbb{N}$ , l'anello di particelle è nella configurazione iniziale imperturbata, cioè ogni particella è nella posizione che occupava inizialmente. L'onda è *polarizzata linearmente +*.

$$\begin{aligned}\square A_+ = 0 \text{ e } A_\times \neq 0: \quad & \xi^1(t) = \epsilon \cos \theta - \frac{1}{2} A_\times \epsilon \sin \theta \sin(kt) \\ & \xi^2(t) = \epsilon \sin \theta - \frac{1}{2} A_\times \epsilon \cos \theta \sin(kt)\end{aligned}\quad [4.49]$$

Come illustrato nella seconda riga in Fig. 4b anche in questo caso l'anello di particelle oscilla contraendosi e dilatandosi lungo direzioni ortogonali, ma ruotate rispetto al caso precedente di un angolo  $\frac{\pi}{4}$ . Nel caso precedente l'onda aveva soltanto componente  $h_+$ , in questo caso soltanto  $h_\times$ ; ritroviamo dunque, come nel paragrafo 4.3, che gli stati di polarizzazione indipendenti di un'onda gravitazionale,  $h_+$  e  $h_\times$ , sono separati da un angolo  $\frac{\pi}{4}$ ; in questo caso, più propriamente, abbiamo dimostrato in particolare che operando una rotazione di  $\frac{\pi}{4}$  gli effetti di una sono identici agli effetti dell'altra. Infine notiamo che anche in questo caso per  $kt = n\pi$  con  $n \in \mathbb{N}$ , l'anello di particelle è nella configurazione iniziale imperturbata. L'onda si dice *polarizzata linearmente ×*.

**II. Circolare:** usiamo ancora le [4.20] con  $\bar{h}_{\mu\nu}^{(TT)} = h_{\mu\nu}^{(TT)}$ :

$$\begin{aligned}h_{11}^{(TT)} &= A_\odot \cos[k(z-t)] \\ h_{12}^{(TT)} &= A_\odot \sin[k(z-t)]\end{aligned}\quad [4.50]$$

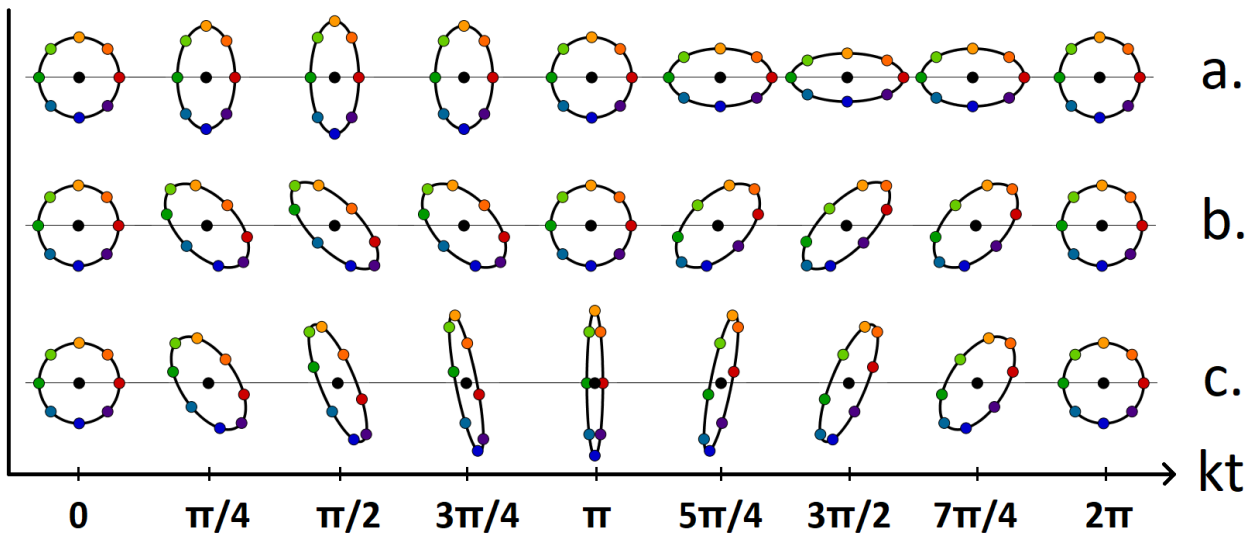
Dove abbiamo supposto  $A_{11}^{(TT)} = A_\odot$  e  $A_{12}^{(TT)} = -iA_\odot$ , con  $A_\odot$  una costante reale in modo da avere polarizzazione circolare:  $\frac{A_{12}^{(TT)}}{A_{11}^{(TT)}} = -i$ . Sostituendo nelle [4.44] vale allora:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} &= -k^2 \left( \frac{1}{2} A_{\odot} \epsilon \cos \theta \cos(-kt) + \frac{1}{2} A_{\odot} \epsilon \sin \theta \sin(-kt) \right) \\ \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} &= -k^2 \left( \frac{1}{2} A_{\odot} \epsilon \cos \theta \sin(-kt) - \frac{1}{2} A_{\odot} \epsilon \sin \theta \cos(-kt) \right)\end{aligned}\quad [4.51]$$

Valutate ancora in  $z = 0$ . Una soluzione con condizione iniziale  $\xi^\nu = (0, \epsilon \cos \theta, \epsilon \sin \theta, 0)$  è:

$$\begin{aligned}\xi^1(t) &= \epsilon \cos \theta + \frac{1}{2} A_{\odot} \epsilon \cos \theta [\cos(kt) - 1] - \frac{1}{2} A_{\odot} \epsilon \sin \theta \sin(kt) \\ \xi^2(t) &= \epsilon \sin \theta - \frac{1}{2} A_{\odot} \epsilon \cos \theta \sin(kt) - \frac{1}{2} A_{\odot} \epsilon \sin \theta [\cos(kt) - 1]\end{aligned}\quad [4.52]$$

In questo caso si ha che *ciascuna particella ruota su una traiettoria circolare passando ciclicamente per la posizione che occupava inizialmente*. Come illustrato nella terza riga in Fig. 4c, l'anello appare globalmente, deformarsi e al contempo ruotare.



**Fig. 4:** Anello di particelle test nel piano  $x$ - $y$  perturbate dal passaggio di un'onda gravitazionale che si propaga lungo l'asse  $z$  e polarizzata: linearmente  $+$  (a), linearmente  $\times$  (b) e circolarmente (c).

Concludiamo il paragrafo notando che, con qualsiasi delle tre polarizzazioni in Fig. 4, effettuando una rotazione di angolo  $\pi$  attorno all'asse  $z$  la situazione rimane inalterata: si dice che *un'onda gravitazionale è invariante sotto una rotazione di angolo  $\pi$* . In effetti effettuando una rotazione come nel paragrafo 4.3, ma di angolo  $\pi$ , si ha che  $h_{\mu\nu}^{(TT)}$  va in se stessa. Inoltre, come dimostrato nel paragrafo 4.3 e come ritrovato studiando un'onda polarizzata linearmente, *un'onda gravitazionale possiede due stati di polarizzazione indipendenti separati da un angolo  $\frac{\pi}{4}$* . Nello studio delle onde elettromagnetiche si trova una situazione del tutto analoga: *un'onda elettromagnetica è invariante sotto una rotazione di angolo  $2\pi$  e possiede due stati di polarizzazione indipendenti separati da un angolo  $\frac{\pi}{2}$* . Si dimostra che questi sono due esempi di un fatto del tutto generale: *in teoria dei campi quantizzati una particella bosonica di spin intero  $s$  è descritta da un campo tensoriale  $\mathbf{I}$ , invariante sotto una rotazione di angolo  $\frac{2\pi}{s}$  attorno la direzione di propagazione e  $\mathbf{II}$ , dotato di due stati di polarizzazione indipendenti separati da un angolo  $\frac{\pi}{2s}$* . Nel caso elettromagnetico la particella è il fotone con spin  $s = 1$ , descritto da un campo tensoriale vettoriale, il quadripotenziale  $A^\mu$ . Nel caso gravitazionale, qualora sviluppata una teoria quantistica della gravità, sarebbe il gravitone, che, alla luce delle precedenti osservazioni, dovrebbe avere  $s = 2$  ed essere descritto dal campo tensoriale  $h_{\mu\nu}$ .

# Capitolo 5

## Rilevazione delle onde gravitazionali

### 5.1 Tipologie di rilevatori

In questo capitolo descriveremo brevemente il principio di funzionamento su cui si fondano i moderni rilevatori di onde gravitazionali, tra cui in particolare il rilevatore statunitense LIGO, che nel settembre del 2015 è stato protagonista della prima storica rilevazione di un'onda gravitazionale.

Nel precedente capitolo abbiamo mostrato che il passaggio di un'onda gravitazionale può essere rilevato misurando la variazione della distanza propria tra particelle test libere in moto geodetico. Sulla base di questo principio nel corso degli anni sono state costruite diverse tipologie di rilevatori. Schematicamente possono essere riuniti in due famiglie:

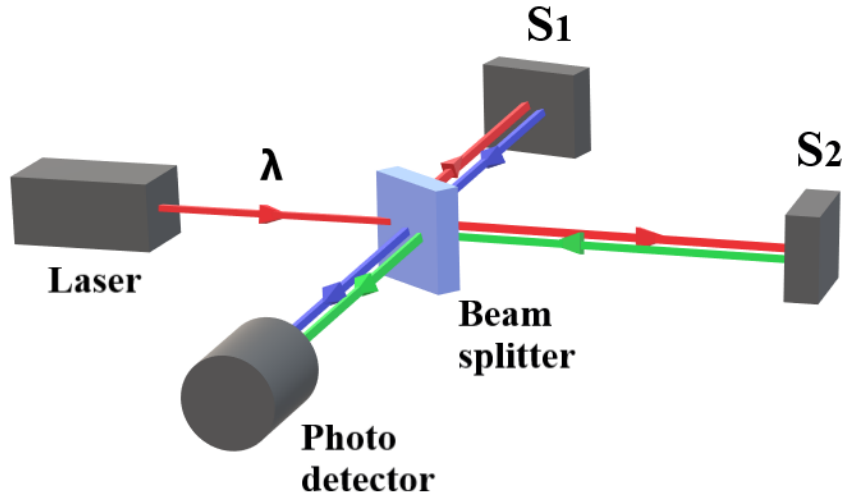
- I. **Bar detectors:** o *detector a massa risonante*, sfruttano corpi massivi elastici che rispondono ad un'onda gravitazionale incidente iniziando ad oscillare in risonanza con essa. Sono stati i primi rilevatori costruiti (anni '60) e avevano tipicamente una precisione molto minore dei moderni rilevatori.
- II. **Beam detectors:** vi rientrano molte tipologie di rilevatori, tutte accomunate dal fatto di utilizzare come principio di rilevazione il monitoraggio di segnali elettromagnetici alla ricerca di fluttuazioni che evidenzino le oscillazioni nella distanza propria tra masse di prova libere. I rilevatori più significativi appartenenti a questo gruppo sono gli *interferometri a laser*, che costituiscono gli strumenti per la rilevazione di onde gravitazionali dotati ad oggi della migliore precisione e alla cui categoria appartiene anche il sopracitato rilevatore LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory).

Nei prossimi paragrafi ci concentreremo soltanto sulla seconda tipologia, descrivendo in particolare il principio di funzionamento di un interferometro laser ed elencando i principali rilevatori che costituiscono ad oggi la rete di rilevazione di onde gravitazionali.

