

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Dinamica dei fluidi

Tesi di laurea

Candidato:
Gian Luigi Paganini

Relatrice:
Prof.ssa Marcella Brusa

Anno Accademico 2022/2023

Sommario

Nel seguente elaborato verrà affrontato il tema della dinamica dei fluidi, evidenziandone i concetti fondamentali.

Nella prima parte sarà delineato il modello di fluido, così come i modi in cui esso può essere descritto e il collegamento tra questi ultimi tramite la derivata materiale e il teorema del trasporto.

Nella seconda parte saranno introdotte le leggi di conservazione fondamentali, sia in forma integrale che differenziale, limitandosi al caso ideale.

Nella terza parte verranno applicate le equazioni della fluidodinamica alla descrizione dell'accrescimento di un oggetto compatto sfericamente simmetrico immerso in una nube di gas.

Infine, come appendice, verrà derivata rigorosamente l'espressione della velocità del suono.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Il modello di fluido	1
1.2	Descrizione di un fluido e teorema del trasporto di Reynolds	3
2	Equazioni della fluidodinamica	6
2.1	Equazione di conservazione della massa	7
2.2	Equazione di conservazione della quantità di moto	8
2.3	Equazione di conservazione dell'energia	9
2.4	Equazione adiabatica	10
3	Accrescimento sferico	11
A	Velocità del suono	16
	Bibliografia	19

1 Introduzione

1.1 Il modello di fluido

La *fluidodinamica* è la branca della fisica che studia il moto dei fluidi. In essa, i fenomeni considerati sono macroscopici e il fluido è considerato essere un mezzo continuo. Affinché un tale modello descrittivo sia applicabile, è necessario che i volumi elementari del sistema fluido soddisfino le seguenti proprietà:

- essi devono presentare dimensioni minori delle scale tipiche di variazione delle quantità macroscopiche che li caratterizzano, ossia

$$\mathcal{L} \ll \frac{|q|}{\|\nabla q\|} \quad ,$$

dove $q \in \mathbb{R}$ è una generica grandezza fisica;

- essi devono essere statisticamente significativi, nel senso che le dimensioni devono essere tali da definire dei sottoinsiemi del sistema nei quali sia presente una quantità statisticamente rilevante di particelle, ossia

$$\mathcal{L} \gg n^{-1} \quad ,$$

dove n è la densità numerica di particelle.

. Si noti che la seconda condizione è legata alla distanza media percorsa dalle particelle presenti all'interno degli elementi di fluido tra due interazioni successive, detta *libero cammino medio* λ_{mfp} . Dato un processo generico, tale lunghezza è determinata dalla sezione d'urto (microscopica) del fenomeno e dalla densità numerica delle particelle nel seguente modo:

$$\lambda_{mfp} = \frac{1}{n\sigma} \quad ;$$

pertanto, la condizione di significatività statistica si può scrivere come

$$\mathcal{L} \gg \lambda_{mfp}\sigma \quad .$$

Ciò implica che gli elementi di fluido sono sistemi collisionali, ovvero sistemi nei quali le particelle redistribuiscono l'informazione fisica attraverso le interazioni reciproche. Un volume elementare di fluido che soddisfi tali relazioni d'ordine sulle dimensioni che lo caratterizzano è detto *particella di fluido*, e se ne deduce immediatamente che le proprietà che lo descrivono sono grandezze mediate sui volumi di definizione.

In generale, un mezzo continuo è descritto da:

- un sottoinsieme aperto Ω di \mathbb{R}^n , corrispondente al *volume* occupato;
- un campo scalare $\rho : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, rappresentante la *densità di massa*;
- un campo scalare $T : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, rappresentante la *temperatura*;

- un campo scalare $s : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, rappresentante la *densità di entropia*;
- un campo vettoriale $\boldsymbol{\delta} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, rappresentante gli spostamenti rispetto a una configurazione di riferimento, detto *campo di spostamento*;
- un campo vettoriale $\boldsymbol{v} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, rappresentante il *campo di velocità*;
- una equazione di stato correlante temperatura, densità ed entropia;
- un *tensore degli sforzi* $[\tau]$, rappresentante la forza per unità di superficie che la parte di continuo in contatto con un elemento di superficie ideale $d\Sigma$, con versore normale \boldsymbol{n} , nel verso positivo di \boldsymbol{n} , esercita sulla parte di continuo in contatto con $d\Sigma$, con verso opposto a \boldsymbol{n} , e per il quale si può scrivere

$$d\boldsymbol{f} = [\tau] \boldsymbol{n} d\Sigma \quad ,$$

con $([\tau] \boldsymbol{n})_i = \tau_{ij} \boldsymbol{n}_j$;

- un *tensore di conducibilità termica* $[\kappa]$, rappresentante le quantità di calore attraversante una superficie elementare $d\Sigma$ nella direzione del versore normale \boldsymbol{n} nell'unità di tempo, attraverso la relazione

$$dQ = - [\kappa] \boldsymbol{n} \nabla T d\Sigma \quad ;$$

- un campo vettoriale $\boldsymbol{g} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, rappresentante la *densità di forza*;
- una relazione esprime i tensori di sforzo e conducibilità come funzioni delle osservabili $\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{v}, \rho, T, s$.

L'equazione di stato e l'equazione che lega le osservabili agli sforzi e alla conducibilità termica sono dette *relazioni costitutive*: nella teoria microscopica del continuo, esse devono essere dedotte, in linea di principio, dal modello atomico. In questo contesto, tuttavia, esse hanno carattere puramente macroscopico, quindi sono relazioni fenomenologiche e devono essere considerate come parti essenziali del modello del continuo considerato.

