Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Un'Introduzione alla Coomologia dei Fasci

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giovanni Mongardi

Presentata da:
Miguel Gentili

Anno Accademico 2022/2023

La science ne s'apprend pas : elle se comprend. Elle n'est pas lettre morte et les livres n'assurent pas sa pérennité : elle est une pensée vivante. Pour s'intéresser à elle, puis la maîtriser, notre esprit doit, habilement guidé, la redécouvrir, de même que notre corps a dû revivre, dans le sein maternel, l'évolution qui créa notre espèce ; non point tous ses détails, mais son schéma.

-Jean Leray

Introduzione

Mi colpì molto, e inizialmente non capii cosa intendesse, leggere nella prefazione del libro di Marco Manetti "Topologia" [4] che la topologia assomiglia più a un linguaggio che a una teoria vera e propria. Trovo che la teoria dei fasci sia un esempio lampante di questo fatto: è un linguaggio utilissimo per comprendere e riformulare meglio concetti e teorie matematiche.

In questa tesi di laurea proponiamo un primo approccio allo studio della teoria dei fasci e una possibile introduzione alla coomologia a valori in un fascio di uno spazio topologico. Tale teoria è stata introdotta dal matematico Jean Leray a partire dal 1940. Leray era un ufficiale dell'esercito francese che, dopo la sconfitta della Francia nel 1940, venne inviato in un campo per prigionieri di guerra in Austria. I prigionieri fondarono qui un'università, di cui il matematico fu il rettore, in cui tenne dei corsi di topologia algebrica e pose le basi per l'introduzione della teoria dei fasci. Le idee di Leray si diffusero con la fine della guerra e ispirarono altri matematici come André Weil e Henri Cartan. Fra le altre cose, il primo le usò per formulare una dimostrazione oggi classica del celebre teorema di De Rham mentre il secondo tenne dei seminari sulla teoria dei fasci a cui parteciparono anche Roger Godement e Alexander Grothendieck. Grothendieck contribuì enormemente allo sviluppo della teoria e all'applicazione di essa alla geometria algebrica; citiamo l'articolo *"Sur quelques points d'algèbre homologique"* pubblicato nel 1957 sulla rivista *"Tôhoku Mathematical Journal"* [9], che fu centrale per lo studio della coomologia dei fasci. Godement pubblicò il primo libro con un approccio sistematico alla materia nel 1958 che ancora oggi è considerato un caposaldo, *"Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux"* [1]. Allo stato dell'arte la teoria dei fasci permea numerose aree della matematica di cui è diventato uno strumento fondamentale.

Esistono diversi approcci allo studio di questa disciplina: già a partire dalla definizione stessa di fascio ci sono autori che preferiscono l'uno o l'altro metodo. In questo elaborato è presentato quello discusso nel libro di Godement [1]. Abbiamo inoltre scelto di considerare esclusivamente fasci di gruppi abeliani per semplicità d'esposizione anche se, almeno a livello di prime definizioni, un approccio più generale non avrebbe cambiato la sostanza dei fatti.

Il primo capitolo di questa tesi contiene alcune nozioni preliminari, nello specifico quelle riguardanti ai limiti diretti di gruppi e alcuni elementi di algebra omologica.

Nel secondo capitolo diamo le prime definizioni di base della teoria fra cui quelle di prefascio, di fascio, di morfismi fra essi, e molte altre. Vedremo come sostanzialmente i prefasci consentono di raccogliere informazioni a livello locale di uno spazio topologico, mentre i fasci esprimono l'idea che a volte è possibile recuperare informazioni a livello globale partendo da quelle a livello locale.

Una delle parti più tecniche della tesi si trova nella seconda sezione del primo capitolo, dove discutiamo il concetto di fascio associato ad un prefascio. Un'esposizione meno diretta ma sicuramente più accessibile è quella data ad esempio nel libro *"Algebraic Geometry"* [3] di Robin Hartshorne in cui si dà una definizione analoga utilizzando la proprietà universale del fascio associato ad un prefascio, che in questa tesi non è stata menzionata. Il motivo è dovuto al fatto che ho trovato la costruzione trattata in questo elaborato interessante e istruttiva di per sé e in ogni caso è necessaria per dimostrare la validità della suddetta proprietà universale.

Il terzo capitolo è dedicato alla costruzione di una teoria della coomologia per i fasci; l'approccio esposto qui è quello introdotto per la prima volta da Godement e fa uso dei concetti di fiacchezza e di risoluzione di un fascio. Abbiamo mostrato il procedimento che porta alla costruzione di una risoluzione canonica di un fascio qualsiasi, la quale permette di calcolare in maniera coerente la coomologia a valori in un fascio di uno spazio topologico.

Nell'ultima parte del capitolo viene enunciato e dimostrato un importante e utile teorema che permette di calcolare i gruppi di coomologia a partire da una qualsiasi risoluzione aciclica anziché da quella canonica. Non sembra esserci un nome universalmente accettato per questo teorema a cui per semplicità di esposizione abbiamo dato il nome di "teorema di De Rham - Weil", così come riportato in alcuni testi e online.

Una possibile alternativa per definire la coomologia dei fasci è quella di Grothendieck che utilizza il linguaggio dell'algebra omologica; in questo elaborato non si accenna a quest'altra strada poiché avrebbe richiesto uno studio approfondito di concetti come categorie abeliane, risoluzioni iniettive e funtori derivati che non avrebbe lasciato spazio alla trattazione di altri argomenti.

Nel quarto e ultimo capitolo ci chiediamo se data una mappa continua tra due spazi topologici e un fascio su uno di essi si possa definire un fascio sull'altro spazio e ci concentriamo allo studio del caso particolare di un fascio costante. Mostriamo che in questa situazione la coomologia è un invariante omotopico dello spazio e successivamente ricaviamo una formula analoga alla classica formula di escissione che permette di definire i gruppi di coomologia della coppia (X, D), dove D è un chiuso di X. Questo risultato ci consente di calcolare i gruppi di coomologia della sfera, così come mostrato nell'ultima sezione. Si mostrerà che tali gruppi coincidono con quelli di coomologia singolare e infatti un possibile sviluppo della tesi potrebbe essere la dimostrazione che nel caso di spazi topologici paracompatti, di Hausdorff e localmente contraibili coomologia singolare e coomologia dei fasci coincidono.

La teoria dei fasci è molto ampia proprio perché le sue applicazioni spaziano in campi molto diversi fra loro quali la geometria algebrica, l'analisi complessa e lo studio di equazioni alle derivate parziali. Questa tesi non ha quindi alcuna pretesa di completezza e non giunge a nessun teorema fondamentale o conclusivo di un percorso ma si è cercato piuttosto di mostrare un possibile primo approccio allo studio di questa teoria.

Indice

Capitolo 1

Nozioni Preliminari

In questo capitolo ci occupiamo di dare le nozioni preliminari necessarie a sviluppare la teoria presente in questo elaborato. In particolare, presentiamo il concetto di limite diretto di gruppi e diamo qualche elemento di algebra omologica.

1.1 Limite Diretto di Gruppi

Definizione 1.1 (**Insieme diretto**). *Un* ***insieme diretto*** *è un insieme I con una relazione binaria $\leq$ che soddisfi:*

(i) (proprietà riflessiva) *per ogni $a \in I$, $a \leq a$*

(ii) (proprietà transitiva) *per ogni $a, b, c \in I$, se $a \leq b$ e $b \leq c$, allora $a \leq c$*

(iii) per ogni coppia di elementi $a, b \in I$, esiste un terzo elemento $c \in I$ tale che $a \leq c$ e $b \leq c$

Definizione 1.2 (**sistema diretto di gruppi e omomorfismi**). *Un* ***sistema diretto di gruppi e omomorfismi*** *è una collezione di gruppi $\{G_i\}_{i \in I}$ indicizzati da un insieme diretto I e una famiglia di omomorfismi $f_{a,b} : G_a \to G_b$ con $a, b \in I$, $a \leq b$ che soddisfino:*

(i) $f_{a,a}$ è l'identità su G_a per ogni $a \in I$

(ii) $f_{a,c} = f_{b,c} \circ f_{a,b}$ per ogni $a \leq b \leq c \in I$

Definizione 1.3 (**Limite diretto**). *Introduciamo una relazione d'equivalenza $\sim$ sull'unione disgiunta $\coprod_i G_i$:*

due elementi $g_a \in G_a$, $g_b \in G_b$ sono equivalenti se esiste c con $a, b \leq c$ tale che $f_{a,c}(g_a) = f_{b,c}(g_b)$ in G_c.

*Il **limite diretto** del sistema diretto, denotato con $\varinjlim_{i \in I} G_i$, è definito come il quoziente dell'unione disgiunta $\coprod_i G_i$ per la relazione d'equivalenza $\sim$.*

In altre parole, la relazione d'equivalenza introdotta identifica elementi dell'unione disgiunta che diventano uguali da un certo indice in poi nel sistema diretto.

È possibile dare una struttura di gruppo in modo naturale al limite diretto $\varinjlim_{i \in I} G_i$ definendo $[g_a]+[g_b] = [f_{a,c}(g_a)+f_{b,c}(g_b)]$, dove c è scelto in modo che $a, b \leq c$. L'operazione $+$ è ben posta, poichè se $\tilde{g}_{\tilde{a}}$ è un altro rappresentante di g_a, allora esiste $\tilde{c}$ con $a, \tilde{a} \leq \tilde{c}$ per cui $f_{a,c}(g_a) = f_{\tilde{a},c}(\tilde{g}_{\tilde{a}})$, e analogamente per g_b. Infine, osserviamo che se tutti i gruppi G_i sono abeliani, allora anche $\varinjlim_{i \in I} G_i$ lo è.

1.2 Elementi di Algebra Omologica

Consideriamo la categoria **CAb** dei complessi di gruppi abeliani che ha come oggetti i complessi del tipo

$$G^* : \qquad \cdots \xrightarrow{d} G^{n-1} \xrightarrow{d} G^n \xrightarrow{d} G^{n+1} \xrightarrow{d} \cdots ,$$

dove i G^i sono gruppi abeliani. I morfismi d vengono detti **differenziali** del complesso. Dati due complessi G^* e H^*, un morfismo $f : G^* \to H^*$ è il dato di una successione di morfismi di gruppi $f_n : G^n \to H^n$ che commutino con i differenziali, cioè $df_n(x) = f_{n+1}d(x)$ per ogni $x \in G^n$. Un morfismo di complessi si dice iniettivo (rispettivamente, suriettivo) se $f_n : G^n \to H^n$ è iniettivo (rispettivamente, suriettivo) per ogni n.

Definizione 1.4 (**Cocicli e cobordi**). *Dato un complesso di gruppi abeliani G^*, definiamo il **gruppo degli n cocicli** come:*

$$Z^n(G^*) = \{x \in G^n \mid dx = 0\} \tag{1}$$

*e il **gruppo degli n cobordi** come:*

$$B^n(G^*) = \{dx \in G^n \mid x \in G^{n-1}\}.$$

Osserviamo che poiché $d^2 = 0$, se $x \in B^n(G^*)$, allora $x = dy$ per qualche $y \in G^{n-1}$ e quindi $dx = d^2y = 0$, ovvero $x \in Z^n(G^*)$. Questo ci dice che la seguente definizione è ben posta.

Definizione 1.5 (**Gruppi di coomologia**). *Dato un complesso di gruppi abeliani G^*, definiamo per ogni n l'n-esimo* ***gruppo di coomologia*** *come*

$$H^n(G^*) = \frac{Z^n(G^*)}{B^n(G^*)}.$$

Diciamo che una successione di complessi di gruppi abeliani è **esatta** se per ogni n le relative successioni di gruppi abeliani sono esatte. Osserviamo che un morfismo di complessi induce un morfismo nei gruppi dei cocicli e dei cobordi per ogni n che passano al quoziente e definiscono morfismi fra gruppi di coomologia. Enunciamo senza dimostrare il seguente teorema ben noto in algebra omologica, fondamentale nello studio e nel calcolo dei gruppi di coomologia.

