Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Teorema di Darboux e integrali primi locali

Relatore:
Prof. Paolo Albano

Presentata da:
Federico Tonetto

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

In questa tesi si considera un sistema hamiltoniano (autonomo) con n gradi di libertà. Si mostra che nell'intorno di un punto non singolare per il campo hamiltoniano, il campo può essere rettificato tramite un cambiamento di coordinate canonico e, in particolare, il sistema ammette $n-1$ integrali primi (locali) indipendenti. Nella dimostrazione si usano il Teorema di Frobenius ed alcuni risultati di geometria simplettica (la geometria dello spazio delle fasi).

Indice

Introduzione

La meccanica hamiltoniana nasce nel XIX secolo ed il suo formalismo, non solo viene utilizzato per risolvere problemi di meccanica newtoniana ma anche in meccanica quantistica. Infatti, l'operatore hamiltoniano è la quantizzazione della funzione di Hamilton classica. In quest'ottica, le trasformazioni canoniche, permettono di scegliere le coordinate in modo tale che l'operatore hamiltoniano assuma la forma più semplice possibile.

Nello studio di un sistema fisico, in meccanica hamiltoniana, è possibile usare una classe di cambiamenti di coordinate più ampia rispetto a quella ammissibile in meccanica lagrangiana. Inoltre, la formulazione hamiltoniana permette di risolvere problemi che appaiono di difficoltà molto maggiore utilizzando le sole equazioni di Newton. Un esempio di tali problemi, è la determinazione delle curve geodetiche su un elissoide con 3 assi.

Il nucleo matematico di questa tesi consiste nell'esposizione di alcuni strumenti utili per lo studio locale di un sistema hamiltoniano. Più precisamente, il Teorema di Frobenius, che generalizza il teorema di rettificazione di un campo vettoriale nell'intorno di un punto non singolare, ed il Teorema 13, sul completamento di funzioni per avere un sistema canonico di coordinate locali (dal quale segue un importante risultato di geometria: il Teorema di Darboux). Dal punto di vista della fisica, tale apparato matematico è utile per l'analisi locale di un sistema hamiltoniano vicino a un punto non singolare per il campo (ossia nel quale il campo non si annulla). Osserviamo che, da un punto di vista geometrico, questa è la prima situazione che si presenta naturalmente: nell'intorno di un punto non singolare, l'insieme di livello dell'hamiltoniana è una ipersuperficie. Ricordiamo che questa situazione risulta "generica" (in ipotesi di regolarità, l'insieme dei valori critici dell'hamiltoniana ha misura nulla).

Dal punto di vista dei sistemi hamiltoniani, il principale risultato della tesi è che un campo vettoriale hamiltoniano (autonomo) con n gradi di libertà, nell'intorno di un punto non singolare per il campo, può essere rettificato tramite un cambiamento di coordinate canonico e, in particolare, il sistema ammette $n-1$ integrali primi (locali) indipendenti.

La tesi si sviluppa in cinque capitoli. Il primo capitolo contiene una breve introduzione alla meccanica hamiltoniana: partendo dalle equazioni di Hamilton, introdurremo le parentesi di Poisson, i campi vettoriali hamiltoniani, la forma simplettica e le trasformazioni canoniche. Confronteremo diverse definizioni equivalenti di trasformazione canonica e mostreremo come, utilizzando le funzioni generatrici, si possa definire una di queste trasformazioni.

Nel secondo capitolo, esporremo dapprima il teorema di rettificazione di un campo vettoriale, utile a comprendere la sua generalizzazione in cui, al posto di un campo vettoriale, si considera un campo di spazi (affini) di dimensione fissata: il teorema di Frobenius. La dimostrazione di tale teorema si basa sullo studio di equazioni alle derivate parziali del primo ordine. Inoltre, sono date alcune condizioni affinché un campo di iperpiani sia completamente integrabile. Nel terzo capitolo, si discute la geometria dello spazio delle fasi. Lo spazio delle fasi ha naturalmente la struttura di varietà simplettica (è il fibrato cotangente allo spazio delle configurazioni di un sistema meccanico). Dopo aver introdotto alcuni fatti di algebra lineare simplettica si estende la trattazione alla geometria simplettica. In questo capitolo, saranno riproposte definizioni e dimostrazioni già incontrate nel formalismo matematico introdotto nel Capitolo 1, tuttavia, le stesse definizioni e dimostrazioni, saranno considerate in una varietà arbitraria. Nel quarto capitolo, si dimostra il Teorema 13 e, come conseguenza, si deduce il Teorema di Darboux (a meno di trasformazioni canoniche tutte le varietà simplettiche sono localmente equivalenti). La dimostrazione di tale risultato si basa sui concetti matematici introdotti nei capitoli 2 e 3. Usando il Teorema 13 si può rettificare (localmente) un campo hamiltoniano nell'intorno di un punto non singolare attraverso un cambiamento di coordinate canonico. Quest'ultimo fatto è di fondamentale importanza: un cambiamento di coordinate canonico lascia invariate le equazioni di Hamilton. Inoltre, come applicazione agli integrali primi del moto, si mostra che, in presenza di un integrale primo, i gradi di libertà di un sistema hamiltoniano diminuiscono di due invece che di uno. Nell'appendice sono ricordate alcune generalità sulle forme differenziali.

Notazione

Si è utilizzato il grassetto per indicare le quantità vettoriali.

Con il simbolo $\hat{\mathbf{v}}$ si intende il versore del vettore $\mathbf{v}$.

Dove non specificato altrimenti è usata la notazione di Einstein sugli indici ripetuti.

Con il simbolo $\mathbb{C}^k(A, B)$ si intende l'insieme delle funzioni che mandano elementi di A in B con la proprietà di essere derivabili k volte con derivata continua.

Per indicare lo Jacobiano di una funzione vettoriale $\mathbf{f}$ è stato utilizzato il simbolo f'_{ij}.

Con il simbolo $[A, B]$ si intende il commutatore tra A, B.

Con i simboli TM_x, T^*M_x si indicano rispettivamente lo spazio tangente e lo spazio cotangente relativi al punto x. Il fibrato tangente e il fibrato cotangente sono indicati rispettivamente con TM, T^*M .

Capitolo 1

Meccanica hamiltoniana

In questo capitolo introduciamo alcune nozioni di base di meccanica hamiltoniana. Nella presentazione, si è seguito l'articolo [3].

1.1 Equazione di Newton

Consideriamo un sistema meccanico formato da n particelle interagenti, ognuna di massa m_i $(i = 1, \dots, n)$ e con 3 gradi di libertà. La posizione della particella i-esima è descritta dal raggio vettore $\mathbf{q}_i$ (assegnato rispetto ad un sistema di coordinate arbitrario) mentre il vettore $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ descrive la posizione del sistema nel suo insieme. Nel caso in cui le particelle interagiscano tramite forze conservative, la forza esercitata sulla particella i-esima, $\mathbf{F}_i$, può essere espressa tramite il potenziale $V = V(\mathbf{q})$ come

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i} = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_{1i}}, \frac{\partial V}{\partial q_{2i}}, \frac{\partial V}{\partial q_{3i}}\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Il moto $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ è determinato dall'equazione di Newton

$$m_i \frac{d^2\mathbf{q}_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{1.1}$$

Definiamo le quantità

- $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$, con $i = 1, \dots, n$ (gli impulsi generalizzati);
- $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i}$ (l'energia cinetica);
- $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T + V$ (l'energia meccanica).

In particolare, (1.1) può essere riscritta nel modo seguente

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i} \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{1.2}$$

Dall'equazione (1.2) segue direttamente la conservazione dell'energia:

Teorema 1. *Se il potenziale V non dipende esplicitamente dal tempo, allora l'energia totale del sistema H è conservata.*

Dimostrazione. La dimostrazione è un conto diretto che può essere brevemente descritto come

$$(1.2) \implies \frac{dH}{dt} = 0.$$

Infatti

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d(T+V)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{q}}_i \left(\dot{\mathbf{p}}_i + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_i} \right) = 0.$$

□

Osserviamo che nelle variabili p, q l'equazione di Newton (1.1), un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine con $3n$ equazioni. L'equazione (1.1) può essere riscritta come un sistema del primo ordine con $6n$ equazioni (noto come le equazioni di Hamilton):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_i = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \\ \\ \dot{\mathbf{p}}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i}, \end{cases} \tag{1.3}$$

con $i = 1, \dots, n$.

Esempio 1. *Consideriamo il problema di Keplero, cioè una particella di massa m soggetta al potenziale $V(r) = -\frac{k}{r}$. Per la conservazione del momento angolare il moto sarà confinato nel piano passante per il corpo m e l'origine del campo, in forza di ciò e osservando la forma del potenziale è conveniente utilizzare le coordinate polari: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(r, \theta)$. In tali variabili, l'energia cinetica risulta essere $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. Si ha $\boldsymbol{p} = (p_r = m\dot{r}, p_\theta = mr^2\dot{\theta})$. Supponiamo per semplicità di aver scelto le unità di misura in modo da avere $m = 1$ e $k = 1$. Allora l'hamiltoniana è*

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = T + V = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r}.$$

Osserviamo che la variabile θ è ciclica, cioè non compare direttamente nell'hamiltoniana. Ricordiamo che le variabili cicliche forniscono degli integrali primi del moto. Nel caso in esame si ha

$$0 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \dot{p_\theta} \Rightarrow p_\theta = r^2\dot{\theta} = \ell = cost \implies \theta = \ell \int \frac{dt}{r^2}, \tag{1.4}$$

in altre parole si ritrova la conservazione del momento angolare e

$$H = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{1}{r}.$$

Per il Teorema 1, l'energia totale del sistema si deve conservare. Quindi, lungo il moto,

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{1}{r} = cost = E. \tag{1.5}$$

Introducendo il potenziale efficace

$$V_e(r) = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{1}{r}$$

e separando le variabili in (1.5), *si ottiene:*

$$\int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{2(E - V_e(r))}}. \tag{1.6}$$

Il sistema risulta quindi integrabile: l'equazione (1.6) *permette di trovare r, quindi da* (1.4) *si ottiene θ.*

Riconsideriamo la strategia che abbiamo seguito nell'esempio precedente:

- **Passo** 1**:** passaggio dalle coordinate cartesiane a quelle polari (in questo modo si è evidenziata una coordinata ciclica[1], questo permette di abbassare di un'unità i gradi di libertà del sistema).
- **Passo** 2**:** si è integrato il sistema usando la conservazione dell'energia (proprietà garantita dal Teorema 1).

L'esempio precedente mette in chiara luce il fatto che è utile disporre di un quadro teorico che permetta agevolmente i cambiamenti di coordinate. Siamo interessati ai cambiamenti di coordinate che preservano la forma delle equazioni di Hamilton, tali cambiamenti di coordinate sono detti trasformazioni canoniche o, per ragioni che vedremo nel seguito, trasformazioni simplettiche.

[1]Dal punto di vista fisico questo significa che, in coordinate polari, si riconosce facilmente una simmetria del sistema

Nel nostro esempio il cambiamento di coordinate è canonico e le equazioni di Hamilton rimangono invariate. Questo è dovuto al fatto che il nostro cambiamento di coordinate è stato fatto solo al livello delle posizioni e per i momenti si usa la trasformazione indotta. In termini matematici, un cambiamento di coordinate nella base determina univocamente un cambiamento di base nei fibrati tangente e cotangenti (in particolare, questo giustifica l'uso delle coordinate generalizzate in meccanica lagrangiana).

Tuttavia, nella formulazione hamiltoniana, si possono utilizzare cambiamenti di coordinate nello spazio delle fasi (delle posizioni e dei momenti). Il vantaggio di avere un maggior numero di trasformazioni ammissibili è evidente: una trasformazione delle sole coordinate potrebbe non mettere in evidenza una variabile ciclica (ribadiamo che la presenza di integrali primi permette, almeno in via di principio, di integrare il sistema).

Prima di dare le definizioni formali di trasformazioni canoniche e le relative proprietà andiamo a costruire l'apparato matematico che ci permetterà di analizzare meglio il problema.

1.2 Parentesi di Poisson

In questa sezione vengono introdotte le parentesi di Poisson che sono un utile strumento in meccanica hamiltoniana sia per riscrivere in forma sintetica le equazioni di Hamilton sia per caratterizzare gli integrali primi.

Definizione 1. *Date due funzioni differenziabili $A = A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ e $B = B(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ si definisce la parentesi di Poisson di A, B come:*

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{p}_i}\frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{q}_i} - \frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{q}_i}\frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{p}_i}$$

Il simbolo $\frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}_i}\frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}_i}$ è usato al posto di

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial A}{\partial p_{ij}}\frac{\partial B}{\partial q_{ij}}.$$

Elenchiamo ora alcune proprietà delle parentesi di Poisson (sono conseguenza delle analoghe proprietà delle derivate)

1. $\{A, B\} = -\{B, A\}$;
2. $\{A, c\} = 0$, con c costante;
3. $\{A + C, B\} = \{A, B\} + \{C, B\}$, $\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$;
4. $\{AC, B\} = A\{C, B\} + C\{A, B\}$, $\{A, BC\} = B\{A, C\} + C\{A, B\}$;

5. $\dfrac{\partial}{\partial t}\{A,B\} = \left\{\dfrac{\partial A}{\partial t}, B\right\} + \left\{A, \dfrac{\partial B}{\partial t}\right\},$

per ogni $A, B, C \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$.

