

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**Spostamento e stress indotti dalla
propagazione di fluidi all'interno di
un'inclusione termo-poro-elastica a disco**

Relatore:

**Prof.ssa Maria Elina
Belardinelli**

Presentata da:

Samuel Battolini

Correlatore:

Dott. Massimo Nespoli

Sommario

Una regione idrotermale è un'area in cui si verificano molteplici fenomeni naturali, tra cui deformazioni del suolo ed esalazioni di gas. Tali zone ci permettono di studiare e comprendere processi che si verificano in profondità tramite osservazioni effettuate in superficie. Un sistema idrotermale può essere presente in aree vulcaniche come ad esempio nelle caldere, in particolare la caldera dei Campi Flegrei sarà presa in considerazione in questa tesi. Il modello di inclusione termo-poro-elastica (TPE) permette di spiegare gli effetti meccanici dovuti alle variazioni di pressione e temperatura indotti dall'arrivo di fluidi magmatici. In questo elaborato sarà presa in considerazione una sorgente TPE a forma di disco, che consiste in un volume di materiale termo-poro-elastico posto all'interno di un semispazio in condizioni drenate e isoterme. Tale materiale subisce, a seguito di iniezioni di fluidi caldi e pressurizzati che attraversano una delle superfici del volume, variazioni di pressione di poro e temperatura che vengono considerate uniformi lungo l'asse del disco. Questo modello è valido nell'approssimazione che lo spessore del disco sia trascurabile rispetto al raggio, ma può essere esteso a cilindri di spessore maggiore sottoposti a variazioni di pressione e temperatura variabili lungo l'asse, mediante una discretizzazione in più dischi di spessore minore. Lo scopo di questa tesi è studiare gli effetti transienti dei campi di spostamento, deformazione e stress causati da fluidi che penetrano in un cilindro, di spessore 500 m e raggio 2500 m, discretizzato con 50 dischi. Sarà esaminato il comportamento delle componenti di ciascun campo in funzione della distanza dall'asse del cilindro a varie profondità e il loro andamento temporale in un punto fissato. I risultati della tesi sono utili per porre le basi a modelli in grado di rappresentare gli effetti transienti solitamente osservati nella caldera dei Campi Flegrei.

Indice

1	Concetti di base di elasticità lineare e sui mezzi termo-poro-elastici	4
1.1	Tensore di deformazione	4
1.2	Tensore di sforzo	5
1.3	Relazione costitutiva	7
1.3.1	Relazione costitutiva per mezzi elastici	7
1.3.2	Relazione costitutiva per mezzi termo-poro-elastici	8
2	Modello di inclusione termo-poro-elastica a forma cilindrica in un semispazio	11
2.1	Modello di sorgente termo-poro-elastica	11
2.1.1	Determinazione del campo di spostamento, di deformazione e di stress per una sorgente TPE	12
2.2	Espressioni analitiche della pressione di poro e della temperatura all'interno della sorgente TPE	13
2.2.1	Avvezione transiente della temperatura	14
2.2.2	Avvezione transiente della pressione	17
2.3	Discretizzazione del modello in più dischi di spessore infinitesimo	19
3	Risultati	22
3.1	Analisi del campo di spostamento	23
3.2	Analisi del campo di deformazione	26
3.2.1	Dilatazione cubica	30
3.3	Analisi del campo di stress	33
3.3.1	Massimo sforzo di taglio	38
4	Conclusioni	41
	Bibliografia	42
	A Legge di Darcy	44
	B Metodo di Eshelby	46

Introduzione

La deformazione del suolo in regioni vulcaniche può essere dovuta sia alla circolazione di fluidi idrotermali che all'inflazione o alla deflazione di un corpo magmatico. In letteratura esistono diverse rappresentazioni di sorgenti di deformazione, che presentano diverse geometrie o che considerano differenti modelli fisici. Cavità sferiche o sferoidali riempite di magma e pressurizzate, collocate in semispazi elastici, sono adatte a rappresentare serbatoi magmatici; molti lavori confermano la loro capacità di rappresentare variazioni di deformazione e gravità in ambienti vulcanici (e.g. Bonafede and Ferrari, 2009; Berrino et al., 1984; McKee et al., 1989). Differentemente, intrusioni magmatiche e dicchi possono essere modellizzate in termini di dislocazioni tensili (Okada, 1985; 1992) o cracks circolari (Fialko et al., 2001). In aggiunta a questi, c'è un altro tipo di modello fisico che attribuisce la deformazione superficiale ad un'inclusione Termo-Poro-Elastica (TPE) (Belardinelli et al., 2019; Mantiloni et al., 2020). Le deformazioni indotte dalle inclusioni TPE sono dovute a effetti meccanici di variazioni di pressione di poro e temperatura di un fluido che penetra in una regione termo-poro-elastica avente una determinata geometria (inclusione TPE), incorporata in un mezzo elastico (matrice). Il modello di inclusione TPE è adatto a rappresentare ambienti vulcanici nei quali non vi è evidenza di un corpo magmatico in prossimità della superficie, come nel caso della caldera dei Campi Flegrei in Italia (Jundenherr and Zollo, 2004). Infatti, questo tipo di sorgenti può giustificare deformazioni dello stesso ordine di grandezza degli altri modelli che descrivono intrusioni magmatiche, ma assume che la deformazione sia legata ad effetti puramente termo-poro-elastici. Sono stati proposti approcci semi-analitici per studiare gli effetti di inclusioni TPE, basati su semplici geometrie. Deformazione e stress indotti da un'inclusione TPE sferica e a guscio sferico in uno spazio omogeneo sono stati ricavati da Belardinelli et al. (2019); detti autori determinarono che l'inclusione TPE può indurre sforzi deviatorici significativi dovuti a variazioni di pressione e temperatura di poro. Fu anche trovato che per aumenti di pressione e temperatura all'interno dell'inclusione si ha un ambiente compressivo, mentre all'esterno uno distensivo. Un modello più recente è stato proposto da Mantiloni et al. (2020) ed è basato su una geometria a disco dell'inclusione TPE incorporata in un semi-spazio omogeneo. La differenza sostanziale con il modello precedente è il fatto che quest'ultimo considera la presenza di una superficie libera e inoltre, data la geometria del problema, rappresenta meglio gli strati di roccia orizzontali che vengono permeati dai fluidi caldi e pressurizzati. Il modello di Mantiloni et al. (2020) è valido nell'approssimazione che lo spessore del disco sia di dimensioni molto inferiori rispetto al suo raggio. Benussi (2020) mostra come realizzare un modello di sorgente TPE cilindrica, ovvero valido anche per spessori maggiori. Questo può essere fatto con una discretizzazione del cilindro in una serie di dischi con spessore tale per cui il modello è consistente. Un ulteriore miglioramento al modello è stato effettuato da Nespoli et al. (2021), che hanno considerato una pressione e una temperatura non uniforme all'interno dell'inclusione e la stratificazione della matrice elastica. Lo scopo di questo elaborato è