Per un fluido, le relazioni costitutive permettono di esprimere il tensore degli sforzi in termini delle osservabili termodinamiche e del campo di velocità, escludendo la necessità del campo di spostamento.

Si noti, infine, che i campi scalari e vettoriali introdotti sono continui e ciò è diretta conseguenza delle ipotesi del modello di descrizione assunto.

Tra i vari modelli di fluido considerabili, uno dei più importanti è il fluido ideale. In particolare, un fluido è detto essere un *fluido ideale* se la sua viscosità e la sua conducibilità termica sono nulli. In altre parole, un fluido è ideale se non si verificano fenomeni di dissipazione di energia.

1.2 Descrizione di un fluido e teorema del trasporto di Reynolds

Le proprietà caratterizzanti un fluido possono essere studiate seguendo due approcci diversi.

- La *descrizione euleriana* è la rappresentazione nella quale le proprietà dei campi vengono definite in funzione dello spazio e del tempo rispetto a un sistema di riferimento cartesiano inerziale con assi x_1, x_2, x_3 . Le coordinate euleriane (\mathbf{x}, t) caratterizzano una singola posizione nello spazio dove, al variare del tempo, vengono a trovarsi particelle di fluido diverse.
- La *descrizione lagrangiana* è la rappresentazione nella quale le proprietà dei campi vengono definite in funzione del comportamento dinamico di una particella di fluido considerata, individuata tramite le coordinate lagrangiane (\mathbf{X}, t) del suo centro di massa a un fissato istante iniziale.

Con lo scorrere del tempo, generalmente, una particella di fluido si muove e si deforma. A un generico istante, la sua posizione è determinata dalla relazione

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad ,$$

definente la traiettoria percorsa, detta *pathline*. Si noti come tale relazione individua una trasformazione della regione $\Omega(0) = \Omega_0$ occupata dal fluido all'istante iniziale t_0 nella regione $\Omega(t)$ occupata all'istante t . Il moto fluido può quindi essere descritto assumendo come variabili indipendenti le coordinate lagrangiane (\mathbf{X}, t) . Tale proprietà risulta verificata assumendo che particelle distinte tra loro si mantengano tali nel corso del moto. In particolare, considerando un sistema di riferimento ortogonale, nel tempo esso si trasforma in un generico sistema curvilineo. Si consideri, infatti, il volume materiale $d\Omega_0$ che all'istante iniziale t_0 è contenuto nel parallelepipedo rettangolare centrato in \mathbf{X} , di lati dX_1, dX_2, dX_3 paralleli, rispettivamente, agli assi x_1, x_2, x_3 . Esso, pur contenendo sempre le stesse particelle di fluido, si deformerà con il tempo, trasformandosi all'istante t in un parallelepipedo obliquo di lati dx_1, dx_2, dx_3 centrato nel punto individuato dal centro di massa del volume materiale, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Il volume istantaneo risulta legato al volume iniziale dalla relazione

$$d\Omega = \mathfrak{J}d\Omega_0 \quad ,$$

dove \mathfrak{J} è il determinante della matrice jacobiana associata trasformazione dalle coordinate euleriane alle coordinate lagrangiane. Difatti, siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i versori del sistema di riferimento euleriano e $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ i versori del sistema di riferimento lagrangiano. Poiché il coseno dell'angolo α_{jk} che l'asse X_k forma con l'asse x_j è

$$\cos \alpha_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial X_k} \quad ,$$

il vettore $dX_j \mathbf{s}_j$, rappresentante il lato j -esimo del parallelepipedo obliquo occupato dal fluido al tempo t , può essere decomposto rispetto al sistema di assi x_1, x_2, x_3 come

$$\mathbf{s}_j = dX_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial X_k} \right) \mathbf{e}_k \quad ,$$

avendo utilizzato la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti. Essendo il volume di un parallelepipedo obliquo di lati $dX_i \mathbf{s}_i$ uguale a

$$[(\mathbf{s}_2 \wedge \mathbf{s}_3) \cdot \mathbf{s}_1] dX_1 dX_2 dX_3 \quad ,$$

si ottiene, tramite il calcolo esplicito,

$$d\Omega(t) = \mathfrak{J} d\Omega(t_0) \quad ,$$

con \mathfrak{J} avente componenti $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

La variazione nel tempo di una qualsiasi quantità materiale è espressa dalla cosiddetta *derivata materiale* $\frac{D}{Dt}$. Considerando una generica particella, descritta dalla sua posizione iniziale (\mathbf{X}, t) , un osservatore solidale a essa misurerà delle variazioni per una generica grandezza fisica $\psi \in \mathbb{R}$ ad essa associata, perché variano sia la posizione che il tempo. Pertanto tale derivata assume la forma

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla\psi \quad ,$$

in virtù della regola della catena. Essendo $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$, si ha il seguente legame tra la descrizione lagrangiana e la descrizione euleriana:

$$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\psi \quad . \quad (1)$$

Per il determinante della matrice jacobiana vale la relazione

$$\frac{D\mathfrak{J}}{Dt} = \mathfrak{J}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad ;$$

difatti, dalla formula di Jacobi tale derivata può essere scritta tramite il complemento algebrico A_{jk} di $\frac{\partial x_k}{\partial X_j}$, assumendo, in notazione di Einstein, la forma

$$\frac{D\mathfrak{J}}{Dt} = A_{jk} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right) \quad ;$$

essendo

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial v_k}{\partial X_j} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad ,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{D\mathfrak{J}}{Dt} &= A_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \\ &= \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \left(A_{jk} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \\ &= \frac{\partial v_k}{\partial x_i} (\mathfrak{J} \delta_{ki}) \\ &= \mathfrak{J}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad , \end{aligned}$$

dove δ_{ki} è la delta di Kronecker.