Teorema 1.6. *Sia $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$ una successione esatta corta di complessi di gruppi abeliani. Allora è ben definita una successione di morfismi*

$$\delta_n : H^n(C^*) \to H^{n+1}(A^*)$$

che induce una successione esatta lunga di coomologia

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(A^*) \xrightarrow{f_n} H^n(B^*) \xrightarrow{g_n} H^n(C^*) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(A^*) \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

I morfismi δ_n si comportano bene rispetto ai morfismi di complessi nel senso che dato un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & B^* & \longrightarrow & C^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D^* & \longrightarrow & E^* & \longrightarrow & F^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in cui le righe sono successioni esatte corte, si ha per ogni n un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} H^n(C^*) & \xrightarrow{\delta_n} & H^{n+1}(A^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(F^*) & \xrightarrow{\delta_n} & H^{n+1}(D^*). \end{array}$$

Capitolo 2

Definizioni

Il seguente capitolo è interamente dedicato a definire gli elementi di base della teoria dei fasci e all'esposizione di qualche semplice esempio. Dopo aver introdotto il concetto di prefascio, daremo una definizione di fascio e mostreremo nella seconda sezione che se ne può dare una equivalente che fa uso del cosiddetto "spazio étale". Questa altra prospettiva nasce dal chiedersi se dato un prefascio sia possibile ottenere un fascio che in un certo senso lo rappresenti il più possibile; vedremo che lo spazio étale sopra accennato fornisce una risposta a questo quesito. Utilizzeremo infine il fascio associato ad un prefascio per dare altre definizioni come quelle di fascio quoziente e di immagine di un fascio.

2.1 Prefasci, Fasci e Omomorfismi

Definizione 2.1 (Prefascio). *Sia X uno spazio topologico. Un **prefascio** di gruppi abeliani $\mathcal{F}$ è il dato di:*

(1) Un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ per ogni aperto U di X.

(2) Un omomorfismo di gruppi

$$\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

per ogni coppia di aperti $U \subseteq V$, detta mappa di restrizione, che soddisfi:

(F0) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$

(F1) Per ogni aperto U, $\rho_U^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ *è l'identità*

(F2) Per ogni inclusione di aperti $U \subseteq V \subseteq W$, *si ha* $\rho_U^V \rho_V^W = \rho_U^W$

Ovvero, in termini funtoriali, un prefascio di gruppi abeliani su X *è un funtore controvariante dalla categoria degli aperti di* X *con le inclusioni a quella dei gruppi abeliani.*

Gli elementi del gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ sono dette **sezioni**; in particolare, quelle di $\mathcal{F}(X)$ sono dette **sezioni globali**. A volte, i gruppi $\mathcal{F}(U)$ sono indicati anche con $\Gamma(U, \mathcal{F})$. Per semplicità di notazione, se $s \in \mathcal{F}(V)$ e $U \subseteq V$, scriviamo $s|_U$ in luogo di $\rho_U^V(s)$.

In generale, si può definire un prefascio a valori in una qualsiasi categoria, come ad esempio quella degli insiemi o quella degli anelli. Per gli scopi di questa tesi, tuttavia, ci riferiremo solo a prefasci di gruppi abeliani.

Esempio 2.2 (**Prefascio delle funzioni continue**)**.** Uno dei più classici esempi di prefascio è quello delle funzioni continue di uno spazio topologico X a valori in $\mathbb{R}$, indicato con C_X. Definiamo

$$C(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}$$

per ogni U aperto di X, e i morfismi di restrizione come le usuali restrizioni di funzioni. È immediato verificare che in questo modo abbiamo effettivamente definito un prefascio.

Analogamente, si può definire il prefascio C^b delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$, quello delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ o quello delle funzioni differenziabili.

Definizione 2.3 (**germe e spiga**)**.** *Siano* $\mathcal{F}$ *un prefascio su* X *e* $x \in X$. $\{\mathcal{F}(U)\}_{x \in U}$ *dove* U *varia fra gli intorni di* x *è un sistema diretto di gruppi e omomorfismi. Definiamo la* ***spiga*** *delle sezioni di* $\mathcal{F}$ *in* x *come il limite diretto* $\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ *e chiamiamo* ***germi*** *di sezioni di* $\mathcal{F}$ *in* x *gli elementi di tale spiga.*

Osserviamo esplicitamente che ogni spiga è un gruppo abeliano, in quanto tutti i gruppi di cui si fa il limite diretto sono abeliani. Diamo ora una descrizione più esplicita dei germi e delle spighe; consideriamo la relazione di equivalenza:

$$(U, s) \sim (V, t) \Leftrightarrow \exists\, W \textit{ aperto tale che } x \in W \subseteq U \cap V \textit{ e } \rho^U_W(s) = \rho^V_W(t).$$

La spiga delle sezioni di $\mathcal{F}$ in x è quindi l'insieme:

$$\mathcal{F}_x = \frac{\{(U, s) \mid x \in U,\, s \in \mathcal{F}(U)\}}{\sim}.$$

Osservazione 2.4. Se U è un aperto, per ogni $x \in U$ si ha un omomorfismo di gruppi

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x, \qquad s \mapsto s_x \equiv (U, s) \quad (mod \sim)$$

che manda una sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ nel germe $s_x \in \mathcal{F}_x$.

Definizione 2.5 (**Fascio**). *Un prefascio $\mathcal{F}$ è detto **fascio** se soddisfa le seguenti due condizioni. Per ogni famiglia di aperti $\{U_i\}_{i\in I}$, sia $U = \bigcup_{i\in I} U_i$:*

(F3) Se s, t sono due elementi di $\mathcal{F}(U)$ tali che $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ per ogni i, allora $s = t$.

(F4) Se, per ogni i, è data una sezione $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ in modo che si abbia $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ per ogni i, $j \in I$, allora esiste un elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ con $s|_{U_i} = s_i$ per ogni i.

Un prefascio che soddisfi solo $(F3)$ è detto *monoprefascio* o anche *prefascio separato*, mentre uno che soddisfi solo $(F4)$ è detto *prefascio congiuntivo*. Si osservi che se vale la condizione $(F3)$, allora la sezione s in $(F4)$ è unica.

In parole povere, un prefascio è uno strumento utilizzato per tenere traccia di dati a livello locale dell'oggetto matematico che stiamo studiando, mentre i due assiomi nella definizione di fascio formalizzano l'idea che, a volte, partendo da questi dati è possibile ricostruire informazioni globali.

Esempio 2.6. Si verifica facilmente che il prefascio C dell'esempio 2.2 delle funzioni continue è anche un fascio.

Al contrario, il prefascio C^b delle funzioni continue e limitate non è un fascio, poichè esistono funzioni localmente limitate che però non lo sono globalmente. Consideriamo ad esempio il ricoprimento della retta reale formato dalla famiglia di aperti $\{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. In ognuno di questi insiemi, la funzione $f(x) = x$ è continua e limitata e quindi è una sezione per ciascuno di essi. Quando incolliamo tutte le sezioni, otteniamo che la proprietà $(F3)$ è rispettata perchè l'unica funzione risultante è l'identità su tutto $\mathbb{R}$, che tuttavia non è un elemento di $C^b(\mathbb{R})$ in quanto non è una funzione limitata.

Esempio 2.7 (**fascio costante**)**.** Dato uno spazio topologico X e un gruppo abeliano G, definiamo il **fascio costante su G** come il fascio denotato con $\underline{G}$ che associa ad ogni aperto $U \subseteq X$ le funzioni localmente costanti a valori in G. È immediato verificare che $\underline{G}$ è effettivamente un fascio. A volte denoteremo questo fascio con $\underline{G}_X$ per specificare su quale spazio topologico stiamo lavorando.

Potremmo chiederci perché non venga definito il fascio costante semplicemente come quello delle funzioni costanti sull'aperto considerato; il motivo è che questo prefascio non soddisfa l'assioma $(F4)$, quindi non è un fascio. Infatti, supponiamo che X abbia due aperti non vuoti disgiunti U_1 e U_2 (ad esempio $X = \mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea). Se prendiamo due funzioni costanti f_1 e f_2 rispettivamente su U_1 e U_2 che assumano valori diversi, non è possibile trovare f costante su $U_1 \cup U_2$ tale che $f|_{U_1} = f_1$ e $f|_{U_2} = f_2$.

Esempio 2.8 (**fascio grattacielo**)**.** Sia X uno spazio topologico, $x \in X$ e G un gruppo abeliano. Definiamo il **fascio grattacielo** x_*G come segue: per ogni aperto $U \subseteq X$, sia:

$$x_*G(U) = \begin{cases} G & se\ x \in U \\ 0 & se\ x \notin U. \end{cases}$$

Se $V \subseteq U$, il morfismo di restrizione è l'identità su G se $x \in V$, la mappa nulla altrimenti.

Preso un punto $y \in X$, ci chiediamo chi sia la spiga di x_*G su y. Ogni intorno di y contiene anche x se $y \in \overline{\{x\}}$, mentre in caso contrario $X \setminus \overline{\{x\}}$ è un intorno di y che non contiene x. Dunque si ha:

$$(x_*G)_y = \begin{cases} G & se\ y \in \overline{\{x\}} \\ 0 & se\ y \notin \overline{\{x\}}. \end{cases}$$

Osserviamo esplicitamente che in generale un fascio non è determinato dalle sue spighe in ogni punto poiché le mappe di restrizione potrebbero non essere compatibili, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.9. Consideriamo lo spazio topologico X con gli aperti formati da $X = \{p, q\}$, $\{p\}$ e l'insieme vuoto. Definiamo i fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Poniamo $\mathcal{F}(V) = \mathcal{G}(V) = \mathbb{Z}$ per ogni V aperto non vuoto. Prendiamo come mappa di restrizione $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(\{p\})$ l'identità, mentre $\mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}(\{p\})$ la moltiplicazione per 2. Le spighe di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono isomorfe a $\mathbb{Z}$ ma i due fasci non sono isomorfi poiché la mappa di restrizione di $\mathcal{F}$ è un isomorfismo, quella di $\mathcal{G}$ no.

Definizione 2.10 (Omomorfismo di fasci). *Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due prefasci su uno spazio topologico X. Un **omomorfismo di prefasci** h è una trasformazione naturale di funtori, cioè è una collezione di omomorfismi di gruppi $h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ che commutino con le restrizioni, ossia che rendano commutativo il seguente diagramma per ogni coppia di aperti $U \subseteq V$:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathcal{G}(V) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_U^V} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho_U^V} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U). \end{array}$$

*Analogamente, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fasci su X, un **morfismo di fasci** è un morfismo di prefasci. Un **isomorfismo di fasci** è un omomorfismo invertibile.*

Per ogni $x \in X$, un morfismo di fasci h induce canonicamente un omomorfismo di gruppi fra le spighe $h_x : \mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U) \to \varinjlim_{x \in U} \mathcal{G}(U) = \mathcal{G}_x$ definito come l'unico che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{h_x} & \mathcal{G}_x. \end{array}$$

Esplicitamente, dato $(U, s) \in \mathcal{F}_x$, si definisce $h_x(U, s) = (U, h_U(s))$.

2.2 Il Fascio Associato a un Prefascio

Associato al prefascio $\mathcal{F}$ sullo spazio topologico X esiste un altro spazio topologico $E_{\mathcal{F}}$ munito di un omeomorfismo locale $\pi : E_{\mathcal{F}} \to X$ che è detto **spazio étale** di $\mathcal{F}$.