Per le coordinate valgono le seguenti relazioni

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, ..., n,$$

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad i, j = 1, ..., n.$$

Infine vale la seguente importante relazione, detta identità di Jacobi

Teorema 2. *Identità di Jacobi.*
Siano $f, g, h \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, allora vale la seguente equazione:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \tag{1.7}$$

La dimostrazione del teorema 2 sarà presentata nel seguito (occorre prima introdurre il campo vettoriale hamiltoniano).

Mostriamo ora come le parentesi di Poisson siano legate alla ricerca di integrali primi:

Proposizione 1. *Si consideri la curva $t \mapsto \boldsymbol{z}(t) = (\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t))$ soluzione delle equazioni di Hamilton* (1.3) *e sia $f : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora*

$$\frac{df}{dt}(\boldsymbol{z}(t)) = \{H, f\}(\boldsymbol{z}(t)).$$

Dimostrazione.

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \{H, f\}(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

□

Corollario 1. *f è un integrale primo del moto se e solo se $\{H, f\} = 0$.*

Analogamente la derivata totale di una grandezza fisica f, che dipendente esplicitamente dal tempo, lungo la traiettoria, si può scrivere come

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \tag{1.8}$$

Diamo ora un importante teorema per la ricerca di integrali primi.

Teorema 3. *di Poisson.*
Siano f e g due integrali del moto. Allora $\{f,g\}$ è un integrale primo del moto.

Dimostrazione. Per l'equazione (1.8) possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} + \{H,\{f,g\}\}.$$

Dalle proprietà delle parentesi di Poisson, si ottiene che

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}.$$

Inoltre, per l'identità di Jacobi (1.7), è possibile scrivere:

$$\{H,\{f,g\}\} = -\{f,\{g,H\}\} - \{g,\{H,f\}\} = +\{f,\{H,g\}\} + \{\{H,f\},g\},$$

pertanto otteniamo:

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \{f,\{H,g\}\} + \{\{H,f\},g\} = \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\}.$$

Poiché f e g sono integrali del moto, la loro derivata totale rispetto al tempo è nulla, quindi $\{f,g\}$ è un integrale primo del moto. □

In generale, non tutti gli integrali del moto generati da $\{f,g\} = 0$ saranno indipendenti. Quindi, salvo casi particolari [2], il risultato precedente non permette di risolvere il problema dell'integrazione delle equazioni del moto.

1.3 Campi vettoriali hamiltoniani

Per introdurre il campo vettoriale hamiltoniano consideriamo anzitutto un sistema di equazioni differenziale del primo ordine in $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}),$$

dove $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ è un campo vettoriale. Ricordiamo che a un campo vettoriale è naturalmente associato un operatore del primo ordine che, con un abuso di linguaggio, indicheremo con lo stesso simbolo usato per il campo vettoriale (sarà chiaro dal contesto in che modo il campo vettoriale debba essere inteso):

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

[2] Per esempio, se in un sistema fisico le componenti x ed y del momento angolare sono integrali primi del moto, allora, per l'identità di Jacobi, anche la componente z sarà un integrale primo del moto.

Sia f una funzione scalare, allora la derivata di f lungo il flusso associato al campo vettoriale $\mathbf{a}$ è data da:

$$\frac{df(\mathbf{x}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}(t)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{a}(f(\mathbf{x}(t))).$$

Analogamente, nello spazio delle fasi, la derivata di una grandezza fisica f non esplicitamente dipendente dal tempo lungo le traiettorie del moto è data da

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \{H, f\}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \right) f|_{(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))} \\ = \mathbf{X}_H(f)(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)).\end{aligned}$$

$\mathbf{X}_H$ è il campo vettoriale hamiltoniano.

In generale, si associa ad una funzione scalare h il campo vettoriale hamiltoniano $\mathbf{X}_h$ che agisce su una funzione g come

$$\mathbf{X}_h(g) = \{h, g\}.$$

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \mathbf{X}_H(z(t)), \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Definiamo ora il flusso Hamiltoniano la funzione $t \mapsto \varphi(t; z_0)$ che associa alla condizione iniziale la soluzione del problema di Cauchy a tempo fissato:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathbf{X}_H(\varphi). \tag{1.9}$$

Si noti che nella definizione di flusso Hamiltoniano non si fa uso esplicito delle coordinate.

Diamo ora una dimostrazione del teorema 2, la dimostrazione esposta si può trovare nel settimo capitolo del libro di meccanica di Landau [5].

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che date $f, g, h \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, vale la seguente equazione:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Notiamo anzitutto che $\{f, g\}$ è una forma bilineare nelle derivate prime di f e di g. L'espressione

$$\{h, \{f, g\}\} = \mathbf{X}_h\{f, g\}$$

è una funzione omogenea lineare delle derivate seconde di f e g. Concentriamoci sulla funzione f: riuniamo i termini in cui compaiono le derivate seconde di f (in altre parole, trascuriamo la prima parentesi in (2) poiché non contiene derivate seconde di f). Otteniamo in questo modo

$$\begin{aligned}\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\} &= \{g,\{h,f\}\}-\{h,\{g,f\}\} = \mathbf{X}_g\{h,f\}-\mathbf{X}_h\{g,f\} = \\ &= \mathbf{X}_g(\mathbf{X}_h f)-\mathbf{X}_h(\mathbf{X}_g f) = (\mathbf{X}_g\mathbf{X}_h-\mathbf{X}_h\mathbf{X}_g)f = [\mathbf{X}_g,\mathbf{X}_h]f.\end{aligned}$$

Vediamo ora che il commutatore non può contenere derivate seconde della funzione f

$$\mathbf{X}_g = \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} = a_k\frac{\partial}{\partial x_k},$$

dove $\mathbf{a} = (\frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}})$, mentre $\mathbf{x} = (\mathbf{q},\mathbf{p})$. Analogamente

$$\mathbf{X}_h = b_l\frac{\partial}{\partial x_l},$$

dove $\mathbf{b} = (\frac{\partial h}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial h}{\partial \mathbf{q}})$. Se ora calcoliamo le composizioni otteniamo:

$$\mathbf{X}_g\mathbf{X}_h = a_k\frac{\partial b_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l} + a_k b_l\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_l},$$

$$\mathbf{X}_h\mathbf{X}_g = b_l\frac{\partial a_k}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k} + a_k b_l\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_k}.$$

Calcolando il commutatore ed usando il lemma di Schwarz per scambiare l'ordine di derivazione, si ottene

$$[\mathbf{X}_g,\mathbf{X}_h] = \left(a_k\frac{\partial b_l}{\partial x_k} - b_k\frac{\partial a_l}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Osserviamo che il commutatore non contiene derivate seconde. Poiché lo stesso ragionamento può essere applicato sia alle derivate seconde di g sia alle derivate seconde di h, si deduce che l'equazione,

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\},$$

non dipende dalle derivate seconde e quindi, essendo lineare nelle derivate seconde, deve essere identicamente nulla.

$\square$

1.4 Forme simplettiche

In questo capitolo definiamo una struttura fondamentale per lo studio della geometria nello spazio delle fasi: la struttura simplettica. Per spiegare tale concetto verrà fatto uso delle forme differenziali, le cui definizioni e proprietà vengono riportate nell'appendice. La struttura simplettica può essere considerata una generalizzazione multidimensionale del concetto di area orientata di un parallelogrammo.

Definizione 2. *Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una varietà differenziabile e sia σ una 2-forma definita su M. σ è una forma simplettica se*

- *σ è una forma chiusa (cioè $d\sigma = 0$).*
- *σ è non degenere ($\forall \xi \in T_{\boldsymbol{x}}M \quad \exists \eta \in T_{\boldsymbol{x}}M$ tale che $\sigma(\boldsymbol{x})(\xi, \eta) \neq 0$).*

Se M è una varietà differenziabile munita di una 2-forma simplettica allora diremo che M è una varietà simplettica.

Esempio 2. *Sia M lo spazio delle fasi con coordinate $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$. Allora*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \tag{1.10}$$

è una forma simplettica. Vedremo nel seguito che questo esempio è particolarmente significativo (localmente tutte le forme simplettiche si riducono alla forma (1.10)). La forma simplettica ω viene chiamata forma simplettica standard.

È utile anche definire la nozione di matrice simplettica.

Definizione 3. *Sia J la matrice $2n \times 2n$ definita come*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

una matrice $A \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ è simplettica se

$$A^t J A = J.$$

Proposizione 2. *Sia A una matrice simplettica. Allora A lascia inalterata la forma simplettica standard ω, cioè*

$$\omega(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \omega(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}) \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2n}$ (pensando tali vettori come vettori colonna), si ha

$$\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \right) (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^t J \mathbf{b} = \mathbf{a}^t A^t J A \mathbf{b} = (A\mathbf{a})^t J A \mathbf{b} = \omega(A\mathbf{a}, A\mathbf{b}).$$

□

1.5 Trasformazioni canoniche

Arriviamo ora al punto cruciale della trattazione, le trasformazioni canoniche. Diamo ora la definizione in termini di parentesi di Poisson.

Definizione 4. *Sia $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ un diffeomorfismo di classe C^∞, diremo che Φ è una trasformazione canonica se conserva le parentesi di Poisson:*

$$\{f, g\} \circ \Phi = \{f \circ \Phi, g \circ \Phi\} \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}). \tag{1.11}$$

In altri termini, date due osservabili classiche, $f = f(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ e $g = g(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, e se $\Phi : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ è canonica allora:

$$\{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \circ \Phi.$$

Osserviamo che se Φ è canonica anche Φ^{-1} lo è:

$$\begin{aligned}\left\{f \circ \Phi^{-1}, g \circ \Phi^{-1}\right\} &= \left\{f \circ \Phi^{-1}, g \circ \Phi^{-1}\right\} \circ (\Phi \circ \Phi^{-1}) = \\ &= \left\{f \circ \Phi^{-1} \circ \Phi, g \circ \Phi^{-1} \circ \Phi\right\} \circ \Phi^{-1} = \{f, g\} \circ \Phi^{-1}.\end{aligned}$$

Teorema 4. *Sia $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ una trasformazione canonica. Allora Φ conserva le equazioni di Hamilton.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ una soluzione dell'equazione di Hamilton

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}_H(\mathbf{z}) = \{H, \mathbf{z}\},$$

nell'equazione precedente in simbolo $\{H, \mathbf{z}\}$ deve essere interpretato nel modo seguente

$$(\{H, \mathbf{z}\})_i(t) = \begin{cases} \{H, q_i\}(\mathbf{z}(t)), & \text{se } i = 1, \dots, n, \\ \\ \{H, p_i\}(\mathbf{z}(t)), & \text{se } i = n+1, \dots, 2n, \end{cases} \tag{1.12}$$

con $i = 1, \dots, 2n$. Poniamo

$$\mathbf{Z}(t) = \Phi(\mathbf{z}(t)).$$

Allora, dal Teorema 1 otteniamo che

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Z}}(t) &= \{H, \Phi\}(\mathbf{z}(t)) = \{H, \Phi\}(\Phi^{-1}(\mathbf{Z}(t))) \\ &= \left\{H \circ \Phi^{-1}, \Phi \circ \Phi^{-1}\right\}(\mathbf{Z}(t)) = \left\{H \circ \Phi^{-1}, \mathbf{Z}\right\}.\end{aligned}$$

□

È possibile dare una caratterizzazione delle trasformazioni canoniche che è molto utile nella pratica.

Proposizione 3. *La trasformazione* $\Phi : (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \mapsto (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$ *è canonica se e solo se*

$$\{Q_i, Q_j\}_{p,q} = \{P_i, P_j\}_{p,q} = 0, \quad \{Q_i, P_j\}_{p,q} = \delta_{ij} \tag{1.13}$$

Dimostrazione. L'affermazione diretta (ossia che se la trasformazione è canonica valgono le (1.13)) è ovvia[3]. Verifichiamo l'affermazione inversa:

$$\{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}_{q,p} = \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial(g \circ \Phi)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial(g \circ \Phi)}{\partial \mathbf{p}} \,. \tag{1.14}$$

Osservando che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial \mathbf{p}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial Q_i}(\Phi(q,p)) \frac{\partial Q_i}{\partial \mathbf{p}}(q,p) + \frac{\partial f}{\partial P_i}(\Phi(q,p)) \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{p}}(q,p)\,, \\ \dfrac{\partial(g \circ \Phi)}{\partial \mathbf{q}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial Q_i}(\Phi(q,p)) \frac{\partial Q_i}{\partial \mathbf{q}}(q,p) + \frac{\partial g}{\partial P_i}(\Phi(q,p)) \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{q}}(q,p)\,, \\ \dfrac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial \mathbf{q}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial Q_i}(\Phi(q,p)) \frac{\partial Q_i}{\partial \mathbf{q}}(q,p) + \frac{\partial f}{\partial P_i}(\Phi(q,p)) \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{q}}(q,p)\,, \\ \dfrac{\partial(g \circ \Phi)}{\partial \mathbf{p}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial Q_i}(\Phi(q,p)) \frac{\partial Q_i}{\partial \mathbf{p}}(q,p) + \frac{\partial g}{\partial P_i}(\Phi(q,p)) \frac{\partial P_i}{\partial \mathbf{p}}(q,p)\,, \end{cases}$$

(1.14) e (1.13) implicano la conclusione

$$\{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \circ \Phi.$$

□

Osserviamo che le condizioni (1.13) possono essere scritte in forma compatta come: $(\Phi')^t J \Phi' = J$ dove Φ' è la matrice Jacobiana associata a Φ. Pertanto possiamo dire che Φ è una trasformazione canonica se e solo se Φ' è simplettica in ogni punto del suo dominio.