studiare gli effetti transienti indotti dalla propagazione dei fluidi all'interno dell'inclusione. A partire dalle espressioni della variazione di pressione e temperatura suggerite da Nespoli et al. (2021) e Belardinelli et al. (2022), verranno determinati i valori delle componenti di spostamento, deformazione, stress, e sarà poi valutato l'andamento spaziale e temporale di ogni componente, della dilatazione cubica e del massimo sforzo di taglio. Questo può essere modellizzato discretizzando l'inclusione TPE con diversi dischi e associando a ogni disco gli opportuni valori di pressione di poro e temperatura calcolati tramite le espressioni analitiche a una certa profondità e ad un certo istante di tempo. Nel capitolo 1 verranno fornite le principali nozioni di elasticità lineare, poro-elasticità e termo-poro-elasticità. Saranno definite le grandezze utilizzate nei capitoli che seguono ed espresse le relazioni costitutive dei mezzi studiati in questo elaborato. Nel capitolo 2 sarà analizzato in dettaglio il modello di inclusione TPE a forma cilindrica e verrà indicato il procedimento effettuato per trovare la soluzione dei campi di spostamento, deformazione e stress e le espressioni analitiche delle evoluzioni spazio-temporali di pressione e temperatura che caratterizzano ogni disco che forma il cilindro. Successivamente verrà mostrato il modello che prevede la discretizzazione del cilindro. Nel capitolo 3 verranno esposti i risultati ottenuti. Sarà studiato l'andamento complessivo, in tre istanti temporali, delle componenti dei campi di spostamento, deformazione e stress, della dilatazione cubica e del massimo stress di taglio, in funzione della distanza dall'asse del cilindro a tre profondità: sulla superficie terrestre, nel piano mediano del cilindro e in un piano intermedio tra i due. Successivamente verrà mostrato l'andamento temporale delle grandezze precedenti in un punto prossimo all'asse del cilindro. Nel capitolo 4 sarà riassunto il lavoro effettuato e verranno fatte alcune considerazioni conclusive.

Capitolo 1

Concetti di base di elasticità lineare e sui mezzi termo-poro-elastici

In questo capitolo verranno riportate alcune nozioni fondamentali, relative alla teoria dell'elasticità lineare, che saranno utilizzate nei capitoli successivi. Saranno esaminati i tensori di deformazione e sforzo, la relazione costitutiva per un mezzo elastico e la sua generalizzazione a un mezzo termo-poro-elastico.

1.1 Tensore di deformazione

Nello studio della meccanica dei continui vengono trattati corpi deformabili, ossia corpi in cui le distanze tra elementi di volume non sono fisse e, per descrivere la posizione di un corpo a un tempo generico t , è necessario conoscere le coordinate di ciascun punto. Considerando un punto materiale in una posizione $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ al tempo iniziale $t = 0$ che subisce uno spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, u_3)$, esso ha posizione finale $\mathbf{x} + \mathbf{u}$. Il vettore $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è definito “*vettore spostamento*” (o “*displacement vector*”); esso indica lo spostamento effettuato dal punto nel tempo ed è una funzione continua e differenziabile dello spazio delle coordinate spaziali e temporali in assenza di dislocazioni. Si consideri un ulteriore punto materiale nella posizione iniziale $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$, quindi prossimo al precedente; al tempo t , quando avviene la deformazione, esso è traslato dal vettore $\mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, dove $d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ha componenti esprimibili impiegando la notazione di Einstein: $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$. Consideriamo la distanza ds_0 al tempo $t = 0$ e la distanza ds al tempo t , allora si ha che:

$$ds_0^2 = dx_i dx_i, \quad (1.1)$$

mentre al tempo t :

$$ds^2 = (dx_i + du_i)(dx_i + du_i) \simeq dx_i dx_i + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j, \quad (1.2)$$

in cui è possibile trascurare i termini al secondo ordine considerando piccole deformazioni ($|d\mathbf{u}| \ll |d\mathbf{x}|$). E' dunque possibile determinare:

$$ds^2 - ds_0^2 \simeq 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j. \quad (1.3)$$

Il gradiente di spostamento $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, in quanto tensore di rango 2, è separabile in una parte simmetrica e in una antisimmetrica:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.4)$$

e contraendo con $dx_i dx_j$ nell'eq. (1.3) si ha l'eliminazione della componente antisimmetrica, e quindi si ha $ds^2 - ds_0^2 \simeq 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j$, dove

$$\epsilon_{ij} \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.5)$$

è detto “*tensore infinitesimo di deformazione*”. Tale tensore è simmetrico, quindi la sua rappresentazione matriciale rispetto a una qualsiasi base ammette tre autovalori reali, detti “*valori principali di deformazione*” e una base ortonormale di autovettori, detti “*assi principali di deformazione*”. Tramite questo tensore è possibile determinare un'approssimazione al primo ordine della variazione relativa della distanza tra due punti, data da:

$$\frac{ds - ds_0}{ds_0} = \epsilon_{ij} \frac{dx_i dx_j}{ds_0 ds_0}. \quad (1.6)$$