Come insieme, tale spazio è definito come l'unione disgiunta $\coprod_{p\in X} \mathcal{F}_p$ delle spighe di $\mathcal{F}$. Si ha una naturale proiezione $\pi : E_{\mathcal{F}} \to X$ che manda $\mathcal{F}_p$ in p. Chiamiamo **sezione dello spazio étale** sull'aperto $U \subseteq X$ una mappa $s : U \to E_{\mathcal{F}}$ tale che $\pi \circ s$ sia l'identità su U. Chiariremo in seguito il motivo di chiamare *sezione* sia una tale funzione, sia un elemento $s \in \mathcal{F}(U)$. Siano ora $U \subseteq X$ un aperto, $s \in \mathcal{F}(U)$ e $p \in U$ e sia $s_p \in \mathcal{F}_p$ il germe di s in p. L'elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ definisce una sezione $\tilde{s}$ di $E_{\mathcal{F}}$ su U tramite:

$$\tilde{s} : U \to E_{\mathcal{F}}, \quad p \mapsto s_p$$

Lemma 2.11. *La famiglia $\mathcal{B} := \{\tilde{s}(U) \mid U \subseteq X$ è aperto, $s \in \mathcal{F}(U)\}$ è base di una topologia su $E_{\mathcal{F}}$.*

Dimostrazione. Al variare degli intorni aperti U di p considerati e presi gli elementi $s \in \mathcal{F}(U)$ si ottengono tutti i germi di s in p e dunque tutte le spighe, ovvero $\coprod_{p\in X} \mathcal{F}_p = \bigcup_{\tilde{s}(U)\in\mathcal{B}} \tilde{s}(U)$. Inoltre, presi due aperti $U, V \subseteq X$ e i corrispettivi $A = \{\tilde{s}(U) \mid s \in \mathcal{F}(U)\}$, $B = \{\tilde{s}(V) \mid s \in \mathcal{F}(V)\}$ e $s_p \in A \cap B$, allora se consideriamo $C = \{\tilde{s}(U \cap V) \mid s \in \mathcal{F}(U \cap V)\} \in \mathcal{B}$ chiaramente vale che $s_p \in C \subseteq A \cap B$. □

Prendiamo su $E_{\mathcal{F}}$ la topologia generata dalla famiglia descritta nel lemma. Per costruzione, $E_{\mathcal{F}}$ è localmente omeomorfo a X tramite π. Una sezione t di $E_{\mathcal{F}}$ è continua se e solo se ogni punto $p \in X$ ha un intorno U tale che $t(U) = \tilde{s}(U)$ per qualche $s \in \mathcal{F}(U)$. Notiamo che per ogni $s \in \mathcal{F}(U)$, la sezione $\tilde{s}$ è continua.

Definiamo il prefascio $\mathcal{F}^+$: per ogni aperto $U \subseteq X$,

$$\mathcal{F}^+(U) = \{t : U \to E_{\mathcal{F}} \mid t \text{ è una sezione continua}\}$$

con gli usuali morfismi di restrizione di funzioni. Si verifica facilmente che $\mathcal{F}^+$ verifica le proprietà $(F3)$ e $(F4)$ e quindi è anche un fascio, detto **fascio associato al prefascio** $\mathcal{F}$ o anche **fascio dei germi di** $\mathcal{F}$.

Per ogni aperto $U \subseteq X$, esiste un omorfismo di gruppi canonico

$$\theta_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U), \quad s \mapsto \tilde{s}$$

che commuta con le restrizioni, ovvero si ha un morfismo di prefasci $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$.

Proposizione 2.12. *L' applicazione θ è un isomorfimo se e solo se $\mathcal{F}$ è un fascio.*

Dimostrazione. Per mostrare che θ è un isomorfismo, è sufficiente mostrare che θ_U è un isomorfismo per ogni aperto U, perchè una volta fatto ciò possiamo definire l'inverso di θ come $\theta_U^{-1}(U) = \theta_U(U)^{-1}$.

L'omomorfismo θ_U è iniettivo se e solo se verifica l'assioma $(F3)$ dei fasci. Infatti, siano s, $t \in \mathcal{F}(U)$ che definiscano la stessa sezione su U, ovvero tali che $\theta_U(s) = \tilde{s} = \tilde{t} = \theta_U(t)$. Poichè $\tilde{s}(x) = \tilde{t}(x)$, esiste un intorno di x in cui le restrizione di s e t sono uguali (basta guardare come sono definiti $\tilde{s}$ e $\tilde{t}$). Al variare di $x \in U$, otteniamo un ricoprimento U_x di U per cui $s|_{U_x} = t|_{U_x}$ per ogni x. Da qui è immediato che si ha $s = t$ se e soltanto se vale $(F3)$.

Se $(F3)$ vale, l'omomorfismo è suriettivo se e solo se $(F4)$ vale. Infatti, sia $t \in \mathcal{F}^+(U)$. Per ogni $x \in U$, esiste un intorno U_x di x e un elemento $s \in \mathcal{F}(U_x)$ con $\theta_{U_x}(s)(x) = t(x)$. Poichè π è un omeomorfismo locale, θ_{U_x} e t coincidono in un intorno V_x di x. Scrivendo U come unione di tali intorni, $U = \bigcup_i V_i$, possiamo trovare elementi $s_i \in V_i$ tali che $\theta_{V_i}(s_i) = t$ su ogni V_i. Poichè $\theta_{V_i \cap V_j}(s_i) = \theta_{V_i \cap V_j}(s_j) = t$ e dato che $\theta_{V_i \cap V_j}$ è iniettivo poichè vale $(F3)$, si ha $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$. Vale la proprietà $(F4)$ se e solo se esiste $s \in U$ tale che $s|_{V_i} = s_i$ per ogni i, il che equivale a richiedere $\theta_U(s) = t$, ovvero che θ_U sia suriettivo. □

Diciamo che due spazi étale $(E, \pi), (E', \pi')$ sono isomorfi se esiste un omeomorfismo che mandi E in E' e che trasformi π in π'. Dalle considerazioni fatte segue il seguente:

Teorema 2.13. *Ogni fascio su uno spazio topologico X è isomorfo a un fascio di sezioni su uno spazio étale su X, unico a meno di isomorfismi.*

D'ora in poi, grazie a questo teorema, possiamo non fare alcuna distinzione tra un fascio che soddisfi le proprietà $(F3)$ e $(F4)$ e il fascio di sezioni su uno spazio étale associato. A seconda del contesto, può essere utile utilizzare una o l'altra prospettiva. Denoteremo indistintamente con $\mathcal{F}$ sia un fascio di gruppi abeliani che lo spazio étale associato, omettendo l'omeomorfismo locale π. In particolare, segue che le sezioni viste come elementi di un fascio sono in biezione con le sezioni viste come funzioni, da cui il motivo per il quale vengono chiamate allo stesso modo.

Esempio 2.14. Ripercorrendo la costruzione appena vista, si vede che il fascio associato al prefascio delle funzioni continue e limitate è il fascio delle funzioni continue (esempio 2.2) e che quello associato al prefascio delle funzioni costanti a valori in un gruppo abeliano è quello delle funzioni localmente costanti (esempio 2.7).

Osservazione 2.15. In generale, la topologia sullo spazio étale E associato a uno spazio topologico X non è di Hausdorff, anche se X lo è. Infatti, se s, t sono due sezioni su un aperto $U \subseteq X$, allora $W = \{x \in U \mid s(x) = t(x)\}$ è aperto in U. Se E è di Hausdorff, tale insieme è anche chiuso in U poichè se $x \in W^c$, esistono intorni S, $T \subseteq E$ con $s(x) \in S$, $t(x) \in T$ tali che $S \cap T = \emptyset$. Ricordando che π è un omeomorfismo locale e eventualmente restringendo S e T, si ottengono intorni di x contenuti in W^c. Otteniamo quindi che se due sezioni su U coincidono in un punto x, allora coincidono in tutta la componente connessa di U contente x, ovvero E soddisfa un principio simile a quello del prolungamento analitico, il che non è sempre vero.

Esempio 2.16. Lo spazio étale dei germi delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dell'esempio 2.2 non è di Hausdorff. La funzione $f(x) = 0$ per $x < 0$ e $f(x) = 0$ per $x \geq 0$ ha un germe f_0 nel punto $0 \in \mathbb{R}$ distinto dal germe 0_0 della funzione nulla. Ogni loro intorno aperto contiene i germi $f_y = 0_y$ per $\epsilon < y < 0$ con ϵ sufficientemente piccolo, quindi f_0 e 0_0 non possono essere separati. Osserviamo che questo fascio non soddisfa il principio del prolungamento analitico.

Osservazione 2.17. In generale, se lo spazio di base X è di Hausdorff, germi su spighe diverse possono sempre essere separati da intorni disgiunti. Infatti, siano p, $q \in X$, $\mathcal{F}$ un prefascio su X e $(E_{\mathcal{F}}, \pi)$ lo spazio étale associato. Le spighe su p e q sono rispettivamente $\pi^{-1}(p)$ e $\pi^{-1}(q)$ ed esistono due intorni $U \ni p$, $V \ni q$ disgiunti. Qualsiasi siano g_p, g_q germi sulle due spighe, abbiamo $\emptyset = \pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$, dunque $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(V)$ sono intorni disgiunti che separano g_p e g_q.

Esempio 2.18. Lo spazio étale associato al fascio delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ è di Hausdorff. Per l'osservazione di prima, possiamo limitarci a guardare germi sulla stessa spiga. Siano quindi $g_1 \neq g_2$ due germi sul punto p e siano s_1, s_2 le relative sezioni rispettivamente su U_1, U_2. Siano infine $U \subseteq U_1 \cap U_2$ un intorno aperto di p connesso, $t_1 = s_1|_U$ e $t_2 = s_2|_U$. Allora gli insiemi $V_1 := \{t_1(x) \mid x \in U\}$ e $V_2 := \{t_2(x) \mid x \in U\}$

sono intorni disgiunti che separano g_1 e g_2. Se infatti ci fosse un germe c_y su y in $V_1 \cap V_2$, allora esisterebbe un intorno $W \subseteq U$ di y tale che $t_1|_W = t_2|_W$ (per definizione di germe). Dal principio del prolungamento analitico, segue $t_1 \equiv t_2$ e quindi $g_1 = t_1(p) = t_2(p) = g_2$, il che è assurdo.

Chiaramente questo ragionamento si può applicare ogni volta che sullo spazio base si ha un teorema di identità analogo a quello per le funzioni olomorfe.

2.3 Sottofasci e Fasci Quozienti

Definizione 2.19 (**sottofascio e fascio quoziente**). *Siano $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ due fasci sullo spazio X. $\mathcal{G}$ è detto* ***sottofascio*** *di $\mathcal{F}$ se per ogni aperto $U \subseteq X$, $\mathcal{G}(U)$ è un sottogruppo di $\mathcal{F}(U)$ e se la mappa di inclusione $i : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ è un morfismo di fasci. Se invece $\mathcal{G}$ è solo un prefascio che rispetta le condizioni sopra, diciamo semplicemente che è un sottoprefascio. Se $\mathcal{G}$ un sottofascio di $\mathcal{F}$, il* ***fascio quoziente*** *$\mathcal{F}/\mathcal{G}$ è definito come il fascio associato al prefascio $U \mapsto \mathcal{F}(U)/G(U)$.*

Come visto nell'esempio 2.9, un fascio non è in generale determinato dalle sue spighe per via del fatto che i morfismi di restrizione potrebbero non essere compatibili. Se ci si trova però nella situazione in cui si hanno due sottofasci di un fascio, per definizione le mappe sono compatibili e quindi ci si può limitare a controllare le spighe su ogni punto per mostrare che tali sottofasci sono isomorfi.

Lemma 2.20. *Siano $\mathcal{F}$ un fascio su X e $\mathcal{G}$ un sottoprefascio di $\mathcal{F}$. Allora $\mathcal{G}$ è un fascio se e solo se per ogni famiglia di aperti $\{U_i\}_{i\in I}$ e per ogni sezione $s \in \mathcal{F}(\bigcup_i U_i)$, vale $s|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i)$ per ogni i se e solo se $s \in \mathcal{G}(\bigcup_i U_i)$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Sia $s \in \mathcal{F}(\bigcup_i U_i)$ con $s|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i)$ per ogni i. Dato che $(s|_{U_i})|_{U_j} = s|_{U_i\cap U_j} = s|_{U_j\cap U_i} = (s|_{U_j})|_{U_i}$, per la proprietà $(F4)$ esiste $\tilde{s} \in \mathcal{G}(\bigcup_i U_i)$ tale che $\tilde{s}|_{U_i} = s|_{U_i}$. Per la proprietà $(F3)$, abbiamo $\tilde{s} = s$. Viceversa, se $s \in \mathcal{G}(\bigcup_i U_i)$, applicando il morfismo di restrizione abbiamo $s|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i)$ per ogni i.