L'elemento di volume nello spazio delle fasi è dato da

$$d\Gamma = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n.$$

Dato un sottoinsieme A dello spazio delle fasi, il suo volume è dato dall'integrale

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A d\Gamma.$$

Mostriamo ora che, se facciamo un cambiamento di coordinate canonico, il volume di una regione dello spazio delle fasi rimane invariato.

[3] Se Φ preserva le parentesi di Poisson, allora, per ogni f, g vale che $\{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \circ \Phi$, in particolare questo vale per le variabili $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$

Teorema 5 (Teorema di Liouville)**.** *Sia Φ una trasformazione canonica ed A un sottoinsieme dello spazio delle fasi. Allora il volume di A è uguale al volume di $\Phi(A)$, in altre parole il volume è invariante rispetto a Φ.*

Dimostrazione. Si ha che

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A d\Gamma = \int_{\Phi(A)} |\det\big[(\Phi^{-1})'\big]| dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n.$$

Poiché Φ^{-1} è canonica sappiamo che lo jacobiano $(\Phi^{-1})'$ è una matrice simplettica, pertanto:

$$\begin{aligned}\det\big[[(\Phi^{-1})']^t J(\Phi^{-1})'\big] &= \det\big([(\Phi^{-1})']^t\big)\det J \det\big[(\Phi^{-1})'\big]\\ &= [\det\big[(\Phi^{-1})'\big]]^2 \det J = \det J.\end{aligned}$$

Quindi, visto che $\det J \neq 0$, si deduce che $\det[(\Phi^{-1})'] = \pm 1$ e perciò

$$\mathrm{Vol}(\Phi(A)) = \mathrm{Vol}(A).$$

□

Osserviamo che Φ preserva l'orientazione, cioè $\det \Phi' = 1$(visto che non sarà utilizzata nel seguito, non dimostreremo questa proprietà).

Proposizione 4. *Una trasformazione dallo spazio delle fasi nello spazio delle fasi Φ è canonica se e solo se $\Phi^*\omega = \omega$, con $\omega = dp_i \wedge dq_i$.*

Dimostrazione.

$$(\Phi^*\omega)(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \omega(\Phi'\boldsymbol{\xi}, \Phi'\boldsymbol{\eta}) = (J\Phi'\boldsymbol{\xi})(\Phi'\boldsymbol{\eta}) = {\Phi'}^t J\Phi'\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta} = J\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\eta} = \omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}).$$

□

Esempio 3. $\Phi : (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \mapsto (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) = (-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ *è una trasformazione canonica. Infatti, $dQ_i = -dp_i$ e $dP_i = dq_i$ implicano che*

$$dP_i \wedge dQ_i = -dq_i \wedge dp_i = dp_i \wedge dq_i.$$

L'esempio mostra come le coordinate e gli impulsi possano trasformarsi l'una nell'altro, pertanto, da un punto di vista matematico, la differenza tra q,p è una questione di semplice nomenclatura.

Esempio 4. *La trasformazione $\Phi^\# : \boldsymbol{q} \mapsto \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q})$ si estende alla trasformazione canonica $\Phi : (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \mapsto (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) = (\Phi^\#(\boldsymbol{q}), [(\Phi'^\#(\boldsymbol{q}))^t]^{-1}\boldsymbol{p})$. Per verificare la canonicità di Φ basta provare che $p_k dq_k = P_k dQ_k$ infatti*

$$d(p_k dq_k) = dp_k \wedge dq_k = d(P_k dQ_k) = dP_k \wedge dQ_k, \tag{1.15}$$

mostriamo ora che l'equazione (1.15) *è soddisfatta*

$$P_k dQ_k = \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\cdot Q' d\boldsymbol{q} = \boldsymbol{P}\cdot \Phi'^{\#}(d\boldsymbol{q}) = (\Phi'^{\#})^t \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{q} = p_k dq_k.$$

Si noti inoltre che la mappa Φ *trasforma l'hamiltoniana*

$$\frac{1}{2}\sum_i \frac{p_i^2}{m_i} + V(\boldsymbol{q}) = H \mapsto \Phi(H) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}(\boldsymbol{Q})P_i, P_j + (V\circ\Phi^{-1})(\boldsymbol{Q}).$$

L'esempio fornisce una spiegazione di ciò che avviene in meccanica lagrangiana e del perché non ci si preoccupi della ricerca di trasformazioni canoniche: ogni cambiamento di coordinate induce naturalmente un cambiamento sulle velocità che rende la trasformazione canonica.

Proposizione 5. *Il flusso hamiltoniano* $\varphi_t : (\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0) \mapsto (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ *è una trasformazione canonica.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 4 , φ_t è canonica se e solo se

$$\varphi_t^*\omega = \omega \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi_t^*\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi_0^*\omega}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1.16}$$

Se vale la condizione (1.16) allora vale anche

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi_t^*\omega}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0, \tag{1.17}$$

difatti per un arbitrario tempo t_0 abbiamo

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi_t^*\omega}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{t+t_0}^*\omega}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_{t_0}^*(\varphi_t^*\omega)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \varphi_{t_0}^*\left.\frac{\mathrm{d}\varphi_t^*\omega}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \varphi_{t_0}^*\frac{\mathrm{d}\varphi_0^*\omega}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Essendo interessati a vedere cosa accade per tempi piccoli applichiamo la formula di Taylor alle variabili $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ vicino ai valori iniziali $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \left.\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\right|_{t=0} t + O(t^2)$$
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \left.\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\right|_{t=0} t + O(t^2),$$

dove sono state applicate le equazioni di Hamilton (1.2).

Calcoliamo ora la forma simplettica per un tempo $t \mapsto 0$ fissato

$$d\mathbf{p}\wedge d\mathbf{q} = d\left(\mathbf{p}_0 - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_0}\right)\wedge d\left(\mathbf{p}_0 - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_0}\right) = \left(d\mathbf{p}_0 - td\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_0}\right)\wedge\left(d\mathbf{q}_0 + td\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_0}\right),$$

Se ora passiamo alle componenti otteniamo

$$dp_j \wedge dq_j = \left(dp_{0_j} - td\frac{\partial H}{\partial q_{0_j}}\right) \wedge \left(dq_{0_j} + td\frac{\partial H}{\partial p_{0_j}}\right) =$$
$$\left(dp_{0_j} - t\frac{\partial^2 H}{\partial q_{0_k}\partial q_{0_j}}dq_{0_k} - t\frac{\partial^2 H}{\partial p_{0_k}\partial q_{0_j}}dp_{0_k}\right) \wedge \left(dq_{0_j} + t\frac{\partial^2 H}{\partial q_{0_i}\partial p_{0_j}}dq_{0_i} + t\frac{\partial^2 H}{\partial p_{0_i}\partial p_{0_j}}dp_{0_i}\right). \tag{1.18}$$

Notiamo che tramite un conto diretto che i seguenti membri dell'equazione (1.18)

$$dp_{0_k} \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial p_{0_k}\partial p_{0_j}}dp_{0_k} = 0 = dq_{0_k} \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial q_{0_k}\partial q_{0_j}},$$

mentre i termini contenenti i differenziali misti si elidono applicando il lemma di Schwarz e i termini contenenti t^2 vengono trascurati. Pertanto otteniamo

$$d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = d\mathbf{p}_0 \wedge d\mathbf{q}_0 + O(t^2),$$

poiché la forma simplettica è conservata per tempi piccoli allora, per l'equazione (1.17), la dimostrazione è conclusa. □

1.6 Funzioni generatrici

Concentriamoci ora su un problema di natura pratica: come si costruiscono le trasformazioni canoniche? Come abbiamo visto nella precedente sezione abbiamo numerosi metodi per verificare se una trasformazione Φ sia canonica o meno, ma nessun criterio per sapere come ottenere una trasformazione canonica. Supponiamo inizialmente di avere già una trasformazione canonica $\Phi : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ e consideriamo il grafico di Φ

$$\Gamma = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) : \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})\}.$$

Dalla proposizione 4 sappiamo che Φ conserva la forma simplettica perciò, definendo la 1-forma differenziale $\alpha = q_i dp_i + P_i dQ_i$, abbiamo

$$d\,\alpha\Big|_\Gamma = dq_i \wedge dp_i\Big|_\Gamma + dP_i \wedge dQ_i\Big|_\Gamma = -\,dp_i \wedge dq_i\Big|_\Gamma + dP_i \wedge dQ_i\Big|_\Gamma = 0.$$

Possiamo ora applicare il Teorema 18 (si veda la sezione A.9 dell'appendice) pertanto esisterà localmente in Γ una funzione S tale che $dS = q_i dp_i + P_i dQ_i$.

Supponiamo ora che Φ sia una piccola perturbazione dell'identità, perciò è lecito usare le coordinate $(\mathbf{p}, \mathbf{Q})$ piuttosto che $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Il differenziale della funzione S sarà

$$dS(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial S}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i}dQ_i = q_i dp_i + P_i dQ_i,$$

da cui si ottiene

$$
\begin{aligned}
q_i &= \frac{\partial S}{\partial p_i} \\
P_i &= \frac{\partial S}{\partial Q_i}.
\end{aligned}
$$

La funzione S è chiamata funzione generatrice della trasformazione canonica Φ. Vediamo ora che i nostri passi per ottenere la funzione generatrice S possono essere invertiti permettendo di ottenere Φ.

Proposizione 6. *Sia $S(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{Q})$ una piccola perturbazione di $p_i Q_i$, allora definendo le variabili $q_i = \partial S/\partial p_i$,$P_i = \partial S/\partial Q_i$ otteniamo una trasformazione canonica $\Phi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \mapsto (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P})$.*

Dimostrazione. Il grafico $\Gamma = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P})\} : \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ è una varietà essendo il grafico di una funzione liscia. Essendo $S(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ una piccola perturbazione di $p_i Q_i$, S può essere scritta come $S = \mathbf{p} \cdot \mathbf{Q} + E$ con E sufficientemente piccola. Se ora calcoliamo

$$
\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{Q} \partial \mathbf{p}} = I + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{Q} \partial \mathbf{p}} \simeq I \Rightarrow det \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{Q} \partial \mathbf{p}} \neq 0,
$$

pertanto possiamo applicare il teorema della funzione implicita quindi è possibile utilizzare sia le variabili (q_i, p_i) che le variabili (p_i, Q_i) come coordinate. In particolare possiamo considerare Γ come il grafico della mappa $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Dalle ipotesi segue che

$$
dS(\mathbf{p}, \mathbf{Q})\Big|_{\Gamma} = \left(\frac{\partial S}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i \right)\Big|_{\Gamma} = (q_i dp_i + P_i dQ_i)\Big|_{\Gamma}.
$$

Essendo $d^2 S = 0$ (il differenziale del differenziale di una forma è sempre nullo) concludiamo che

$$
d^2 S\Big|_{\Gamma} = (dq_i \wedge dp_i + dP_i \wedge dQ_i)\Big|_{\Gamma} = 0,
$$

pertanto la forma simplettica è conservata, dalla proposizione 4 segue che Φ è una trasformazione canonica. □

Capitolo 2

Teorema di Frobenius

In questo capitolo vedremo diversi teoremi utili per l'analisi locale delle equazioni differenziali ordinarie e daremo una dimostrazione del teorema di Frobenius. In particolare è stato seguito il libro di Arnold [2], eccezion fatta per la dimostrazione del teorema di Frobenius e corollari in cui è stata seguita l'appendice C del libro di Hörmander [4].

2.1 Teorema di rettificazione di un campo vettoriale

Si consideri l'equazione differenziale $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, dove $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ è un campo vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Ci chiediamo se localmente esista un opportuno cambiamento di coordinate tale per cui le direzioni del campo siano tutte parallele tra di loro. In alre parole, rettificare un campo vettoriale significa trovare un diffeomorfismo che trasforma le direzioni del campo in direzioni tra di loro parallele. Se tale diffeomorfismo esiste, allora il campo vettoriale viene detto rettificabile.

La domanda naturale è chiedersi sotto quali condizioni un campo vettoriale sia rettificabile. Il seguente teorema risponde a tale domanda.