Le componenti diagonali di ϵ_{ij} rappresentano la variazione relativa di lunghezza di un vettore disposto parallelamente a un asse cartesiano; in particolare un valore negativo della componente corrisponde a un accorciamento, mentre un valore positivo corrisponde a un allungamento. La traccia ϵ_{kk} , corrispondente alla divergenza del vettore $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, rappresenta la variazione relativa di volume di una porzione infinitesima V_0 di corpo:

$$\epsilon_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\delta V}{V_0}. \quad (1.7)$$

Il tensore infinitesimo di deformazione può essere scomposto in una componente avente elementi uguali alla media degli elementi diagonali, detta “*isotropa*”, che quindi fornisce la variazione relativa di volume, e in una componente che fornisce la variazione di forma a volume costante, detta “*deviatorica*”. La componente isotropa è:

$$\epsilon_{ij}^0 = \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (1.8)$$

mentre quella deviatorica è:

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}. \quad (1.9)$$

1.2 Tensore di sforzo

Al fine di definire il concetto di trazione è necessario considerare un corpo caratterizzato da una certa configurazione spaziale a un certo tempo t . All'interno di tale corpo è possibile immaginare una superficie chiusa S , sulla quale si può considerare una piccola porzione ΔS . Grazie alla direzione del versore $\hat{\mathbf{n}}$ normale alla superficie è possibile distinguere in tale porzione una faccia “positiva”, quella rivolta verso la normale, e una “negativa”. Il materiale adiacente alla faccia positiva esercita una forza $\Delta \mathbf{F}$ sul materiale adiacente alla faccia negativa e tale forza dipende dalla posizione, dall'orientazione e dall'area della superficie. Assumiamo che il rapporto tra $\Delta \mathbf{F}$ e ΔS tenda a un valore

limite finito $\frac{d\mathbf{F}}{dS}$ quando ΔS tende a 0 e che il momento delle forze su ΔS sia nullo (principio di Eulero e Cauchy). Il vettore limite è denominato “*trazione*” ed è definito come segue:

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t) \doteq \frac{d\mathbf{F}}{dS}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t), \quad (1.10)$$

dove \mathbf{x} rappresenta il punto a cui ΔS tende e t è il tempo.

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano con base ortonormale $(\mathbf{e}^{(1)}; \mathbf{e}^{(2)}; \mathbf{e}^{(3)})$, e una superficie dS_i avente come vettore normale $\mathbf{e}^{(i)}$ diretto lungo il semiasse positivo dell’asse x_i ($i = 1, 2, 3$). La componente lungo l’asse x_j ($j = 1, 2, 3$) della trazione agente sulla superficie dS_i è denominata “*sforzo*” (o “*stress*”) ed è definita come segue:

$$\tau_{ij} \doteq \mathbf{T}(\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j. \quad (1.11)$$

Le componenti diagonali del tensore sono detti “*sforzi normali*”, in quanto agiscono ortogonali al piano, mentre gli altri elementi sono detti “*sforzi di taglio*” e agiscono in direzione tangente al piano. Note le componenti τ_{ij} , la trazione $T_i(\hat{\mathbf{n}})$ su una generica superficie dS avente normale $\hat{\mathbf{n}}$ è data dalla “*Formula di Cauchy*”:

$$T_i(\hat{\mathbf{n}}) = \tau_{ij}n_j. \quad (1.12)$$

Il tensore di sforzo è simmetrico, quindi la sua rappresentazione matriciale rispetto a una qualsiasi base ammette tre autovalori reali, detti “*valori principali di sforzo*” e una base ortonormale di autovettori, detti “*assi principali di sforzo*”. Gli assi principali definiscono tre piani, detti “*piani principali*”, su cui sono presenti solo sforzi normali. Tale tensore può essere scomposto in una componente avente elementi uguali alla media degli elementi diagonali, detta “*isotropa*” e in una componente “*deviatorica*”. La componente isotropa è:

$$\tau_{ij}^0 \doteq \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}, \quad (1.13)$$

mentre quella deviatorica è:

$$\tau'_{ij} \doteq \tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}. \quad (1.14)$$

La componente isotropa genera trazioni normali alla superficie di applicazione, di modulo costante qualunque sia il suo orientamento:

$$T_i(\hat{\mathbf{n}}) = \tau_{ij}^0n_j = \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}n_j = \frac{1}{3}\tau_{kk}n_i. \quad (1.15)$$

E’ quindi possibile definire una “*pressione media*” data dall’opposto del valor medio degli sforzi normali:

$$\bar{p} \doteq -\frac{1}{3}\tau_{kk}. \quad (1.16)$$

Dalla definizione in eq. (1.14) si evince che la traccia dello sforzo deviatorico τ'_{ij} è nulla. Dalla definizione in eq. (1.13) si osserva che lo sforzo isotropo è un multiplo del tensore identità e quindi è diagonale in ogni sistema di riferimento. Dalle due precedenti informazioni si deduce che gli assi principali di τ_{ij} coincidono con quelli di τ'_{ij} , mentre gli autovalori dello sforzo deviatorico σ'_1 , σ'_2 e σ'_3 differiscono da quelli di τ_{ij} per un termine scalare additivo $\frac{1}{3}\tau_{kk}$.

Gli sforzi normali minimo e massimo sono applicati sulle superfici principali relative agli autovalori minimo σ_{min} e massimo σ_{max} , e su ogni superficie principale le trazioni di taglio sono nulle. Le superfici su cui sono presenti sforzi di taglio massimo sono dunque

intermedie fra le superfici principali, e il piano su cui agisce la massima trazione di taglio forma un angolo di 45° fra gli assi principali minimo e massimo e contiene l'asse intermedio. Il modulo di tale trazione vale:

$$S_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}). \quad (1.17)$$

Gli assi x_1 , x_2 e x_3 nominati in questo capitolo saranno talvolta identificati con x , y e z rispettivamente per alleggerire la notazione.