$\Leftarrow$) Verifichiamo $(F3)$. Siano s, $t \in \mathcal{G}(\bigcup_i U_i)$ tali che $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ per ogni $i \in I$. Visti come elementi di $\mathcal{F}(\bigcup_i U_i)$, si ha $s = t$. Dimostriamo che vale $(F4)$. Per ogni $i \in I$, sia $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ tale che $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ per ogni i, j. Visti ancora come sezioni di

$\mathcal{F}$, otteniamo che esiste $s \in \mathcal{F}(\bigcup_i U_i)$ tale che $s|_{U_i} = s_i$ per ogni i e dunque per ipotesi abbiamo $s \in \mathcal{G}(\bigcup_i U_i)$. □

Siano $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ due fasci sullo spazio X. Se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci, si verifica facilmente che il *prefascio nucleo*

$$U \mapsto ker(\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

è anche un fascio ed è detto **nucleo di** φ. Infatti $ker(\varphi)$ è un sottoprefascio ed è immediato verificare che vale la proprietà richiesta dal lemma 2.20. Il *prefascio immagine*

$$U \mapsto Im(\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

non è invece un fascio in generale, quindi definiamo l'**immagine di** φ come il fascio associato al prefascio immagine. Come mostreremo più nel dettaglio a breve, $Im\varphi$ può essere naturalmente pensato come un sottofascio di $\mathcal{G}$. Un morfismo di fasci è detto iniettivo se il suo nucleo è banale, è detto suriettivo se la sua immagine è l'intero fascio $\mathcal{G}$.

Proposizione 2.21. *Sia $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci sullo spazio X. Per ogni $p \in X$, si ha $(ker f)_p = ker(f_p)$ e $(Im f)_p = Im(f_p)$. In particolare, un morfismo di fasci è iniettivo (rispettivamente, suriettivo) se e solo se le mappe indotte f_p sulle spighe sono iniettive (rispettivamente, suriettive) per ogni $p \in X$.*

Dimostrazione. Per definizione, $(ker f)_p = \varinjlim_{U \ni p}(ker f(U)) = \varinjlim_{U \ni p}(ker f)_U$ è un sottogruppo di $\mathcal{F}_p$, come anche $ker(f_p)$, quindi possiamo limitarci a controllare l'uguaglianza dentro $\mathcal{F}_p$. Sia $x \in (ker f)_p$ e sia (U, y) un suo rappresentante con $y \in (ker f)_U$. Allora, per definizione di morfismo indotto sulle spighe, l'immagine di y in $\mathcal{F}_p$ (ovvero x) è mappato a 0 da f_p, dunque $x \in ker(f_p)$. Viceversa, se $x \in ker(f_p)$ e (U, y) con $y \in \mathcal{F}(U)$ è un suo rappresentante, allora $f_U(y) = 0$ e quindi $x \in (ker f)_p$. Per $Im f$ si procede in maniera del tutto analoga tenendo conto del fatto che $(Im f)_p = \varinjlim_{U \ni p}(Im f(U))$ poiché il prefascio immagine e l'immagine di f hanno le stesse spighe in ogni punto.

Per la seconda parte della proposizione, poiché $ker f$ e il fascio nullo sono sottofasci di $\mathcal{F}$, si ha che f è iniettiva se e solo se $(ker f)_p = 0$ per ogni $p \in X$. Per quanto appena mostrato, ciò vale se e solo se anche $ker(f_p) = 0$, ovvero se e solo se f_p è iniettivo per ogni $p \in X$. Per quanto riguarda la suriettività si ragiona allo stesso modo considerando che esiste un'applicazione iniettiva $Imf \to \mathcal{G}$, e quindi Imf può essere pensato come un sottofascio di $\mathcal{G}$. Infatti, l'inclusione $Imf(U) \hookrightarrow \mathcal{G}(U)$ è chiaramente iniettiva per ogni U e quindi f_p è iniettiva per ogni $p \in X$. Dato che le spighe di un prefascio e quelle del fascio associato coincidono, così come la mappa canonica f_p^+ coincide con f_p, otteniamo che $f^+ : Imf \to \mathcal{G}$ è iniettiva per il punto precedente. $\square$

Capitolo 3

Coomologia dei Fasci

Esistono sostanzialmente due approcci per l'introduzione di una teoria della coomologia per i fasci: quella utilizzata da Grothendieck che fa uso del linguaggio dell'algebra omologica (di cui un'esposizione si può trovare ad esempio in [3]) e quella introdotta da Godement in [1] trattata in questo elaborato.

L'idea è quella di trovare una risoluzione di un fascio che sia canonica e che porti quindi a una buona definizione dei gruppi di coomologia. Ci occuperemo di spiegare che cosa si intenda con risoluzione di un fascio e di descrivere la costruzione esposta da Godement. Alla fine del capitolo enunceremo e dimostreremo un teorema molto utile che permette maggiore flessibilità nella scelta della risoluzione per il calcolo della coomologia a valori in un fascio, a volte noto in letteratura con il nome di "teorema di De Rham - Weil".

3.1 Successioni Esatte di Fasci

Le definizioni di complesso e di successione esatta si estendono in modo ovvio ai fasci. Diciamo che una successione di morfismi di fasci sullo spazio X

$$\dots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \dots$$

è un **complesso** se $d_n \circ d_{n-1} = 0$ per ogni n. Diciamo che una successione di fasci come sopra è **esatta** in $\mathcal{F}_n$ se e solo se $Im(d_{n-1}) = ker(d_n)$; diciamo che è esatta se è esatta in ogni $\mathcal{F}_n$. Per controllare se una successione è esatta è sufficiente guardare le spighe su p per ogni $p \in X$. Infatti $Im(d_{n-1}) = ker(d_n)$ se e solo se

$$Im((d_{n-1})_p) = (Im(d_{n-1}))_p = (ker(d_n))_p = ker((d_n)_p)$$

per ogni $p \in X$, dove si è usata la proposizione 2.21. Chiamiamo **successione esatta corta** una successione esatta del tipo

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0.$$

Un funtore F dalla categoria dei fasci a quella dei gruppi abeliani è detto **esatto a destra** se data una successione esatta corta di fasci, la successione

$$F(\mathcal{F}) \to F(\mathcal{G}) \to F(\mathcal{H}) \to 0$$

è esatta. Diciamo che F è **esatto a sinistra** se

$$0 \to F(\mathcal{F}) \to F(\mathcal{G}) \to F(\mathcal{H})$$

è esatta. Infine, F è **esatto** se è esatto sia a destra che a sinistra. Fissato un aperto $U \subseteq X$ consideriamo il funtore $\Gamma(U, \cdot)$ seguente: per ogni fascio $\mathcal{F}$ su X, $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$, mentre per ogni morfismo di fasci $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ definiamo $\Gamma(U, \phi) := \phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$.

Teorema 3.1. *Il funtore $\Gamma(U, \cdot)$ è esatto a sinistra.*

Dimostrazione. Bisogna mostrare che per ogni successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

la corrispettiva successione

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\phi_U} \Gamma(U, \mathcal{G}) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U, \mathcal{H})$$

è esatta.

Proviamo l'iniettività di ϕ_U. Sia $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ che appartenga al nucleo di ϕ_U. Per definizione di morfismo indotto sulle spighe, abbiamo che $\phi_x(s_x) = 0$ per ogni $x \in X$. Dunque esiste un intorno V_x di x per cui $\phi(s)|_{V_x} = 0$. Per l'esattezza sulle spighe, eventualmente restringendo l'intorno considerato, segue che $s|_{V_x} = 0$. Al variare di $x \in U$, gli intorni V_x ricoprono U e per le proprietà di fascio di $\mathcal{F}$ si ottiene $s = 0$.

Mostriamo ora che $Im\,\phi_U = ker\,\psi_U$. Sia $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$. Per ogni $x \in U$, vale $(\psi_U(\phi_U(s)))_x = \psi_x(\phi_x(s_x))$; per esattezza sulle spighe $\psi_x(\phi_x(s_x)) = 0$ e quindi, ancora per le proprietà di fascio, si ha $Im\,\phi_U \subseteq ker\,\psi_U$. Sia ora $t \in ker\,\psi_U$. Per ogni $x \in U$ abbiamo $\psi_x(t_x) = (\psi(t))_x = 0$, quindi il germe t_x è un elemento di $ker\,\psi_x = Im\,\phi_x$, per esattezza sulle spighe. Per ogni $x \in U$, esiste $s'_x \in \mathcal{F}_x$ della forma $(V_x, s'_{(x)})$ con $V_x \subseteq U$ intorno di x e $s'_{(x)} \in \Gamma(V_x, \mathcal{F})$, tale che $\phi_x(s'_x) = t_x$. Per ogni x, $y \in U$ si ha

$$\phi_{V_x \cap V_y}(s'_{(x)}|_{V_x \cap V_y}) = t|_{V_x \cap V_y} = \phi_{V_x \cap V_y}(s'_{(y)}|_{V_x \cap V_y})$$

e quindi, per l'iniettività di ϕ già provata,

$$s'_{(x)}|_{V_x \cap V_y} = s'_{(y)}|_{V_x \cap V_y}.$$

Per le proprietà di fascio abbiamo che esiste $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ tale che $s|_{V_x} = s'_{(x)}$. Dato che per ogni $x \in U$ abbiamo $s_x = s'_x$, otteniamo

$$(\phi_U(s))_x = \phi_x(s_x) = \phi_x(s'_x)_= t_x$$

da cui segue $\phi_U(s) = t$ e quindi $ker\,\psi_U \subseteq Im\,\phi_U$. □

Osserviamo che, in generale, il funtore $\Gamma(U, \cdot)$ non è esatto, come mostra il seguente esempio.

Esempio 3.2. Sia $\mathcal{O}$ il fascio delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ e $\mathcal{O}^*$ quello delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ che non si annullano. Consideriamo il morfismo di fasci $exp\,2\pi i$: per ogni $U \subseteq \mathbb{C}$, se $f \in \mathcal{O}$, $exp\,2\pi i(f) \in \mathcal{O}^*$. Il nucleo di questa mappa è costituito dalle funzioni olomorfe a valori interi, che sono quindi localmente costanti e dunque $ker(exp\,2\pi i) = \underline{\mathbb{Z}}$. Si ha la successione esatta

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0,$$

dove $exp\,2\pi i : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ è suriettiva perché per ogni $x \in \mathbb{C}$, gli intorni semplicemente connessi formano una base di $\mathbb{C}$ e quindi se U è semplicemente connesso e $f \in \mathcal{O}^*$, allora $f(U)$ è ancora semplicemente connesso, non contiene lo 0 e perciò $log\,f$ è definito su U. Tuttavia, se U è ad esempio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, la mappa $exp\,2\pi i : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}^*(U)$ non è suriettiva in quanto non è possibile trovare una determinazione del logaritmo su tale insieme.

3.2 Fasci Fiacchi e Risoluzioni

Definizione 3.3 (Fascio fiacco). *Un fascio $\mathcal{F}$ sullo spazio topologico X si dice **fiacco** se il morfismo di restrizione $\rho_U^X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ è suriettivo per ogni aperto $U \subseteq X$.*

Esempio 3.4. La funzione $tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ è continua ma non è definita nei punti agli estremi, quindi non è possibile estenderla a una funzione continua da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Questo mostra che il fascio C delle funzioni continue non è fiacco, in quanto la restrizione $C(\mathbb{R}) \to C((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ non è suriettiva.

Definizione 3.5 (Risoluzione di un fascio). *Dato un fascio $\mathcal{F}$ su X, chiamiamo **risoluzione di** $\mathcal{F}$ una qualsiasi successione esatta di fasci del tipo*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3 \to \cdots$$

*diciamo che la risoluzione è **fiacca** se ogni $\mathcal{E}_i$ è fiacco.*

Proposizione 3.6. *Sia*

$$0 \to \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{d_3} \mathcal{F}_4 \to \cdots$$

una successione esatta di fasci fiacchi su X. Allora per ogni aperto $U \subseteq X$ la successione

$$0 \to \mathcal{F}_0(U) \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1(U) \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2(U) \xrightarrow{d_2} \mathcal{F}_3(U) \xrightarrow{d_3} \mathcal{F}_4(U) \to \cdots$$

è esatta.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su n la seguente proposizione:

Per ogni $U \subseteq X$ e per ogni $s \in \mathcal{F}_n(U)$ che sia in $ker(d_n)$, esiste $t \in \mathcal{F}_{n-1}(U)$ tale che $d_{n-1}(t) = s$.

Per l'esattezza a sinistra del funtore $\Gamma(U, \mathcal{F})$ la proposizione è vera per $n = 0$.

Supponiamo quindi $n > 0$ e assumiamo l'ipotesi induttiva per $n - 1$. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{A} = \{(V, r) \mid V \subseteq U,\, r \in \mathcal{F}_n(V),\, d_n(r) = s|_V\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{A}$ è non vuoto poiché contiene l'elemento $(\emptyset, 0)$. Ordinando $\mathcal{A}$ è possibile applicare il lemma di Zorn e ottenere che esiste un elemento massimale (W, h') di $\mathcal{A}$. Se mostriamo che $W = U$ la dimostrazione è terminata, in quanto è sufficiente prendere $t = h'$.