Teorema 6. *Sia $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ un campo vettoriale di classe C^∞ definito da un intorno di $\boldsymbol{0}$ in $\mathbb{R}^n$ tale che: $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{0}) \neq \boldsymbol{0}$, allora esiste un sistema di coordinate $y_1, ..., y_n$ in un intorno di $\boldsymbol{0}$ tali che $\boldsymbol{v} = \hat{\mathbf{e}}_1$, dove $\hat{\mathbf{e}}_1$ è il versore relativo all'asse y_1.*

Si noti che la condizione di cui bisogna preoccuparsi è $\mathbf{v}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, ossia che il campo sia non singolare, poiché generalmente i campi vettoriale in fisica sono quasi sempre sufficientemente regolari.

Prima di cominciare la dimostrazione introduciamo la nozione di spazio trasverso e dimostriamo un lemma che sarà utile alla prova del teorema:

Definizione 5. *Siano L uno spazio vettoriale, V e W due sottospazi di L allora, V, W si dicono trasversi se la loro somma diretta dà l'intero spazio vettoriale L.*

Lemma 1. *Siano L, M due spazi vettoriali ed $A : L \mapsto M$ una applicazione lineare che trasforma una coppia di sottospazi vettoriali trasversi $V, W \subset L$ in una coppia di sottospazi vettoriali trasversi $AV, AW \subset M$. Allora A è surriettiva.*

Dimostrazione. $AL = AV + AW = M$. □

Diamo la dimostrazione del teorema 6.

Dimostrazione. Consideriamo la mappa $\mathbf{G} : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{G}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{x}$, dove $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-1}$. $\mathbf{G}$ pertanto associa al dominio esteso dell'equazione differenziale la sua soluzione, con la condizione iniziale che $\mathbf{x}(0) = (\mathbf{a}, t = 0) \in \mathbb{R}^n$. Vogliamo mostrare che G è una rettificazione diffeomorfa nell'intorno dell'origine. Anzitutto notiamo che poiché il campo vettoriale è differenziabile allora $\mathbf{G}$ è differenziabile.

Mostriamo ora che $\mathbf{G}^{-1}$ è una rettificazione del campo $\mathbf{v}$. Siano $\hat{\mathbf{e}}_1, ..., \hat{\mathbf{e}}_{n-1}$ i versori lungo gli assi $a_1, ..., a_{n-1}$ e $\hat{\mathbf{e}}$ il versore che in $\mathbb{R}^n$ punta lungo t. Abbiamo

$$G'(\mathbf{a}, t)(\hat{\mathbf{e}}) = \frac{d}{ds}\mathbf{G}((\mathbf{a}, t) + s\hat{\mathbf{e}})\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\mathbf{G}(\mathbf{a}, t + s)\Big|_{s=t} = \mathbf{v}(\mathbf{G}(\mathbf{a}, t)). \tag{2.1}$$

Dall'equazione (2.1) segue che

$$G'^{-1}(\mathbf{v}(\mathbf{G}(\mathbf{a}, t)) = \hat{\mathbf{e}}. \tag{2.2}$$

Dall'equazione (2.2) deduciamo che G^{-1} è una rettificazione, poiché trasforma i vettori del campo vettoriale $\mathbf{v}$ nel versore $\hat{\mathbf{e}}$.

Facciamo ora vedere che $\mathbf{G}$ è un diffeomorfismo locale: per definizione di G' e dall'equazione (2.2) segue che

$$G'(\mathbf{0}, 0)\Big|_{\mathbb{R}^{n-1}} = I\Big|_{\mathbb{R}^{n-1}} \text{ e } G'(\mathbf{0}, 0)\Big|_{\mathbb{R}} = \mathbf{v}(\mathbf{0}).$$

Poiché $G'(\mathbf{0}, 0)$ trasforma sottospazi vettoriali trasversi in sottospazi vettoriali trasversi allora il suo rango è n e per il teorema della funzione inversa essa risulta invertibile e pertanto è un diffeomorfismo locale.

Se ora rettifichiamo il campo e consideriamo le coordinate cartesiane in cui y_1 ha la stessa direzione delle linee del campo rettificato otteniamo ciò che volevamo dimostrare. □

Esempio 5. *Consideriamo $\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}$. Per rettificare il campo si deve risolvere l'equazione differenziale ordinaria*

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{t} = x^2 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = \eta. \end{cases}$$

da cui si ricava $x = t, y = \frac{t^3}{3} + \eta$. *Se ora ci ricaviamo* t, η *in funzione di* x, y *otteniamo* $t = x, \eta = y - \frac{x^3}{3}$. *Calcoliamo le derivate parziali*

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t} - x^2\frac{\partial}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Il campo vettoriale diventa

$$\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} - x^2\frac{\partial}{\partial \eta} + x^2\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Con un tale campo vettoriale abbiamo $\boldsymbol{G} = (t, \eta + \frac{t^3}{3})$ *e* $\boldsymbol{G}^{-1} = (x, y - \frac{x^3}{3})$ *mentre*

$$G' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow G'^{-1} = \begin{pmatrix} -x^2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come mostrato nel teorema si ha che

$$G' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}.$$

Supponiamo di essere in $\mathbb{R}^{2n}$ cioè nello spazio delle fasi e consideriamo l'hamiltoniana $H(q, p)$. Fissate le condizioni iniziali $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$ e date le equazioni di Hamilton

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \end{pmatrix}$$

Se ora supponiamo che $d\mathbf{H}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \neq \mathbf{0}$ allora siamo nelle condizioni di applicare il teorema di rettificazione, pertanto esistono le coordinate $y_1, ... y_{2n}$ tali che:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} \mapsto \hat{\mathbf{e}}_1$$

Una hamiltoniana scritta in tale coordinate renderebbe banale l'integrazione del sistema. Tuttavia tale cambiamento di coordinate non sarà in generale canonico, il teorema di Darboux che verrà dimostrato alla fine di questa trattazione colmerà tale lacuna. E' fondamentale che il cambiamento di coordinate sia canonico, se così non fosse non si avrebbe garanzia alcuna che le equazioni di Hamilton rimangano invariate nelle nuove coordinate.

2.2 Equazioni alle derivate parziali del primo ordine

In tale capitolo vengono introdotte alcune nozioni utili alla dimostrazione del teorema di Frobenius.

Consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea alle derivate parziali:

$$a_1(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + a_n(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{2.3}$$

dove $\mathbf{v} = (a_1, ..., a_n)$ è un campo vettoriale in $\mathbb{R}^n$. E' possibile sostituire $\mathbb{R}^n$ con una varietà differenziabile M.

Definizione 6. *Le soluzioni dell'equazione*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}),$$

sono le curve caratteristiche per l'equazione (2.3)*.*

Diamo il seguente teorema:

Teorema 7. *u è costante lungo le caratteristiche se e solo se u è soluzione dell'equazione* (2.3)*.*

Dimostrazione. Dall'equazione (2.3) abbiamo che

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} u = 0 = \dot{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\nabla} u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0,$$

da cui segue che u è un integrale primo del moto e quindi è costante lungo le caratteristiche. Salvo il caso banale in cui u sia identicamente nulla l'uguaglianza può essere percorsa anche nel verso opposto, pertanto la dimostrazione del teorema è conclusa. □

Definizione 7. *Sia Γ una ipersuperficie differenziabile sulla varietà differenziabile M e φ una funzione differenziabile data su questa superficie. Si dice problema di Cauchy per l'equazione* (2.3) *il problema che consiste nel trovare una soluzione u che soddisfi:*

$$u\Big|_{\Gamma} = \varphi.$$

La ipersuperficie Γ viene detta ipersuperficie iniziale e la funzione φ condizione iniziale.

Il problema di Cauchy non sempre ha soluzione: supponiamo che la curva caratteristica intersechi la superficie iniziale due volte e che in tali punti φ assuma valori differenti. Poiché lungo la caratteristica u dev'essere costante, allora φ, nei punti in cui la superficie iniziale incrocia la caratteristica, deve assumere gli stessi valori.

Definizione 8. *Un punto* $\boldsymbol{x}$ *sulla ipersuperficie iniziale* Γ *è detto non caratteristico se la caratteristica passante per tale punto non è tangente all'ipersuperficie iniziale, cioè se la caratteristica passante per tale punto e l'ipersuperficie iniziale sono trasversali.*

Teorema 8. *Sia* $\boldsymbol{x}$ *un punto non caratteristico sulla ipersuperficie iniziale. Allora esiste sempre un intorno* U *del punto* $\boldsymbol{x}$ *tale che il problema di Cauchy per l'equazione* (2.3) *in tale intorno ha una e una sola soluzione.*

Dimostrazione. Si vuole mostrare che l'equazione

$$\mathbf{v}(u) = \mathbf{0} \qquad u\Big|_{\Gamma} = \varphi,$$

Ammette un'unica soluzione nell'intorno di un punto non caratteristico $\mathbf{x} \in \Gamma$. Siano $z_1, ..., z_n$ un sistema di coordinate locali (in un intorno di $\mathbf{x}$) tale che, in tali coordinate, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$ (le coordinate $z_1, ..., z_n$ rettificano quindi il campo $\mathbf{v}$). Sia, in tale intorno, $\Gamma = \{\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\}$, con F di classe C^∞. Allora, essendo $\mathbf{0}$ non caratteristico, $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z_1} \neq \mathbf{0}$ e, per il teorema della funzione implicita $\Gamma = \{z_1 = f(z_2, ..., z_n)\}$(in un intorno di $\mathbf{0}$), con f di classe C^∞.

Il problema in esame, nelle nuove coordinate, diventa

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = 0, \quad u(f(z_2, ..., z_n), z_2, ..., z_n) = \varphi(f(z_2, ..., z_n), z_2, ..., z_n),$$

che ammette, come unica soluzione,

$$(z_1, ..., z_n) \mapsto \varphi(f(z_2, ..., z_n), z_2, ..., z_n).$$

□

2.3 Campo di iperpiani completamente integrabile

Sia M^n una varietà regolare sulla quale è definito un campo di iperpiani tangenti. Nell'intorno di un punto $\mathbf{x}_0 \in M^n$ è definita una 1-forma differenziale α non nulla. Tale 1-forma è definita a meno di una moltiplicazione per funzioni $f \neq 0$. I vettori che generano gli iperpiani tangenti fanno parte del $Ker(\alpha)$ punto per punto.

Definizione 9. *Un campo di iperpiani si dice completamente integrabile se la forma differenziale* $d\alpha$ *si annulla identicamente:* $d\alpha\Big|_{Ker(\alpha)} \equiv 0$.

Si noti che la proprietà del campo di essere completamente integrabile non dipende dalla scelta della forma α:

$$Ker(f\alpha) = Ker(\alpha) \Rightarrow df\alpha\Big|_{Ker(\alpha)} = df \wedge \alpha + fd\alpha = 0,$$

poiché α è completamente integrabile.

Teorema 9. *Il campo di iperpiani $\alpha = 0$ è completamente integrabile se e solo vale la condizione di integrabilità di Frobenius, cioè $\alpha \wedge d\alpha$ =0.*

Dimostrazione. Cominciamo con la dimostrazione nel senso diretto: $d\,\alpha\big|_{\alpha=0} \equiv 0 \Rightarrow \alpha \wedge d\alpha = 0$. Fissiamo un iperpiano e una base su tale iperpiano: $\hat{\mathbf{e}}_1, ..., \hat{\mathbf{e}}_{n-1}$. Completiamo la base rispetto ad $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $\hat{\mathbf{f}}$ che è un versore normale all'iperpiano, pertanto $\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = 0 \quad i = 1, ..., n-1$.

Osserviamo cosa succede quando guardiamo la 3 forma $\alpha \wedge d\alpha$ contro i versori di base: $\alpha \wedge d\alpha(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\mathbf{e}}_k) = 0 \quad \forall i, j, k = 1, ..., n-1$ poiché $\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\mathbf{e}}_k$ appartengono al $Ker(\alpha)$. L'unica possibilità, per non ottenere 0, è utilizzare il versore $\hat{\mathbf{f}}$, in tal caso si ottiene $d\alpha(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\mathbf{f}}) = 0$ ($\hat{\mathbf{e}}_i$ appartiene al $Ker(\alpha)$).

Guardiamo ora l'affermazione inversa: $d\alpha\big|_{\alpha=0} \equiv 0 \Leftarrow \alpha \wedge d\alpha = 0$.

Poiché $\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j$ appartengono al $Ker(\alpha)$ allora l'unico termine che a priori potrebbe non annullarsi in $\alpha \wedge d\alpha = 0$ è $\alpha(\hat{\mathbf{f}})d\alpha(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j)$, pertanto tale termine si deve annullare. Poiché $\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j$ appartengono al $Ker(\alpha)$ si conclude che $d\alpha\big|_{\alpha=0} = 0$. □

2.4 Teorema di Frobeius

Questa sezione è dedicata al teorema di Frobenius che può essere considerato un'estensione del teorema di rettificazione di un campo vettoriale.

Definizione 10. *Siano **v**,**w** due campi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ differenziabili, allora il commutatore tra **v** e **w** vale*

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] \equiv \mathbf{v}(\mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{v}) = \left(v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - w_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

poiché per il lemma di Schwarz le derivate commutano e quindi le derivate seconde si elidono.

Il commutatore di due operatori è a sua volta un operatore che verrà applicato a una funzione scalare.