### 5.2 Interferometri a laser

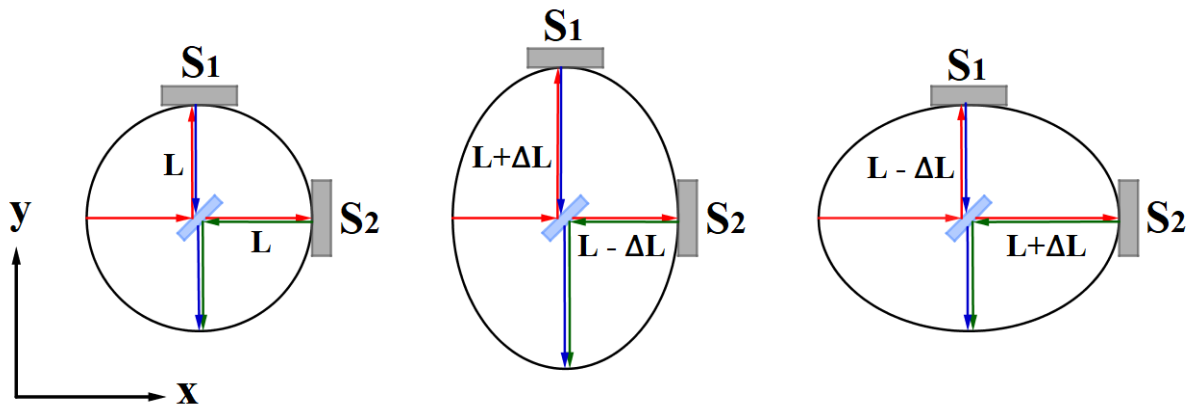
Il principio di funzionamento di un interferometro a laser consiste nel misurare la variazione della distanza propria tra masse di prova attraverso la misura della differenza tra i tempi di volo di segnali luminosi che, in assenza della perturbazione causata dal passaggio di un'onda gravitazionale, sarebbero per costruzione identici. Una rappresentazione molto schematizzata di un interferometro a laser è riportata in Fig. 5: l'apparato si compone di una sorgente laser che emette luce monocromatica con lunghezza d'onda  $\lambda$  in direzione di un *beam splitter*, un dispositivo che grazie ad uno specchio semiriflettente separa il raggio in ingresso in due raggi uscenti, i quali entrano separatamente nei due bracci perpendicolari dell'interferometro; dopo aver coperto la distanza dal beam splitter alla fine dei due bracci, entrambi di lunghezza propria  $L$ , i due raggi vengono riflessi all'indietro dai due specchi  $S_1$  e  $S_2$ , che svolgono il ruolo di masse di prova libere; dopo aver compiuto il percorso in senso opposto vengono ricombinati e direzionati verso un *photodetector* in cui i raggi interferiscono producendo una figura di interferenza. In assenza del passaggio di un'onda gravitazionale, essendo i due bracci per costruzione di identica lunghezza propria, il tempo di volo dei due raggi è lo stesso.

Per costruzione si fa in modo che in questa situazione i due raggi in arrivo nel photodetector siano in opposizione di fase, così che l'interferenza sia distruttiva. Con questo apparato il passaggio di un'onda gravitazionale può essere rilevato osservando una variazione nella figura di interferenza: al passaggio dell'onda le lunghezze proprie dei bracci si modificano e in particolare si diversificano (come descriveremo a breve), segue quindi che il tempo di volo dei due raggi non è più lo stesso, e che questi, di conseguenza, accumulano nel tragitto una differenza di fase che fa sì che, all'arrivo nel photodetector, non siano più in interferenza completamente distruttiva, generando frange di interferenza.



**Fig. 5:** Rappresentazione schematica di un interferometro a laser: il raggio luminoso in uscita dalla sorgente (rosso) viene separato dal beam splitter in due raggi indirizzati nei due bracci dell'interferometro. I due specchi  $S_1$  e  $S_2$  riflettono all'indietro i raggi riflessi (blu e verde), i quali vengono poi ricombinati e indirizzati verso il photodetector dove si forma la figura di interferenza.

Per illustrare in che modo ci aspettiamo che un'onda gravitazionale modifichi la distanza propria tra i due specchi  $S_1$  e  $S_2$  e il beam splitter, consideriamo innanzitutto una situazione particolare. Immaginiamo di essere nella situazione descritta nei paragrafi 4.5 e 4.6: gli specchi  $S_1$  e  $S_2$  e il beam splitter costituiscono le particelle test libere, il laboratorio è il riferimento localmente inerziale in cui le particelle sono inizialmente ferme, prima dell'arrivo dell'onda gravitazionale che ne provoca un aumento o diminuzione della distanza reciproca; supponiamo in particolare che l'origine si trovi nel beam splitter e che i bracci siano nelle direzioni degli assi  $x$  e  $y$ , come raffigurato in Fig. 6.



**Fig. 6:** Effetto del passaggio di un'onda gravitazionale polarizzata linearmente + sui bracci di un interferometro perfettamente allineato con la polarizzazione dell'onda e disposto sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione.

Immaginiamo che ad un certo istante arrivi un'onda gravitazionale piana che si propaga lungo l'asse  $z$  con polarizzazione lineare  $+$ :

$$h^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h^{11} = h \sin[k(z-t)] \quad [5.1]$$

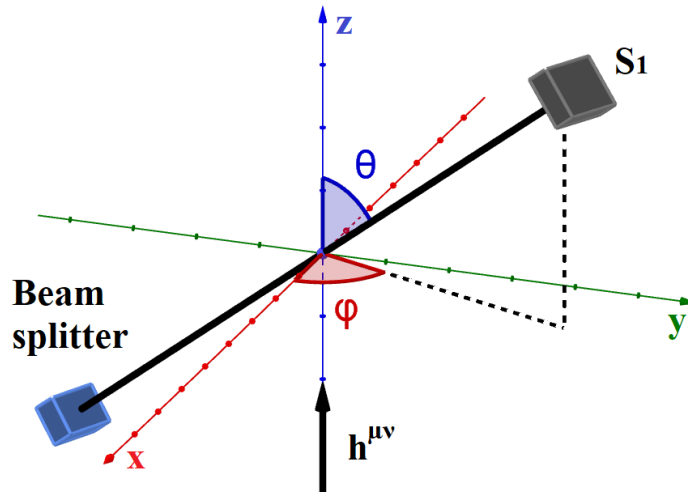
Siamo nella situazione descritta dalle [4.48]. Ci aspettiamo allora che la distanza dall'origine degli specchi, inizialmente  $L$ , si allunghi e si accorci fino ai valori:

$$L_{MAX} = L \left(1 + \frac{h}{2}\right), \quad L_{MIN} = L \left(1 - \frac{h}{2}\right) \quad [5.2]$$

Ci aspettiamo dunque di assistere, al passaggio dell'onda gravitazionale, ad una variazione relativa:

$$\left|\frac{\Delta L}{L}\right| = \left|\frac{L_{MAX/MIN} - L}{L}\right| = \frac{h}{2} \quad [5.3]$$

Otteniamo quindi il risultato che la variazione relativa della lunghezza propria dei bracci è dell'ordine dell'ampiezza dell'onda gravitazionale, che come vedremo è estremamente piccola. Notiamo che con una configurazione del tipo in Fig. 6 non avremmo potuto rilevare il passaggio dell'onda gravitazionale in caso di polarizzazione lineare  $\times$ , infatti in questo caso dalle [4.49] segue che gli specchi  $S_1$  e  $S_2$ , pensati come particelle, si sposterebbero rispettivamente in direzione  $x$  e  $y$ , per cui non si avrebbe alcuna variazione nella lunghezza dei bracci. Realisticamente l'interferometro non è perfettamente allineato con la polarizzazione e la direzione di propagazione dell'onda gravitazionale in arrivo: la variazione di lunghezza sperimentata da un braccio dipende dalla sua inclinazione rispetto all'onda incidente. Consideriamo in particolare la situazione rappresentata in Fig. 7, in cui un braccio di un interferometro, la cui inclinazione è espressa in coordinate polari, è colpito da un'onda che si propaga in direzione  $z$ .



**Fig. 7:** Incidenza di un'onda gravitazionale piana, che si propaga lungo l'asse  $z$ , sul braccio di un interferometro arbitrariamente orientato.

Si dimostra che in caso di polarizzazione lineare  $+$  l'interferometro “vede” un'onda gravitazionale incidente con ampiezza effettiva:

$$h_+ = h \sin^2 \theta \cos 2\varphi \quad [5.4]$$

Massima quando il braccio è sul piano  $x$ - $y$  nelle direzioni degli assi  $x$  e  $y$ , cioè per  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}$ .

L'ampiezza efficace è invece nulla quando il braccio dell'interferometro è sul piano  $x$ - $y$  ma lungo le bisettrici, cioè per  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e per  $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ , e quando si trova lungo la direzione di propagazione, cioè per  $\theta = 0$ . In caso di polarizzazione lineare  $\times$  si ha invece:

$$h_{\times} = h \sin \theta^2 \sin 2\varphi \quad [5.5]$$

Massima, al contrario del caso precedente, quando il braccio dell'interferometro è sul piano  $x$ - $y$  e lungo le bisettrici,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ , e nulla se nelle direzioni degli assi  $x$  e  $y$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}$ . Per la natura trasversa delle onde gravitazionali anche in questo caso non abbiamo effetti quando il braccio si trova lungo la direzione di propagazione, cioè per  $\theta = 0$ .

La [5.3] suggerisce l'importante risultato per cui è possibile migliorare la precisione di un interferometro aumentandone le dimensioni, in particolare l'estensione dei bracci  $L$ . Infatti così facendo, a parità di ampiezza d'onda incidente, aumenta la differenza di percorso  $\Delta L$  dei due raggi e conseguentemente la differenza tra i tempi di volo, che sarà quindi più facilmente misurabile attraverso la figura di interferenza nel photodetector. Sempre in quest'ottica gli interferometri sono dotati lungo i bracci di ulteriori specchi o cavità risonanti, così che il tempo di percorrenza di un raggio di luce lungo l'estensione del braccio sia notevolmente aumentato a causa delle molteplici riflessioni o per la permanenza per un certo tempo all'interno di una cavità risonante. L'altro metodo fondamentale per migliorare la precisione di un interferometro è ridurre il rumore estraneo, che potrebbe camuffare il segnale del passaggio di un'onda gravitazionale. Citiamo in particolare tre fonti di rumore:

- I. **Vibrazioni dal suolo**: il metodo usato per rimuovere il rumore provocato dalle vibrazioni che si trasmettono attraverso il suolo terrestre consiste nel sospendere tutti i componenti dell'interferometro attraverso sistemi di isolamento basati su uno o più livelli di sospensioni.
- II. **Vibrazioni termiche**: causate dall'agitazione termica degli atomi che costituiscono specchi e cavi di sospensione. Una soluzione a temperatura ambiente è utilizzare materiali specificamente progettati per confinare le vibrazioni termiche ad una ristretta regione attorno alle frequenze di risonanza, che sono per costruzione ben oltre il range in cui devono operare gli strumenti nell'interferometro. L'alternativa è fare in modo che l'interferometro operi a bassissima temperatura, soluzione adottata dal rilevatore sotterraneo KAGRA (Kamioka Gravitational Wave Detector).
- III. **Shot noise**: con questo termine si indicano le fluttuazioni di intensità nel pattern di interferenza dovute alla natura corpuscolare della luce. Il metodo principale per diminuirle è aumentare la quantità di luce nelle cavità di risonanza dei bracci, così facendo si aumenta l'intensità della luce, cioè il numero di fotoni, andando così a diminuire le fluttuazioni prodotte dalla loro natura discreta.

L'attuazione di queste procedure ed accorgimenti risulta fondamentale per il funzionamento di un interferometro: gli effetti del passaggio di un'onda gravitazionale risultano infatti estremamente piccoli. L'ampiezza  $h$  che dà la variazione relativa di  $L$  risulta compresa tipicamente nel range:

$$h \sim 10^{-22} \div 10^{-20}$$

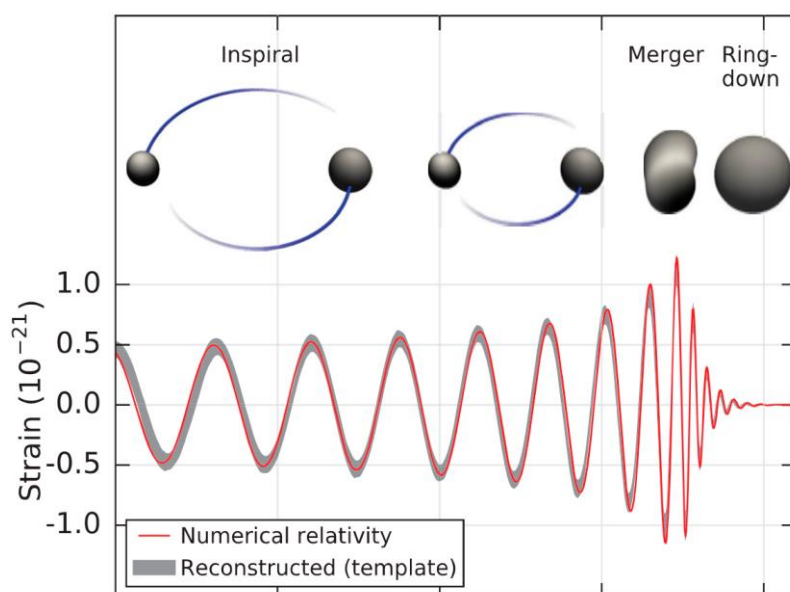
A seconda del fenomeno astrofisico che ha generato l'onda gravitazionale. Inoltre, è necessario tenere conto della frequenza dell'onda incidente: i moderni interferometri terrestri sono sensibili nel range  $\sim 20 \text{ Hz} \div \sim 2000 \text{ Hz}$ . In particolare per basse frequenze la maggior fonte di rumore sono le vibrazioni dal suolo, invece al centro del range e per alte frequenze la sensibilità è determinata rispettivamente dal rumore termico e dallo shot noise. È possibile predire teoricamente che gli eventi astrofisici capaci di generare radiazione gravitazionale in questo range di ordini di grandezza,  $10 \div 10^3 \text{ Hz}$ , sono i cosiddetti *merger* di sistemi binari di oggetti compatti, come stelle di neutroni o buchi

neri. Un sistema binario è un insieme di due oggetti che orbitano attorno al comune centro di massa: secondo la teoria della Relatività Generale i due oggetti emettono radiazione gravitazionale perdendo conseguentemente energia e cominciando un moto spiraleforme, detto *inspiral*, reciprocamente attrattivo verso il centro di massa. Come conseguenza di questo moto i due oggetti, ad un certo istante, entrano in contatto e comincia un processo di fusione, al termine del quale rimane un unico oggetto compatto: questa fase terminale della vita di un sistema binario è detta *merger*, mentre l'assestamento dell'oggetto finale *ring-down*. Considerando sistemi binari di oggetti molto più massivi, come buchi neri super-massicci, si predice che le onde gravitazionali prodotte prima e durante il merger abbiano frequenze molto minori: questi eventi non sono rilevabili negli odierni interferometri terrestri.