1.3 Relazione costitutiva

1.3.1 Relazione costitutiva per mezzi elastici

Per “*relazione costitutiva*” si intende una relazione che fornisce le componenti di sforzo in funzione delle altre variabili che caratterizzano un sistema. Generalmente il tensore di sforzo τ_{ij} dipende dal tensore di deformazione ϵ_{ij} e dalle sue derivate temporali $\dot{\epsilon}_{ij}$, quindi una generica relazione costitutiva è:

$$F(\epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, \tau_{ij}, \dot{\tau}_{ij}) = 0. \quad (1.18)$$

Per un materiale elastico τ_{ij} dipende solo da ϵ_{ij} tramite una relazione biunivoca, esprimibile attraverso la “*legge di Hooke generalizzata*”:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (1.19)$$

dove C_{ijkl} è un tensore di rango 4, rappresentante le costanti elastiche del materiale. Nel caso in cui il materiale sia elastico, lineare e isotropo, la sua relazione costitutiva può essere scritta attraverso una relazione di proporzionalità tra sforzo e deformazione isotropa e tra sforzo e deformazione deviatorica, date da:

$$\frac{1}{3}\tau_{kk} = K\epsilon_{kk}, \quad \tau'_{ij} = 2\mu\epsilon'_{ij}. \quad (1.20)$$

Nella precedente relazione K è l'incompressibilità e μ è detta “*rigidità*” e può essere misurata in un esperimento di deformazione di taglio in cui le uniche componenti diverse da zero del tensore di sforzo sono $\tau_{12} = \tau_{21}$, allora si ha che $\mu = \frac{\tau_{12}}{2\epsilon_{12}}$.

Utilizzando le eq. (1.20), (1.9) e (1.14) si può ricavare la relazione costitutiva e la relazione costitutiva inversa, espresse rispettivamente da:

$$\tau_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \tau_{kk}\delta_{ij} \right), \quad (1.21)$$

dove $\lambda \doteq K - \frac{2}{3}\mu$. λ e μ sono dette “*costanti di Lamè*”.

E' possibile esprimere la relazione costitutiva in funzione della rigidità e del “*modulo di Poisson*”, indicato con ν e definito come il rapporto fra la contrazione ed allungamento longitudinale a seguito dell'applicazione di uno stato di sforzo uniassiale (a temperatura costante). Se x_1 è la direzione di trazione e x_2 la direzione trasversale si ha che $\nu = -\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}}$. Se assumiamo che l'unica componente non nulla di τ_{ij} sia τ_{11} , impiegando la relazione costitutiva inversa riportata in eq. (1.21) e la definizione di ν , si ha che $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$, e sostituendo quest'ultima relazione nell'eq. (1.21) si ottiene un'espressione della relazione costitutiva inversa in funzione di μ e di ν :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\nu}{1 + \nu} \tau_{kk}\delta_{ij} \right). \quad (1.22)$$

1.3.2 Relazione costitutiva per mezzi termo-poro-elastici

Un mezzo poro-elastico è un mezzo composto da una “*matrice*” (o “*frame*”), avente comportamento elastico, nella quale sono presenti delle cavità, dette “*pori*”, riempite di fluido. Alcune grandezze utilizzate per descrivere un mezzo poroso sono le seguenti:

- la “*porosità*” Φ , definita come il volume di spazio vuoto per unità di volume del mezzo. Essa può riguardare tutti i tipi di poro, ed è detta “*porosità totale*”, oppure può riferirsi solo ai pori in grado di trasferire fluido tra loro, e in questo caso si parla di “*porosità effettiva*”;
- la “*quantità di fluido*” v_i , definita come il volume dell’ i -esimo tipo di fluido contenuto all’interno dei pori, per unità di volume di materiale. Nel caso in cui è presente un solo tipo di fluido, questa grandezza coincide con la porosità;
- la “*pressione di poro*” p , definita come la pressione del fluido che riempie i pori. Questa grandezza può essere considerata uniforme assumendo che il fluido scorra sufficientemente lento attraverso i pori;
- la “*pressione di confinamento*” P_C , definita quando uno stato di sforzo è applicato al mezzo poroso e coincide con la componente isotropa del tensore di stress, quindi $P_C \doteq -\frac{1}{3}\tau_{kk}$.

E’ possibile assumere che il mezzo poro-elastico sia isotropo e le deformazioni da uno stato di equilibrio a un altro siano reversibili. La relazione costitutiva per un mezzo poro-elastico è stata descritta nei lavori di Biot (1980) e Rice and Cleary (1999), in cui si considera un elemento di forma cubica dotato di pori aventi volume molto inferiore rispetto a quello del mezzo circostante, in modo da considerare il mezzo omogeneo. Inoltre si assume che le dimensioni dell’elemento siano molto maggiori delle distanze che intercorrono tra le cavità, in modo da considerare continuo il mezzo nella trattazione matematica. Se consideriamo che l’elemento sia sottoposto a deformazioni reversibili, allora le variabili macroscopiche $\epsilon_{ij}, \tau_{ij}, p, v$ devono essere funzioni di stato. Date queste assunzioni, supponiamo che l’elemento sia inizialmente in uno stato di equilibrio, quindi che sia descritto dalle variabili $\epsilon_{ij}^0, \tau_{ij}^0, p_0, v_0$ e, dato che nello stato iniziale non è presente alcuna deformazione, si ha che $\epsilon_{ij}^0 = 0$. A seguito del processo di deformazione si ha una variazione delle precedenti quantità esprimibile con $\Delta\epsilon_{ij} \doteq \epsilon_{ij}, \Delta\tau_{ij} \doteq \tau_{ij}, \Delta p \doteq p, \Delta v \doteq v$, dove le uguaglianze espresse con ‘ \doteq ’ sono state utilizzate per alleggerire la notazione.