Diamo ora il teorema di Frobenius che dà delle condizioni riguardo l'esistenza di superfici integrali nel caso in cui la condizione di Frobenius sia valida.

Teorema 10. *Siano $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_r$ campi vettoriali di classe C^∞ definiti in un intorno di $\boldsymbol{0}$ di $\mathbb{R}^n$ tali che*

1. $\mathbf{v}_1(\boldsymbol{0}), ..., \mathbf{v}_r(\boldsymbol{0})$ *siano linearmente indipendenti,*

2. $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = c_{ijk}\mathbf{v}_k$.

Allora esiste un insieme di coordinate locali $y_1, ..., y_n$ tale che

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = b_{ij}\mathbf{v}j \quad i = 1, ..., r$$

con b_{ij} matrice invertibile $r \times r$.

Ci occorre il seguente lemma.

Lemma 2. *Se $\mathbf{v}_j$ soddisfano le ipotesi 1,2 allora anche $\mathbf{V}_i = a_{ij}\mathbf{v}_j \quad i = 1, ..., r$ soddisfano ancora le ipotesi 1,2 (a patto che il determinante di a_{ij} sia diverso da zero). Inoltre le condizioni 1,2 non dipendono dal sistema di coordinate.*

Dimostrazione. 1. La matrice a_{ij} ha rango massimo, quindi trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.

2. Se calcoliamo il commutatore tra $\mathbf{V_i}, \mathbf{V_j}$ otteniamo

$$\begin{aligned}[\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j] = [a_{ik}\mathbf{v_k}, a_{jl}\mathbf{v_l}] = a_{ik}\mathbf{v}_k(a_{jl}\mathbf{v}_l) - a_{jl}\mathbf{v}_l(a_{ik}\mathbf{v}_k) = \\ a_{ik}(\mathbf{v}_k a_{jl})\mathbf{v}_l + a_{ik}a_{jl}\mathbf{v}_k(\mathbf{v}_l) - a_{jl}(\mathbf{v}_l a_{ik})\mathbf{v}_k - a_{jl}a_{ik}\mathbf{v}_l(\mathbf{v}_k) \\ = a_{ik}a_{jl}[\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l] + a_{ik}(\mathbf{v}_k a_{jl})\mathbf{v}_l - a_{jl}(\mathbf{v}_l a_{ik})\mathbf{v}_k,\end{aligned}$$

gli ultimi due termini dell'equazione sono uguali (gli indici l,k sono indici di sommatoria). Utilizzando l'ipotesi $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = c_{ijk}\mathbf{v}_k$ otteniamo

$$[\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j] = a_{ik}a_{jl}c_{klp}\mathbf{v}_p = \tilde{C}_{ijp}\mathbf{v}_p = \tilde{C}_{ijp}a^{-1}_{kp}\mathbf{V}_p = C_{ijk}\mathbf{V}_k.$$

Le condizioni 1,2 sono invarianti sotto cambio di coordinate; consideriamo una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{w}_i = f'_{ij}\mathbf{v}_j$ con $det f'_{ij} \neq 0$. La condizione 1 è soddisfatta essendo il determinante di f'_{ij} non nullo. Verifichiamo che sussiste ancora la condizione 2, in altre parole se $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = c_{ijk}\mathbf{v}_k \Rightarrow [\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j] = C_{ijk}\mathbf{w}_k$. Mostriamo la seguente proprietà del commutatore

$$f'[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = [f'\mathbf{v}_i, f'\mathbf{v}_j],$$

tramite un conto diretto

$$\begin{aligned}f'[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]g = [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j](g(f)) = \mathbf{v}_i(\mathbf{v}_j(g(f))) - \mathbf{v}_j(\mathbf{v}_i(g(f))) = \mathbf{v}_i((f'\mathbf{v}_j)g) - \mathbf{v}_j((f'\mathbf{v}_i)g) = \\ f'(\mathbf{v}_i)((f'\mathbf{v}_j)g) - f'(\mathbf{v}_j)((f'\mathbf{v}_i)g) = [f'\mathbf{v}_i, f'\mathbf{v}_j]\end{aligned} \tag{2.4}$$

Utilizzando la (2.4) vale che

$$[\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j] = \left[f'_{ij}\mathbf{v}_j, f'_{ij}\mathbf{v}_i\right] = f'_{ij}[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = f'_{ij}c_{ijk}\mathbf{v}_k = f'(f'^{-1})^T c_{ijk}\mathbf{w}_k = C_{ijk}\mathbf{w}_k.$$

□

Diamo ora la dimostrazione del teorema 10.

Dimostrazione. Applicando il lemma 2 si evince che le ipotesi 1,2 sono necessarie affinché la conclusione sia vera; data la tesi $\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{r} b_{ij}\mathbf{v}_j$ verifichiamo che essa implica le ipotesi 1,2. Chiaramente poiché i vettori $\frac{\partial}{\partial y_i}$ sono tra di loro indipendenti e la matrice b_{ij} è invertibile allora essa trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti. Per quanto riguarda l'ipotesi 2 dal Lemma 2 sappiamo che le nostre ipotesi sono invarianti per cambiamenti di coordinate e, pertanto, visto che l'ipotesi 2 vale per $\partial/\partial y_i$ deve valere anche per $\mathbf{v}_i$.

Il teorema nel caso in cui r=1 è esattamente il teorema di rettificazione che abbiamo già provato, pertanto possiamo cambiare variabili in modo che sia $\mathbf{v} = \partial/\partial x_1$. Se ora facciamo la seguente trasformazione:

$$\mathbf{v}_1 \mapsto \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2 \mapsto \mathbf{v}_2 - f_{21}\mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r \mapsto \mathbf{v}_r - f_{r1}\mathbf{v}_r, \tag{2.5}$$

con $\mathbf{v}_j = f_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Tramite la trasformazione (2.5) stiamo annullando la prima componente dei restanti $r-1$ campi vettoriali. La trasformazione (2.5) ha determinante non nullo:

$$(2.5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -f_{21} & 1 & 0 & ... & 0 \\ -f_{31} & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -f_{r1} & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -f_{21} & 1 & 0 & ... & 0 \\ -f_{31} & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -f_{r1} & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Grazie alla trasformazione (2.5) possiamo scrivere restanti r-1 vettori come

$$\mathbf{v}_j = \sum_{l=2}^{n} b_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Se ci mettiamo nel punto in cui $x_1 = 0$ visto che i $\mathbf{v}_j$ non dipendono da x_1 avremo che $\mathbf{v}_j = \sum_{l=2}^{n} b_{jl}\big|_{x_1=0}\,\partial/\partial x_l$. Ci chiediamo ora se tali vettori rispettano le ipotesi 1,2. L'ipotesi 1 è ovvia visto che il determinante della (2.5) è diverso da 0. Verifichiamo la condizione 2 con un conto diretto:

$$[\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k]\Big|_{x_1=0} = \sum_{s=2}^{n}\left(\mathbf{v}_j\; b_{js}\Big|_{x_1=0} - \mathbf{v}_k\; b_{ks}\Big|_{x_1=0}\right)\frac{\partial}{\partial x_s} = \sum_{s=2}^{r} C_{jkl}\Big|_{x_1=0}\mathbf{v}_s\Big|_{x_1=0}.$$

Applichiamo ora l'ipotesi induttiva, questo significa richiedere che: $\partial/\partial x_l = b_{lj}\mathbf{v}_j, \quad l = 1, ..., r$ visto che la matrice b_{lj} è invertibile la tesi può essere riscritta come $\mathbf{v}_j = b_{jl}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_l}$. Poiché abbiamo già visto che possiamo scrivere $\mathbf{v}_j = \sum_{l=2}^{n} b_{jl}\,\partial/\partial x_l$ allora la nostra ipotesi induttiva implica che $b_{jl}\big|_{x_1=0} = 0 \quad l = r+1,...,n$, pertanto:

$$b_{jl} = \begin{pmatrix} b_{22} & ... & b_{2r} & 0 & ... & 0 \\ b_{32} & ... & b_{3r} & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{r2} & ... & b_{rr} & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

dove il blocco $(r-1)\times(r-1)$ è invertibile per l'ipotesi 1. Tenendo conto che $\mathbf{v}_1 = \partial/\partial x_1$, si ha

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j] = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(b_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\right) - b_{jl}\frac{\partial x_l}{\partial x_1} = \frac{\partial b_{jl}}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_l} + b_{jl}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_l} - b_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{v}_j.$$

In forza dell'ipotesi 2 vale anche: $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j] = \sum_{k=2}^r C_{1jk}b_{kl}$. Applicando il commutatore al vettore di base x_l otteniamo il problema di Cauchy

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j]x_l = \frac{\partial b_{jl}}{\partial x_1} = \sum_{k=2}^r C_{1jk}b_{kl},$$

come noto la soluzione di tale problema esiste ed è unica. Poiché $b_{jl}\big|_{x_1=0} = 0 \quad l > r$ allora essa si annulla in tutto l'intorno di 0 quando $l > r$ in forza dell'unicità della soluzione del problema di Cauchy il che completa la dimostrazione. □

Corollario 2. *Siano $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r$ vettori che soddisfano le ipotesi 1,2 del teorema di Frobenius e siano $f_1,...,f_r \in C^\infty$ funzioni scalari.*

Allora l'equazione

$$\mathbf{v}_j u = f_j \quad j = 1,...,r. \tag{2.6}$$

ammette una soluzione C^∞ se e solo se

$$\mathbf{v}_i f_j - \mathbf{v}_j f_i = \sum_{k=1}^r C_{ijk} f_k. \tag{2.7}$$

Se S è una varietà C^∞ di dimensione $n-r$ con un spazio tangente in 0 trasverso allo spazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_r$, allora esiste un'unica soluzione in un intorno di 0 tale che $u\big|_S = u_0, \quad u_0 \in C^\infty$.

Esempio 6. *Come noto un campo vettoriale F_j è conservativo se esiste una funzione U tale che $F_j = -\partial U/\partial x_j$. Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo vettoriale sia conservativo è che sia irrotazionale $\partial F_j/\partial x_i = \partial F_i/\partial x_j$.*

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che, se vale l'equazione (2.7) allora posto $\mathbf{w}_i = a_{ij}\mathbf{v}_j$, tale relazione vale ancora per i campi $\mathbf{w}_i$. Infatti

$$\mathbf{w}_i u = a_{ij} f_j \Rightarrow [\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_i]u = \mathbf{w}_k(a_{ij} f_j) - \mathbf{w}_i(a_{kj} f_j).$$

Dal Lemma 2 sappiamo che $[\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_i] = C_{kil}\mathbf{w}_l$ e rinominando $g_i = a_{ij}f_j$ otteniamo

$$C_{kil}g_l = \mathbf{w}_k g_j - \mathbf{w}_i g_j.$$

Notiamo che se la soluzione dell'equazione (2.6) esiste, allora vale l'equazione (2.7); applichiamo a (2.6) l'operatore $\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j u - \mathbf{v}_j\mathbf{v}_i u = \mathbf{v}_i f_j - \mathbf{v}_j f_i = [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]u = C_{ijk}\mathbf{v}_k u = C_{ijk}f_k,$$

se ora applichiamo il teorema di Frobenius e l'osservazione precedente, possiamo scrivere $\mathbf{v}_j = \partial/\partial y_j \;, \quad j = 1, ..., r$. L'equazione (2.6) diventa

$$\frac{\partial u}{\partial y_i} = b_{ij}f_j = g_i,$$

In tali coordinate i campi $\mathbf{v}_j$ commutano e pertanto $C_{ijk} = 0$. Dall'equazione (2.7) ricaviamo che $\partial g_i/\partial y_j - \partial g_j/\partial y_i = C_{ijk} = 0$, in particolare otteniamo che il differenziale di u è la 1-forma $\sum_{i=1}^r g_i dy_i = \omega \Rightarrow d\omega = 0$, cioè ω è chiusa quando le rimanenti $n - r$ coordinate sono fissate. Siano $\mathbf{y}' = (y_1, ..., y_r)$ e $\mathbf{y}'' = (y_{r+1}, ..., y_n)$, S è definita da $\mathbf{y}' = \mathbf{h}(\mathbf{y}'')$ in un intorno di $\mathbf{0}$. Essendo la 1-forma ω chiusa allora essa è localmente esatta (per il lemma di Poincairé), pertanto

$$u(\mathbf{y}) = \int_{h(\mathbf{y}'')}^{\mathbf{y}'} \sum_{j=1}^{r} g_j dy_j + u_0(h(\mathbf{y}''), \mathbf{y}''),$$

è una soluzione dell'equazione in esame. Mostriamo infine che u è unica, siano u_1, u_2 soluzioni abbiamo che

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1(\mathbf{y}', \mathbf{y}'') = u_2(\mathbf{y}', \mathbf{y}'') + C(\mathbf{y}'')$$

ed, usando la condizione iniziale, si conclude che

$$u_1(h(\mathbf{y}''), \mathbf{y}'') = u_2(h(\mathbf{y}''), \mathbf{y}'') \Rightarrow C(\mathbf{y}'') = 0.$$

$\square$

Capitolo 3

Geometria simplettica

In questo capitolo viene introdotto l'apparato geometrico che generalizza quanto già visto nei capitoli 1.2, 1.3 ed 1.4. Viene seguito il libro di Hörmander [4].