## 5.3 Rete interferometrica attuale

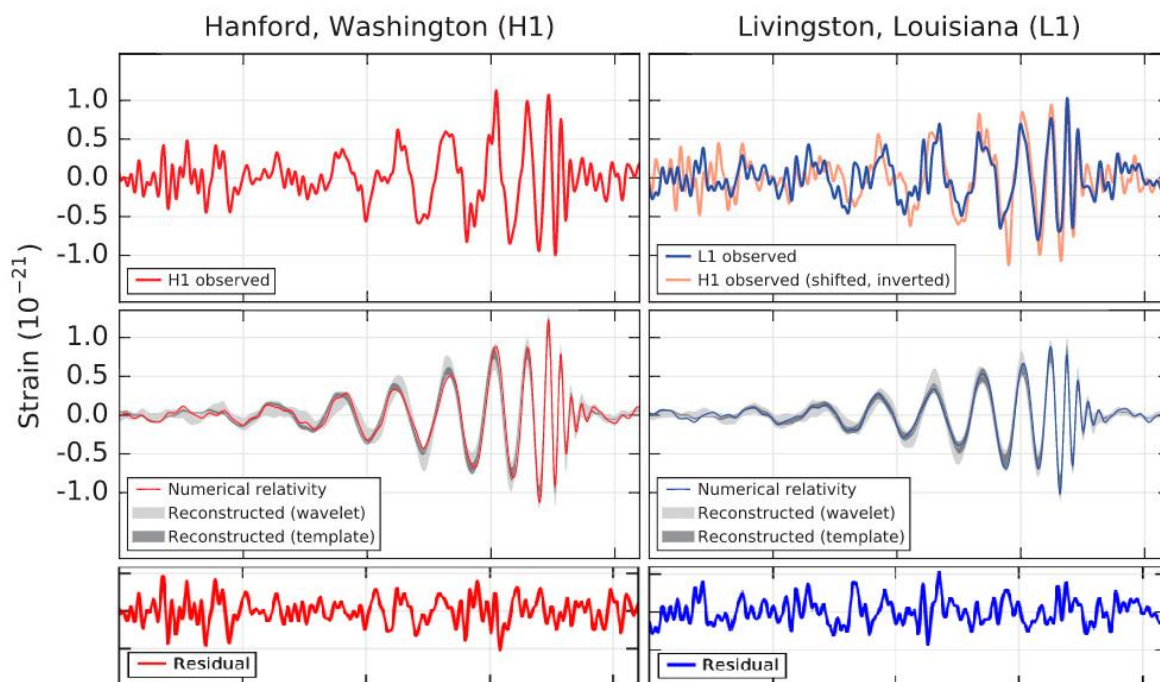
La rete di interferometri attualmente operanti è composta dai rilevatori:

- I. **GEO600**: Hannover, Germania. Provvisto di bracci di 600 m, è attualmente il rilevatore dotato della minore sensibilità.
- II. **KAGRA**: (Kamioka Gravitational Wave Detector) Hida, Giappone. Rilevatore sotterraneo dotato di bracci di 3 km e caratterizzato dal fatto di essere attualmente l'unico ad usare specchi criogenici operanti alla bassissima temperatura di circa 20 K.
- III. **VIRGO**: Pisa, Italia. È il rilevatore europeo di riferimento, anch'esso dotato di bracci di 3 km.
- IV. **LIGO**: (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) due impianti Hanford, Washington e Livingston, Louisiana, USA. I due rilevatori statunitensi sono attualmente quelli di dimensioni maggiori, con bracci di 4 km, e dotati della maggiore sensibilità. Il 14 settembre del 2015 sono stati protagonisti della prima rilevazione di un'onda gravitazionale, l'evento GW150914: un segnale di circa 0.2 s rilevato in sequenza dai due rilevatori a distanza di 7 ms. Tale segnale si è rivelato compatibile con la previsione secondo la Relatività Generale del merger di due buchi neri di 36 e 29 masse solari, che si stima essere avvenuto a 1.3 miliardi di anni luce di distanza e aver prodotto un corpo di 62 masse solari, emettendone circa 3 sotto forma di energia trasportata dalla radiazione gravitazionale. In Fig. 8 e 9 sono riportati, rispettivamente, la previsione teorica e il confronto con il segnale captato sperimentalmente.



**Fig. 8:** Previsione teorica della distorsione delle distanze dovuta al segnale GW150914 emesso durante le fasi del merger dei due buchi neri <sup>[6]</sup>.





**Fig. 9:** Segnali dell'evento GW150914 (in alto) rilevati dai due rilevatori LIGO, Hanford (sinistra) e Livingston (destra), confrontati con le previsioni teoriche (al centro), e rispettivi residui (in basso) <sup>[6]</sup>.

Come citato nel precedente paragrafo questa rete permette la rilevazione di onde gravitazionali nel range di frequenze  $10 \div 10^3$  Hz, ossia quelle riconducibili a merger di stelle di neutroni e buchi neri. È attualmente in fase di progettazione e realizzazione un ambizioso progetto della Agenzia Spaziale Europea noto come LISA, Laser Interferometer Space Antenna. Una volta ultimato, questo apparato permetterà di rilevare onde nel range di ordini di grandezza  $10^{-5} \div 10^0$  Hz, dove ci aspettiamo in particolare segnali provenienti dal merger di buchi neri super-massicci ed altri eventi come la cattura da parte di un buco nero super-massiccio di oggetti molto più piccoli, dell'ordine di alcune masse solari, eventi noti come EMRI o Extreme Mass Ratio Inspiral. L'apparato sarà costituito da tre satelliti in orbita simil-terrestre attorno al sole a costituire un triangolo equilatero avente lato di 2.5 milioni di km di lunghezza. Citiamo infine che attualmente è esplorabile anche un'altra regione dello *spettro gravitazionale*, quella delle bassissime frequenze  $10^{-9} \div 10^{-7}$  Hz, corrispondenti a periodi da alcuni mesi fino ad alcune decadi. In questo range ci aspettiamo ad esempio onde gravitazionali prodotte da un sistema binario di buchi neri super-massicci prima del merger. Lo strumento utilizzato per cercare tale tipologia di segnali è il *pulsar timing*, una tecnica che consiste nell'osservare i segnali periodici provenienti da alcune *pulsar*, cercando variazioni correlate che siano il prodotto del passaggio di un'onda gravitazionale. Le pulsar sono stelle di neutroni rotanti ad alta velocità ed in grado di emettere intensi raggi direzionati di onde radio, si pensa per via di potenti campi magnetici non allineati con l'asse di rotazione: ogni volta che un polo magnetico si trova allineato con la Terra, il raggio emesso dalla stella appare nel cielo come un impulso di onde radio; la proprietà chiave che permette l'applicazione del pulsar timing è il fatto che questi impulsi possiedano una ben precisa periodicità, che fa delle pulsar degli ottimi orologi di riferimento.

# Capitolo 6

## Onde gravitazionali in presenza di sorgenti

### 6.1 Risoluzione dell'equazione d'onda con sorgente

Risolviamo adesso le equazioni di campo di Einstein linearizzate nel gauge di Lorentz [3.35] nella forma completa, ossia in presenza di un termine sorgente  $T^{\mu\nu}$ . Dovremo quindi trovare  $\bar{h}^{\mu\nu}$  tale che:

$$\boxed{\begin{cases} \square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi G T^{\mu\nu} \\ \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \end{cases}} \quad [6.1]$$

Dalla linearità delle equazioni segue la possibilità di esprimere una generica soluzione come (l'argomento  $x$  indica in modo compatto un generico punto di coordinate  $x^\mu = (t, \vec{x})$ ):

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = \bar{h}_0^{\mu\nu}(x) + \bar{h}_p^{\mu\nu}(x) \quad [6.2]$$

Dove  $\bar{h}_p^{\mu\nu}(x)$  è una *soluzione particolare* delle [6.1], mentre  $\bar{h}_0^{\mu\nu}(x)$  una *soluzione omogenea*, ossia una soluzione del tipo trattato nel capitolo 4 con  $T^{\mu\nu} = 0$ :

$$\begin{cases} \square \bar{h}_0^{\mu\nu} = 0 \\ \bar{h}_0^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \end{cases} \quad [6.3]$$

Infatti così facendo, dalla linearità della derivazione, si ha:

- $\square \bar{h}^{\mu\nu} = \square(\bar{h}_0^{\mu\nu} + \bar{h}_p^{\mu\nu}) = \square \bar{h}_0^{\mu\nu} + \square \bar{h}_p^{\mu\nu} = 0 - 16\pi G T^{\mu\nu} = -16\pi G T^{\mu\nu}$
- $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = (\bar{h}_0^{\mu\nu} + \bar{h}_p^{\mu\nu})_{,\nu} = \bar{h}_0^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \bar{h}_p^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 + 0 = 0$

Come soluzione omogenea  $\bar{h}_0^{\mu\nu}$  potremo usare un'onda gravitazionale del tipo descritto nel capitolo 4: il problema si riduce dunque a trovare una soluzione particolare delle [6.1]. Per raggiungere tale scopo è possibile usare la tecnica delle *funzioni di Green*. In particolare si dice che  $D(x, x')$  è una *funzione di Green per l'operatore d'Alembertiano* se soddisfa l'equazione:

$$\square_x D(x, x') = \delta^4(x - x') \quad [6.4]$$

Dove abbiamo specificato che il d'Alembertiano  $\square_x$  è calcolato rispetto alle coordinate  $(t, \vec{x})$  e utilizzato a secondo membro una *delta di Dirac* quadridimensionale con argomento  $x - x'$ , che esplicitamente è esprimibile attraverso il seguente prodotto di delta di Dirac unidimensionali:

$$\delta^4(x - x') = \delta(t - t')\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = \delta(t - t')\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad [6.5]$$

Ricordiamo le proprietà fondamentali della delta di Dirac [6.5]:

$$\int d^4x \delta^4(x - x') = 1 \quad [6.6]$$

$$\int d^4x \delta^4(x - x')f(x) = f(x') \quad [6.7]$$

Dove  $f(x)$  è una generica funzione del punto. Intuitivamente la delta di Dirac è l'analogo continuo

della delta di Kronecker: integrata con una funzione, “seleziona” soltanto il valore che la funzione assume nel suo *supporto*, ossia il punto in cui l’argomento della delta di Dirac si annulla. Sempre intuitivamente parlando, si vede inoltre che una delta di Dirac può essere pensata come una funzione estremamente piccata in corrispondenza del supporto, tendente in valore a  $\infty$ , e nulla altrove, con la condizione che l’integrale in un qualunque intervallo che contiene il supporto sia finito.

Nel capitolo 3 abbiamo mostrato come le equazioni di Einstein linearizzate descrivano una teoria effettiva Lorentz invariante per  $\bar{h}^{\mu\nu}$  in uno spaziotempo quasi piatto, in cui restringiamo i cambi di coordinate alle trasformazioni di Lorentz. Alla luce di questo richiamo notiamo che nelle [6.6] e [6.7] l’integrazione *non* è effettuata con la misura in coordinate arbitrarie  $x^\mu$  per uno spaziotempo generico:

$$\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} d^4x \quad [6.8]$$

Per la quale avremmo bisogno di conoscere già  $\bar{h}^{\mu\nu}$ . In virtù delle condizione di campo debole imponiamo  $g_{\mu\nu} \cong \eta_{\mu\nu}$  e usiamo la *misura Lorentz invariante*  $d^4x$ . La terminologia deriva dal fatto che sotto una trasformazione di coordinate di Lorentz,  $x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} x^\nu = \Lambda^{\mu'}_\nu x^\nu$ , abbiamo che:

$$d^4x \rightarrow d^4x' = \left| \det \left( \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right) \right| d^4x = d^4x \quad [6.9]$$

Dove abbiamo usato il fatto che le matrici del gruppo di Lorentz hanno determinante unitario. Nel proseguo lavoreremo sempre nello spaziotempo di Minkowski effettivo dove “vive”  $\bar{h}^{\mu\nu}$ , e in particolare vi calcoleremo tutti i successivi integrali, utilizzando la misura  $d^4x$ .