Pressione di poro costante (condizioni drenate)

Se il mezzo fosse sottoposto alla sola pressione esterna, non sarebbe presente alcuna variazione della pressione di poro, e quindi $p = 0$. In questo caso la relazione costitutiva è data dalla eq. (1.22), in quanto il materiale è puramente elastico. In questo tipo di trasformazione la quantità di fluido deve variare in modo da mantenere costante la pressione di poro, quindi si può assumere una relazione lineare tra v e τ_{ij} :

$$v = a_{ij}\tau_{ij}, \tag{1.23}$$

dove $a_{ij} \doteq a\delta_{ij}$ è un tensore isotropo di rango 2. Possiamo definire la quantità $H_1 \doteq \frac{1}{3a}$, in modo che:

$$v = \frac{1}{3H_1}\tau_{kk} = -\frac{1}{H_1}P_C. \quad (1.24)$$

H_1 rappresenta il reciproco del volume di fluido che defluisce da un'unità di volume di materiale per unità di pressione di confinamento applicata alla superficie del mezzo mentre la pressione di poro rimane costante.

Sforzo costante

Consideriamo il caso in cui il mezzo non è sottoposto ad alcuno sforzo aggiuntivo alla superficie, e dunque $\tau_{ij} = 0$ e supponiamo che sia avvolto da una membrana impermeabile, flessibile e completamente chiusa a meno di un tubo attraverso il quale scorre fluido verso l'interno. Finchè il materiale è libero di espandersi, l'iniezione di nuovo fluido causa variazione di volume v e pressione p . In questo caso ci si aspetta che la deformazione sia:

$$\epsilon_{ij} = b_{ij}p = \frac{1}{3H_2}p\delta_{ij}, \quad (1.25)$$

dove b_{ij} è un tensore isotropo di rango 2 e H_2 è la “costante di Biot”, la quale rappresenta il reciproco dell'incremento di volume per unità di volume per un incremento unitario di pressione di poro mantenendo gli sforzi costanti. La relazione tra p e v è dunque lineare:

$$v = \frac{1}{R}p, \quad (1.26)$$

dove $\frac{1}{R}$ rappresenta l'incremento di volume di fluido dentro ai pori per unità di volume di materiale per incremento di p ; R ha le dimensioni di uno sforzo.

Equazioni costitutive

Consideriamo il caso di una generica trasformazione poro-elastica, in cui sia lo stress che la pressione di poro variano. Il processo può essere diviso in due trasformazioni distinte: la prima che prevede l'applicazione di stress a pressione costante ($p = 0$) e la seconda che prevede una variazione di pressione a stress costante ($\tau_{ij} = 0$). Utilizzando le eq. (1.22) e (1.25) si ottiene un'espressione per la deformazione:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\tau_{kk}\delta_{ij} \right) + \frac{1}{3H_2}p\delta_{ij}. \quad (1.27)$$

Utilizzando le eq. (1.24) e (1.25) si ricava un'equazione per la quantità di fluido:

$$v = \frac{1}{3H_1}\tau_{kk} + \frac{1}{R}p, \quad (1.28)$$

ed è possibile dimostrare che $H_1 = H_2 = H$ (Biot, 1980). La costante H può essere determinata a partire dall'incompressibilità K del mezzo poro-elastico in condizioni drenate e isoterme, e K'_s , interpretabile come l'incompressibilità della fase solida (Wang, 2017):

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{K} - \frac{1}{K'_s}. \quad (1.29)$$

L'eq. (1.27) può essere generalizzata nel caso in cui il mezzo sia termo-poro-elastico, e quindi sottoposto a una variazione di temperatura T e a una variazione di pressione di poro p :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \tau_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{3H} p \delta_{ij} + \frac{1}{3} \alpha T \delta_{ij}, \quad (1.30)$$

dove α è il “*coefficiente di espansione termica*”. E' inoltre possibile ricavare la relazione costitutiva inversa dell'eq. (1.30):

$$\tau_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} - K \left(\frac{1}{H} p \delta_{ij} + \alpha T \delta_{ij} \right). \quad (1.31)$$

L'eq. (1.30) può essere riscritta utilizzando il tensore di “*deformazione libera da stress*” $\epsilon_0 \delta_{ij}$, ovvero un tensore isotropo rappresentante la deformazione prodotta da p e T in assenza di stress:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \tau_{kk} \delta_{ij} \right) + \epsilon_0 \delta_{ij}, \quad (1.32)$$

quindi:

$$\epsilon_0 \delta_{ij} \doteq \left(\frac{1}{3H} p + \frac{1}{3} \alpha T \right) \delta_{ij}. \quad (1.33)$$

E' possibile osservare che ϵ_0 dipende linearmente dalle variazioni di pressione e temperatura all'interno dell'inclusione e si osserverà che spostamento, stress e deformazione saranno proporzionali a tale valore.

Condizioni non drenate

Con “*deformazioni non drenate*” si intendono dei processi che avvengono su una scala di tempo troppo breve per consentire il guadagno o la perdita di fluido di poro in un elemento di materiale tramite il trasporto diffusivo dagli o agli elementi vicini. In questa condizione la variazione della massa di fluido per unità di volume di materiale è nulla. Applicando in un tempo breve uno sforzo τ_{ij} al materiale, in esso viene generata una pressione:

$$p = -\frac{B}{3} \tau_{kk}, \quad (1.34)$$

dove B è il “*parametro di Skempton*”. In queste condizioni, dato che la pressione è esprimibile tramite il parametro di Skempton, è possibile riscrivere l'eq. (1.27) in forma di una relazione costitutiva elastica non drenata:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{\nu_u}{1+\nu_u} \tau_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (1.35)$$

dove ν_u è il “*modulo di Poisson non drenato*”, dato dalla relazione:

$$\nu_u = \frac{3\nu + B(1-2\nu) \frac{K}{H}}{3 - B(1-2\nu) \frac{K}{H}}. \quad (1.36)$$

Capitolo 2

Modello di inclusione termo-poro-elastica a forma cilindrica in un semispazio

Nella prima parte di questo capitolo verrà descritto il modello di inclusione TPE a forma cilindrica in un semispazio; in particolare saranno descritti i campi di spostamento, deformazione e stress dovuti alla sorgente termo-poro-elastica. Nella seconda parte verranno fornite le espressioni analitiche di pressione e temperatura in funzione dello spazio e del tempo, che sono necessarie per la determinazione dei valori, in un punto e in un istante, delle componenti dei campi menzionati sopra. Nell'ultima parte verrà descritto il modello che considera la sorgente TPE come un cilindro di spessore finito costituito da N dischi infinitesimi. Il modello a cui si fa riferimento è quello descritto da Benussi (2020) e sarà la base di partenza per lo studio che verrà introdotto successivamente nell'elaborato.