Sia per assurdo $x \in U \setminus W$. Siccome $d_{n+1}(s_x) = 0$ per esattezza sulle spighe, esiste un germe $r_x \in (\mathcal{F}_n)_x$ tale che $d_n(r_x) = s_x$. Allora esiste un intorno aperto $V \ni x$ ed una sezione $r' \in \mathcal{F}_n(V)$ tale che $d_n(r') = s|_V$. Sia $k = h'|_{W\cap V} - r'|_{W\cap V} \in \mathcal{F}(W \cap V)$. Siccome $d_n(k) = 0$, per l'ipotesi induttiva esiste $z' \in \mathcal{F}_{n-1}(W \cap V)$ tale che $d_{n-1}(z') = k$. Sia $z \in \mathcal{F}_{n-1}(V)$ una sezione che ristretta a $W \cap V$ coincida con z'; sostituendo r' con $r := r' + d_{n-1}(z)$, si ha che r e h' coincidono su $W \cap V$ e quindi per la proprietà $(F4)$ dei fasci esiste un elemento $h \in \mathcal{F}(W \cup U)$ tale che $h|_W = h'$ e $h|_V = r$, il che contraddice la massimalità. □

3.3 Risoluzione Canonica di Godement

Sia $\mathcal{F}$ un fascio sullo spazio topologico X e sia $(E_{\mathcal{F}}, \pi)$ lo spazio étale associato. Avevamo visto che per ogni aperto $U \subseteq X$,

$$\mathcal{F}^+(U) = \mathcal{F}(U) = \{t : U \to E_{\mathcal{F}} \mid t \text{ è una sezione continua}\}.$$

Definiamo:

$$\mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) = \{t : U \to E_{\mathcal{F}} \mid t \text{ è una sezione}\}.$$

Un elemento di $\mathcal{C}^0\mathcal{F}(U)$ è una qualsiasi funzione (non necessariamente continua) $s : U \to E_{\mathcal{F}}$ che soddisfi $\pi(s(x)) = x$ per ogni $x \in U$; in altre parole $\mathcal{C}^0\mathcal{F}(U)$ è il prodotto diretto $\prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$. Come morfismi di restrizione prendiamo gli usuali morfismi di restrizione di funzioni. È immediato mostrare che in questo modo abbiamo definito un fascio. Esiste un'iniezione canonica

$$i : \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}$$

che è un morfismo di fasci, ovvero $\mathcal{F}$ è un sottofascio di $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$. Sia $\mathcal{Q}^1$ il fascio quoziente di $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ per $\mathcal{F}$. Si ha una successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{F} \to \mathcal{Q}^1 \to 0.$$

Ripetiamo la costruzione per $\mathcal{Q}^1$ e denotiamo con $\mathcal{C}^1\mathcal{F} = \mathcal{C}^0\mathcal{Q}^1$. Sia $\mathcal{Q}^2$ il fascio quoziente di $\mathcal{C}^0\mathcal{Q}^1$ per $\mathcal{Q}^1$. Otteniamo un'ulteriore successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{Q}^1 \to \mathcal{C}^0\mathcal{Q}^1 = \mathcal{C}^1\mathcal{F} \to \mathcal{Q}^2 \to 0.$$

Iterando il procedimento otteniamo $\mathcal{C}^n\mathcal{F}$ per ogni $n \geq 0$.

Inoltre, si hanno dei morfismi di fasci

$$d : \mathcal{C}^n\mathcal{F} \to \mathcal{C}^{n+1}\mathcal{F}$$

ottenuti componendo la mappa suriettiva

$$\mathcal{C}^n\mathcal{F} \to \mathcal{Q}^{n+1} = \frac{\mathcal{C}^n\mathcal{F}}{\mathcal{Q}^n}$$

con la mappa iniettiva

$$\mathcal{Q}^{n+1} \to \mathcal{C}^{n+1}\mathcal{F} = \mathcal{C}^0\mathcal{Q}^{n+1}.$$

In questo modo abbiamo ottenuto una risoluzione di $\mathcal{F}$ del tipo

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^2\mathcal{F} \xrightarrow{d} \cdots$$

chiamata **risoluzione canonica di Godement**: è infatti immediato verificare che la successione sopra è esatta per costruzione.

Osserviamo che la mappa $\rho^X_U : \mathcal{C}^0\mathcal{F}(X) \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}(U)$ è suriettiva e quindi $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ è fiacco. Inoltre, $\mathcal{C}^n\mathcal{F} = \mathcal{C}^0\mathcal{Q}^{n-1}$ per qualche fascio $\mathcal{Q}^{n-1}$, quindi $\mathcal{C}^n\mathcal{F}$ è fiacco per ogni n.

Osservazione 3.7. Per ogni $n \geq 0$, possiamo vedere $\mathcal{C}^n$ come un funtore covariante dalla categoria dei fasci in sé stessa. Infatti, per ogni fascio $\mathcal{F}$, tramite $\mathcal{C}^n$ otteniamo un altro fascio. Inoltre, per ogni morfismo di fasci $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ esiste un morfismo indotto $\mathcal{C}^n f : \mathcal{C}^n\mathcal{F} \to \mathcal{C}^n\mathcal{G}$ che rispetta le proprietà funtoriali: preserva l'identità e la composizione. Un morfismo come sopra induce infatti morfismi fra le spighe e quindi morfismi di fasci

$$\mathcal{C}^0 f : \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x = \mathcal{C}^0\mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{G} = \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x,$$

i quali inducono, per passaggio al quoziente

$$\mathcal{Q}^1_{\mathcal{F}} = \mathcal{C}^0\mathcal{F}/\mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{G}/\mathcal{G} = \mathcal{Q}^1_{\mathcal{G}}$$

che a loro volta danno morfismi di fasci

$$\mathcal{C}^1 f : \mathcal{C}^1\mathcal{F} = \mathcal{C}^0\mathcal{Q}^1_{\mathcal{F}} \to \mathcal{C}^0\mathcal{Q}^1_{\mathcal{G}} = \mathcal{C}^1\mathcal{G}.$$

Per induzione otteniamo i morfismi $\mathcal{C}^n f$ per ogni $n \geq 0$.

Osservazione 3.8. Su X è uno spazio discreto, per ogni fascio $\mathcal{F}$ su X si ha $\mathcal{C}^0\mathcal{F} = \mathcal{F}$. Infatti per ogni $x \in X$ vale $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}(x)$. Considerando il ricoprimento fatto da tutti i punti di X è possibile ottenere un qualsiasi elemento di $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ per la proprietà $(F4)$.

In particolare, segue che $\mathcal{F}$ è fiacco.

Teorema 3.9. *Il funtore $\mathcal{C}^n$ è esatto per ogni $n \geq 0$.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che data una successione esatta corta di fasci sullo spazio topologico X

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0,$$

la successione

$$0 \to \mathcal{C}^n F \to \mathcal{C}^n G \to \mathcal{C}^n H \to 0$$

è ancora esatta. Per esattezza sulle spighe risulta essere esatta la successione

$$0 \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \to \prod_{x \in U} \mathcal{G}_x \to \prod_{x \in U} \mathcal{H}_x \to 0$$

per ogni $U \subseteq X$ e di conseguenza anche

$$0 \to \mathcal{C}^0\mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{G} \to \mathcal{C}^0\mathcal{H} \to 0$$

è esatta. Siano $\mathcal{Q}^1_{\mathcal{F}}$ il quoziente di $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ per $\mathcal{F}$ e analogamente consideriamo $\mathcal{Q}^1_{\mathcal{G}}$ e $\mathcal{Q}^1_{\mathcal{H}}$. Abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathcal{Q}^1_{\mathcal{F}} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \mathcal{C}^0\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \mathcal{Q}^1_{\mathcal{G}} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}^0\mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Q}^1_{\mathcal{H}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

in cui le tre righe e le prime due colonne sono esatte. Affermiamo che anche la terza colonna è esatta [1], con le mappe ϕ e ψ indotte da quelle della seconda colonna. Poiché $\psi \circ \phi = 0$ nella seconda colonna, ciò vale anche nella terza che quindi è un complesso. Vedendo le tre colonne come complessi, il diagramma rappresenta una successione esatta corta di complessi poiché le righe sono esatte. Passando alle spighe otteniamo successioni esatte corte di complessi di gruppi abeliani i quali, dal teorema 1.6, inducono successioni esatte lunghe fra gruppi di coomologia in cui due termini su tre sono nulli dato che le prime due colonne sono esatte, quindi anche i restanti gruppi di coomologia sono zero e la terza colonna è esatta. Prendendo $\mathcal{C}^o(\ )$ dell'ultima colonna e ragionando come prima si ottiene l'esattezza di C^1. Per induzione abbiamo che C^n è esatto per ogni $n \geq 0$. □

3.4 Coomologia dei Fasci

Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani sullo spazio topologico X. Definiamo i **gruppi di coomologia** $H^*(X, \mathcal{F})$ nel modo seguente:

(i) Prendiamo la risoluzione canonica di Godement di $\mathcal{F}$:

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^2\mathcal{F} \xrightarrow{d} \cdots .$$

[1] Questo è un fatto generale che vale nella categoria dei gruppi e in una qualsiasi categoria abeliana conosciuto come *lemma dei nove* o anche *lemma* 3×3.

(ii) Applichiamo il funtore $\Gamma(X, \cdot)$ delle sezioni globali omettendo il termine iniziale $\mathcal{F}$:

$$0 \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1\mathcal{F}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^2\mathcal{F}(X) \xrightarrow{d} \cdots .$$

(iii) Prendiamo la coomologia del complesso $\mathcal{C}^*\mathcal{F}(X)$ di gruppi abeliani risultante:

$$H^k(X, \mathcal{F}) = \frac{ker(d : \mathcal{C}^k\mathcal{F}(X) \to \mathcal{C}^{k+1}\mathcal{F}(X))}{Im(d : \mathcal{C}^{k-1}\mathcal{F}(X) \to \mathcal{C}^k\mathcal{F}(X))}.$$

Proposizione 3.10. *Per ogni fascio $\mathcal{F}$ sullo spazio X si ha*

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X).$$

Dimostrazione. Dal teorema 3.1, sappiamo che il funtore delle sezioni globali è esatto a sinistra e quindi l'esattezza di

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1\mathcal{F}$$

implica l'esattezza di

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1\mathcal{F}(X).$$

Segue quindi

$$H^0(X, \mathcal{F}) = ker\, d = \mathcal{F}(X).$$

□

Definizione 3.11 (Fascio Aciclico). *Sia $\mathcal{F}$ un fascio su X. $\mathcal{F}$ si dice* ***aciclico*** *se $H^k(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $k \geq 1$.*

Proposizione 3.12. *Ogni fascio fiacco è anche aciclico. In particolare, dato un qualsiasi fascio $\mathcal{F}$ su X, $\mathcal{C}^n\mathcal{F}$ è aciclico per ogni $n \geq 0$.*

Dimostrazione. La successione

$$0 \to \mathcal{C}^0\mathcal{F} \to \mathcal{C}^1\mathcal{F} \to \mathcal{C}^2\mathcal{F} \to \cdots$$

è una successione di fasci fiacchi e quindi, dal teorema 3.6 segue che

$$0 \to \mathcal{C}^0\mathcal{F}(X) \to \mathcal{C}^1\mathcal{F}(X) \to \mathcal{C}^2\mathcal{F}(X) \to \cdots$$

è esatta, da cui la tesi. □

Corollario 3.13. *Ogni successione esatta di fasci*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

sullo spazio X induce una successione esatta corta di complessi gruppi abeliani

$$0 \to \mathcal{C}^*\mathcal{F}(X) \to \mathcal{C}^*\mathcal{G}(X) \to \mathcal{C}^*\mathcal{H}(X) \to 0$$

e quindi una successione esatta lunga di gruppi di coomologia

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H^n(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{f_n} H^n(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{g_n} H^n(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta_n} H^{n+1}(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots .$$

Dimostrazione. Per esattezza del funtore C^n per ogni $n \geq 0$, la successione di fasci fiacchi

$$0 \to \mathcal{C}^n\mathcal{F} \to \mathcal{C}^n\mathcal{G} \to \mathcal{C}^n\mathcal{H} \to 0$$

è esatta e quindi, per il teorema 3.6, anche

$$0 \to \mathcal{C}^n\mathcal{F}(X) \to \mathcal{C}^n\mathcal{G}(X) \to \mathcal{C}^n\mathcal{H}(X) \to 0$$

è esatta per ogni $n \geq 0$, da cui la tesi. □

Teorema 3.14. *Data una qualsiasi risoluzione*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_3 \xrightarrow{d} \cdots ,$$

esiste per ogni $n \geq 0$ un omomorfismo naturale di gruppi

$$\alpha_n : H^n(\mathcal{E}_*(X)) = \frac{ker(d : \mathcal{E}_n(X) \to \mathcal{E}_{n+1}(X))}{Im(d : \mathcal{E}_{n-1}(X) \to \mathcal{E}_n(X))} \to H^n(X,\mathcal{F}).$$

Inoltre:

(i) Se $H^{n-i-1}(X,\mathcal{E}_i) = 0$ per ogni $i = 0,\ldots,n-2$, allora α_n è iniettivo.