Si consideri un volume materiale generico del fluido, $\Omega(t)$. Sia $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

una qualsiasi proprietà intensiva del fluido (ossia una grandezza fisica per unità di volume). La variazione subita nel tempo dalla proprietà estensiva associata, $\Psi(t) = \int_{\Omega(t)} \psi(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x}$, è

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \psi(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \psi(\mathbf{X}, t) \mathfrak{J} d^3 \mathbf{X} \quad .$$

Essendo ora il volume di integrazione fisso, si può derivare sotto il segno di integrale, ottenendo:

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_{\Omega_0} \frac{D\psi(\mathbf{X}, t)}{Dt} \mathfrak{J} + \psi(\mathbf{X}, t) \frac{D\mathfrak{J}}{Dt} d^3 \mathbf{X} = \int_{\Omega_0} \left(\frac{D\psi(\mathbf{X}, t)}{Dt} + \psi(\mathbf{X}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \mathfrak{J} d^3 \mathbf{X} \quad ,$$

ovvero

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{D\psi(\mathbf{x}, t)}{Dt} + \psi(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) d^3 \mathbf{x} \quad .$$

Poichè

$$\begin{aligned} \frac{D\psi(\mathbf{x}, t)}{Dt} + \psi(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi + \psi(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} + \psi(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} \\ &= \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \otimes \mathbf{v}) \quad , \end{aligned}$$

si giunge all'identità

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \psi(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \otimes \mathbf{v}) d^3 \mathbf{x} \quad . \quad (2)$$

Questo risultato è noto come *teorema del trasporto*, ed è dovuto al fisico Osborne Reynolds. Esso riveste una importanza fondamentale nella meccanica dei continui e permette di derivare sia in forma integrale che differenziale le equazioni di conservazione che governano il comportamento dinamico di un fluido.

Applicando il teorema della divergenza, si evince che il tasso di variazione temporale di una grandezza estensiva dipende dalle variazioni locali della grandezza intensiva che la determina e dal flusso di una quantità $\psi \otimes \mathbf{v}$ attraverso una superficie chiusa:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \psi(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d^3 \mathbf{x} + \oint_{\partial \Omega(t)} ((\psi \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) d^2 \mathbf{x} \quad , \quad (3)$$

dove $\partial \Omega(t)$ è la frontiera di $\Omega(t)$. Ne consegue che le variazioni della grandezza ψ all'interno del volume $\Omega(t)$, in assenza di sorgenti, dipendono solo dal flusso attraverso $\partial \Omega(t)$ e non dai possibili flussi interni al volume.

Inoltre, considerando la funzione indicatrice dell'insieme $\Omega(t)$, si può studiare come il volume varia nel tempo. Quindi

$$\frac{D\Omega(t)}{Dt} = \oint_{\partial \Omega(t)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d^2 \mathbf{x} \quad ,$$

ossia le variazioni del volume nel tempo dipendono soltanto dal flusso del campo di velocità. Pertanto, l'evoluzione di un volume nel corso del proprio moto dipende esclusivamente dalle caratteristiche del campo di velocità. Se quest'ultimo è solenoidale, ovvero $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, allora il volume si conserva nel tempo.

2 Equazioni della fluidodinamica

Nella fluidodinamica ideale, le equazioni che descrivono il comportamento di un fluido sono:

- l'equazione di continuità della massa;
- l'equazione di conservazione della quantità di moto;
- l'equazione di conservazione dell'energia.

Ognuna di queste equazioni dispone di una rappresentazione sia in forma differenziale che integrale. Si noti, tuttavia, che, pur descrivendo lo stesso fenomeno, gli approcci alla base di queste coppie di equazioni sono concettualmente differenti e, soprattutto, non equivalenti. Difatti, le rappresentazioni in forma differenziale e integrale descrivono un fenomeno da un punto di vista locale e globale, rispettivamente, e, pertanto, la conservazione in forma integrale non implica una conservazione in forma differenziale, mentre il viceversa è sempre vero. Ciò può essere compreso considerando il seguente argomento. Sia Q una generica osservabile, detta *carica*, e J^μ il quadrivettore la cui componente scalare integrata su un volume corrisponde alla carica, detto *densità di corrente di carica*. Allora

$$\begin{cases} J^\mu = (J^0, \mathbf{J}) \\ Q = \int_{\mathbb{R}^3} J^0 d^3x \end{cases} . \quad (4)$$

Poiché il volume di integrazione corrisponde a \mathbb{R}^3 , la derivata rispetto al tempo è data da

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} J^0 d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial J^0}{\partial t} d^3x . \quad (5)$$

Supponendo valida l'equazione di continuità $\frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, e in virtù del teorema della divergenza, tale derivata assume la forma

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\partial\mathbb{R}^3} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d^2x . \quad (6)$$

Poiché sulla frontiera dello spazio \mathbb{R}^3 la densità di corrente di carica deve annullarsi, si ottiene

$$\frac{dQ}{dt} = 0 , \quad (7)$$

ovvero una corrente conservata implica una carica conservata localmente. Data la generalità delle ipotesi, un tale argomento può essere applicato a una qualsiasi legge di conservazione.