2.1 Modello di sorgente termo-poro-elastica

Una sorgente TPE (o “*inclusione*”) è una porzione di materiale che può essere soggetta a variazioni di temperatura ΔT e di pressione di poro Δp . Essa si trova in un semispazio, detto matrice, che è un materiale poro-elastico in condizioni isoterme e drenate, cioè non caratterizzate da variazioni di temperatura o pressione di poro ($\Delta T = \Delta p = 0$). Gli effetti della sorgente vengono studiati nel semispazio $x_3 \geq 0$, quindi la superficie, $x_3 = 0$, soddisfa la condizione al contorno di superficie libera da sforzi: $\tau_{33}(x_1, x_2, x_3^+) = \tau_{33}(x_1, x_2, x_3^-) = 0$.

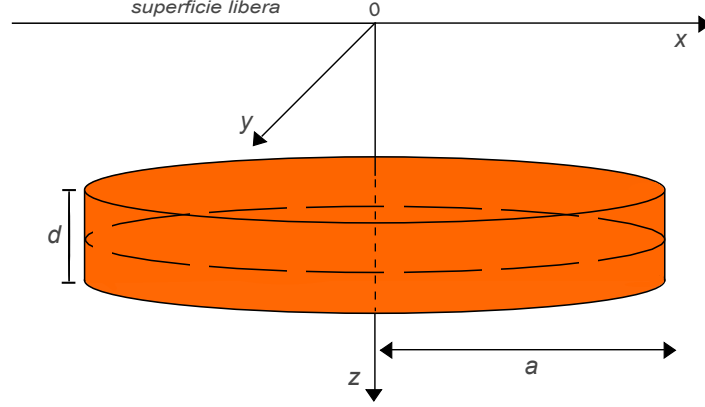


Figura 2.1: Modello di inclusione TPE a forma di disco.

2.1.1 Determinazione del campo di spostamento, di deformazione e di stress per una sorgente TPE

Per descrivere un'inclusione TPE si utilizza il metodo di Eshelby (1957), mostrato in Appendice (B).

Come spiegato in Appendice (B), per mantenere costante il volume dell'inclusione, a seguito di variazioni di temperatura e pressione di poro, devono essere applicate sulla superficie S delle trazioni aggiuntive $T_k = -3K\epsilon_0 n_k$, dove K è l'incompressibilità, che può essere espressa tramite la rigidità e il modulo di Poisson attraverso la relazione $K = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$. Il passaggio finale dell'approccio descritto da Eshelby (1957) prevede la rimozione della discontinuità della trazione attraverso l'applicazione di una discontinuità di trazione di segno opposto sulla superficie dell'inclusione $[T]_-^+ = 3K\epsilon_0 n_k$, che genera il campo di spostamento seguente:

$$u_i(\mathbf{x}) = \oint_S G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') [T]_-^+ dS' = \oint_S 3K\epsilon_0 G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') n_k(\mathbf{x}') dS', \quad (2.1)$$

dove G_{ik} rappresentano le componenti del tensore di Green (calcolate da Mindlin, 1936), che forniscono la componente i -esima dello spostamento in \mathbf{x} dovuto a una forza di modulo unitario agente nella k -esima direzione e localizzata in un punto \mathbf{x}' . L'eq. (2.1) può essere riscritta applicando il "teorema di Gauss", ottenendo un'integrazione equivalente effettuata sul volume V_s dell'inclusione TPE:

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_{V_s} 3K\epsilon_0 \frac{\partial G_{ik}}{\partial x'_k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'). \quad (2.2)$$

Nel caso di un disco con spessore $d \ll$ del raggio a , come mostrato da Belardinelli et al. (2022) e da Mantiloni et al. (2020), utilizzando le eq. (1.30) e (1.31), è possibile determinare la deformazione ϵ_{ij} e lo stress τ_{ij} all'interno (indicato con l'apice 'in') e all'esterno (indicato con l'apice 'out') dell'inclusione TPE:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{in} = \epsilon_{ij}^{out} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (2.3)$$

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \tau_{ij}^{in} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} - 3K\epsilon_0\delta_{ij} & \text{se } \mathbf{x} \in V_s \\ \tau_{ij}^{out} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} & \text{se } \mathbf{x} \notin V_s. \end{cases} \quad (2.4)$$

Come è possibile osservare dalle precedenti equazioni, il campo di deformazione e di stress dipendono da quello di spostamento, quindi dopo aver calcolato quest'ultimo tramite la risoluzione dell'eq. (2.2), si possono determinare gli altri due.

Valutando le derivate parziali del tensore di Green si possono determinare le componenti u_1 , u_2 e u_3 del campo di spostamento, le cui espressioni sono riportate da Mantiloni et al. (2020). Tali spostamenti possono essere visti come formati da due termini: “*singolari*” e “*non singolari*”, che, rispettivamente, divergono e convergono su una superficie sferica concentrica alla sorgente. Il campo di spostamento può dunque essere espresso come segue:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^s + \mathbf{u}^{ns}, \quad (2.5)$$

dove \mathbf{u}^s è la parte singolare del campo di spostamento e \mathbf{u}^{ns} quella non singolare.