L’utilità di una funzione di Green che risolve la [6.4] risiede nel fatto che, se determinata, permette di esprimere immediatamente una soluzione particolare per la prima delle [6.1], ossia per l’equazione d’onda con sorgente. Consideriamo a tal proposito l’espressione:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = -16\pi G \int d^4x' D(x, x') T^{\mu\nu}(x') \quad [6.10]$$

Se  $D(x, x')$  è una funzione di Green del d’Alembertiano segue immediatamente dalla [6.4] che la [6.10] è una soluzione particolare della prima delle [6.1]:

$$\begin{aligned} \square_x \bar{h}^{\mu\nu}(x) &= -16\pi G \square_x \int d^4x' D(x, x') T^{\mu\nu}(x') = \\ &= -16\pi G \int d^4x' \square_x D(x, x') T^{\mu\nu}(x') = \\ &= -16\pi G \int d^4x' \delta^4(x - x') T^{\mu\nu}(x') = -16\pi G T^{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

Alla luce dell’interpretazione intuitiva data per la delta di Dirac concludiamo che l’equazione [6.4] rappresenta un’equazione d’onda per  $D(x, x')$  avente un termine sorgente precisamente localizzato nel punto  $x'$ , cioè una *sorgente puntiforme*. Allora in questi termini, osservando la [6.10], possiamo interpretare  $D(x, x')$  come *il peso con cui la porzione infinitesima della distribuzione sorgente  $T^{\mu\nu}(x')$  occupante il punto  $x'$  contribuisce a determinare  $\bar{h}^{\mu\nu}(x)$  calcolata nel punto  $x$* . Come conseguenza di questa riflessione ci aspettiamo che  $D(x, x')$  dipenda soltanto dalla distanza tra  $x$  e  $x'$ : operando una traslazione spaziotemporale di un certo vettore sia sul punto in cui misuriamo  $\bar{h}^{\mu\nu}$  sia sulla sorgente, ci aspettiamo di avere la stessa  $D(x, x')$ . Nel proseguo imporremo allora  $D(x, x') \equiv D(x - x')$ . Notiamo infine l’importanza di verificare che la soluzione particolare trovata attraverso la [6.10] sia compatibile con il gauge di Lorentz, come espresso dalla seconda delle [6.1].

## 6.2 Soluzione mediante una funzione di Green ritardata

Il problema della determinazione di una funzione di Green  $D(x - x')$  che soddisfi la [6.4] può essere affrontato utilizzando la tecnica di risoluzione per equazioni differenziali mediante trasformate di Fourier, cioè esprimendo  $D(x - x')$  come antitrasformata della propria trasformata  $\tilde{D}(k)$ :

$$D(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \tilde{D}(k) \quad [6.11]$$

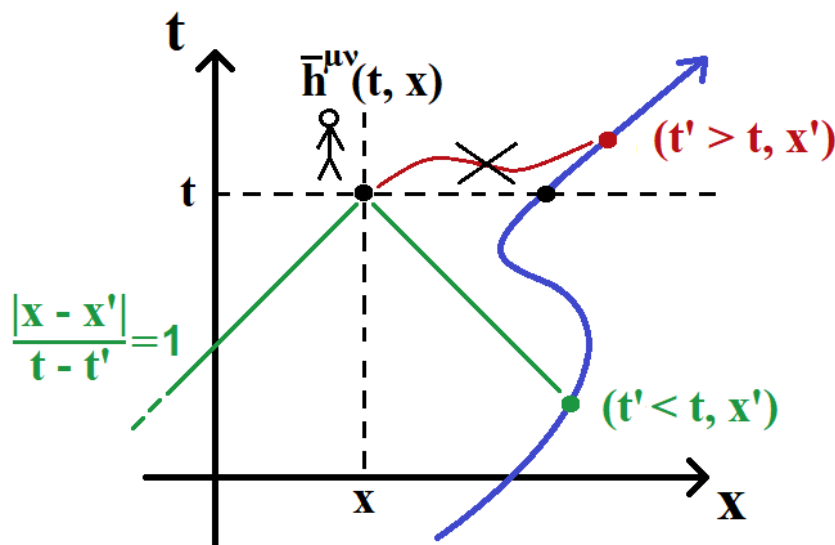
E sfruttando la seguente rappresentazione integrale della delta di Dirac [6.5]:

$$\delta(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \quad [6.12]$$

Si dimostra che così facendo l'equazione differenziale [6.4] si trasforma in un'equazione algebrica per  $\tilde{D}(k)$  (tecnicamente segue dalla completezza della base esponenziale di Fourier): una volta determinata  $\tilde{D}(k)$  è sufficiente usare l'integrale [6.11] per risalire a  $D(x - x')$ . Non daremo i dettagli tecnici del procedimento, tuttavia citiamo il fatto che, svolgendo l'integrale in  $k^0$  (nella [6.11] abbiamo  $d^4k = dk^0 d^3\vec{k}$ ), emerge la necessità di calcolare un integrale complesso con due poli sul cammino di integrazione. Per ottenere una forma esplicita per la funzione di Green è dunque necessario fornire una *prescrizione* aggiuntiva, in base a cui spostare i poli al di sopra o al di sotto del cammino di integrazione: a seconda della prescrizione fornita otterremo una corrispondente funzione di Green. In questo contesto la fisica ci impone la prescrizione:

$$D_{ret}(x - x') = 0 \quad \text{per} \quad t' > t \quad [6.13]$$

In cui il pedice indica che imponendo tale prescrizione otterremo una cosiddetta *funzione di Green ritardata*. Il motivo per cui si assegna questo nome e per cui è necessario imporre questa condizione risiede nel *principio di causalità*, e in particolare nel fatto che *la causa deve sempre precedere l'effetto* (in particolare dovremo avere che l'evento "causa" e l'evento "effetto" siano collegabili al massimo da un segnale che si muove avanti nel tempo alla velocità della luce, ma come vedremo la trattazione sarà naturalmente coerente con questa richiesta).



**Fig. 10:** Un osservatore misura in  $(t, x)$  la  $\bar{h}^{\mu\nu}$  determinata da una sorgente puntiforme in moto: questa determina  $\bar{h}^{\mu\nu}(t, x)$  quando si viene a trovare nel cono luce passato dell'evento  $(t, x)$ .

In particolare dovremo avere che un punto della distribuzione sorgente localizzato in  $\vec{x}'$  al tempo  $t'$  (causa) *non* deve contribuire ad  $\bar{h}^{\mu\nu}$  calcolata in  $\vec{x}$  al tempo  $t$  (effetto) se  $t' > t$ ; dunque, alla luce dell'interpretazione data per  $D(x - x')$  alla fine del precedente paragrafo, dovremo avere che questa sia identicamente nulla per  $t' > t$  come espresso dalla [6.13]. Per illustrare più chiaramente questo concetto consideriamo la situazione rappresentata (con una singola dimensione spaziale) in Fig. 10. Un osservatore posizionato in  $(t, \vec{x})$  misura la  $\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x})$  dovuta ad una sorgente puntiforme in moto arbitrario: in quell'istante la misura non potrà assolutamente dipendere dalla sorgente quando si trova in un punto  $(t' > t, \vec{x}')$ , ossia nel futuro, in quanto questo richiederebbe un segnale che si propaga all'indietro nel tempo. Notiamo inoltre che la misura non potrà dipendere nemmeno dalla sorgente in un punto  $(t' = t, \vec{x}' \neq \vec{x})$ , dal momento che in questo caso sarebbe necessario un segnale che si propaga a velocità infinita. Adesso dimostreremo che coerentemente con queste osservazioni, usando una funzione di Green ritardata, emerge che la sorgente determina  $\bar{h}^{\mu\nu}$  in  $(t, \vec{x})$  quando si viene a trovare nel cono luce passato dell'evento  $(t, \vec{x})$ .

Si dimostra che la condizione [6.13] prescrive la seguente forma per  $D_{ret}(x - x')$ :

$$D_{ret}(x - x') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta((t - t') - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \theta(t - t') \quad [6.14]$$

Dove  $|\vec{x} - \vec{x}'|$  è la distanza euclidea tra i punti  $\vec{x}$  e  $\vec{x}'$ , e  $\theta(x)$  la *funzione a gradino di Heaviside*:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad [6.15]$$

Sostituendo nella [6.10] abbiamo allora:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = 4G \int dt' d^3\vec{x}' \frac{\delta((t - t') - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \theta(t - t') T^{\mu\nu}(t', \vec{x}')$$

Dalle proprietà della delta di Dirac l'integrazione temporale è immediata: basterà calcolare la parte restante dell'integrando nel supporto della delta. In questo caso tale supporto è:

$$t' = t - |\vec{x} - \vec{x}'| \quad [6.16]$$

Sostituendo otteniamo infine l'espressione:

$$\boxed{\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = 4G \int d^3\vec{x}' \frac{T^{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}} \quad [6.17]$$

Deduciamo immediatamente che  $\bar{h}^{\mu\nu}$  calcolata in  $(t, \vec{x})$  dipende *non* dall'"aspetto" che la distribuzione sorgente ha allo stesso istante, ma da quello che aveva al cosiddetto *tempo ritardato*,  $t - |\vec{x} - \vec{x}'|$ . In particolare una porzione di sorgente influenza il valore di  $\bar{h}^{\mu\nu}$  in  $(t, \vec{x})$  quando si verrà a trovare in  $(t', \vec{x}')$  tale da soddisfare la [6.16], che riscriviamo come:

$$\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{t - t'} = 1 \quad [6.18]$$

Cioè quando si viene a trovare in un punto ipoteticamente collegabile a  $(t, \vec{x})$  da un segnale luminoso (ricordiamo che in unità di misura naturali un segnale luminoso si muove con velocità 1), o, in altre parole, nel cono di luce passato di  $(t, \vec{x})$  ("passato", in quanto deve valere  $t' < t$ ), come illustrato in Fig. 10. Notiamo, in particolare, che la connotazione di "cono luce" a cui facciamo riferimento è quella valida in uno spaziotempo piatto, in quanto, come precisato nel precedente paragrafo, stiamo operando nello spaziotempo di Minkowski effettivo dove "vive"  $\bar{h}^{\mu\nu}$ .

## 6.3 Verifica del gauge di Lorentz

Verifichiamo adesso che la soluzione [6.17] soddisfa il gauge di Lorentz ed è effettivamente una soluzione particolare delle [6.1]. A tal proposito ricordiamo le seguenti proprietà della delta di Dirac:

$$\delta(a^2 - b^2) = \frac{1}{2|b|} [\delta(a - b) + \delta(a + b)] \quad [6.19]$$

$$\delta(a - b) = \delta(b - a) \quad [6.20]$$

Applichiamo [6.19] e [6.20] alla seguente combinazione:

$$\begin{aligned} \delta\left((x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)\right) \theta(t - t') &= \delta(|\vec{x} - \vec{x}'|^2 - (t - t')^2) \theta(t - t') = \\ &= \delta((t - t')^2 - |\vec{x} - \vec{x}'|^2) \theta(t - t') = \\ &= \frac{1}{2|\vec{x} - \vec{x}'|} [\delta((t - t') - |\vec{x} - \vec{x}'|) + \delta((t - t') + |\vec{x} - \vec{x}'|)] \theta(t - t') = \\ &= \frac{1}{2|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta((t - t') - |\vec{x} - \vec{x}'|) \theta(t - t') \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio la seconda delta nel membro di destra si cancella perché  $(t - t')$  (che a causa della  $\theta$  è positivo) non potrà mai assumere il valore del supporto,  $-|\vec{x} - \vec{x}'|$  (negativo). Allora confrontando il risultato con la [6.14] possiamo riscrivere  $D_{ret}(x - x')$  come:

$$D_{ret}(x - x') = -\frac{1}{2\pi} \delta\left((x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)\right) \theta(t - t') \quad [6.21]$$

Da questa espressione otteniamo due risultati notevoli: **I.**  $D_{ret}(x - x') \neq 0$  solo se  $x^\mu - x'^\mu$  ha norma nulla, cioè è un intervallo di tipo luce, e **II.**  $D_{ret}(x - x')$  è uno scalare secondo Lorentz. La prima deriva dal fatto che la delta è diversa da zero soltanto nel supporto, cioè dove l'argomento si annulla; la seconda dall'invarianza della delta, il cui argomento è uno scalare, e dal fatto che sotto una trasformazione di Lorentz (ortocrona) l'ordine temporale di eventi separati da un intervallo di tipo tempo o luce, come  $x$  e  $x'$ , è conservato (in quanto potrebbero essere causalmente connessi), dunque anche  $\theta$  è uno scalare. Usiamo adesso questo risultato per verificare il gauge di Lorentz per la [6.17]:

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\mu\nu}_{, \nu} &= -16\pi G \int d^4x' \partial_\nu [D_{ret}(x - x')] T^{\mu\nu}(x') = 16\pi G \int d^4x' \partial'_\nu [D_{ret}(x - x')] T^{\mu\nu}(x') = \\ &= 16\pi G \int d^4x' \partial'_\nu [D_{ret}(x - x') T^{\mu\nu}(x')] - 16\pi G \int d^4x' D_{ret}(x - x') \partial'_\nu [T^{\mu\nu}(x')] = \\ &= 16\pi G \int_{\Sigma_\infty} d\Sigma_\nu [D_{ret}(x - x') T^{\mu\nu}(x')] = 0 \end{aligned}$$

Nel secondo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che per una funzione della differenza di due variabili vale sempre:  $\partial_x f(x - y) = -\partial_y f(x - y)$ . Nel terzo abbiamo invece utilizzato la regola di Leibniz della derivazione e l'equazione di continuità [2.9] per cancellare il secondo integrale (nel prossimo paragrafo dimostreremo che l'equazione  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$  si riduce, in regime di campo debole, proprio a  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ ). Infine nel quarto abbiamo usato il teorema di Gauss per trasformare l'integrale di volume su tutto lo spazio Minkowski effettivo in un integrale di superficie con superficie all'infinito. Tale integrale è la somma dei contributi ottenuti integrando separatamente sulle tre superfici all'infinito temporale, spaziale e luce, e in tutti e tre i casi si ha in un contributo nullo:

- I. Infinito temporale: superfici di tipo spazio con  $t' \rightarrow \pm\infty$ , il contributo è nullo in quanto, come evidenziato dalla [6.21],  $D_{ret}(x - x') = 0$  per intervalli di tipo spazio.
- II. Infinito spaziale: superficie di tipo tempo con  $|\vec{x}'| \rightarrow \infty$ , il contributo è nullo in quanto assumiamo che le sorgenti siano localizzate al finito, allora  $T^{\mu\nu}(x') = 0$ .
- III. Infinito luce: superfici con  $|\vec{x}'| \rightarrow \infty$  e  $t' \rightarrow \infty$  con  $|\vec{x}'| \pm t' = cost$ , come nel secondo caso il contributo è nullo in quanto  $|\vec{x}'| \rightarrow \infty$  e  $T^{\mu\nu}(x') = 0$ .

Segue dunque che l'integrale complessivo è identicamente nullo, verificando la condizione imposta dal gauge di Lorentz e certificando che la [6.17] è effettivamente una soluzione particolare delle [6.1].

## 6.4 Formula di quadrupolo

Ci proponiamo adesso di manipolare la soluzione [6.17] per estrapolarne una versione semplificata, valida in certe ipotesi, da utilizzare successivamente per studiare la generazione di onde gravitazionali ad opera del sistema citato come esempio nel capitolo 5: un sistema binario di oggetti compatti.

Supponiamo di valutare la [6.17] per una sorgente localizzata in una regione attorno all'origine: immaginiamo che ogni punto della sorgente sia localizzato in una posizione  $\vec{x}'$  tale che  $|\vec{x}'| \lesssim r_0$ . Supponiamo inoltre di andare a calcolare  $\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x})$  lontano dalla sorgente, in una posizione  $\vec{x}$  tale che  $|\vec{x}| \gg r_0 \gtrsim |\vec{x}'|$ . In queste ipotesi si ha allora approssimativamente:

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = |\vec{x}| \left( 1 - 2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^2} + \frac{|\vec{x}'|^2}{|\vec{x}|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cong |\vec{x}| \equiv r \quad [6.22]$$

$$T^{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}') \cong T^{\mu\nu}(t - r, \vec{x}')$$

Allora la [6.17] diventa:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{r} \int d^3\vec{x}' T^{\mu\nu}(t - r, \vec{x}') \quad [6.23]$$

Notiamo che, come nel caso delle onde gravitazionali descritte nel capitolo 4, il gauge di Lorentz impone 4 vincoli alle 10 componenti indipendenti di  $\bar{h}^{\mu\nu}$ : ci concentreremo sulle 6 componenti spaziali  $\bar{h}^{ij}$ . Consideriamo adesso l'equazione di continuità [2.9] per  $T^{\mu\nu}$ : lavorando nel regime di campo debole questa si riduce a  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ . Infatti dalle equazioni di Einstein linearizzate si ha:

$$0 = \nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G} \nabla_\nu G^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G} (\partial_\nu G^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu G^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu G^{\mu\alpha}) \cong \frac{1}{8\pi G} \partial_\nu G^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu}$$

Dove abbiamo usato la prima delle [1.19] per la derivata covariante di un tensore (2,0). I due termini prodotto sono trascurabili in quanto, come illustrato nel capitolo 3, nel regime di campo debole  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  e  $G^{\mu\nu}$  sono approssimati entrambi al primo ordine in  $h_{\mu\nu}$ : il loro prodotto è del secondo ordine e conseguentemente, nel contesto del regime di campo debole, può essere trascurato. Scriviamo esplicitamente le componenti spaziali e quella temporale dell'equazione  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ :

$$\partial_\nu T^{0\nu} = \partial_0 T^{00} + \partial_i T^{0i} = 0 \quad [6.24]$$

$$\partial_\nu T^{i\nu} = \partial_0 T^{i0} + \partial_j T^{ij} = 0 \quad [6.25]$$

Applichiamo ad entrambi i membri della prima e della seconda rispettivamente  $\partial_0$  e  $\partial_i$ . Confrontando le due espressioni e usando simmetria di  $T^{\mu\nu}$  e commutatività della derivazione parziale otteniamo:

$$\partial_0^2 T^{00} = -\partial_0 \partial_i T^{0i} = -\partial_i \partial_0 T^{i0} = \partial_i \partial_j T^{ij} \quad \rightarrow \quad T^{00}_{,00} = T^{ij}_{,ij} \quad [6.26]$$

Applichiamo la [6.26] alla seguente espressione:

$$\partial_0^2(T^{00}x^i x^j) = \partial_0^2(T^{00})x^i x^j = (\partial_k \partial_l T^{kl})x^i x^j = \partial_k \partial_l (T^{kl}x^i x^j) - 2\partial_k (T^{ki}x^j + T^{kj}x^i) + 2T^{ij}$$

L'espressione per  $(\partial_k \partial_l T^{kl})x^i x^j$  deriva dalla relazione:

$$\begin{aligned} \partial_k \partial_l (T^{kl}x^i x^j) &= \partial_k [\partial_l T^{kl}x^i x^j + T^{ki}x^j + T^{kj}x^i] = \\ &= [(\partial_k \partial_l T^{kl})x^i x^j + \partial_l T^{il}x^j + \partial_l T^{jl}x^i] + [\partial_k (T^{ki}x^j + T^{kj}x^i)] = \\ &= (\partial_k \partial_l T^{kl})x^i x^j + [\partial_l (T^{il}x^j) - T^{ij}] + [\partial_l (T^{jl}x^i) - T^{ji}] + \partial_k (T^{ki}x^j + T^{kj}x^i) = \\ &= (\partial_k \partial_l T^{kl})x^i x^j + 2\partial_k (T^{ki}x^j + T^{kj}x^i) - 2T^{ij} \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato il fatto che  $\partial_j x^i = \delta_j^i$  e sfruttato la regola di Leibniz della derivazione, la possibilità di rinominare alcuni indici ripetuti e la simmetria di  $T^{\mu\nu}$ . Infine otteniamo:

$$T^{ij} = \frac{1}{2} \partial_0^2 (T^{00}x^i x^j) - \frac{1}{2} \partial_k [\partial_l (T^{kl}x^i x^j) - 2(T^{ki}x^j + T^{kj}x^i)] \quad [6.27]$$

Da cui:

$$\int d^3 \vec{x}' T^{ij}(t-r, \vec{x}') = \frac{1}{2} \partial_0^2 \int d^3 \vec{x}' T^{00}(t-r, \vec{x}') x'^i x'^j \quad [6.28]$$

Nell'integrale a secondo membro non abbiamo riportato la parte rimanente dell'espressione [6.27] in quanto il contributo che fornisce può essere trasformato attraverso il teorema di Gauss in un integrale di superficie sulla superficie all'infinito spaziale, dove  $T^{00}(t, \vec{x}') = 0$ , e risulta quindi nullo. Supponiamo adesso di essere nel regime newtoniano citato alla fine del paragrafo 2.3: oltre al regime di campo debole, assumiamo che la velocità caratteristica della materia che costituisce la sorgente sia molto minore di quella della luce, cioè  $|\vec{v}| \ll 1$ . In quest'ipotesi abbiamo approssimativamente  $T^{00}(t, \vec{x}') \approx \rho(t, \vec{x}')$ , con  $\rho$  la densità di energia della sorgente. Infatti nel regime di campo debole l'espressione per  $T^{\mu\nu}$  si riduce alla [2.6] valida in Relatività Speciale e la quadrivelocità, analogamente, è esprimibile nella forma  $u^\mu = \gamma(1, \vec{v})$  con il fattore di Lorentz  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ . Allora:

$$T^{00} \cong (p + \rho)u^0 u^0 + p\eta^{00} = (p + \rho)\gamma^2 - p = \rho + (p + \rho)|\vec{v}|^2 + O(|\vec{v}|^4) \approx \rho$$

Dove abbiamo sfruttato il fatto che per ipotesi  $|\vec{v}| \ll 1$ . Notiamo inoltre che in virtù della condizione di piccole velocità possiamo considerare  $\rho$  quasi interamente dovuta alla densità di massa della sorgente. Fatta questa precisazione sostituiamo la [6.28] nella [6.23] per le 6 componenti spaziali:

$$\boxed{\bar{h}^{ij}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{r} \ddot{I}^{ij}(t-r)} \quad [6.29]$$

Detta *formula di quadrupolo* (dove indichiamo  $\ddot{\phantom{I}} = \partial_t^2$ ), in quanto il tensore  $I^{ij}(t)$  definito come:

$$I^{ij}(t) = \int d^3 \vec{x}' \rho(t, \vec{x}') x'^i x'^j \quad [6.30]$$

È detto *momento di quadrupolo* o di *ordine 2* della distribuzione di massa che costituisce la sorgente. Riassumendo, la formula [6.29] è valida assumendo: **I.** regime newtoniano e **II.** le [6.22]. In particolare le seconde corrispondono ad approssimare l'integrando della [6.17],  $T^{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')/|\vec{x} - \vec{x}'|$ , considerando soltanto l'ordine 0 in  $|\vec{x}'|/|\vec{x}|$ . Il momento di quadrupolo [6.30] fa infatti parte di un insieme di oggetti detti *momenti di una distribuzione*, in questo caso di massa, che intervengono nella cosiddetta *espansione in multipoli* di un campo (dovuto a quella distribuzione) in una somma di termini progressivamente più piccoli. Nel caso elettromagnetico vengono utilizzati ad esempio



proprio per approssimare i campi prodotti da una distribuzione di carica e ottenere i contributi, ai vari ordini di approssimazione, alla radiazione elettromagnetica. Riportiamo adesso i momenti di ordine inferiore per mostrare, intuitivamente, il motivo per cui il primo contributo, all'ordine più basso, alla radiazione gravitazionale è proprio quello di carattere quadrupolare.

$$\text{I. Momento di monopolo:} \quad M(t) = \int d^3\vec{x}' \rho(t, \vec{x}') \quad [6.31]$$

(ordine 0)

Rappresenta la massa del sistema. Non contribuisce alla radiazione gravitazionale in quanto questa dovrebbe dipendere da variazioni temporali di  $M(t)$ , ma, per la *legge di conservazione della massa*, in un sistema isolato la massa non può evolvere dinamicamente, cioè:  $\frac{dM}{dt} = 0$ .

$$\text{II. Momento di dipolo:} \quad X^i(t) = \int d^3\vec{x}' \rho(t, \vec{x}') x^i \quad [6.32]$$

(ordine 1)

È proporzionale alla posizione del centro di massa del sistema  $X^i = M X_{CM}^i$ . Non contribuisce alla radiazione gravitazionale in quanto possiamo sempre trovare un sistema di riferimento, centrato nel centro di massa della distribuzione, in cui  $X^i = 0$ . Inoltre, considerandone la variazione temporale, abbiamo per la *legge di conservazione della quantità di moto in assenza di forze esterne al sistema*:  $\frac{dX^i}{dt} = P^i = \text{cost}$ . Ed è sempre possibile adottare un sistema di riferimento che “segue” il centro di massa in cui  $P^i = 0$ .