(ii) Se $H^{n-i}(X,\mathcal{E}_i) = 0$ per ogni $i = 0,\ldots,n-1$, allora α_n è suriettivo.

(iii) Per ogni diagramma commutativo di fasci

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{E}_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{E}_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{E}'_0 \arrow[r, "d_0"] & \mathcal{E}'_1 \arrow[r, "d_1"] & \mathcal{E}'_2 \arrow[r, "d_2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

con le righe esatte, si hanno dei diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd} H^n(\mathcal{E}_*(X)) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha_n"] & & H^n(\mathcal{E}'_*(X)) \arrow[dl, "\alpha'_n"'] \\ & H^n(X,\mathcal{F}). & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Mostriamo l'esistenza di α_n per induzione su n.

Caso $\mathbf{n = 0}$. Ricordiamo che si ha

$$H^0(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

e che la successione corta

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{E}_0(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1(X)$$

è esatta. Per iniettività, $\mathcal{F}(X)$ è isomorfo alla sua immagine in $\mathcal{E}_0(X)$ e quindi per esattezza si ha l'isomorfismo

$$H^0(X,\mathcal{F}) \cong ker\, d : \mathcal{E}_0(X) \to \mathcal{E}_1(X) = H^0(\mathcal{E}_*(X)).$$

Caso $\mathbf{n = 1}$. Consideriamo il fascio

$$\mathcal{G} = kerd : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2.$$

Si hanno la successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{G} \to 0$$

e la risoluzione

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \cdots .$$

Per il caso $n = 0$ si ha $H^0(X,\mathcal{F}) \cong kerd : \mathcal{E}_0(X) \to \mathcal{E}_1(X)$ ed una successione esatta lunga

$$\mathcal{E}_0(X) \xrightarrow{d} H^0(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{E}_0) \to \cdots$$

che induce la successione esatta

$$0 \to H^1(\mathcal{E}_*(X)) = \frac{ker(d : \mathcal{E}_1(X) \to \mathcal{E}_2(X))}{Im(d : \mathcal{E}_0(X) \to \mathcal{E}_1(X))} \xrightarrow{\alpha_1} H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{E}_0).$$

Caso n $\geq$ 2. Supponiamo vero l'enunciato per tutti gli interi minori di n. Prendendo $\mathcal{G}$ come prima, dalla successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{G} \to 0$$

si ha la successione esatta lunga in coomologia

$$\cdots \to H^{n-1}(X, \mathcal{E}_0) \to H^{n-1}(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_n} H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{E}_0) \to \cdots$$

e per ipotesi induttiva abbiamo un morfismo naturale

$$\gamma_n = H^n(\mathcal{E}_*(X)) = \frac{ker(d : \mathcal{E}_n(X) \to \mathcal{E}_{n+1}(X))}{Im(d : \mathcal{E}_{n-1}(X) \to \mathcal{E}_n(X))} \to H^{n-1}(X, \mathcal{G}).$$

Il morfismo α_n si ottiene componendo γ_n con β_n. Le altre proprietà si ottengono sfruttando l'esattezza delle successioni e l'ipotesi induttiva. $\square$

Da questo teorema segue immediatamente il seguente corollario noto come teorema di de Rham-Weil, il quale permette di calcolare i gruppi di coomologia a partire da una qualsiasi risoluzione aciclica al posto di quella canonica di Godement.

Corollario 3.15 (Teorema di de Rham-Weil). *Sia $\mathcal{F}$ un fascio sullo spazio X e sia*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{E}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{d} \cdots$$

una qualsiasi risoluzione aciclica. Allora per ogni $n \geq 0$ si ha:

$$H^n(X, \mathcal{F}) \cong \frac{ker(d : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_{n+1})}{Im(d : \mathcal{E}_{n-1} \to \mathcal{E}_n)}.$$

Dimostrazione. Se la risoluzione è aciclica allora $H^i(X, \mathcal{E}_n) = 0$ per ogni $i > 0$ e per ogni $n \geq 0$ e quindi il morfismo α_n è sia iniettivo che suriettivo, ovvero è un isomorfismo di gruppi. $\square$

Capitolo 4

Mappe Continue e Fasci Costanti

In questo ultimo capitolo studiamo alcune operazioni fra fasci: data una mappa continua tra due spazi topologici daremo le definizioni di immagine diretta e inversa e vedremo alcune costruzioni che le riguardano. Successivamente concentriamo la nostra attenzione al caso particolare dei fasci costanti. Mostreremo che in questa situazione la coomologia è un invariante omotopico dello spazio su cui è definito il fascio, daremo una formula analoga alla classica formula di escissione e definiremo i gruppi di coomologia della coppia (X, D), dove D è un chiuso dello spazio topologico X. Con questi strumenti saremo in grado di calcolare nell'ultima sezione la coomologia a valori in un fascio costante della sfera.

4.1 Immagine Diretta e Inversa di Fasci

Definizione 4.1 (Immagine diretta e inversa). *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra spazi topologici e sia $\mathcal{F}$ un fascio su X. Definiamo l'**immagine diretta** $f_*\mathcal{F}$ come il fascio su Y definito da $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)$ per ogni V aperto di Y.*

*Se $\mathcal{G}$ è un fascio su Y, definiamo l'**immagine inversa** $f^{-1}\mathcal{G}$ come il fascio su X associato al prefascio $U \mapsto \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$ dove U è un aperto di X e V varia fra tutti gli aperti di Y contenenti $f(U)$.*

Esempio 4.2. Siano X uno spazio topologico e $p \in X$ un punto. Siano inoltre G un gruppo, $\underline{G}$ il fascio costante su $\{p\}$ e $i : \{p\} \to X$ il morfismo di inclusione. Per ogni aperto $V \subseteq X$, vale:

$$i^{-1}(V) = \begin{cases} \emptyset & se\ p \notin V \\ \{p\} & se\ x \in V. \end{cases}$$

Si ha quindi $i_*\underline{G}(V) = G$ se $p \in V$, $i_*\underline{G}(V) = 0$ se $p \notin V$, ovvero $i_*\underline{G}$ è il fascio grattacielo introdotto nell'esempio 2.8.

Esempio 4.3. Siano Y uno spazio topologico, $\mathcal{G}$ un fascio su Y, $i : \{p\} \to Y$ l'inclusione dove p è un punto di Y. Il fascio $i^{-1}\mathcal{G}$ è quello che manda $\{p\}$ nella spiga $\mathcal{G}_p$.

Osserviamo che f_* è un funtore dalla categoria dei fasci su X a quella dei fasci su Y. Un morfismo $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ di fasci su X induce canonicamente un morfismo $f_*(\alpha) : f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G}$ tramite:

$$f_*(\alpha)_U = \alpha_{f^{-1}(U)} : f_*\mathcal{F}(U) \to f_*\mathcal{G}(U)$$

per ogni U aperto di Y.

Analogamente f^{-1} può essere visto come un funtore controvariante dalla categoria dei fasci su Y a quella dei fasci su X.

Osservazione 4.4. Se f è continua e $\mathcal{F}$ è fiacco su X, allora $f_*\mathcal{F}$ è un fascio fiacco su Y.

Lemma 4.5. *Siano X uno spazio topologico, $D \subset X$ un chiuso e $i : D \hookrightarrow X$ il morfismo di inclusione. Per ogni fascio $\mathcal{F}$ su D e ogni $x \in X$ si ha:*

$$i_*\mathcal{F}_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & se\ x \in D, \\ 0 & se\ x \notin D. \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $x \notin D$, allora x possiede un sistema fondamentale di intorni che non intersecano D, quindi $i_*\mathcal{F}_x = 0$.

Se $x \in D$, allora ogni aperto di D che contiene x può essere ottenuto come intersezione di D con un aperto di X che contiene x. Da questo segue che il morfismo naturale $i_*\mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ è una mappa biunivoca. □

Proposizione 4.6. *Siano X uno spazio topologico, $D \subseteq X$ un chiuso e $i : D \hookrightarrow X$ un'immersione chiusa. Allora per ogni fascio $\mathcal{F}$ su D e per ogni $n \geq 0$ si ha*

$$H^n(D, \mathcal{F}) = H^n(X, i_*\mathcal{F}).$$

Dimostrazione. Sia

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1 \to \cdots$$

una risoluzione fiacca di $\mathcal{F}$ su D, come ad esempio quella canonica. Ricordando che una successione di fasci è esatta se è esatta su ogni spiga, dal lemma precedente sappiamo che la successione

$$0 \to i_*\mathcal{F} \to i_*\mathcal{E}_0 \to i_*\mathcal{E}_1 \to \cdots$$

è ancora esatta. Inoltre, poiché i è continua, i fasci $i_*\mathcal{E}_n$ sono fiacchi. La tesi segue osservando che $i_*\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{E}_n(D)$ e utilizzando il teorema di de Rham-Weil. □

Vogliamo mostrare che per ogni applicazione continua $f : X \to Y$ e per ogni fascio $\mathcal{F}$ su Y, esistono dei morfismi naturali di gruppi di coomologia

$$f^* : H^n(Y, \mathcal{F}) \to H^n(X, f^{-1}\mathcal{F}).$$

Riprendiamo il fascio $\mathcal{C}^0\mathcal{F}$ introdotto nella realizzazione della risoluzione canonica di Godement. Ricordiamo che avevamo definito per ogni U aperto di X

$$\mathcal{C}^0\mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x.$$

Applichiamo questa costruzione al fascio $f^{-1}\mathcal{F}$: per ogni $U \subseteq X$ aperto si ha:

$$\mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_{f(x)}.$$

Se $V \subseteq Y$ è un aperto tale che $f(U) \subseteq V$, allora è ben definita l'applicazione

$$f^{\#} : \mathcal{F}(V) \to f^{-1}\mathcal{F}(U), \qquad f^{\#}(s)_x = s_{f(x)}, \qquad x \in V.$$

In particolare, per ogni aperto V di Y, esiste un'applicazione

$$f^{\#} : \mathcal{F}(V) \to f^{-1}\mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_* f^{-1}(V)$$

e quindi è ben definito il morfismo di fasci su Y

$$f^{\#} : \mathcal{F} \to f_* f^{-1}\mathcal{F}. \tag{1}$$

Applicando il funtore f^{-1} alla risoluzione canonica di $\mathcal{F}$ otteniamo la successione:

$$0 \to f^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{i} f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \xrightarrow{d} f^{-1}\mathcal{C}^1\mathcal{F} \xrightarrow{d} f^{-1}\mathcal{C}^2\mathcal{F} \xrightarrow{d} \cdots .$$

Il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "f^{-1}0"] \arrow[d, equal] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r, "0"] & f^{-1}\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

si estende in maniera naturale a

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "f^{-1}0"] \arrow[d, equal] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[d, "\alpha_0"] \\
0 \arrow[r, "0"] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}.
\end{tikzcd}$$

Questo fatto segue guardando come agiscono i funtori $\mathcal{C}^0$ e f^{-1}. A sua volta il diagramma sopra si estende a

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "f^{-1}0"] \arrow[d, equal] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & f^{-1}\mathcal{C}^1\mathcal{F} \arrow[d, "\alpha_1"] \\
0 \arrow[r, "0"] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{C}^1 f^{-1}\mathcal{F}.
\end{tikzcd}$$

Proseguendo si ottiene:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & f^{-1}\mathcal{C}^1\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & f^{-1}\mathcal{C}^2\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{C}^1 f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{C}^2 f^{-1}\mathcal{F} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Applicando il funtore delle sezioni globali e i morfismi $f^{\#} : \mathcal{F}(Y) \to f^{-1}\mathcal{F}(X)$ si ottiene:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0\mathcal{F}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1\mathcal{F}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}^2\mathcal{F}(Y) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f^\#} & & \downarrow{\scriptstyle f^\#} & & \downarrow{\scriptstyle f^\#} & & \downarrow{\scriptstyle f^\#} & & \\
0 & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{F}(X) & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{C}^0\mathcal{F}(X) & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{C}^1(X)\mathcal{F} & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{C}^2\mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \\
0 & \longrightarrow & f^{-1}\mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0 f^{-1}\mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1 f^{-1}\mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}^2 f^{-1}\mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

la cui composizione induce i morfismi $f^* : H^n(Y, \mathcal{F}) \to H^n(X, f^{-1}\mathcal{F})$.