Anche i campi di deformazione e stress possono essere espressi attraverso una componente singolare, denotata con l'apice ‘s’, e una non singolare, denotata con l'apice ‘ns’:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^s + \epsilon_{ij}^{ns}, \quad (2.6)$$

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij}^{in} = \tau_{ij}^{s,in} + \tau_{ij}^{ns,in} \\ \tau_{ij}^{out} = \tau_{ij}^{s,out} + \tau_{ij}^{ns,out} \end{cases}. \quad (2.7)$$

Le espressioni delle singole componenti sono riportate da Mantiloni et al. (2021) e Belardinelli et al. (2022). Nel corso dell'elaborato non considereremo la componente u_2 del campo di spostamento, le componenti $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$, $\epsilon_{23} = \epsilon_{32}$ del campo di deformazione e le componenti $\tau_{12} = \tau_{21}$ e $\tau_{23} = \tau_{32}$ del campo di sforzo, in quanto nulle per simmetria del sistema.

2.2 Espressioni analitiche della pressione di poro e della temperatura all'interno della sorgente TPE

Per determinare l'evoluzione spazio-temporale della pressione di poro e della temperatura all'interno di una sorgente TPE, come suggerito da Nespoli et al. (2021), è necessario considerare le equazioni che seguono (Darcy, 1856; Biot, 1941; Rice Cleary, 1976; Bejan, 1984; McTigue, 1986).

La prima equazione è nota come “*equazione di continuità*”:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{q}) = 0, \quad (2.8)$$

dove ρ_f è la densità del fluido, t è il tempo e \mathbf{q} è il “*flusso di scarico specifico*”, che rappresenta la quantità di volume di fluido che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo.

La seconda equazione esprime la relazione tra \mathbf{q} e il gradiente di pressione ∇p ed è nota come “*legge di Darcy*” (Appendice A):

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\eta} \nabla p, \quad (2.9)$$

dove k è la permeabilità della matrice solida, η la viscosità e p è assunto essere l'eccesso di pressione dal valore di pressione idrostatica p_h , con p_h ottenuta dalla “*legge di Stevino*”:

$$\nabla p_h = \rho_f \mathbf{g}.$$

La terza equazione descrive l'equilibrio meccanico:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (2.10)$$

La quarta relazione descrive il bilancio energetico del sistema, assumendo equilibrio termico locale tra la matrice solida (con porosità Φ , densità ρ_s , calore specifico c_s , conducibilità termica λ_s e coefficiente di espansione termica α_s) e il fluido (con calore specifico c_f , conducibilità termica λ_f e coefficiente di espansione termica α_f):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_f \mathbf{q} \cdot \nabla T = \lambda \nabla^2 T - \mathbf{q} \cdot \nabla p, \quad (2.11)$$

dove $\rho c = \Phi \rho_f c_f + (1 - \Phi) \rho_s c_s$ è il calore specifico medio per unità di volume e $\lambda = \Phi \lambda_f + (1 - \Phi) \lambda_s$ è la conducibilità termica media per unità di volume. Nella precedente equazione il termine $\lambda \nabla^2 T$ rappresenta il calore trasferito tramite processi conduttivi e $\mathbf{q} \cdot \nabla p$ rappresenta il tasso di lavoro meccanico per unità di volume convertito in calore tramite processi dissipativi di natura viscosa.

Partendo dall'eq. (2.11) e utilizzando l'eq. (2.8) è possibile ottenere:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D \nabla^2 \right] \left(\tau_{kk} + \frac{3}{B} p \right) = D \beta_1 \nabla^2 T + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.12)$$

dove β_1 e β_2 sono due parametri che dipendono dalle caratteristiche fisiche della matrice solida e del fluido, definibili come segue:

$$\beta_1 = \mu \alpha_s \frac{4}{3} \frac{1 + \nu}{1 - \nu}; \quad \beta_2 = 2 \mu B \Phi (\alpha_f - \alpha_s) \frac{(1 + \nu)(1 + \nu_u)}{3(\nu_u - \nu)}, \quad (2.13)$$

in cui B è il parametro di Skempton, ν_u è il modulo di Poisson non drenato e D rappresenta il “*coefficiente di diffusività idraulica*”. Quest'ultimo parametro è definito dalla relazione:

$$D = \frac{k \mu}{\eta} \frac{2 B^2 (1 + \nu_u)^2 (1 - \nu)}{9 (1 - \nu_u) (\nu_u - \nu)}. \quad (2.14)$$

Nell'eq. (2.12) il termine che moltiplica β_1 descrive effetti puramente termo-elastici, mentre quello che moltiplica β_2 descrive la pressione del fluido che sarebbe indotta in condizioni non drenate dall'espansione termica del fluido presente all'interno dei pori.

2.2.1 Avvezione transiente della temperatura

Il problema che siamo intenti a studiare è la determinazione dell'espressione analitica che rappresenta l'andamento spazio-temporale della temperatura all'interno di un disco di spessore d e raggio a . Sia ζ la coordinata spaziale che assume valore $\zeta = 0$ all'estremo inferiore del disco e $\zeta = d$ a quello superiore, e sia $T_0(\zeta)$ la configurazione di temperatura iniziale del disco, con $T_0(0) = \Delta T$ e $T_0(d) = 0$. T rappresenta la temperatura totale, definita a meno di una costante, che assumiamo uguale al valore di T in $\zeta = d$ sopra al disco. Una possibile espressione di $T_0(\zeta)$ è quella stazionaria conduttiva, ipotizzando che il fenomeno dell'avvezione avvenga per tempi $t \geq 0$:

$$T_0(\zeta) = \Delta T \left(1 - \frac{\zeta}{d} \right). \quad (2.15)$$

Al tempo $t = 0$ inizia un processo avveztivo con flusso \mathbf{q} costante in direzione dell'asse ζ . Tale ipotesi dovrà essere convalidata risolvendo l'equazione della pressione. In una sostanza acquosa si ha che $\rho_f c_f \simeq 4.2 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$, quindi il termine di calore derivante dalla dissipazione del lavoro meccanico $\mathbf{q} \cdot \nabla p \sim \frac{k}{\eta d^2} \Delta p^2$ è più di due ordini di grandezza inferiore al termine $\rho_f c_f \mathbf{q} \cdot \nabla T \sim \frac{k}{\eta d^2} \rho_f c_f \Delta p \Delta T$, e può essere dunque trascurato. Inoltre, considerando $\mathbf{q} \cdot \nabla T = q \frac{\partial T}{\partial \zeta}$, l'eq. (2.11) può essere riscritta come segue:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_f q \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \lambda \nabla^2 T, \quad 0 \leq \zeta \leq d; r < a, \quad (2.16)$$