2.1 Equazione di conservazione della massa

Si consideri la densità di massa, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$. La massa contenuta nel generico volume $\Omega(t)$ è data da:

$$m(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} \quad . \quad (8)$$

Se non sono presenti né sorgenti né pozzi, allora la massa deve conservarsi. Pertanto, considerando la derivata materiale e applicando il teorema di Reynolds, si ottiene la *equazione di conservazione della massa in forma integrale*:

$$\frac{Dm(t)}{Dt} = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d^3\mathbf{x} = 0 \quad . \quad (9)$$

Si noti che tale equazione può anche essere scritta come:

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\mathbf{x} + \oint_{\partial\Omega(t)} ((\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) d^2\mathbf{x} = 0 \quad .$$

In altre parole, in un determinato istante di tempo, in assenza di termini sorgenti, il flusso netto di massa attraverso la superficie $\partial\Omega$ eguaglia la variazione nel tempo della massa contenuta nel volume Ω .

L'equazione in forma integrale è valida per un qualsiasi volume considerabile. Ciò implica che la funzione integranda deve essere identicamente nulla. Si ottiene così la *equazione di conservazione della massa in forma differenziale*:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (10)$$

Se si considera un campo di velocità solenoidale, l'equazione di continuità della massa assume la forma

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad ; \quad (11)$$

questa condizione corrisponde all'incompressibilità di un fluido.

Infine, grazie all'equazione di bilancio della massa, per una generica osservabile ψ vale l'identità

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho \psi d^3\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{D\psi}{Dt} d^3\mathbf{x} \quad , \quad (12)$$

difatti

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho \psi d^3\mathbf{x} &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \psi + \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi \rho) (\nabla \cdot \mathbf{v}) d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega(t)} \psi \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \rho \frac{D\psi}{Dt} d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega(t)} \rho \frac{D\psi}{Dt} d^3\mathbf{x} \quad . \end{aligned}$$

2.2 Equazione di conservazione della quantità di moto

Si consideri la densità di quantità di moto, $\rho\mathbf{v} = (\rho\mathbf{v})(\mathbf{x}, t)$.

Applicando la derivata materiale alla grandezza estensiva ad essa associata, si ottiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} (\rho\mathbf{v}) d^3\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) d^3\mathbf{x} \quad (13)$$

$$= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} d^3\mathbf{x} + \oint_{\partial\Omega(t)} (\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{x} \quad . \quad (14)$$

Su un elemento di fluido agiscono due tipi di forze esterne:

- le forze di superficie $[T]$, ossia le interazioni tra la particella e l'ambiente che coinvolgono esclusivamente la frontiera dell'elemento di fluido;
- le forze di volume \mathbf{f} , ossia le interazioni (per unità di massa) tra la particella e l'ambiente che coinvolgono l'intero volume dell'elemento di fluido senza la necessità di contatto.

Si osservi che le forze di superficie e di volume hanno natura tensoriale e vettoriale, rispettivamente. In particolare, il tensore $[T]$ è detto *tensore degli sforzi di Cauchy* e, nel caso di *fluido ideale*, esso assume la forma $[T] = -p[I]$, ovvero $T_{ij} = -p\delta_{ij}$. In altre parole, la forza associata al tensore degli sforzi è data dal gradiente di pressione ed agisce in direzione normale alle superfici infinitesime di fluido.

La forza complessiva è data dalla somma di un integrale di volume e di un integrale di superficie. Pertanto, attraverso il teorema della divergenza, si giunge alla *equazione di conservazione della quantità di moto in forma integrale*:

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} d^3\mathbf{x} + \oint_{\partial\Omega(t)} \rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} (\rho\mathbf{f}) d^3\mathbf{x} + \oint_{\partial\Omega(t)} [T] \mathbf{n} d^2\mathbf{x} \quad . \quad (15)$$

Integrando i diversi contributi rispetto allo stesso dominio, si può ricavare la *equazione di conservazione della quantità di moto in forma differenziale*. Difatti, riscrivendo il primo membro dell'equazione attraverso l'identità

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} (\rho\mathbf{v}) d^3\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d^3\mathbf{x} \quad ,$$

e imponendo l'annullamento della funzione integranda complessiva, si ottiene:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho\mathbf{f} + \nabla \cdot [T] \quad . \quad (16)$$

Poiché

$$\nabla \cdot [T] = -\nabla p \quad ,$$

si può riscrivere l'equazione in forma differenziale come

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad . \quad (17)$$

Se l'unica forza esterna agente corrisponde all'interazione tra l'elemento di fluido e il campo gravitazionale, si ha

$$\mathbf{f} = -\nabla\phi \quad ,$$

dove $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^-$ è il potenziale gravitazionale. In tal caso, l'equazione della quantità di moto è detta *equazione di Euler*:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla\phi - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad . \quad (18)$$

Si noti che l'accelerazione di una particella di fluido è data da due contributi:

- il primo, corrispondente a $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$, è detto *accelerazione locale* e rappresenta l'accelerazione dovuta alla variazione di velocità della particella di fluido in un fissato punto dello spazio (si osservi che la derivazione parziale è rispetto alla coordinata temporale, implicando la costanza delle variabili spaziali);
- il secondo, corrispondente a $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, è detto *termine advettivo dell'accelerazione* e rappresenta l'accelerazione dovuta al gradiente di velocità presente nella traiettoria della particella in un fissato istante di tempo (si osservi che la derivazione parziale è rispetto alle coordinate spaziali, implicando la costanza della variabile temporale).