3.1 Algebra lineare simplettica

Consideriamo lo spazio cotangente a $\mathbb{R}^n$ che indicheremo con

$$T^*(\mathbb{R}^n) = \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) : \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n\},$$

in tale spazio consideriamo la forma simplettica $\sigma = d\xi_j \wedge dx_j$. Poiché siamo in $\mathbb{R}^n$ allora possiamo avvalerci del prodotto scalare euclideo e la forma simplettica standard è la forma bilineare

$$\omega((\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), (\mathbf{x}', \boldsymbol{\xi}')) = \mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}',$$

chiamando $\hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_j$ i versori lungo gli assi x_j e ξ_j si ha:

$$\omega(\hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\mathbf{e}}_k) = \omega(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_j, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k) = 0; \quad \omega(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_j, \hat{\mathbf{e}}_k) = -\omega(\hat{\mathbf{e}}_k, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_j) = \delta_{jk} \quad \forall j, k = 1, .., n. \tag{3.1}$$

Il modello ora introdotto rappresenta il nostro prototipo di spazio vettoriale simplettico e nel seguito vedremo che ogni spazio vettoriale simplettico finito dimensionale si riconduce allo spazio cotangente a un certo $\mathbb{R}^n$.

Andiamo ora a dare la definizione formale di spazio vettoriale simplettico

Definizione 11. *Sia S uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$. Diremo che S è uno spazio vettoriale simplettico se esiste una funzione $\sigma : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$*

1. *σ è bilineare.*
2. *σ è antisimmetrica (cioè $\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\sigma(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$).*
3. *σ è non degenere (cioè $\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$).*

Da questa definizione è chiaro che $T^*(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale simplettico.

Definizione 12. *Siano S_1, S_2 due spazi vettoriali simplettici con forme simplettiche σ_1, σ_2 e sia $T : S_1 \longrightarrow S_2$ un'applicazione lineare invertibile. Se vale che*

$$\sigma_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}') = \sigma_2(T\boldsymbol{\gamma}, T\boldsymbol{\gamma}') \quad \forall \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}' \in S_1,$$

si dice che T è un isomorfismo simplettico tra S_1 ed S_2.

Mostriamo ora l'affermazione seguente

Proposizione 7. *Ogni spazio vettoriale simplettico finito dimensionale, S, ha dimensione pari, 2n, ed è isomorfo a $T^*(\mathbb{R}^n)$ per un opportuno n naturale.*

Dimostrazione. Mostriamo ora che S ha una base simplettica, cioè una base che soddisfi (3.1). Scegliamo un arbitrario $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 \neq \mathbf{0}$. Poiché σ è non degenere allora esiste $\hat{\mathbf{e}}_1^*$ tale che $\sigma(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\mathbf{e}}_1^*) \neq 0$. Introduciamo

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1^*}{\sigma(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\mathbf{e}}_1^*)} \Rightarrow \sigma(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\mathbf{e}}_1) = 1. \tag{3.2}$$

Sia

$$S_1 = span\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1\},$$

mostriamo ora che S_1 ha dimensione 2, ossia $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1$ sono linearmente indipendenti. Infatti si ha che

$$\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \beta\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 = 0 = \sigma(\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \beta\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) = \alpha\sigma(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) + \beta\sigma(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1).$$

Dall'equazione (3.2) otteniamo che $\sigma(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) = -1$ in virtù dell'antisimmetria di σ mentre $\sigma(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) = -\sigma(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) \Rightarrow \sigma(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) = 0$ pertanto α è deve essere nullo. Visto che $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 \neq \mathbf{0}$ segue che anche β dev'essere nullo, pertanto $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1$ sono linearmente indipendenti.

Consideriamo ora il sottospazio vettoriale

$$S_0 = \{\boldsymbol{\gamma} \in S : \sigma(\boldsymbol{\gamma}, \alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \beta\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

di dimensione $dim(S) - 2$. Mostriamo che S_0, S_1 hanno come unico vettore in comune il vettore nullo: sia $\boldsymbol{\gamma} \in S_1 \cap S_0$ per le proprietà di S_1, S_0 si ha che

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\gamma} = \alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \beta\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \\ \sigma(\boldsymbol{\gamma}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) = \sigma(\boldsymbol{\gamma}, \hat{\mathbf{e}}_1) = 0. \end{gathered}$$

quindi si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma(\boldsymbol{\gamma}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) = \sigma(\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \beta\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \boldsymbol{\epsilon}_1) = \alpha\sigma(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) + \beta\sigma(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) = \alpha = 0 \\ \sigma(\boldsymbol{\gamma}, \hat{\mathbf{e}}_1) = \sigma(\alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \beta\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\mathbf{e}}_1) = \alpha\sigma(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_1) + \beta\sigma(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\mathbf{e}}_1) = \beta = 0, \end{cases}$$

il che mostra che S_0 è trasverso a S_1. Verifichiamo ora che lo spazio S_0 è simplettico, cioè $\sigma\big|_{S_0}$ è ancora non degenere. Sia $\boldsymbol{\gamma}^*$ tale che $\sigma(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\gamma}') = 0 \quad \forall \boldsymbol{\gamma}' \in S_0$, ogni $\boldsymbol{\gamma} \in S$ si scrive come $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}' + \boldsymbol{\gamma}''$ con $\boldsymbol{\gamma}'' \in S_1$ e $\sigma(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\gamma}) = \sigma(\boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\gamma}'$ ed essendo σ non degenere in S, allora segue che $\sigma\big|_{S_0}$ è non degenere.

Se la dimensione di S fosse 2 allora la dimostrazione sarebbe conclusa (poiché basterebbe associare con una applicazione T la base di $S_1 = S$ alla base del cotangente di $\mathbb{R}$ e, chiaramente, T è un isomorfismo simplettico visto che la dimensione dello spazio di partenza è la stessa dello spazio d'arrivo). Se la dimensione di S fosse maggiore di 2 allora si può sempre costruire, per induzione, una base di S_0 che unita con la base di S_1 formi una base di S e costruendo un applicazione lineare T', si può mostrare che T' è un isomorfismo simplettico analogamente al caso di dimensione 2. □

Teorema 11. *Sia S uno spazio vettoriale simplettico di dimensione $2n$ e siano A e B sottoinsiemi di indici di 1,...,n. Siano $\hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k \in S \quad j \in A, k \in B$ tali da soddisfare* (3.1)*, allora esistono $\hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k \quad j \notin A, k \notin B$ tali che $\hat{\mathbf{e}}_1, ..., \hat{\mathbf{e}}_n, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, ..., \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_n$ formino una base simplettica per S.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un indice l che appartenga a B ma non ad A e scegliamo $\hat{\mathbf{e}}$ tale che

$$\begin{cases} \sigma(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}}_j) = 0 \quad \forall j \in A \\ \sigma(\hat{\mathbf{e}}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k) = -\delta_{lk} \quad \forall k \in B, \end{cases}$$

ciò è possibile in virtù dell'indipendenza degli $\hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k$ e dal fatto che σ è non degenere.

Mostriamo che $\hat{\mathbf{e}}$ è linearmente indipendente da $\hat{\mathbf{e}}_j$ ed $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k$. Da

$$x\hat{\mathbf{e}} + \sum_A x_j \hat{\mathbf{e}}_j + \sum \xi_k \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k = \mathbf{0},$$

segue che

$$\sigma\left(x\hat{\mathbf{e}} + \sum_A x_j \hat{\mathbf{e}}_j + \sum \xi_k \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_l\right) = -x = 0.$$

In altre parole visto che $\hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k$ sono linearmente indipendenti allora i vettori $\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_k$ sono ancora linearmente indipendenti.

In sintesi abbiamo aumentato di uno il numero degli elementi della base (e incrementato di uno la cardinalità di A. Ora abbiamo due possibilità: si ha che $\#\ A = \#\ B$ oppure $\#\ A \neq \#\ B$. Nel secondo caso possiamo iterare il ragionamento fino a ritrovarci nel primo caso. Se $\#\ A \neq n$ consideriamo lo spazio S_1 generato da $\hat{\mathbf{e}}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}};\ j \in A, k \in B$, argomentando come nella proposizione precedente si può mostrare che

$$S_0 = \{\boldsymbol{\gamma} \in S : \sigma(\boldsymbol{\gamma}, \alpha\hat{\mathbf{e}}_1 + \beta\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

è trasverso a S_1 ed è simplettico. Scegliendo una base di S_0 e unendola a quella di S_1 come fatto nella proposizione, otteniamo una base di S. □

3.2 Geometria simplettica

In questa sezione generalizziamo concetti già visti nello spazio nelle fasi come il campo vettoriale hamiltoniano e le parentesi di Poisson. Indicheremo con (S, σ) una generica varietà simplettica con la relativa 2-forma σ su essa definita. Le funzioni che verranno utilizzate in tale capitolo, ove non specificato altrimenti, saranno funzioni di classe C^∞.

Definizione 13. *Sia (S, σ) una varietà simplettica e sia $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Definiamo il campo vettoriale hamiltoniano $\boldsymbol{X}_f$ relativo all'hamiltoniana f come*

$$df(\boldsymbol{v}) = \sigma(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{X}_f), \qquad \textit{per ogni } \boldsymbol{v} \in S$$

Definizione 14. *Sia (S, σ) una varietà simplettica e siano $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Definiamo la loro parentesi di Poisson come*

$$\{f, g\} = \sigma(\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g).$$

La definizione di campo vettoriale hamiltoniano è analoga a quella data nel capitolo 1, difatti

$$\mathbf{X}_g f = df(\mathbf{X}_g) = \sigma(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g) = \{f, g\}.$$

Diamo l'enunciato del seguente lemma che verrà utilizzato per mostrare la validità dell'identità di Jacobi in una varietà simplettica arbitraria:

Lemma 3. *Sia σ una 2-forma C^1 sulla varietà S di classe C^2 e siano $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ tre campi vettoriali C^1 definiti sulla varietà S. Allora vale la seguente relazione*

$$\begin{aligned} d\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}(\sigma(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})) + \boldsymbol{y}(\sigma(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})) + \boldsymbol{z}(\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \\ - \sigma([\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}], \boldsymbol{z}) - \sigma([\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}], \boldsymbol{x}) - \sigma([\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}], \boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che l'equazione (3.3) è lineare sia rispetto alla 2-forma σ sia rispetto ai campi vettoriali $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. In altre parole se l'equazione (3.3) vale per σ_1, σ_2 allora vale anche per $\sigma = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ per definizione di somma di 2-forme; analogamente se l'equazione (3.3) vale per $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ allora vale anche per $\mathbf{x} = b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2$ in virtù della linearità del commutatore e alla bilinearità delle 2-forme (e similmente per gli altri campi vettoriali $\mathbf{y}, \mathbf{z}$).

Sia f una funzione di classe C^1 allora l'equazione (3.3) è lineare rispetto ad f. Per provarlo analizziamo il comportamento dei singoli termini presenti nell'equazione (3.3)

$$d\sigma(f\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = f\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

$$(f\mathbf{x})\sigma(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}(\sigma(\mathbf{y}, \mathbf{z})),$$

$$\mathbf{y}\sigma(\mathbf{z}, f\mathbf{x}) = (\mathbf{y}f)\sigma(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + f\mathbf{y}\sigma(\mathbf{z}, \mathbf{x}), \tag{3.4}$$

$$\mathbf{z}\sigma(\mathbf{x}, f\mathbf{y}) = (\mathbf{z}f)\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f\mathbf{z}\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{3.5}$$

$$-\sigma([\mathbf{y}, \mathbf{z}], f\mathbf{x}) = -f\sigma([\mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{x}).$$

Osserviamo che, per ogni funzione g di classe C^1, si ha

$$\begin{aligned}[f,\mathbf{y}]g = fy_k\frac{\partial g}{\partial x_k} - y_k\frac{\partial fg}{\partial x_k} = -(y_k\frac{\partial f}{\partial x_k})(g) = -(\mathbf{y}f)g,\\ [f\mathbf{x},\mathbf{y}] = f[\mathbf{x},\mathbf{y}] + [f,\mathbf{y}]\mathbf{x} = f[\mathbf{x},\mathbf{y}] - (\mathbf{y}f)\mathbf{x},\end{aligned} \tag{3.6}$$

quindi utilizzando l'equazione (3.6) nei restanti termini dell'equazione (3.3) contenenti il commutatore otteniamo

$$\begin{aligned}-\sigma([f\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}) &= -\sigma(f[\mathbf{x},\mathbf{y}] - (\mathbf{y}f)\mathbf{x},\mathbf{z})\\ &= (\mathbf{y}f)\sigma(\mathbf{x},\mathbf{z}) - f\sigma([\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}), &(3.7)\\ -\sigma([\mathbf{z},f\mathbf{x}],\mathbf{y}) &= -\sigma(f[\mathbf{z},\mathbf{x}] - (\mathbf{z}f)\mathbf{x},\mathbf{y})\\ &= -(\mathbf{z}f)\sigma(\mathbf{x},\mathbf{z}) - f\sigma([\mathbf{z},\mathbf{x}],\mathbf{y}). &(3.8)\end{aligned}$$

I termini non lineari nelle equazioni (3.4),(3.5),(3.7) e (3.8) si cancellano a vicenda, provando che l'equazione (3.3) è lineare rispetto alla trasformazione $\mathbf{x} \mapsto f\mathbf{x}$(ripetendo lo stesso conto si può mostrare che vale altrettanto per i campi $\mathbf{y},\mathbf{z}$). E' pertanto sufficiente provare che l'equazione (3.3) è valida in un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ campi vettoriali costanti, e $\sigma = a_1 dv_1 \wedge dv_2$ dove a_1 è una funzione di classe C^1 e v_2, v_3 sono coordinate locali.