Osserviamo inoltre che questa costruzione è funtoriale, nel senso che date $f : X \to Y$ e $g : Z \to X$ continue, per ogni n e per ogni fascio $\mathcal{F}$ su Y si ha la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
H^n(Y,\mathcal{F}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[dr, "(fg)^*"'] & H^n(X, f^{-1}\mathcal{F}) \arrow[d, "g^*"] \\
 & H^n(Z, (fg)^{-1}\mathcal{F}).
\end{tikzcd}$$

4.2 Invarianza Omotopica

In questa sezione proviamo che la coomologia a valori in un fascio costante è un invariante omotopico dello spazio su cui è definito il fascio. Ricordiamo che due mappe $f, g : X \to Y$ si dicono **omotope** se esiste una funzione continua $F : X \times [0,1] \to Y$ tale che $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ per ogni $x \in X$.

Definizione 4.7 (Fascio quasi fiacco). *Un fascio $\mathcal{F}$ su X è detto* ***quasi fiacco*** *se per ogni $x \in X$ l'applicazione $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}_x$ è suriettiva.*

Chiaramente ogni fascio fiacco è anche quasi fiacco, ma non vale il viceversa.

Esempio 4.8. Il fascio costante su un gruppo G è quasi fiacco ma non fiacco in generale. Prendiamo due insiemi aperti disgiunti U e V che giacciano nella stessa componente connessa dell'intero spazio X. Definiamo quindi una sezione su $U \cup V$ mediante una funzione che assuma valore 0 su U e 1 su V. Questa sezione non può essere estesa a tutto X e quindi il fascio non è fiacco. Le spighe $\underline{G}_x$ valgono G per ogni $x \in X$ e segue quindi che il fascio è quasi fiacco.

Enunciamo per completezza due teoremi classici di topologia generale che ci serviranno per dimostrare i prossimi risultati, di cui una dimostrazione si trova in [4].

Teorema 4.9 (**Teorema del numero di Lebesgue**). *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X. Allora esiste un numero $\delta > 0$ tale che ogni sottoinsieme di X con diametro inferiore a δ è contenuto in uno degli elementi del ricoprimento. Tale numero è detto numero di Lebesgue.*

Teorema 4.10 (**Teorema di Wallace**). *Siano X e Y spazi topologici, $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ compatti. Allora gli aperti della forma $U \times V$, dove U è un aperto di X contenente A e V è un aperto di Y contenente B, costituiscono una base per gli intorni di $A \times B$ in $X \times Y$. In altre parole, per ogni aperto Ω di $X \times Y$ che contiene $A \times B$, esistono U e V come sopra tali che $A \times B \subseteq U \times V \subseteq \Omega$.*

Proposizione 4.11. *Siano X uno spazio topologico e $p : X \times [0, 1] \to X$ la proiezione. Allora, per ogni successione esatta*

$$0 \to \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{d_3} \mathcal{F}_4 \to \cdots$$

di fasci quasi fiacchi su $X \times [0, 1]$, la successione

$$0 \to p^*\mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} p^*\mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} p^*\mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} p^*\mathcal{F}_3 \to \cdots$$

è esatta su X.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su N l'esattezza della successione in $p_*\mathcal{F}_N$.

Per $N = 0$ e $N = 1$, l'esattezza segue direttamente dall'esattezza a sinistra del funtore sezioni. Quindi, senza perdita di generalità, supponiamo $N \geq 2$.

Siano $x \in X$ e $s \in (p_*\mathcal{F}_N)_x$ tale che $d_N(s) = 0$. Allora esiste un intorno aperto U di x e una sezione $s \in (p_*\mathcal{F}_N)(U) = \mathcal{F}_N(U \times [0, 1])$ tale che $d_N(s) = 0$. Per ogni $t \in [0, 1]$, esiste un intorno aperto di (x, t) in $U \times [0, 1]$ dove s si "solleva" ad una sezione di $\mathcal{F}_{N-1}$.

Ora, per il teorema del numero di Lebesgue applicato allo spazio metrico compatto $\{x\} \times [0, 1]$, possiamo trovare un numero finito di aperti $V_1, \ldots, V_n \subseteq U \times [0, 1]$ e n sezioni $h_i \in \mathcal{F}_{N-1}(V_i)$ tali che per ogni $i = 1, \ldots, n$ valgono le seguenti proprietà:

(1) $f(h_i) = s|_{V_i}$,

(2) $\{x\} \times \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \subseteq V_i$.

Applicando il teorema di Wallace possiamo supporre, riducendo se necessario gli aperti V_i, che $V_i = U_i \times A_i$ per ogni indice i, dove U_i è un intorno aperto di x e A_i è un intorno aperto di $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$.

Restringendo eventualmente l'aperto U, possiamo assumere $U_i = U$ per ogni i. Poiché $d_{N-1}(h_i - h_{i-1}) = 0$ e $\mathcal{F}_{N-2}$ è quasi fiacco, restringendo ulteriormente gli aperti U e A_i, abbiamo che $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $|i-j| \geq 2$ e che per ogni $i = 2, \dots, n$ esiste $r_i \in \mathcal{F}_{N-2}(U \times [0,1])$ tale che

$$d_{N-2}(r_i) = h_{i-1} - h_i \in \mathcal{F}_{N-1}(U \times (A_{i-1} \cap A_i)).$$

Sostituendo, se necessario, h_i con $h_i + d_{N-2}(r_1 + r_2 + \ldots + r_i)$, otteniamo che le sezioni h_i coincidono sulle intersezioni doppie e quindi definiscono una sezione di $\mathcal{F}_{N-1}$ sull'aperto $U \times [0,1]$. Chiaramente, $h \in p_*\mathcal{F}_{N-1}(U)$ e $d_{N-1}(h) = s$. Abbiamo mostrato così l'esattezza della successione al punto N. □

Corollario 4.12. *Siano $p : X \times [0,1] \to X$ la proiezione e G un gruppo abeliano. Allora per ogni n il morfismo*

$$p^* : H^n(X, \underline{G}) \to H^n(X \times [0,1], \underline{G})$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Abbiamo ottenuto il morfismo p^* dalla composizione di $p^{\#}$ con il morfismo indotto dal diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p^{-1}\underline{G} \arrow[r] \arrow[d] & p^{-1}\mathcal{C}^0\underline{G} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & p^{-1}\mathcal{C}^1\underline{G} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & p^{-1}\mathcal{C}^2\underline{G} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & p^{-1}\underline{G} \arrow[r] & \mathcal{C}^0 p^{-1}\underline{G} \arrow[r] & \mathcal{C}^1 p^{-1}\underline{G} \arrow[r] & \mathcal{C}^2 p^{-1}\underline{G} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Per il teorema precedente, la successione di fasci su X

$$0 \to \underline{G} = p_*p^{-1}\underline{G} \to p_*\mathcal{C}^0 p^{-1}\underline{G} \to p_*\mathcal{C}^1 p^{-1}\underline{G} \to p_*\mathcal{C}^2 p^{-1}\underline{G} \to \cdots$$

è esatta dato che ognuno dei fasci è quasi fiacco. Inoltre, sappiamo che, in generale, $\mathcal{C}^n\mathcal{F}$ è fiacco qualsiasi sia il fascio $\mathcal{F}$ e che p_* conserva la fiacchezza essendo un'applicazione continua (osservazione 4.4). La successione sopra è allora una risoluzione fiacca (dunque aciclica) di $\underline{G}$ e quindi è possibile calcolarne la coomologia dal suo complesso delle sezioni globali per il teorema di de Rham-Weil. D'altra parte si ha che i morfismi

$$\mathcal{C}^n\underline{G} \xrightarrow{p^\#} p_*p^{-1}\mathcal{C}^n\underline{G} \xrightarrow{p_*\alpha_n} p_*\mathcal{C}^n p^{-1}\underline{G}$$

inducono un morfismo tra due risoluzioni fiacche di $\underline{G}$ e, ancora per il teorema di de Rham-Weil, inducono isomorfismi tra i gruppi di coomologia dei complessi delle sezioni globali, dunque p^* è un isomorfismo. □

Corollario 4.13. *Siano $f, g : X \to Y$ due mappe omotope e G un gruppo abeliano. Allora per ogni n le applicazioni indotte in coomologia coincidono, ovvero:*

$$f^* = g^* : H^n(Y, \underline{G}) \to H^n(X, \underline{G}).$$

Dimostrazione. Sia F l'omotopia tra f e g, ovvero $F : X \times [0,1] \to Y$ continua tale che $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$. Osserviamo che vale

$$f = Fi, \qquad g = Fj,$$

dove $i(x) = (x,0)$ e $j(x) = (x,1)$. Per funtorialità, $f^* = i^*F^*$ e quindi è sufficiente mostrare

$$i^* = j^* : H^n(X \times [0,1], \underline{G}) \to H^n(X, \underline{G}).$$

Chiamiamo p la proiezione al primo fattore e osserviamo che $pi = pj$ e quindi $i^*p^* = j^*p^*$. Per il corollario sopra abbiamo che p^* è un isomorfismo e quindi l'uguaglianza è verificata se e solo se $i^* = j^*$. □

Corollario 4.14. *Siano X uno spazio contraibile e G un gruppo abeliano. Allora*

$$H^0(X, \underline{G}) = G, \qquad H^n(X, \underline{G}) = 0 \qquad \forall n \geq 1.$$

Dimostrazione. **Caso $\mathbf{n = 0}$.** Essendo contraibile, lo spazio X è necessariamente connesso e quindi $\underline{G}(X) = G$, quindi $H^0(X, \underline{G}) = G$ per la proposizione 3.10.

Caso $\mathbf{n \geq 1}$. Per definizione di spazio contraibile, esiste un'applicazione continua $F : X \times [0,1] \to X$ e un punto $p \in x$ tali che $F(x,0) = x$ e $F(x,1) = p$ per ogni $x \in X$. Abbiamo i morfismi

$$\{p\} \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} \{p\} \xrightarrow{i} X$$

e vale $r \circ i = Id_{\{p\}}$, mentre $i \circ r$ è omotopa all'identità su X. Passando in coomologia si ha

$$H^n(X, \underline{G}) \xrightarrow{i^*} H^n(\{p\}, \underline{G}) \xrightarrow{r^*} H^n(X, \underline{G}) \xrightarrow{i^*} H^n(\{p\}, \underline{G}).$$

La composizione di due omomorfismi consecutivi è l'identità. Su uno spazio discreto $\mathcal{F} \cong \mathcal{C}^0\mathcal{F}$ per l'osservazione 3.8 e quindi qualsiasi fascio $\mathcal{F}$ su $\{p\}$ è fiacco e in particolare aciclico, dunque

$$H^n(\{p\}, \underline{G}) = 0 \qquad \forall n \geq 1.$$

Questo mostra che il morfismo r^* è il morfismo nullo e allora anche l'identità su $H^n(X, \underline{G})$ è la mappa nulla poiché è ottenuta componendo r^* con i^*, da cui la tesi. □

Utilizzando lo stesso ragionamento si può dimostrare il seguente corollario:

Corollario 4.15. *Se X è un retratto per deformazione di Y e G è un gruppo abeliano, allora*

$$H^n(X, \underline{G}) \cong H^n(Y, \underline{G}) \qquad \forall n \geq 0.$$

4.3 Successione Esatta della Coppia

Definizione 4.16 (Supporto di una sezione). *Sia $\mathcal{F}$ un fascio sullo spazio topologico X e sia s una sezione di $\mathcal{F}$ su un aperto U. Definiamo il* ***supporto*** *di s come:*

$$Supp(s) = \{x \in U \mid s_x \neq 0\}.$$

Osserviamo che $\mathrm{Supp}(s)$ è chiuso, infatti il suo complementare è aperto: se $s(x) = 0$, allora $s(p) = 0$ per ogni p in tutto un intorno di x. Inoltre, se $W \subseteq U$ sono due aperti e $s \in \mathcal{F}(U)$, allora notiamo che vale

$$\mathrm{Supp}(s|_W) = \mathrm{Supp}(s) \cap W.$$

Definizione 4.17 (**Immagine diretta a supporti propri**). *Siano X uno spazio topologico e $U \subseteq X$ un aperto, $\mathcal{F}$ un fascio su X e $i : U \hookrightarrow X$ il morfismo di inclusione. Definiamo il prefascio $j_!\mathcal{F}$ su X, detto **immagine diretta a supporti propri**, come il prefascio che ad ogni $V \subseteq X$ aperto associa:*

$$j_!\mathcal{F}(V) = \{s \in \mathcal{F}(U \cap V) = j_*(V) \mid Supp(s) \text{ è chiuso in } V\}$$

e come mappe di restrizione quelle indotte da $j_*\mathcal{F}$.