Si osservi, infine, che l'equazione ricavata è da considerarsi come caso particolare di una trattazione più generale, nella quale vengono considerati anche i processi di dissipazione energetica che possono avere luogo in un fluido in moto come conseguenza degli attriti interni e degli scambi di energia sotto forma di calore.

2.3 Equazione di conservazione dell'energia

Si consideri la densità di energia $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho u$, dove $\frac{1}{2}\rho v^2$ è la densità di energia cinetica e ρu è la densità di energia interna. L'energia associata all'elemento di fluido è perciò data da

$$E = \int_{\Omega(t)} \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho u \, d^3\mathbf{x} \quad . \quad (19)$$

La variazione nel tempo di tale quantità è determinata dalla derivata materiale e deve essere uguale al lavoro svolto dalle forze di superficie e dalle forze di volume. Dunque, si ottiene

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) d^3\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (p\mathbf{v}) \, d^3\mathbf{x} \quad .$$

Si noti che la variazione di energia cinetica è determinata dal lavoro svolto dalle forze di volume e, quindi, i due termini si elidono a vicenda. Pertanto, la *equazione di conservazione dell'energia in forma integrale* è data da

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{Du}{Dt} \, d^3\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) \, d^3\mathbf{x} \quad . \quad (20)$$

Data l'arbitrarietà del volume di integrazione, si trova che la *equazione di conservazione dell'energia in forma differenziale* è data da

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) \quad . \quad (21)$$

2.4 Equazione adiabatrica

Avendo trattato i fluidi come sistemi ideali, le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia ricavate non considerano gli eventuali processi dissipativi che si verificano nel moto di un fluido e che sono dovuti, essenzialmente, alla viscosità e agli scambi di calore.

Da un punto di vista termodinamico, l'assenza di scambi di calore tra le diverse parti di un fluido, così come tra il fluido e l'ambiente, comporta la adiabaticità dei moti in tutto il fluido. Si deve necessariamente assumere, pertanto, che il moto di un fluido ideale sia adiabatico. Come conseguenza della disuguaglianza di Clausius, i moti sono reversibili e l'entropia delle particelle di fluido deve conservarsi durante il loro corso.

Si consideri l'entropia per unità di massa, $s = s(\mathbf{x}, t)$. Allora si può esprimere la condizione per il moto adiabatico come:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \rho s \, d^3\mathbf{x} = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{Ds}{Dt} \, d^3\mathbf{x} = 0 \quad . \quad (22)$$

Da essa si ottiene la relazione

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad , \quad (23)$$

scrivibile anche nel seguente modo:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (24)$$

Pertanto, l'entropia associata a una particella di fluido si conserva nel corso del moto e nel tempo.

Inoltre, applicando il *I* e il *II principio* della *termodinamica*, è possibile ricavare l'equazione di bilancio per l'energia partendo dalla condizione di adiabaticità dei moti. Ne consegue che, ai fini della descrizione di un fluido, è possibile utilizzare una qualsiasi tra le due leggi di conservazione.

3 Accrescimento sferico

Si consideri un oggetto sferico di massa M e raggio R immerso in una nube di gas. In tali condizioni, il gas fluisce verso la massa centrale a causa dell'attrazione gravitazionale. Si assuma che il flusso sia radiale e stazionario. Si supponga, inoltre, che il gas sia ideale e politropico, con indice $\gamma \in (1, \frac{5}{3})$.

Per un flusso radiale, stazionario e sfericamente simmetrico, l'equazione di continuit  della massa  

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0 \quad , \quad (25)$$

e pertanto la quantit  $r^2 \rho v$   costante. Quindi il flusso di massa, data la simmetria del problema,  

$$\dot{M} = -4\pi r^2 \rho v \quad . \quad (26)$$

L'equazione di Euler associata al problema  

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad , \quad (27)$$

con G costante di gravitazione universale.

L'equazione per l'energia pu  essere identificata con la relazione politropica

$$p \propto \rho^\gamma \quad . \quad (28)$$

Si   cos  ottenuto un sistema di tre equazioni in tre variabili, risolvibile, quindi, univocamente.

Si noti che

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \rho} \quad ;$$

allora

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial \rho} = c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad .$$

L'equazione di Euler assume, pertanto, la forma

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{c_s^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad . \quad (29)$$

L'equazione di continuit  pu  essere riscritta come

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = - \frac{1}{r^2 v} \frac{\partial (r^2 v)}{\partial r} \quad ,$$

e permette di ottenere, dopo semplici passaggi algebrici, una nuova forma per l'equazione di Euler:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) \frac{\partial (v^2)}{\partial r} = - \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2c_s^2 r}{GM} \right) \quad . \quad (30)$$

Si osservi che:

- $c_s^2 = c_s^2(\rho(r))$ e pertanto per $r \rightarrow \infty$ la velocità del suono deve tendere a un valore costante $c_s(+\infty)$; se ne deduce che per valori asintoticamente infiniti della distanza, il secondo membro

$$-\frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2c_s^2 r}{GM}\right) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2c_s^2(+\infty)}{r}$$

è positivo;