Se presenti moti interni alla sorgente occorre valutare anche i *momenti della densità di corrente di massa*  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ . All'ordine 1 abbiamo ( $\epsilon^i_{jk}$  è il simbolo completamente antisimmetrico di Levi-Civita):

$$\text{III. Momento di ordine 1:} \quad L^i(t) = \int d^3\vec{x}' \rho(t, \vec{x}') \epsilon^i_{jk} x^j v^k \quad [6.33]$$

Rappresenta il momento angolare del sistema. Come nel caso del momento di monopolo  $M(t)$ , valutando la derivata temporale di  $L^i(t)$  abbiamo per la *legge di conservazione del momento angolare in assenza di momenti esterni al sistema*:  $\frac{dL^i}{dt} = 0$ . E conseguentemente anche in questo caso il contributo alla radiazione gravitazionale risulta nullo.

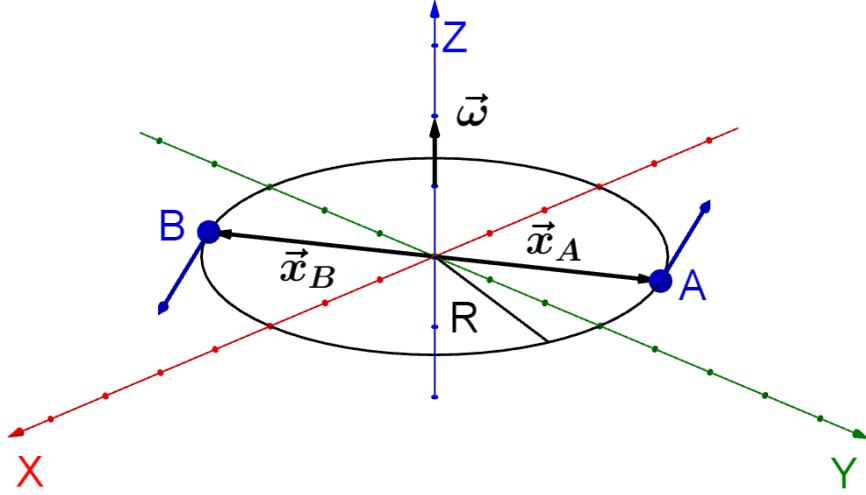
Segue quindi che il primo contributo deve essere di ordine 2 e dunque di natura quadrupolare. Da questo fatto si dimostra ad esempio che, all'ordine di quadrupolo, *una perturbazione a simmetria sferica della sorgente non produce onde gravitazionali*: il collasso gravitazionale di una stella ad esempio, in quanto processo a simmetria sferica, *non* costituisce una sorgente di onde gravitazionali.

## 6.5 Sistema binario

La discussione del precedente paragrafo giustifica il motivo per cui nel capitolo 5 abbiamo citato come tipica sorgente di onde gravitazionali un sistema binario di oggetti compatti: *per avere radiazione gravitazionale all'ordine dominante è necessario avere una perturbazione quadrupolare*. Utilizziamo adesso la [6.29] per mostrare che un sistema binario presenta effettivamente un momento di quadrupolo non nullo, e per dare una stima per l'ampiezza delle onde gravitazionali prodotte.

Consideriamo un sistema binario di due corpi puntiformi A e B di uguale massa  $M$  in moto con velocità angolare uniforme  $\omega$  su una traiettoria circolare di raggio  $R$  sul piano  $x$ - $y$ , centrata sull'origine, e in modo che siano sempre diametralmente opposti, Fig. 11. Abbiamo allora:

$$\vec{x}_A(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), 0) = -\vec{x}_B(t) \quad [6.34]$$



**Fig. 11:** Sistema binario di oggetti di massa identica in moto circolare attorno al proprio centro di massa.

Essendo i corpi puntiformi la distribuzione di massa è esprimibile attraverso l'espressione:

$$\rho(t, \vec{x}') = M\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_A(t)) + M\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}_B(t)) \quad [6.35]$$

Dove in particolare i supporti delle delta di Dirac tridimensionali sono le posizioni occupate nel tempo dai due corpi. Sostituendo nella [6.30] otteniamo allora:

$$I^{ij}(t) = Mx_A^i x_A^j + Mx_B^i x_B^j \quad [6.36]$$

Sostituendo le [6.34] otteniamo:

$$I^{ij}(t) = M[x_A^i x_A^j + (-x_A^i)(-x_A^j)] = 2Mx_A^i x_A^j = 2MR^2 \begin{bmatrix} \cos^2(\omega t) & \cos(\omega t)\sin(\omega t) & 0 \\ \cos(\omega t)\sin(\omega t) & \sin^2(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ossia:

$$I^{ij}(t) = MR^2 \begin{bmatrix} 1 + \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & 1 - \cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [6.37]$$

Applicando la [6.30] troviamo allora:

$$\bar{h}^{ij}(t, \vec{x}) = -\frac{8GMR^2\omega^2}{r} \begin{bmatrix} \cos(2\omega(t-r)) & \sin(2\omega(t-r)) & 0 \\ \sin(2\omega(t-r)) & -\cos(2\omega(t-r)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [6.38]$$

Consideriamo adesso un osservatore lungo l'asse z per cui vale  $r = |\vec{x}| = z$ . Allora la [6.38] diventa:

$$\bar{h}^{ij}(t, \vec{x}) = \text{Re}[A^{ij} e^{ik_\alpha x^\alpha}] \quad [6.39]$$

Con:

$$k^\mu = (-2\omega, 0, 0, -2\omega) \quad [6.40]$$

$$A^{ij} = -\frac{8GMR^2\omega^2}{r} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [6.41]$$

L'onda gravitazionale prodotta è cioè un'onda piana del tipo [4.2] descritto nel capitolo 4. Possiamo allora ottenere le componenti temporali (non indipendenti a causa del gauge di Lorentz) usando la condizione [4.8] valida per un vettore d'onda del tipo [4.6] (come nel caso della [6.40]):  $A^{\mu 0} = A^{\mu 3}$

$$A^{i0} = A^{i3} = 0 \quad \rightarrow \quad A^{i0} = 0 \quad , \quad A^{00} = A^{03} = 0 \quad \rightarrow \quad A^{00} = 0$$

Allora la forma completa per  $\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x})$  è:

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}^{11}(t, z) & \bar{h}^{12}(t, z) & 0 \\ 0 & \bar{h}^{12}(t, z) & -\bar{h}^{11}(t, z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [6.41]$$

Con:

$$\begin{aligned} \bar{h}^{11}(t, z) &= -\frac{8GMR^2\omega^2}{r} \cos(2\omega(t - z)) \\ \bar{h}^{12}(t, z) &= -\frac{8GMR^2\omega^2}{r} \sin(2\omega(t - z)) \end{aligned} \quad [6.42]$$

Otteniamo quindi il risultato che un osservatore lungo l'asse  $z$  vede propagarsi nella sua direzione un'onda gravitazionale con componenti espresse nella tipica forma del gauge TT e con polarizzazione circolare. Infatti le [6.41] sono esattamente della forma [4.50] con  $A_{\odot}$  espressa da:

$$A_{\odot} = -\frac{32\pi^2 GMR^2 f^2}{c^4 r} \quad [6.43]$$

Dove abbiamo espresso la velocità angolare in termini della frequenza di rotazione,  $\omega = 2\pi f$ , e abbandonato il sistema di unità naturali per rendere più chiara la stima del valore di  $A_{\odot}$ . Consideriamo a tal proposito un sistema binario di due stelle di neutroni con massa dell'ordine della *massa di Chandrasekhar*,  $M \sim 1.4 M_{\odot} = 2.78 \cdot 10^{30} kg$ . Immaginiamo inoltre che il sistema sia vicino al punto di merger, cioè che la distanza tra le stelle sia dell'ordine dei loro raggi, quindi  $R \sim 20 km$ ; per la frequenza usiamo il valore previsto dalla teoria newtoniana come ordine di grandezza: classicamente il ruolo di forza centripeta per il moto circolare del corpo A è svolto dall'attrazione gravitazionale esercitata su di esso dal corpo B e viceversa. Allora:

$$M\omega^2 R = G \frac{M^2}{(2R)^2} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{4R^3}} \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GM}{4R^3}} \sim 10^3 Hz$$

Infine supponiamo che il sistema sia a distanza  $r \sim 15 Mpc = 4.63 \cdot 10^{20} km$  (il sistema potrebbe ad esempio trovarsi nell'ammasso della Vergine). Con questi valori si ottiene come ordine di grandezza:

$$|A_{\odot}| \sim 10^{-21}$$

Che rientra effettivamente nel tipico range di valori di ampiezza per un'onda gravitazionale rilevabile sulla Terra, come citato nel capitolo 5. Notiamo infine che, come accennato nel capitolo 5, è possibile dimostrare che il sistema binario, a causa dell'emissione di radiazione gravitazionale, perde progressivamente energia e come conseguenza i due corpi tendono ad avvicinarsi. Dunque la trattazione appena seguita è da considerarsi valida solo "a breve termine", cioè considerando un intervallo temporale in cui il raggio dell'orbita dei due corpi è circa costante.

# Conclusione

Concludiamo l'elaborato evidenziando alcuni limiti delle ipotesi di lavoro assunte e del formalismo conseguentemente sviluppato ed utilizzato, in particolare: regime di campo debole ed equazioni di campo di Einstein linearizzate, regime newtoniano e formula di quadrupolo.

- In primo luogo citiamo il fatto che, per descrivere l'energia trasportata da onde gravitazionali del tipo considerato ed analizzato, non è sufficiente la teoria delle equazioni di Einstein linearizzate, ossia ricercare una soluzione delle equazioni di Einstein della forma [3.1], in quanto si riscontra la necessità di considerare correzioni fino al secondo ordine. Dovremo quindi scrivere:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^B + h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)}$$

Dove  $h_{\mu\nu}^{(1)}$  e  $h_{\mu\nu}^{(2)}$  sono le correzioni al primo e secondo ordine alla cosiddetta *metrica di background*  $g_{\mu\nu}^B$ . Sviluppando questa ipotesi e ricavando le corrispondenti equazioni di Einstein al secondo ordine è possibile determinare l'energia irradiata da un sistema sotto forma di radiazione gravitazionale e stimare, ad esempio, il tempo impiegato da un sistema binario per perdere il quantitativo di energia necessario affinché i due corpi si avvicinino al punto da innescare il merger.

- In secondo luogo citiamo che, per descrivere la radiazione emessa da un sistema gravitazionale, all'aumentare della velocità caratteristica del sistema incrementa anche l'errore commesso usando la formula di quadrupolo [6.29], ed è dunque necessario considerare anche correzioni di ordine superiore. Esprimere la perturbazione  $\bar{h}_{\mu\nu}$  come serie di termini di ordine superiore nella velocità, di cui il primo è quello di quadrupolo, è il cosiddetto metodo *post-Newtoniano* e si rivela necessario ad esempio nel descrivere accuratamente la fase iniziale del merger di oggetti compatti molto massivi. Invece la fase terminale e il processo di formazione dell'oggetto finale, il ring-down, sono processi in cui il campo gravitazionale diventa altamente non lineare e le velocità possono avvicinarsi a quella della luce. Conseguentemente il metodo post-Newtoniano perde precisione e risulta necessario risolvere le equazioni di campo di Einstein nella loro forma completa, non approssimata. Questo risultato è ottenibile attraverso i metodi computazionali della *relatività numerica*, con cui, al costo di notevoli risorse computazionali, è possibile integrare accuratamente le equazioni di campo di Einstein, nonostante la loro non linearità, in una certa regione di spaziotempo: concettualmente il principio di funzionamento consiste nello scomporre lo spaziotempo in una foliazione di ipersuperfici tridimensionali, e successivamente evolvere i dati noti su una certa ipersuperficie iniziale a quella successiva, fino a coprire l'intera regione di spaziotempo desiderata. Citiamo infine che l'ultimissima fase del merger, il ring-down, può in realtà essere affrontata anche analiticamente, attraverso la tecnica dei *modi quasinormali*. Dopo il merger l'oggetto compatto risultante è tipicamente un buco nero rotante, oggetto che nella teoria della Relatività Generale è descritto dalla cosiddetta *soluzione di Kerr* delle equazioni di campo di Einstein. La tecnica dei modi quasinormali consiste allora nel trovare una soluzione che sia una versione perturbata della soluzione di Kerr e che, dopo una fase transiente, si rilassi alla soluzione di Kerr vera e propria. Tipicamente questa situazione è utilizzata per controllare l'affidabilità delle soluzioni numeriche, confrontandole con quelle ottenute analiticamente.