La definizione data di immagine diretta a supporti propri è in realtà un caso particolare in cui j è un'immersione aperta, ma si potrebbe estendere per una qualsiasi funzione continua tra spazi topologici.

Proposizione 4.18. *Il prefascio $j_!\mathcal{F}$ è un fascio su X.*

Dimostrazione. Mostriamo prima che $j_!\mathcal{F}$ è un sottoprefascio di $j_*\mathcal{F}$ e poi utilizziamo il lemma 2.20 per concludere.

Se $W \subseteq V$ e $s \in j_!\mathcal{F}(V)$, allora $\mathrm{Supp}(s|_{W\cap U}) = \mathrm{Supp}(s) \cap W$ e quindi, se $\mathrm{Supp}(s)$ è chiuso in V, allora $\mathrm{Supp}(s|_{W\cap U})$ è chiuso in W. Questo mostra che $j_!\mathcal{F}$ è un sottoprefascio di $j_*\mathcal{F}$.

Sia ora $s \in j_*\mathcal{F}(\cup_i V_i)$ tale che $s|_{V_i} \in j_!\mathcal{F}(V_i)$ per ogni i. Allora $\mathrm{Supp}(s|_{V_i}) = \mathrm{Supp}(s) \cap V_i$ e quindi $\mathrm{Supp}(s) \cap V_i$ è chiuso in V_i. Segue che $\mathrm{Supp}(s)$ è chiuso in $\cup_i V_i$ poiché i ricoprimenti aperti sono fondamentali. □

Lemma 4.19. *Siano $U \subseteq D \subseteq X$ con U aperto e D chiuso in X, e sia $\mathcal{F}$ un fascio su U. Se $j : U \hookrightarrow D$ e $i : D \hookrightarrow X$ sono le inclusioni, allora:*

$$i_*(j_!\mathcal{F}) = (ij)_!\mathcal{F}.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente guardando le definizioni di immagine diretta e di immagine diretta a supporti propri. □

Lemma 4.20. *Siano $\mathcal{F}$ un fascio su X, $U \subseteq X$ e $j : U \hookrightarrow X$ un'immersione aperta. Allora esiste un morfismo naturale di fasci:*

$$\alpha : j_!(\mathcal{F}|_U) \to \mathcal{F}.$$

Dimostrazione. Per definizione, se V è un aperto di X, si ha

$$j_!(\mathcal{F}|_U)(V) = \{s \in \mathcal{F}(U \cap V) \mid \mathrm{Supp}(s) \in U \cap V \text{ è chiuso in } V\}.$$

Sia s una sezione di $j_!(\mathcal{F}|_U)(V)$ e denotiamo con W l'insieme $V - \mathrm{Supp}(s)$. W è aperto in V e s si annulla sull'aperto $W \cap U$. Definiamo $\alpha(s) \in \mathcal{F}(V)$ come l'unica sezione tale che $\alpha(s)|_{U \cap V} = s$, $\alpha(s)|_W = 0$. □

Sia D un sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico X e siano

$$i : D \hookrightarrow X, \qquad j : X - D \hookrightarrow X$$

i morfismi di inclusione. Per ogni gruppo abeliano G definiamo il fascio $\underline{G}_{(X,D)}$ su X come:

$$\underline{G}_{(X,D)} = j_! \underline{G}_{X-D}.$$

Dove ricordiamo che $X - D$ al pedice indica che stiamo considerando il fascio costante definito sullo spazio $X - D$. Per il lemma precedente, esiste un morfismo naturale di fasci $\alpha : \underline{G}_{(X,D)} \to \underline{G}_X$.

Proposizione 4.21 (**Formula di escissione**). *Siano D, K sottoinsiemi chiusi dello spazio X tali che $X = D \cup K$ e sia $k : K \hookrightarrow X$ il morfismo di inclusione. Allora per ogni gruppo abeliano G vale:*

$$k_* \underline{G}_{(K, K \cap D)} = \underline{G}_{(X,D)}.$$

Dimostrazione. La tesi segue osservando che $X - D \subseteq K$ e quindi l'inclusione $X - D \hookrightarrow X$ fattorizza tramite k e applicando il lemma 4.19. □

Ricordando la costruzione fatta in (1), osserviamo che è ben definito un morfismo $\beta : \underline{G}_X \to i_* \underline{G}_D = i_* i^{-1} \underline{G}_X$.

Guardando il comportamento sulle spighe, si ottiene la successione esatta corta:

$$0 \to \underline{G}_{(X,D)} \xrightarrow{\alpha} \underline{G}_X \xrightarrow{\beta} i_* \underline{G}_D \to 0.$$

Chiamiamo tale successione la **successione della coppia** $(\mathbf{X}, \mathbf{D})$.

Definizione 4.22 (Gruppi di coomologia della coppia). *Siano D un sottospazio chiuso di X e G un gruppo abeliano. Definiamo i* ***gruppi di coomologia della coppia*** *(X, D) a coefficienti in G come*

$$H^n(X, D, \underline{G}) := H^n(X, \underline{G}_{(X,D)}).$$

Segue immediatamente dalla formula di escissione che se $X = D \cup K$, con D, K chiusi, allora

$$H^n(X, D, \underline{G}) = H^n(K, K \cap D, \underline{G})$$

per ogni n.

Ricordando la proposizione 4.6, la successione esatta lunga in coomologia è

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^n(X, D, \underline{G}) \to H^n(X, \underline{G}) \to H^n(D, \underline{G}) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, D, \underline{G}) \to \cdots .$$

4.4 Coomologia della Sfera

Dato un gruppo G, calcoliamo i gruppi di coomologia a coefficienti nel fascio costante $\underline{G}$ della sfera n-dimensionale $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

Caso $\mathbf{n = 0}$. S^0 è lo spazio discreto formato da due punti e quindi ricordando l'osservazione 3.8 si ha che $\underline{G}$ è fiacco e dunque aciclico, perciò $H^k(S^0, \underline{G}) = 0$ per ogni $k \geq 1$. Per quanto riguarda $H^0(S^0, \underline{G})$, abbiamo che tale gruppo è $\{f : S^0 \to G \mid f \text{ è localmente costante}\} \cong G \oplus G$.

Caso $\mathbf{n \geq 1}$. È immediato osservare che $H^0(S^n, \underline{G}) \cong G$, poiché si tratta del gruppo formato dalle funzioni localmente costanti da S^n (che è connesso) a G.

Per ogni $n \geq 0$, siano

$$S^n_+ = \{(x_0, \dots, x_n) \in S_n \mid x_0 \geq 0\},$$
$$S^n_- = \{(x_0, \dots, x_n) \in S_n \mid x_0 \leq 0\}$$

le calotte sferiche. Osserviamo che sono entrambe contraibili e che per ogni $n > 0$ si ha $S^n_+ \cap S^n_- \cong S^{n-1}$. Usando la formula di escissione e il fatto che S^n è unione delle due calotte, che sono chiuse, la successione esatta della coppia (S^n, S^n_-) diventa:

$$\cdots \to H^{i-1}(S^n_-, \underline{G}) \xrightarrow{\delta} H^i(S^n, S^n_-, \underline{G}) \to H^i(S^n, \underline{G}) \to H^i(S^n_-, \underline{G}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

dove il primo e l'ultimo termine sono nulli per $i > 1$ per la contraibilità di S^n_- e per escissione si ha $H^i(S^n, S^n_-, \underline{G}) = H^i(S^n_+, S^{n-1}, \underline{G})$. Considerando anche che $H^0(S^n, \underline{G}) \cong H^0(S^n_-, \underline{G})$ si ottengono quindi gli isomorfismi

$$H^i(S^n, \underline{G}) \cong H^i(S^n_+, S^{n-1}, \underline{G}), \qquad i > 0. \tag{2}$$

Similmente, la successione esatta della coppia (S^n_+, S^{n-1}) è:

$$\cdots \to H^{i-1}(S^n_+, \underline{G}) \to H^{i-1}(S^{n-1}, \underline{G}) \xrightarrow{\delta} H^i(S^n_+, S^{n-1}, \underline{G}) \to H^i(S^n_+, \underline{G}) \to \cdots .$$

Il primo e l'ultimo termine sono nulli per $i > 1$ poiché S^n_+ è contraibile e si ottengono isomorfismi

$$H^{i-1}(S^{n-1}, \underline{G}) \cong H^i(S^n_+, S^{n-1}, \underline{G}), \qquad i > 1. \tag{3}$$

Dalla successione sopra concentrandosi nei gradi 0 e 1 si ha la successione esatta:

$$G = H^0(S^n_+, \underline{G}) \to H^0(S^{n-1}, \underline{G}) \to H^1(S^n_+, S^{n-1}, \underline{G}) \to 0$$

e quindi, avendo già calcolato i gruppi in grado 0, segue che:

$$H^1(S^1_+, S^0, \underline{G}) = G, \quad H^1(S^n_+, S^{n-1}, \underline{G}) = 0, \qquad n > 1.$$

Ragionando per induzione da 2 e 3 otteniamo gli isomorfismi:

$$H^n(S^n, \underline{G}) \cong G, \qquad H^i(S^n, \underline{G}) = 0 \quad \text{per } i \neq 0, n.$$

Osserviamo che i gruppi di coomologia a valori in un fascio costante della sfera coincidono con quelli di coomologia singolare: possiamo chiederci se esista quindi un isomorfismo tra le due coomologie. La risposta è affermativa nel caso di spazi paracompatti, di Hausdorff e localmente contraibili, condizioni soddisfatte nei casi generali di varietà topologiche e di CW complessi ma la dimostrazione di questo fatto richiede una certa dose di lavoro aggiuntivo.

Bibliografia

[1] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Hermann, 1958.

[2] G.E. Bredon, *Sheaf Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 170, Springer, 1997.

[3] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer, 1977.

[4] M. Manetti, *Topologia*, Springer, 2003.

[5] C. Houzel, *A Short History: Les débuts de la théorie des faisceaux*, in: M. Kashiwara , P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol 292. Springer, 1990.

[6] F. El Zein e L. W. Tu, *From Sheaf Cohomology to the Algebraic de Rham Theorem*, in: E. Cattani, F. El Zein, P.A. Griffiths e L.D. Tráng, *Hodge Theory (MN-49)*, Princeton: Princeton University Press, 2014.

[7] B. Iversen, *Cohomology of Sheaves*, Springer, 1986.

[8] B.R. Tennison, *Sheaf Theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol.20, Cambridge: Cambridge University Press, 1975.

[9] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Mathematical Journal, (2), 9: 119?221, 1957

[10] M. Manetti, *Introduzione alla coomologia dei fasci*, in: Percorso eccellenza SPE 2012, Sapienza Università di Roma, a.a. 2013-2014, URL: https://www1.mat.uniroma1.it/people/manetti/spe2012/spe2012.html

[11] *The Stacks project*, URL: https://stacks.math.columbia.edu/

[12] *Mathematics*, in: *Stack Exchange*, URL: https://math.stackexchange.com/