- a primo membro, $\frac{\partial(v^2)}{\partial r}$ deve essere negativo per $r \rightarrow \infty$ in quanto a distanze asintoticamente infinite il gas deve trovarsi slegato dall'attrazione gravitazionale del corpo centrale e la velocità deve aumentare all'avvicinarsi al corpo centrale,

$$\frac{\partial(v^2)}{\partial r} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} 0 \quad ;$$

ciò implica che per $r \rightarrow \infty$ la velocità deve essere subsonica:

$$v^2 < c_s^2 \quad ;$$

- al diminuire della distanza, il fattore $\left(1 - \frac{2c_s^2 r}{GM}\right)$ si annulla a un determinato raggio, indicabile come *raggio critico*; attraverso l'espressione della velocità del suono, esso è dato da:

$$r_c = \frac{GM}{2c_s^2(r_c)} \simeq 7.5 \cdot 10^{13} \left(\frac{T}{10^4 K}\right)^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \text{ cm} \quad ; \quad (31)$$

essendo tale valore molto maggiore rispetto alle dimensioni tipiche delle masse centrali in astrofisica, risulta necessario studiare l'accrescimento anche per distanze minori del raggio critico.

Ripetendo la medesima analisi per $r < r_c$, si può concludere che, poichè

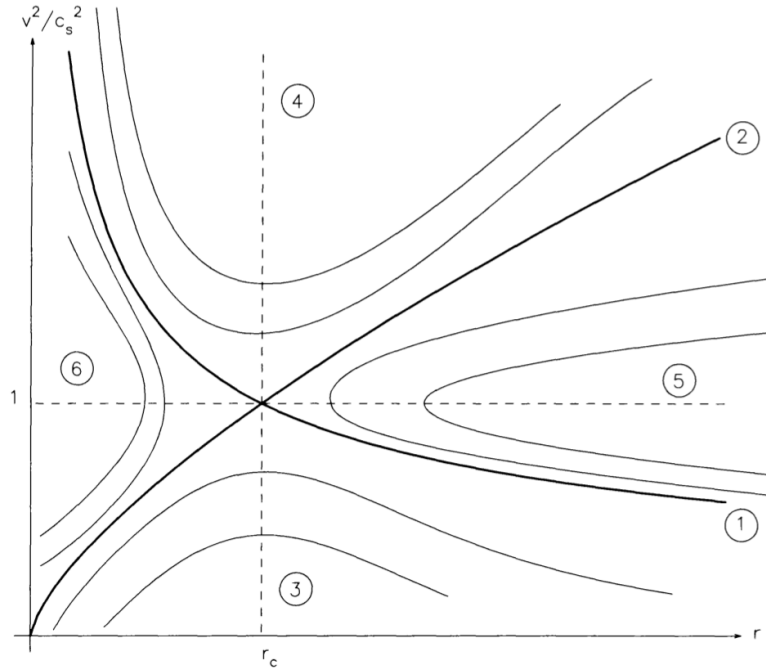
$$\begin{cases} \frac{\partial(v^2)}{\partial r} < 0 \\ -\frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2c_s^2 r}{GM}\right) < 0 \end{cases} \quad ,$$

si deve avere $\left(1 - \frac{c_s^2}{v^2}\right) > 0$, ovvero

$$v^2 > c_s^2 \quad .$$

Ciò significa che l'*accrescimento deve transire da un regime subsonico a un regime supersonico in prossimità del raggio critico*. Inoltre, per $r = r_c$, si deve verificare $v^2 = c_s^2$ oppure $\frac{\partial(v^2)}{\partial r} = 0$.

Le soluzioni dell'equazione differenziale possono essere classificate rispetto al loro comportamento in un intorno di $r = r_c$.



T. Padmanabhan, Theoretical Astrophysics: Vol. I: Astrophysical Processes

La soluzione (1) presenta le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} v^2(r_c) = c_s^2 \\ v^2(r) < c_s^2, r > r_c \\ v^2(r) > c_s^2, r < r_c \\ v^2(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{cases},$$

ed è quindi quella adatta a descrivere l'assorbimento. Si noti che:

- la soluzione (2) corrisponde alla situazione a tempo inverso rispetto all'accrescimento sferico e rappresenta un vento di materia fluente dall'oggetto compatto che transisce da un regime subsonico a uno supersonico;
- le soluzioni (3) e (4), nei quali $\frac{\partial(v^2)}{\partial r} = 0$, sono subsoniche o supersoniche nell'intero intervallo spaziale e non possono pertanto descrivere l'accrescimento sotto queste ipotesi;
- le soluzioni (5) e (6), nei quali $\frac{\partial(v^2)}{\partial r} = \infty$, sono soluzioni non fisiche perché per uno stesso valore della distanza presentano due diverse velocità v^2 .

Si può integrare la equazione

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad ,$$

ottenendo

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma - 1} - \frac{GM}{r} = h \in \mathbb{R} \quad .$$

Dato che la velocità a distanze asintoticamente infinite deve essere nulla, la costante risulta essere

$$h = \frac{c_s^2(+\infty)}{\gamma - 1} .$$

Inoltre, poiché

$$\begin{cases} v^2(r_c) = c_s^2(r_c) \\ \frac{GM}{r_c} = 2c_s^2(r_c) \end{cases} ,$$

si possono correlare $c_s^2(r_c)$ e $c_s^2(+\infty)$, ottenendo la relazione

$$c_s(r_c) = c_s(+\infty) \left(\frac{2}{5 - 3\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (32)$$

equazione ben definita in quanto $\gamma \in (1, \frac{5}{3})$. Inoltre, dato che

$$c_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \propto \rho^{\gamma-1} ,$$

si trova

$$\rho(r_c) = \rho(+\infty) \left(\frac{2}{5 - 3\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} . \quad (33)$$