# Appendice A

## Onde elettromagnetiche

Nel capitolo 3, nei paragrafi 3.2 e 3.3, abbiamo sottolineato l'analogia tra la teoria elettromagnetica, descritta dalle equazioni di Maxwell nel formalismo covariante della Relatività Speciale, e la teoria descritta dalle equazioni di campo di Einstein linearizzate, nel contesto della Relatività Generale sotto regime di campo debole. In particolare abbiamo evidenziato la corrispondenza tra il quadripotenziale elettromagnetico  $A^\mu$  e la perturbazione  $h_{\mu\nu}$  per la metrica scritta in forma [3.1], e sottolineato le somiglianze tra le trasformazioni di gauge elettromagnetiche per  $A^\mu$  e le trasformazioni di gauge per  $h_{\mu\nu}$  definite nel paragrafo 3.1. In questa appendice completeremo l'analogia tra le due teorie trattando rapidamente il problema della risoluzione delle equazioni di Maxwell e mostrando come i passaggi necessari siano assolutamente analoghi a quelli seguiti nei capitoli 3, 4 e 6 per il caso gravitazionale.

### A.1 Equazioni di Maxwell e trasformazioni di gauge

Riprendiamo la teoria elettromagnetica a cui abbiamo fatto brevemente riferimento nei capitoli 2 e 3. Nel formalismo covariante della Relatività Speciale le equazioni di Maxwell assumono la forma:

$$\text{Omogenee:} \quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad [A.1]$$

$$\text{Inomogenee:} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi J^\nu$$

In particolare nelle equazioni inomogenee il ruolo di sorgente è svolto dalla quadricorrente  $J^\nu = (\rho, \vec{j})$  con  $\rho$  la densità volumetrica di carica e  $\vec{j}$  la densità di corrente.  $F^{\mu\nu}$  è il tensore elettromagnetico, di cui riportiamo l'espressione in termini delle componenti dei campi elettrici e magnetici:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \quad [A.2]$$

Antisimmetrico,  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ , e dove in particolare  $E_i$  e  $B_i$  sono le componenti vettoriali di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ ,  $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$  e  $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ . Per completare la teoria elettromagnetica è necessaria anche l'equazione del moto per una carica puntiforme, che riportiamo per completezza:

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} u_\nu \quad [A.3]$$

Dove  $m$  e  $q$  sono la massa e la carica della particella,  $u^\mu = \gamma(1, \vec{v})$  la quadrivelocità e  $\tau$  il tempo proprio. La componente temporale 0 fornisce l'equazione dell'energia, le componenti spaziali  $i$  le tre componenti dell'equazione del moto per la carica sottoposta alla forza di Lorentz. Le equazioni di Maxwell omogenee, in particolare, devono essere verificate dal tensore elettromagnetico indipendentemente dalle sorgenti che lo determinano: si dice dunque che costituiscono un *vincolo*. Esse sono automaticamente soddisfatte esprimendo  $F^{\mu\nu}$  in termini di un quadripotenziale  $A^\mu$ :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad [A.4]$$

Questa operazione si rivela di notevole importanza teorica e pratica: permette infatti di portare alla luce un'importante simmetria nelle equazioni di Maxwell e di affrontarne la risoluzione con più facilità. A tal proposito le equazioni di Maxwell inomogenee per il quadripotenziale diventano:

$$\square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = -4\pi J^\nu \quad [A.5]$$

Dove  $\square = \partial_\mu \partial^\mu = (-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2)$  è l'operatore d'Alembertiano. Come accennato nel capitolo 3 il tensore elettromagnetico e le equazioni inomogenee sono invarianti sotto una trasformazione di gauge del quadripotenziale in un certo riferimento inerziale assegnato:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x) \quad [A.6]$$

Dove  $\chi(x)$  è una funzione del punto  $x^\mu = (t, \vec{x})$ . Abbiamo cioè:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu} \quad [A.7]$$

$$\square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = -4\pi J^\nu \rightarrow \square A'^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A'^\mu) = -4\pi J^\nu \quad [A.8]$$

In altre parole una trasformazione di gauge mappa  $A^\mu$  in  $A'^\mu$ , che è a sua volta un quadripotenziale per il tensore elettromagnetico  $F_{\mu\nu}$ . Conseguentemente si dice che la teoria elettromagnetica possiede un'invarianza o simmetria di gauge per trasformazioni [A.6]. Si tratta tecnicamente di una simmetria *locale*, in quanto le trasformazioni [A.6] sono trasformazioni locali dipendenti dal punto. La libertà di ridefinire il quadripotenziale attraverso una trasformazione di gauge permette di scegliere potenziali che soddisfino condizioni particolari che semplifichino l'equazione [A.5]: nel prossimo paragrafo definiremo a tal proposito il *gauge di Lorentz*, sottolineandone la somiglianza con l'omonimo gauge definito nel paragrafo 3.4 per le equazioni di campo di Einstein linearizzate.

## A.2 Gauge di Lorentz

Il gauge di Lorentz è definito dalla condizione:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad [A.9]$$

Che consiste in un'unica equazione, cioè in un unico vincolo per il quadripotenziale  $A^\mu$ . Sotto questa condizione le equazioni di Maxwell inomogenee assumono la forma:

$$\square A^\nu = -4\pi J^\nu \quad [A.10]$$

Ogni componente del quadripotenziale soddisfa cioè, separatamente, un'equazione d'onda con sorgente, esattamente come  $\bar{h}_{\mu\nu}$  nel caso delle equazioni di Einstein linearizzate nel gauge di Lorentz [3.35]. Dimostriamo adesso, proprio come nel caso gravitazionale, che: **I.** è sempre possibile attuare una trasformazione di gauge per portarsi nel gauge di Lorentz e **II.** che una soluzione che soddisfa [A.9] e [A.10] gode di una libertà di gauge residua:

**I. Passaggio al gauge di Lorentz:** supponiamo di partire da un arbitrario  $A_\mu^{(0)}$  che in generale non soddisfa il gauge di Lorentz. Definiamo:

$$A_\mu^{(L)} = A_\mu^{(0)} - \partial_\mu \chi \quad [A.11]$$

Imponiamo che il quadripotenziale  $A_\mu^{(L)}$  soddisfi la condizione [A.9]:

$$\partial_\mu A^{(L)\mu} = \partial_\mu (A^{(0)\mu} - \partial^\mu \chi) \equiv 0$$

Per passare al gauge di Lorentz la funzione  $\chi$  deve dunque soddisfare:

$$\square\chi^{(0\rightarrow L)} = \partial_\mu A^{(0)\mu} \quad [A.12]$$

Anche in questo caso l'esistenza di soluzioni è garantita dai teoremi per le equazioni differenziali del secondo ordine.

**II. Libertà di gauge residua:** supponiamo che  $A_\mu^{(L)}$  soddisfi il gauge di Lorentz [A.9] e risolva le equazioni di Maxwell inomogenee [A.10]. Considerando una trasformazione di gauge con  $\psi$  tale che:

$$\square\psi^{(L\rightarrow L')} = 0 \quad [A.13]$$

Otteniamo che  $A_\mu^{(L')} = A_\mu^{(L)} - \partial_\mu\psi$  soddisfa ancora il gauge di Lorentz [A.9] e le [A.10]. Infatti:

- $\partial_\mu A^{(L')\mu} = \partial_\mu A^{(L)\mu} - \square\psi = 0 - 0 = 0$
- $\square A^{(L')\mu} = \square A^{(L)\mu} - \square(\partial^\mu\psi) = \square A^{(L)\mu} - \partial^\mu(\square\psi) = \square A^{(L)\mu} - 0 = -4\pi J^\nu$

Concludiamo quindi che trovata una soluzione delle equazioni di Maxwell inomogenee, questa sarà in realtà soggetta ad un'indeterminazione per trasformazioni di gauge che soddisfano la [A.13]: come nel caso gravitazionale, anche in questo contesto per trovare una soluzione completamente determinata è necessario scegliere una  $\psi$  particolare. Quindi nel caso elettromagnetico: **I.**  $A^\mu$  è in partenza un vettore con 4 componenti indipendenti; **II.** il gauge di Lorentz richiede un'unica condizione, una volta imposta le componenti indipendenti sono ridotte a 3; **III.** si dimostra che in questo caso fissare una  $\psi$  particolare permette di imporre un'altra condizione, riducendo infine le componenti indipendenti a 2. Concludiamo che, esattamente come nel caso gravitazionale, utilizzando l'invarianza di gauge, cioè in particolare utilizzando il gauge di Lorentz e fissandolo completamente utilizzando la libertà di gauge residua, è possibile fissare, e in particolare annullare, 2 delle 4 componenti di una soluzione delle equazioni di Maxwell inomogenee, lasciando soltanto le 2 componenti fisiche, cioè non cancellabili attraverso trasformazioni di gauge.

### A.3 Onde elettromagnetiche in assenza di sorgenti

Ripercorriamo il percorso seguito nel capitolo 4 per le onde gravitazionali, risolvendo le equazioni di Maxwell inomogenee nel gauge di Lorentz [A.10] nel vuoto, in assenza di un termine sorgente  $J^\nu$ :

$$\begin{cases} \square A^\mu = 0 \\ \partial_\nu A^\nu = 0 \end{cases} \quad [A.14]$$

Le soluzioni saranno *onde elettromagnetiche* che si propagano nel vuoto alla velocità della luce. Analizziamo anche in questo caso la più semplice soluzione per le [A.14], un'onda piana:

$$A^\mu = \mathcal{R}e(a^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}) \quad [A.15]$$

Ampiezza d'onda e vettore d'onda,  $a^\mu$  e  $k_\alpha$ , dovranno soddisfare le condizioni imposte dalle [A.14]:

- $0 = \square A^\mu = \mathcal{R}e(\partial^\beta \partial_\beta a^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}) = \mathcal{R}e(-k^\beta k_\beta a^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha})$
- $0 = \partial_\nu A^\nu = \mathcal{R}e(\partial_\nu a^\nu e^{ik_\alpha x^\alpha}) = \mathcal{R}e(ik_\nu a^\nu e^{ik_\alpha x^\alpha})$

Quindi in particolare il vettore  $k_\nu$  dovrà essere un vettore nullo ed ortogonale all'ampiezza  $a^\mu$ :

$$k^\alpha k_\alpha = 0 \quad [A.16]$$

$$k^\nu a_\nu = k_\nu a^\nu = 0 \quad [A.17]$$

EsPLICITIAMO la tipica equazione di dispersione per un'onda che si muove alla velocità della luce scrivendo  $k^\nu = (\omega, \vec{k})$ , allora la [A.16] implica:

$$\omega = |\vec{k}| \quad [A. 18]$$

E riconosciamo in  $\omega$  la frequenza e in  $\vec{k}$  il vettore d'onda che dà la direzione di propagazione. Attraverso onde piane del tipo [A.15] potremo costruire una generica soluzione dell'equazione d'onda [A.14] attraverso una sovrapposizione lineare secondo Fourier, discreta o continua.

Come abbiamo notato alla fine del precedente paragrafo il gauge di Lorentz impone 1 vincolo alle 4 componenti indipendenti  $A^\mu$ . Nel caso di un'onda piana del tipo [A.15] tale vincolo è espresso dalla condizione [A.17], che, scrivendo  $a^\nu = (a^0, \vec{a})$ , può essere espressa nella forma:

$$a^0 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{\omega} \quad [A. 19]$$

Dove  $\omega$  è legato a  $\vec{k}$  dalla condizione [A.18]. Utilizziamo adesso la libertà di gauge per portare alla luce le 2 componenti indipendenti fisiche di un'onda elettromagnetica, ossia le 2 componenti che non possono essere cancellate attraverso trasformazioni di gauge: sfruttiamo in particolare la libertà di gauge residua garantita dal gauge di Lorentz per imporre un ulteriore vincolo alle componenti di  $a^\nu$ . Effettuiamo allora una trasformazione di gauge con  $\psi$  che soddisfa la [A.13]:

$$\psi = \mathcal{R}e(b e^{ik_\alpha x^\alpha}) \quad [A. 20]$$

Il nuovo quadripotenziale  $A'^\mu$  sarà espresso da:

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \psi = \mathcal{R}e[(a^\mu - i b k^\mu) e^{ik_\alpha x^\alpha}] \quad [A. 21]$$

Riconosciamo l'ampiezza trasformata:

$$a'^\mu = a^\mu - i b k^\mu \quad [A. 22]$$

Che, per la proprietà di una trasformazione con  $\psi$  che soddisfa la [A.13] di conservare il gauge di Lorentz, soddisferà ancora una condizione del tipo [A.17]:

$$k^\nu a'_{\nu} = k_\nu a'^\nu = 0 \quad [A. 23]$$

Vale allora anche per l'ampiezza trasformata:

$$a'^0 = \frac{\vec{a}' \cdot \vec{k}}{\omega} \quad [A. 24]$$

Imponiamo a questo punto l'ulteriore vincolo alle componenti di  $a^\mu$  scegliendo una condizione che è l'analogo del gauge TT nel caso gravitazionale, ossia:

$$a'^0 = 0 \quad [A. 25]$$

O equivalentemente dalla [A.24]:

$$\vec{a}' \cdot \vec{k} = 0 \quad [A. 26]$$

Che possiamo definire *gauge di Lorentz trasverso*: infatti dalla condizione [A.26] segue che l'ampiezza dell'onda elettromagnetica è *trasversale*, cioè la sua proiezione lungo la direzione del moto, data dal vettore d'onda  $\vec{k}$ , è nulla. Abbiamo cioè dimostrato che le componenti non fisiche di un'onda elettromagnetica, ossia quelle che possono essere fissate arbitrariamente usando la libertà di gauge e in particolare annullate, sono quelle *longitudinali*, cioè quelle nella direzione del moto.