Sviluppando la (3.3) otteniamo

$$d\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (da_1 \wedge dv_1 \wedge dv_2)(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = det\begin{pmatrix}\mathbf{x}(f_1) & \mathbf{y}(f_1) & \mathbf{z}(f_1)\\ \mathbf{x}(f_2) & \mathbf{y}(f_2) & \mathbf{z}(f_2)\\ \mathbf{x}(f_3) & \mathbf{y}(f_3) & \mathbf{z}(f_3)\end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

il primo termine del determinante della (3.9) sviluppato rispetto alla prima riga è

$$\mathbf{x}(f_1(\mathbf{y}(f_2)\mathbf{z}(f_3) - \mathbf{z}(f_2)\mathbf{y}(f_3))) = \mathbf{x}(f_1)(df_2 \wedge df_3)(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{x}\sigma(\mathbf{y},\mathbf{z}),$$

se scriviamo in maniera analoga i restanti termini della (3.9) otteniamo

$$\mathbf{x}(\sigma(\mathbf{y},\mathbf{z})) + \mathbf{y}(\sigma(\mathbf{z},\mathbf{x})) + \mathbf{z}(\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})),$$

ed essendo i campi vettoriali costanti abbiamo provato l'asserto. □

Teorema 12. *(Identità di Jacobi)*
Sia (S,σ) una varietà simplettica e siano $f, g, h : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Vale allora la seguente identità

$$\{h,\{f,g\}\} + \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo i campi hamiltoniani $\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g, \mathbf{X}_h$ e applichiamo il Lemma 3. Essendo per definizione σ una 2-forma chiusa abbiamo che

$$\begin{aligned} d\sigma(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g, \mathbf{X}_h) = 0 = {} & \mathbf{X}_f\sigma(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_h) + \mathbf{X}_g\sigma(\mathbf{X}_h, \mathbf{X}_f) + \mathbf{X}_h\sigma(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g) \\ & - \sigma([\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g], \mathbf{X}_h) - \sigma([\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_h], \mathbf{X}_f) - \sigma([\mathbf{X}_h, \mathbf{X}_f], \mathbf{X}_g). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Inoltre abbiamo che

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}_f(\sigma(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_h)) = \mathbf{X}_f(\{g, h\}) = \{f, \{g, h\}\}, \\ & \sigma([\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g], \mathbf{X}_h) = (\mathbf{X}_f\mathbf{X}_g - \mathbf{X}_g\mathbf{X}_f)h = \mathbf{X}_f(\mathbf{X}_g h) - \mathbf{X}_g(\mathbf{X}_f h) = \\ & \mathbf{X}_f\{g, h\} - \mathbf{X}_g\{f, h\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}. \end{aligned}$$

E' evidente che i primi tre termini dell'equazione (3.10) formano esattamente l'identità di Jacobi, mentre i restanti tre (quelli che contenenti i commutatori) sono

$$\begin{aligned} \sigma([\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g], \mathbf{X}_h) &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}, \\ \sigma([\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_h], \mathbf{X}_f) &= \{g, \{h, f\}\} - \{h, \{g, f\}\}, \\ \sigma([\mathbf{X}_h, \mathbf{X}_f], \mathbf{X}_g) &= \{h, \{f, g\}\} - \{f, \{h, g\}\}. \end{aligned}$$

In virtù dell'antisimmetria delle parentesi di Poisson (che segue direttamente dall'antisimmetria della 2-forma σ) concludiamo che l'identità di Jacobi è soddisfatta. □

Corollario 3.

$$[\boldsymbol{X}_f, \boldsymbol{X}_g] = \boldsymbol{X}_{\{f,g\}}.$$

Dimostrazione.

$$[\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g]h = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}.$$

Applicando il Teorema 12 otteniamo

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} = -\{h, \{f, g\}\} = \{\{f, g\}, h\} = \mathbf{X}_{\{f,g\}}.$$

□

Capitolo 4

Teorema di Darboux ed applicazioni

In quest'ultimo capitolo enunceremo e daremo una dimostrazione del Teorema di Darboux. Inoltre applicheremo la tecnica dimostrativa usata per il Teorema di Darboux per mostrare che localmente gli integrali primi in abbassano di due i gradi di libertà. Per la dimostrazione del teorema è stato seguito il libro di Hörmander [4].

4.1 Teorema di Darboux

Dal punto di vista tecnico il seguente teorema è uno dei principali risultati della tesi.

Teorema 13. *Sia* (S, σ) *una varietà simplettica di dimensione 2n, siano* A, B *due sottoinsiemi di indici di* $\{1, ..., n\}$*. Se* $\boldsymbol{q}_j,\ j \in A$ *e* $\boldsymbol{p}_k,\ k \in B$ *sono funzioni* C^∞ *in un intorno di* $\boldsymbol{s}_0 \in S$*, con differenziali linearmente indipendenti e tali da soddisfare*

$$\begin{aligned} \left\{\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j\right\} = 0,\ i,j \in A; \quad \{\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_k\} = 0\ i,k \in B; \\ \left\{\boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{q}_j\right\} = \delta_{jk},\ k \in B, j \in A, \end{aligned} \tag{4.1}$$

allora si possono trovare delle coordinate locali $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *in un intorno di* s_0 *che soddisfano le relazioni* (4.1) *e tali che* $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{q}_j,\ j \in A; \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{p}_k\ k \in B$.

Dimostrazione. Poniamo $\mathbf{x}_j = \mathbf{q}_j,\ j \in A, e\ \mathbf{y}_k = \mathbf{p}_k\ k \in B$.

Consideriamo lo spazio cotangente al punto $\mathbf{s}_0$. Dal Teorema 11 segue che esiste un sistema di coordinate locali $\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_k\ j,k = 1, ..., n$ in un intorno di $\mathbf{s}_0$, tuttavia, per tali coordinate, le relazioni (4.1) valgono solo nel punto $\mathbf{s}_0$.

Per la definizione di varietà, possiamo assumere che S sia un intorno di $\mathbf{0}$ di $\mathbb{R}^{2n}$.

Visto che le relazioni (4.1) valgono in $\mathbf{0}$ allora $\mathbf{X}_{\mathbf{q}_j}\Big|_0 = -\frac{\partial}{\partial y_j}$ e $\mathbf{X}_{p_k}\big|_0 = \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Sia $J \notin A$, mostriamo che è possibile trovare un $\mathbf{q} = \mathbf{q}_J$ tale che $d\mathbf{q} = dx_j$ in $\mathbf{0}$ e tale che soddisfi le relazioni

$$X_{\mathbf{q}_j}\mathbf{q} = \left\{\mathbf{q}_j, \mathbf{q}\right\} = 0,\ j \in A; \quad X_{\mathbf{p}_k}\mathbf{q} = \{\mathbf{p}_k, \mathbf{q}\} = \delta_{kJ},\ k \in B. \tag{4.2}$$

Dal Corollario 3.2 abbiamo che

$$\left[\mathbf{X}_{\mathbf{q}_j}, \mathbf{X}_{\mathbf{q}_i}\right] = \mathbf{X}_{\left\{\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_i\right\}} = \mathbf{X}_0 = \mathbf{0} \; i, j \in A,$$
$$\left[\mathbf{X}_{\mathbf{p}_k}, \mathbf{X}_{\mathbf{p}_l}\right] = \mathbf{X}_{\{\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l\}} = \mathbf{X}_0 = \mathbf{0} \; k, l \in B,$$
$$\left[\mathbf{X}_{\mathbf{p}_k}, \mathbf{X}_{\mathbf{q}_j}\right] = \mathbf{X}_{\left\{\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_j\right\}} = \mathbf{X}_{\delta_{kj}} = \mathbf{0} \; j \in A, \; k \in B,$$

quindi i campi vettoriali hamiltoniani commutano tra di loro.

I campi $\mathbf{X}_{\mathbf{q}_j}, \mathbf{X}_{\mathbf{p}_k}$ sono indipendenti e generano uno spazio

$$W = span\{\mathbf{X}_{\mathbf{x}_j}, \; j \in A; \; \mathbf{X}_{\mathbf{y}_k}, \; j \in B\}$$

trasverso a

$$S_0 = \{\mathbf{x}_j = \mathbf{0}, \; j \in A; \; \mathbf{y}_k = \mathbf{0}, \; k \in B\}.$$

Infatti $dim(W) = \#A + \#B$, mentre $dim(S_0) = 2n - \#A + \#B$; inoltre $\mathbf{X}_{\mathbf{q}_j}(\mathbf{y}_j) = -1 \neq 0$. Sono valide le ipotesi del Corollario 2, pertanto abbiamo un unica soluzione di classe C^∞ $\mathbf{q}$ vicino a $\mathbf{0}$ tale che

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_J \quad \text{dove} \quad \mathbf{y}_j = \mathbf{0}, \; j \in A, \; \mathbf{x}_k = \mathbf{0}, \; k \in B,$$

In $\mathbf{0}$ abbiamo che $d\mathbf{q}(0) = dx_J$ visto che le relazioni (4.1) valgono in $\mathbf{0}$. Possiamo pertanto rimpiazzare l'insieme A con $A \cup \{J\}$ e ripetere l'argomento ora esposto fino ad ottenere 2n coordinate. □

Osserviamo che dal Teorema 13, scegliendo $A = B = \varnothing$ si ottiene il

Teorema 14. *di Darboux*

Sia S una varietà simplettica. Allora, esistono un intorno U di $\boldsymbol{s}_0 \in S$, un aperto V di $T^*(\mathbb{R}^n)$ ed una trasformazione canonica $\Phi : U \longrightarrow V$.

Il Teorema di Darboux può essere riformulato nel modo seguente:

localmente, una qualsiasi varietà simplettica è, a meno di una trasformazione canonica, un aperto di $T^*(\mathbb{R}^n)$ munito della forma canonica standard.

4.2 Applicazione agli integrali primi

Iniziamo questa sezione con un'immediata conseguenza del Teorema 13.

Corollario 4. *Sia $\boldsymbol{s}_0$ un punto non critico della funzione di Hamilton H. Allora esiste un cambiamento di coordinate canonico $x_1, ..., x_n, \; y_1, ..., y_n$ tale che, nelle nuove coordinate locali*

$$\boldsymbol{X}_H = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Dimostrazione. Scegliendo $x_1 = H$ ed usando il Teorema 13 si possono completare le coordinate ottenendo l'asserto. $\square$

Osserviamo che il sistema ammette n integrali primi locali indipendenti $x_1, y_2, ..., y_n$. Da tale corollario segue che se abbiamo un sistema fisico con una hamiltoniana non degenere in un punto, allora in un intorno di tale punto, possiamo sempre integrare il sistema.

Teorema 15. *Supponiamo di essere nello spazio delle fasi, sia f un integrale primo del moto tale che in un certo punto $(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0)$ si abbia $\boldsymbol{\nabla} f \neq 0$. Allora, f riduce i gradi di libertà del sistema fisico di 2 in un intorno di $(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{p}_0)$.*

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema 13, in un intorno di $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ utilizziamo le coordinate canoniche $Q_1, ..., Q_n, P_1, ..., P_n$ e identifichiamo $P_1 = f$. Essendo le nuove coordinate $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ canoniche allora la trasformazione $\Phi : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ è canonica. Definiamo l'hamiltoniana nelle nuove variabili come

$$\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = (H \circ \Phi^{-1})(\mathbf{Q}, \mathbf{P}).$$

Visto che f è un integrale primo del moto e la traformazione Φ è canonica segue che

$$0 = \{H, f\} = \left\{H \circ \Phi^{-1}, f \circ \Phi^{-1}\right\} \circ \Phi = \left\{\tilde{H}, P_1\right\} \circ \Phi,$$

pertanto P_1 è un integrale primo del moto nelle nuove coordinate. In virtù della canonicità di Φ le equazioni di Hamilton rimangono invariate, inoltre

$$0 = \left\{\tilde{H}, P_1\right\} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_1},$$

da cui segue che la nuova hamiltoniana non dipende da Q_1. Lungo il moto avremo quindi due vincoli, P_1 dovrà rimanere costante e $\tilde{H}$ assumerà valori costanti lungo Q_1. $\square$

Corollario 5. *Nel caso in cui $f = H$ abbiamo che $Q_1 = Q(\boldsymbol{Z}(0)) + t$, dove $\boldsymbol{Z}(t)$ è la traiettoria del sistema fisico nelle nuove variabili.*

Dimostrazione. Analogamente alla dimostrazione del risultato precedente applichiamo il teorema di Darboux ponendo $P_1 = H$. Poiché $\Phi : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ è canonica, per la Proposizione 1 (lungo la traiettoria del moto) abbiamo

$$\{P_1(\mathbf{Z}(t)), Q_1(\mathbf{Z}(t))\} = 1 = \{H_1(\mathbf{Z}(t)), Q_1(\mathbf{Z}(t))\} = \frac{\mathrm{d}Q_1(\mathbf{Z}(t))}{\mathrm{d}t},$$

da cui segue che $Q_1 = Q(\mathbf{Z}(0)) + t$. $\square$

Appendice A

Forme differenziali

Si definiscono le forme esterne e le forme differenziali, che sono usate frequentemente in meccanica hamiltoniana. Nella seguente trattazione verrà seguito il capitolo 7 del libro di Arnold [1].