In conclusione, essendo $r^2 \rho v$ costante, si può scrivere

$$\dot{M} = 4\pi r_c^2 \rho(r_c) c_s(r_c) ,$$

e, esplicitando i vari fattori presenti e assumendo $\gamma = 1.4$ (gas diatomico), si ha

$$\dot{M} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho(+\infty)}{c_s^3(+\infty)} \left(\frac{2}{5 - 3\gamma} \right)^{\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}} \quad (34)$$

$$= 1.4 \cdot 10^{11} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{\rho(+\infty)}{10^{-24} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}} \right) \left(\frac{c_s(+\infty)}{10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}} \right)^{-3} \text{ g} \cdot \text{s}^{-1} . \quad (35)$$

In conclusione, il tasso di accrescimento è determinato univocamente dalla massa dell'oggetto, dalla velocità del suono e dalla densità, queste ultime considerate a distanze asintoticamente infinite dalla sfera centrale. Questo implica che un gas può fluire verso un oggetto compatto solo a una certa velocità critica. Difatti, fissando la distanza, le perturbazioni del tasso di accrescimento e della densità sono date da:

$$\begin{cases} \frac{\delta \dot{M}}{\dot{M}} = \left(1 - \frac{v^2}{c_s^2} \right) \frac{\delta v}{v} \\ \frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{v^2}{c_s^2} \frac{\delta v}{v} \end{cases} .$$

All'aumentare della velocità, per ogni distanza considerata, il tasso di accrescimento aumenta fino a quando essa non eguaglia la velocità del suono. A seguito di un ulteriore aumento della velocità, il flusso di massa nell'unità di tempo diminuisce. Quindi, a ogni distanza esiste un tasso di flusso massimo permesso, che si realizza quando la velocità del gas corrisponde alla velocità del suono. Esso è dato da:

$$|\dot{M}_{max}(r)| = 4\pi r^2 c_s(+\infty) \rho(+\infty) \left[\left(\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} \right) \left(\frac{GM}{r^2 c_s(+\infty)} + \frac{1}{\gamma-1} \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} . \quad (36)$$

Per $\gamma \in (1, \frac{5}{3})$, tale funzione decresce come $r^{-\frac{(5-3\gamma)}{2(\gamma-1)}}$ per $r \rightarrow \infty$, raggiunge il valore minimo \dot{M}_{crit} in corrispondenza del raggio critico, $r = r_c$, per poi aumentare come r^2 per $r \rightarrow +\infty$. Poiché si deve avere $|\dot{M}(r)| \leq |\dot{M}_{max}(r)|$, ne consegue la disuguaglianza:

$$\dot{M}(r) \leq \dot{M}_{crit}(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}^+ \quad . \quad (37)$$

Inoltre, per $\dot{M} < \dot{M}_{crit}$ il regime è subsonico ovunque; affinché vi sia una transizione al regime supersonico, si deve avere $\dot{M} = \dot{M}_{crit}$.

Si osservi che $\dot{M} \rightarrow 0$ per $\gamma \rightarrow \frac{5}{3}$ in quanto il raggio critico si sposta verso il corpo centrale, mentre $\dot{M} \rightarrow +\infty$ per $\gamma \rightarrow 1$ in quanto il raggio critico si sposta verso distanze infinite. Il fatto che il tasso di accrescimento sia nullo per un gas soggetto a una trasformazione adiabatica (con $c_s(+\infty) \neq 0$) mostra che un flusso di accrescimento transonico reale deve presentare raffreddamento radiativo.

A Velocità del suono

Una *onda sonora* è, genericamente, una perturbazione che si propaga all'interno di un mezzo tramite il moto delle particelle che lo compongono. La fisica coinvolta riguarda fondamentalmente tre fenomeni:

- variazione della densità causata dal passaggio di una perturbazione;
- variazione della pressione come effetto della variazione di densità;
- moto del gas generato dalle differenze di pressione.

Per un fluido, la pressione è funzione della densità:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f(\rho) = p \end{cases} .$$

Se si è in condizioni di equilibrio, allora

$$f(\rho_0) = p_0 \quad ,$$

con ρ_0, p_0 costanti che identificano le condizioni fisiche di equilibrio del gas.

Il passaggio di una onda sonora provoca in un sistema all'equilibrio delle variazioni di entità variabile, legate all'energia associata alla perturbazione. Si assuma in questo caso che le differenze nei parametri siano infinitesime. Si può, quindi, scrivere

$$\begin{cases} p = p_0 + p_e \\ \rho = \rho_0 + \rho_e \end{cases} ,$$

con $p_e \ll p_0, \rho_e \ll \rho_0$. Allora

$$p = p_0 + p_e = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e \left(\frac{df}{d\rho} \right) (\rho_0) \quad .$$

Si trova, perciò, che l'eccesso di pressione è proporzionale all'eccesso di densità, ossia

$$p_e = \kappa \rho_e \quad ,$$

con $\kappa = \left(\frac{df}{d\rho} \right) (\rho_0) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) (\rho_0)$.

Per semplicità si tratta il caso unidimensionale, con gas supposto omogeneo. Essendo, inoltre, lo spazio isotropo, la generalizzazione è immediata.