Per imporre la condizione [A.25] è sufficiente scegliere la  $\psi$  particolare con  $b$  che soddisfa:

$$b = \frac{a^0}{i\omega} \quad [A. 27]$$

Per mettere in luce più chiaramente l'analogia con il caso gravitazionale, per il quale avevamo considerato per semplicità un'onda che si propagava lungo l'asse  $z$ , consideriamo anche in questo contesto la medesima situazione:

$$k^\mu = (\omega, k^1, k^2, k^3) \equiv (\omega, 0, 0, k) = (k, 0, 0, k) \quad [A. 28]$$

Per rafforzare ulteriormente la similitudine andiamo inoltre a rinominare  $A^{(T)\mu}$  il quadripotenziale trasformato. Allora la condizione [A.24] impone per l'ampiezza d'onda  $a^{(T)\mu}$ :

$$a^{(T)0} = a^{(T)3} \quad [A. 29]$$

$$a^{(T)\mu} = (a^{(T)0}, a^{(T)1}, a^{(T)2}, a^{(T)0}) \quad [A. 30]$$

Imponendo per l'ampiezza trasformata il gauge di Lorentz trasverso [A.25] troviamo infine:

$$A^{(T)\mu} = (0, A^{(T)1}, A^{(T)2}, 0) = (0, \mathcal{R}e(a^{(T)1} e^{ik_\alpha x^\alpha}), \mathcal{R}e(a^{(T)2} e^{ik_\alpha x^\alpha}), 0) \quad [A. 31]$$

Dove sono rimaste soltanto le due componenti indipendenti fisiche trasverse alla direzione di propagazione, in questo caso data dall'asse  $z$ .

Poniamo ulteriormente l'accento sulla natura trasversale delle onde elettromagnetiche calcolando i campi elettrici e magnetici associati ai quadripotenziali appena analizzati (per le proprietà delle trasformazioni di gauge sono entrambi associati allo stesso tensore elettromagnetico, dunque agli stessi campi elettrici e magnetici). Dimosteremo che questi sono tipicamente trasversali, evidenziando così il fatto che la comparsa di componenti longitudinali non fisiche in  $A^\mu$  è causa della trattazione mediante potenziali (e infatti, correttamente, queste componenti possono essere cancellate attraverso la libertà di ridefinire i potenziali attraverso trasformazioni di gauge). Calcoliamo innanzitutto il tensore elettromagnetico usando il quadripotenziale  $A^\mu$  e la [A.4]:

$$F^{\mu\nu} = \mathcal{R}e[i(k^\mu a^\nu - k^\nu a^\mu) e^{ik_\alpha x^\alpha}] \quad [A. 32]$$

Dalla definizione [A.2] per il tensore elettromagnetico seguono le relazioni:

$$E_i = F^{0i} \quad [A. 33]$$

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk} \quad [A. 34]$$

Dove in particolare  $\epsilon_{ijk}$  è il simbolo completamente antisimmetrico di Levi-Civita. Seguono allora:

$$E_i = \mathcal{R}e[i(\omega a^i - a^0 k^i) e^{ik_\alpha x^\alpha}] = \mathcal{R}e\left[i\left(\omega a^i - \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{\omega} k^i\right) e^{ik_\alpha x^\alpha}\right] \quad [A. 35]$$

$$B_i = \mathcal{R}e\left[\frac{1}{2} i \epsilon_{ijk} (k^j a^k - k^k a^j) e^{ik_\alpha x^\alpha}\right] = \mathcal{R}e[i \epsilon_{ijk} k^j a^k e^{ik_\alpha x^\alpha}] \quad [A. 36]$$

Dove in particolare abbiamo utilizzato: per  $E_i$  la relazione [A.19] per  $a^0$ ; per  $B_i$  l'asimmetria di  $\epsilon_{ijk}$  per riscrivere il termine  $\epsilon_{ijk} k^k a^j = \epsilon_{ikj} k^j a^k = -\epsilon_{ij k} k^j a^k$ . In notazione vettoriale abbiamo:

$$\vec{E} = \mathcal{R}e\left[i\left(\omega \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{\omega} \vec{k}\right) e^{ik_\alpha x^\alpha}\right] \quad [A. 37]$$

$$\vec{B} = \mathcal{R}e[i(\vec{k} \times \vec{a}) e^{ik_\alpha x^\alpha}] \quad [A. 38]$$

Considerando che tipicamente le componenti di  $\vec{k}$  sono reali seguono le relazioni:

- $\vec{k} \cdot \vec{E} = \mathcal{R}e \left[ \frac{1}{\omega} i \vec{a} \cdot \vec{k} (\omega^2 - |\vec{k}|^2) e^{ik_\alpha x^\alpha} \right] = 0$
- $\vec{k} \cdot \vec{B} = \mathcal{R}e [i \vec{k} \cdot (\vec{k} \times \vec{a}) e^{ik_\alpha x^\alpha}] = 0$
- $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E} = \mathcal{R}e \left[ i \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times (\omega \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{\omega} \vec{k}) e^{ik_\alpha x^\alpha} \right] = \mathcal{R}e \left[ i \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \omega \vec{a} e^{ik_\alpha x^\alpha} \right] = \vec{B}$

Dove abbiamo usato la relazione [A.18] per  $\omega$  e  $|\vec{k}|$  e le proprietà del prodotto vettore. Quindi infine:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad [A.39]$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad [A.40]$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{E} \quad [A.41]$$

Come avevamo anticipato i campi elettrico e magnetico sono trasversali, oscillano cioè perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda, con cui formano una terna ortogonale.

## A.4 Stati di polarizzazione

Riprendiamo l'espressione [A.31] per il quadripotenziale nel gauge di Lorentz trasverso nel caso di propagazione lungo l'asse  $z$ . Analogamente al caso gravitazionale descritto nel paragrafo 4.3 abbiamo che le due componenti indipendenti  $A^{(T)1}$  e  $A^{(T)2}$  non sono intrinsecamente separate: la distinzione tra l'una e l'altra dipende dall'osservatore. Consideriamo in particolare una rotazione di un angolo  $\frac{\pi}{2}$  sul piano  $x$ - $y$  attorno all'asse  $z$ :

$$R^{\mu'}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [A.42]$$

Sotto questa trasformazione avremo che  $A^{(T)\mu} \rightarrow A^{(T')\mu'} = R^{\mu'}_{\alpha} A^{(T)\alpha}$ . Esplicitamente:

$$A^{(T')\mu'} = R^{\mu'}_{\alpha} A^{(T)\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ A^{(T)1} \\ A^{(T)2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A^{(T)2} \\ -A^{(T)1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad [A.43]$$

In particolare quindi:

$$\begin{cases} A^{(T)1} \rightarrow A^{(T')1} = A^{(T)2} \\ A^{(T)2} \rightarrow A^{(T')2} = -A^{(T)1} \end{cases} \quad [A.44]$$

In analogia con il caso gravitazionale diremo in questo caso che *un'onda elettromagnetica possiede due stati di polarizzazione indipendenti separati da un angolo di  $\frac{\pi}{2}$  radianti*. Procedendo come nel paragrafo 4.3 è possibile definire stati di polarizzazione lineare e circolare in modo del tutto analogo anche per un'onda elettromagnetica. Inoltre, notiamo che sotto una rotazione di angolo  $2\pi$   $A^{(T)\mu}$  va in se stesso in quanto  $R^{\mu'}_{\nu} = \delta^{\mu'}_{\nu}$ : *un'onda elettromagnetica è invariante sotto una rotazione di angolo  $2\pi$* . Abbiamo così dimostrato anche nel caso elettromagnetico le relazioni generali riguardanti campi associati a particelle bosoniche di spin intero enunciate alla fine del capitolo 4.

## A.5 Onde elettromagnetiche in presenza di sorgenti

Per concludere discutiamo brevemente la risoluzione delle equazioni di Maxwell inomogenee con sorgente, ossia il problema di trovare  $A^\mu$  che soddisfa:

$$\begin{cases} \square A^\mu = -4\pi J^\mu \\ \partial_\nu A^\nu = 0 \end{cases} \quad [A.45]$$

Data l'analogia con le [6.1] il processo di risoluzione è assolutamente identico a quello seguito nel capitolo 6. La soluzione generale potrà essere espressa come:

$$A^\mu(x) = A_0^\mu(x) + A_p^\mu(x) \quad [A.46]$$

Dove  $A_0^\mu(x)$  è una soluzione omogenea e  $A_p^\mu(x)$  una soluzione particolare. Come soluzione omogenea possiamo usare un'onda elettromagnetica del tipo descritto nel paragrafo A.3; per ottenere una soluzione particolare si procede in modo assolutamente identico al caso gravitazionale, in quanto formalmente i due sistemi di equazioni da risolvere sono identici. Utilizzando una funzione di Green per il d'Alembertiano potremo infatti esprimere una soluzione particolare come:

$$A^\mu(t, \vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \frac{j^\mu(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad [A.47]$$

Dove l'integrale è svolto nei punti della distribuzione di carica che agisce da sorgente per il potenziale elettromagnetico. La [4.47] è detta *potenziale ritardato* e anche nel caso elettromagnetico abbiamo che il potenziale in un certo istante è determinato dall'"aspetto" che la sorgente aveva al tempo ritardato. Anche la verifica del gauge di Lorentz è totalmente analoga, si dimostra cioè che:

$$\partial_\nu A^\nu = 4\pi \int_{\Sigma_\infty} d\Sigma_\nu [D_{ret}(x - x') j^\nu(x')] = 0 \quad [A.48]$$

Dove si suppongono le sorgenti localizzate al finito. Evidenziamo infine la diversa natura delle onde elettromagnetiche, rispetto a quelle gravitazionali, citando il fatto che in questo caso i contributi alla radiazione elettromagnetica dovuti ai momenti di ordine 1 non sono nulli. Tali momenti sono il *momento di dipolo della distribuzione di carica*  $\rho$  e quello *della densità di corrente di carica*  $\vec{j} = \rho\vec{v}$ :

$$d^i(t) = \int d^3\vec{x}' \rho(t, \vec{x}') x^i \quad [A.49]$$

$$\mu^i(t) = \int d^3\vec{x}' \rho(t, \vec{x}') \epsilon^i_{jk} x^j v^k \quad [A.50]$$

Che rappresentano rispettivamente il *momento di dipolo elettrico* e il *momento di dipolo magnetico* della distribuzione. Attraverso l'espansione in multipoli lontano dalla sorgente si trova infatti che all'ordine più basso in  $|\vec{x}'|/|\vec{x}|$  per  $j^\mu(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')/|\vec{x} - \vec{x}'|$ , il potenziale, i campi di radiazione e l'energia irradiata dipendono dalla variazione del tempo di  $d^i(t)$ . All'ordine successivo si hanno invece due termini, di cui uno dipendente dalle variazioni di  $\mu^i(t)$  e l'altro da quelle di  $Q^{ij}(t)$ :

$$Q^{ij}(t) = \int d^3\vec{x}' \rho(t, \vec{x}') x^i x^j \quad [A.51]$$

Il *momento di quadrupolo della distribuzione di carica*, che nell'analogo gravitazionale, come illustrato nel capitolo 6, era l'unico a comparire già all'ordine più basso. Infine notiamo che anche nel caso elettromagnetico non abbiamo radiazione di monopolo perché, come per  $M(t)$  nel caso gravitazionale, la carica  $q(t)$  rappresentante il momento di monopolo è conservata e  $\frac{dq}{dt} = 0$ .

# Bibliografia

- [1] R. Casadio, *Elements of General Relativity*, Università di Bologna, corso di Elementi di teoria della Relatività Generale, 2022.
- [2] B. Schutz, *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, 2022.
- [3] V. Barone, *Relatività: principi ed applicazioni*, Bollati Boringhieri, 2004.
- [4] M. Hendry, *An introduction to General Relativity, gravitational waves and detection principles*, University of Glasgow, Second VESF school on gravitational waves, 2007.
- [5] N. T. Bishop, *Introduction to gravitational wave astronomy*, Rhodes University, arXiv:2103.07675v1 [gr-qc], 2021.
- [6] J. L. Cervantes-Cota, S. Galindo-Uribarri, G. F. Smoot, *A brief history of gravitational waves*, arXiv:1609.09400v1 [physics.hist-ph], 2016.