A.1 1-forme

Definizione 15. *Una 1-forma $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare, cioè*

$$\sigma(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = a\sigma(\boldsymbol{x}) + b\sigma(\boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

In altre parole σ è un funzionale lineare. L'insieme di tutti i funzionali lineari su $\mathbb{R}^n$ forma uno spazio vettoriale, detto duale di $\mathbb{R}^n$ e indicato con $(\mathbb{R}^n)^*$.

Esempio 7. *Sia $\boldsymbol{F}$ un campo vettoriale costante in $\mathbb{R}^3$ allora $\sigma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{x}$ è una 1-forma.*

A.2 2-forme

Definizione 16. *Definiamo una 2-forma come un'applicazione $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \sigma(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= a\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + b\sigma(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \\ \sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= -\sigma(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

σ è una forma bilineare su $\mathbb{R}^n$ in virtù della proprietà di antisimmetrica

$$\sigma(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = a\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + b\sigma(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = -a\sigma(\mathbf{z}, \mathbf{x}) - b\sigma(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = -\sigma(\mathbf{z}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}).$$

Esempio 8. *Sia $\boldsymbol{v}$ il campo di velocità costante di un fluido in $\mathbb{R}^3$. Il flusso del liquido attraverso la superficie del parallelogramma formato da $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ è una 2-forma*

$$\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}).$$

Le 2-forme formano uno spazio vettoriale con le operazioni

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sigma_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$
$$(a\sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \qquad \forall a \in \mathbb{R},$$

la cui dimensione è $\frac{n(n-1)}{2}$, difatti detti $\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ si ha la matrice antisimmetrica

$$\sigma(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1n} \\ -\sigma_{12} & 0 & ... & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sigma_{1n} & ... & -\sigma_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}.$$

A.3 k-forme

Definizione 17. *Sia* $\sigma : \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{k\ volte} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che*

$$\sigma(a\boldsymbol{x}_1' + b\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k) = a\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k) + b\sigma(+b\boldsymbol{x}_1'', \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_k) \qquad \forall \boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_1', ..., \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$$
$$\forall a, b \in \mathbb{R},$$
$$\sigma(\boldsymbol{x}_{i_1}, ..., \boldsymbol{x}_{i_k}) = (-1)^\nu \sigma(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k) \qquad \forall \boldsymbol{x}_1, , ..., \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n,$$

dove ν *vale 1 se la permutazione di indici è pari o -1 nel caso che la permutazione di indici sia dispari.*

Esempio 9. *Il volume orientato formato dai vettori* $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$ *è una n-forma*

$$V(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n) = det \begin{pmatrix} x_{11} & ... & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & ... & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Analogamente ai casi delle 1-forme e delle 2-forme anche in questo caso le k-forme formano uno spazio vettoriale con le operazioni

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k) = \sigma_1(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k) + \sigma_2(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k) \qquad \forall \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n,$$
$$(a\sigma)(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k) = a\sigma(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k) \qquad \forall \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n,$$

denoteremo tale spazio vettoriale con il simbolo Λ^k dove la k indica che gli elementi di Λ sono le k-forme. La dimensione di Λ^k si può mostrare che vale $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, coerentemente con quanto visto con Λ^2.

A.4 Prodotto esterno

Cominciamo dando la definizione del prodotto esterno di due 1-forme

Definizione 18. *Siano σ_1, σ_2 1-forme su $\mathbb{R}^n$ definiamo il prodotto esterno tra σ_1, σ_2*

$$(\sigma_1 \wedge \sigma_2)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = det \begin{pmatrix} \sigma_1(\boldsymbol{x}) & \sigma_2(\boldsymbol{x}) \\ \sigma_1(\boldsymbol{y}) & \sigma_2(\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} = \sigma_1(\boldsymbol{x})\sigma_2(\boldsymbol{y}) - \sigma_1(\boldsymbol{y})\sigma_2(\boldsymbol{x}).$$

E' chiaro che $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ è una due forma.

Fissato in $\mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate $x_1, ..., x_n$ possiamo sempre esprimere una due forma come $\sigma = \sum_{i<j} a_{ij} x_i \wedge x_j$ dove la sommatoria è ristretta a $i < j$ in virtù del fatto che $x_i \wedge x_i = 0$ per definizione di prodotto esterno.

Definiamo ora il generico prodotto esterno tra una k-forma e una l-forma:

Definizione 19. *Siano $\sigma_1(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k) \in \Lambda^k, \sigma_2(\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_l) \in \Lambda^l$, si definisce il loro prodotto esterno come*

$$(\sigma_1 \wedge \sigma_2)(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_l) = \sum_{permutazioni} (-1)^{\nu} \sigma_1(\boldsymbol{x}_{i_1}, ..., \boldsymbol{x}_{i_k}) \sigma_2(\boldsymbol{y}_{j_1}, ..., \boldsymbol{y}_{j_l}),$$

dove la sommatoria è fatta rispetto a tutte le possibili permutazioni di indici e ν vale 1 se la permutazione è dispari e 0 se è pari.

Il prodotto esterno di una k-forma con una l-forma è una k+l forma.

Il prodotto esterno gode delle seguenti proprietà

- $(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = (-1)^{kl}(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \quad \forall \sigma_1 \in \Lambda^k, \sigma_2 \in \Lambda^l$,
- $(a\sigma_1 + b\sigma_2 \wedge \sigma_3) = a(\sigma_1 \wedge \sigma_3) + b(\sigma_2 \wedge \sigma_3) \quad \forall \sigma_1 \in \Lambda^k, \sigma_2 \in \Lambda^l, \sigma_3 \in \Lambda^m \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$,
- $(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \wedge (\sigma_3) = (\sigma_1) \wedge (\sigma_2 \wedge \sigma_3) \quad \forall \sigma_1 \in \Lambda^k, \sigma_2 \in \Lambda^l, \sigma_3 \in \Lambda^m$.

A.5 Pull-back

Consideriamo la seguente situazione: siano $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^m$ e sia σ una k-forma definita su vettori di $\mathbb{R}^n$. Per poter far agire σ su $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ applichiamo una funzione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ai nostri vettori

$$(f^*\sigma)(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k) = \sigma(f(\mathbf{x}_1), ..., f(\mathbf{x}_k)),$$

l'operazione sopra descritta viene chiamata pull-back. Il pull-back gode delle seguenti proprietà

- $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ funzioni lineari, sia $\sigma \in \Lambda^k(\mathbb{R}^p)$ e siano $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^m$ allora $((g \circ f)^*\sigma)(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k) = f^*g^*\sigma(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k)$,
- $f^*(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = (f^*\sigma_1) \wedge (f^*\sigma_2) \quad \forall \sigma_2 \in \Lambda^l$.

A.6 Forme differenziali

Definizione 20. *Sia M una varietà differenziabile, consideriamo lo spazio tangente $TM = \cup_{x \in M} TM_x$. Diremo che $\sigma : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ è una 1-forma differenziale se è regolare e lineare in ogni spazio tangente TM_x.*

Esempio 10. *Sia $f \in C^{(1)}(M \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, il suo differenziale $df\big|_x : TM_x \longrightarrow \mathbb{R}$ è una 1-forma differenziale.*

Fissato un sistema di coordinate $x_1, ..., x_n$ su $\mathbb{R}^n$, chiaramente i differenziali delle coordinate $dx_i \quad i = 1, ..., n$ sono 1-forme differenziali. Vediamo ora l'aspetto più generale delle 1-forme differenziali in $\mathbb{R}^n$

Teorema 16. *Fissato un sistema di coordinate$x_1, ..., x_n$ locali su $M \subseteq \mathbb{R}^n$ per ogni σ 1-forma differenziale definita su tale dominio vale che*

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} a_j(\boldsymbol{x}) dx_j,$$

dove $a_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ variano da punto a punto in generale.

Definizione 21. *Una k-forma differenziale σ si dice esatta se esiste una funzione f differenziabile tale che $df = \sigma$.*

A.7 k-forme differenziali

Definizione 22. *Sia M una varietà differenziabile, sia $\sigma\big|_{\boldsymbol{x}}$ una k-forma definita su $TM_{\boldsymbol{x}}$ se σ diremo che essa è una k-forma differenziabile nel punto $\boldsymbol{x}$ della varietà M.*

Se per ogni punto $\boldsymbol{x}$ della varietà M è data $\sigma\big|_{\boldsymbol{x}}$ ed essa risulta differenziabile allora diremo che σ è una k-forma differenziale definita su M.

Analogamente al caso delle 1-forme differenziali anche con le k-forme differenziali abbiamo il seguente teorema

Teorema 17. *Ogni forma differenziale nello spazio $\mathbb{R}^n$ fissato un sistema di coordinate $x_1, ..., x_n$ si può scrivere univocamente come*

$$\sigma = \sum_{i_1, ..., 1_k} a_{i_1, ..., i_k}(\boldsymbol{x}) dx_{i_1} \wedge ... \wedge x_{i_k},$$

dove $a_{i_1, ..., i_k}(\boldsymbol{x})$ sono funzioni regolari su $\mathbb{R}^n$.

A.8 Pull-back di forme differenziali

Analogamente al caso delle k-forme definiamo il pull-back di una forma differenziale come

Definizione 23. *Siano N, M delle varietà, sia $f : M \longrightarrow N$ differenziabile, sia σ una k-forma differenziale su N e sia $\boldsymbol{x} \in M$. Definiamo il pull-back di σ rispetto a f come*

$$(f^*\sigma)(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_k) = \sigma(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{df}(\boldsymbol{z}_1), ..., \boldsymbol{df}(\boldsymbol{z}_k))$$

per vettori tangenti presi a piacere $\boldsymbol{z}_1, ..., \boldsymbol{z}_k \in TM_{\boldsymbol{x}}$.

Il pull back gode delle seguenti proprietà

- $f^*(a\sigma_1 + b\sigma_2) = af^*(\sigma_1) + bf^*(\sigma_2) \quad \forall \sigma_1, \sigma_2 \quad a, b \in \mathbb{R}$,
- $f^*(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = (f^*\sigma_1) \wedge (f^*\sigma_2) \quad \forall \sigma_1, \sigma_2$.

A.9 Differenziazione esterna

Definizione 24. *Si consideri un sistema di coordinate locali $x_1, ..., x_n$ di $\mathbb{R}^n$ e i loro differenziali $dx_1, ..., dx_n$. Consideriamo la k-forma σ definita su $\mathbb{R}^n$, la sua derivata esterna è definita come*

$$d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I,$$

dove $I = (i_1, ..., i_k)$ è un insieme di indici.

Pertanto se σ è una k-forma differenziale $d\sigma$ sarà una k+1-forma differenziale.

Esempio 11. *Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ regolare. f è una 0-forma e la sua derivata esterna è*

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \boldsymbol{\nabla} f.$$

Definizione 25. *Diremo che una forma differenziale σ è chiusa se $d\sigma = 0$.*

Vediamo ora due proprietà della derivata esterna

$$\begin{aligned} &d(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = d\sigma_1 \wedge \sigma_2 + (-1)^k \sigma_1 \wedge \sigma_2 && \forall \sigma_1, \sigma_2 \quad k - forme, \\ &d(d\sigma) = 0 && \forall \sigma. \end{aligned}$$

Esempio 12. *Consideriamo la 1-forma su $\mathbb{R}^2$ $\sigma = Pdx + Qdy$ abbiamo che*

$$d\sigma = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = (\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy) \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy) \wedge dy = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy,$$

che corrisponde alla 2 forma che compare nel noto teorema di Green.

Osserviamo che per ogni funzione $f : M \longrightarrow N$ differenziabile e per ogni forma σ su N si ha che $f^*(d\sigma) = d(f^*\sigma)$. Concludiamo con l'enunciato del lemma di Poincairé

Teorema 18. *Se σ è una forma differenziale chiusa allora è localmente esatta.*

Bibliografia

[1] V.I.Arnold, Metodi matematici della meccanica classica, Editori Riuniti, 1988.

[2] V.I.Arnold, Ordinary Differential Equations, Springer Berlin Heidelberg, 1992.

[3] M.Beals, C.Fefferman and R.Grossman, *Strictly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 8 (1983), no. 2, 125–322.

[4] L.Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Berlin Heidelberg, 1994.

[5] L.Landau and E.Lifšic, Meccanica, Editori Riuniti, 1979.