Si supponga che una particella di fluido imperturbata si trovi nella posizione $x \in \mathbb{R}$. Lo spostamento subito a un tempo $t \in \mathbb{R}$ può essere rappresentato da una funzione $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi = \phi(x, t)$. La posizione imperturbata di una particella vicina è $x + \Delta x$, con uno spostamento $(x + \Delta x) + \phi(x + \Delta x, t)$. La massa di fluido per unità di area in Δx è $\rho_0 \Delta x$. Tale quantità di fluido, una volta perturbato dall'onda sonora, viene a giacere nella regione di spazio compresa tra $x + \phi(x, t)$ e $x + \Delta x + \phi(x + \Delta x, t)$

e, pertanto, in questo intervallo spaziale la massa è la stessa del fluido in equilibrio. Tuttavia, è presente una variazione di densità, per la quale vale l'equazione

$$\begin{aligned}\rho_0 \Delta x &= \rho [x + \Delta x + \phi(x + \Delta x, t) - (x + \phi(x, t))] \\ &= (\rho_0 + \rho_e) [\Delta x + \phi(x + \Delta x, t) - \phi(x, t)] \quad .\end{aligned}$$

Essendo Δx infinitesimo, si può scrivere

$$\phi(x + \Delta x, t) - \phi(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x \quad ,$$

e quindi

$$(\rho_0 + \rho_e) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho_e = 0 \quad .$$

Poichè $\rho_e, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}$ sono infinitesimi, si possono trascurare nell'equazione i termini di ordine superiore, ottenendo

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad .$$

Ciò esprime la variazione di densità a seguito del moto nel fluido. Si noti che essa è determinata da una funzione dipendente dalla posizione. Inoltre, il segno negativo a secondo membro indica che se il fluido viene stirato, allora la densità deve diminuire, e viceversa, se il fluido viene contratto, allora la densità deve aumentare.

Se si considera un volume di area unitaria e spessore infinitesimo, la massa presente moltiplicata per l'accelerazione è $(\rho_0 \Delta x) (\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2})$. Si noti che, essendo Δx infinitesimo, si è assunto costante $(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2})$ in tutto lo spessore del piano. Su tale elemento di fluido agiscono due forze: la prima, con verso positivo, in x , pari a $p(x, t)$, e la seconda, con verso negativo, in $x + \Delta x$, pari a $p(x + \Delta x, t)$. Quindi

$$\rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = p(x, t) - p(x + \Delta x, t) \quad .$$

Dato che

$$p(x, t) - p(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \quad ,$$

si trova

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad .$$

Inoltre, dato che $p = p_0 + p_e$, con p_0 costante, ed essendo valida la proporzionalità tra p_e e ρ_e , si ottiene l'equazione

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \kappa \rho_e}{\partial x} = 0 \quad .$$

Poiché $\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}$, si trova infine

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad .$$

In tre dimensioni, l'equazione è

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0 \quad , \quad (38)$$

con Δ operatore di Laplace, oppure, in forma più compatta,

$$\square\phi = 0 \quad , \quad (39)$$

con \square operatore di d'Alembert.

Questa equazione corrisponde all'equazione delle onde e da essa si ricava la velocità del suono:

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) (\rho_0) \quad (40)$$

Questa relazione mostra che la velocità di propagazione delle perturbazioni meccaniche è correlata unicamente alle proprietà del mezzo.

La pressione e la temperatura variano adiabaticamente in una onda sonora. Il flusso di calore da una regione compressa a una più rarefatta è trascurabile fintantoché la lunghezza d'onda è non paragonabile con il libero cammino medio. Sotto queste condizioni, la limitata quantità di flusso di calore non influenza la velocità, sebbene causi un leggero assorbimento dell'energia sonora. Chiaramente, l'entità di questo assorbimento diventa tanto più importante quanto più la lunghezza d'onda tende al libero cammino medio. Dato ciò, pressione e densità devono essere legate dalla relazione di Poisson

$$p \propto \rho^\gamma \quad ,$$

con γ indice adiabatico. Poiché

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\ln(p) - \gamma \ln(\rho)) = 0 \quad ,$$

si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \frac{p}{\rho} \quad , \quad (41)$$

e pertanto

$$c_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad . \quad (42)$$

Dalla legge dei gas ideali, $p = \frac{\rho K T}{\mu}$, con μ peso molecolare medio, si può infine scrivere la velocità del suono come

$$c_s^2 = \gamma \frac{K T}{\mu} \quad . \quad (43)$$

Si osservi che essa dipende soltanto dalla temperatura. Dato che le particelle seguono la statistica di Maxwell-Boltzmann, l'energia termica è legata alla velocità quadratica media dalla relazione

$$K T = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle \quad ;$$

dunque, si ottiene

$$c_s^2 = \frac{\gamma}{3} \langle v^2 \rangle \quad . \quad (44)$$

La velocità del suono è, quindi, dello stesso ordine di grandezza della velocità media delle particelle. Ciò era comprensibile *a priori*, in quanto una perturbazione, quale, per esempio, una variazione di pressione, è propagata attraverso il moto delle particelle.

Bibliografia

- [1] Gallavotti, G. *Foundations of Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, 2002.
- [2] Landau, L.; Lifšits, E. *Meccanica dei fluidi*, Editori Riuniti, 2018.
- [3] Rutherford, A. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publications, 1989.
- [4] Padmanabhan, T. *Course of Theoretical Astrophysics, Volume 1: Astrophysical Processes*, Cambridge University Press, 2000.
- [5] Feynman, R.; Leighton, R.; Sands, M. *The Feynman Lectures on Physics, Volume I*, Basic Books, 2011.
- [6] Mattioli, F. *Principles of Fluid Dynamics*, Università di Bologna.
- [7] Lanzoni, S. *Le equazioni della meccanica dei fluidi*, Università di Padova.