con condizione iniziale $T(\zeta, t = 0) = T_0(\zeta)$ e condizioni al contorno $T(0, t) = \Delta T$ e $T(d, t) = 0$. L'ultima condizione deriva dal fatto che il mezzo poro-elastico posto sopra al disco può essere considerato come un grande serbatoio termico con capacità termica infinita, in grado di assorbire il calore che attraversa la superficie $\zeta = d$ ma che provoca un aumento di temperatura trascurabile per $\zeta > d$. Inoltre, se trascuriamo i processi conduttivi che trasportano calore in direzione radiale r , è necessario porre che $\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$. Il problema descritto nelle righe precedenti può essere risolto rapidamente se i processi di avvezione sono abbastanza rapidi da poter trascurare i processi conduttivi, infatti $\lambda \nabla^2 T \sim \lambda \Delta T / d^2$ è circa quattro ordini di grandezza inferiore al termine avveztivo per $\eta = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. L'eq. (2.16) può essere dunque riscritta come segue:

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_f q \frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0 & \text{se } \zeta > 0 \\ T(\zeta, t = 0) = T_0(\zeta) \\ T(0, t) = \Delta T. \end{cases} \quad (2.17)$$

L'altra condizione al contorno non può essere posta direttamente nel problema precedente, in quanto l'equazione differenziale alle derivate parziali presente nel sistema nell'eq. (2.17) è del primo ordine, ma comunque si evince che T dipenderà da ζ e da t .

Supponiamo che T sia una funzione di $\xi = \zeta - V_T t$, con $V_T \doteq \frac{\rho_f c_f}{\rho c} q$ che rappresenta la velocità del fronte di temperatura (il quale sale verso l'alto), allora l'eq. (2.17) è identicamente soddisfatta:

$$\frac{dT}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_T \frac{dT}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} = -V_T \frac{dT}{d\xi} + V_T \frac{dT}{d\xi} = 0.$$

Dalle infinite soluzioni $T(\zeta, t) = f(\xi) = f(\zeta - V_T t)$ è possibile determinare un'unica soluzione attraverso le condizioni poste in eq. (2.17) e dalla condizione $T(d, t) = 0$:

$$T(\zeta, t) = \begin{cases} \Delta T & \text{se } 0 \leq \zeta \leq V_T t \\ T_0(\zeta - V_T t) & \text{se } V_T t < \zeta < d \\ 0 & \text{se } \zeta \geq d. \end{cases} \quad (2.18)$$

Da questa equazione è possibile studiare il caso definito da condizioni iniziali isoterme, caratterizzato da $T_0(\zeta) = 0$:

$$T(\zeta, t) = \begin{cases} \Delta T & \text{se } 0 \leq \zeta \leq V_T t \\ 0 & \text{se } V_T t < \zeta < d \\ 0 & \text{se } \zeta \geq d. \end{cases} \quad (2.19)$$

E' possibile osservare che l'aumento di temperatura $T(\zeta, t) - T_0(\zeta) = T(\zeta, t)$ è localizzato in $\zeta < V_T t$ e presenta una discontinuità in $\zeta = V_T t$. L'eq. (2.19) può essere espressa con la funzione Θ di Heaviside:

$$T(\zeta, t) = \Delta T [1 - \Theta(\zeta - V_T t)]. \quad (2.20)$$

In Fig. (2.2) è rappresentato l'andamento della soluzione in eq. (2.20) al variare della quota in dieci istanti temporali distinti (da $t = 0.1 t_T$ a $t = t_T \doteq d/V_T$, con intervalli regolari di $0.1 d/V_T$). In tale figura vengono considerati valori utilizzati nel modello descritto in questo elaborato: $d = 500$ m, $\Delta T = 100$ K, $V_T = 2.86 \cdot 10^{-6}$ m/s.

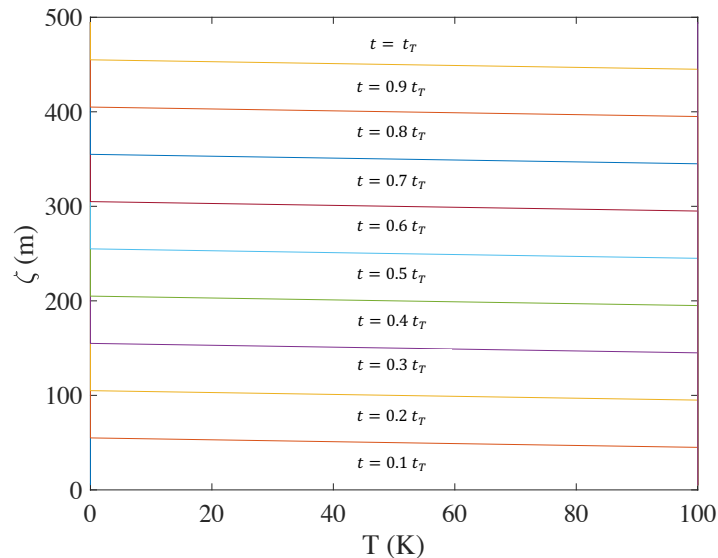


Figura 2.2: *Andamento della soluzione (2.20) al variare dell'altezza ζ in dieci istanti temporali.*

Dall'eq. (2.18) è possibile ricavare inoltre l'espressione che descrive l'avvezione transiente della temperatura in un caso conduttivo stazionario. Infatti, se la temperatura ΔT era presente da molto tempo al di sotto dello strato $[0, d]$, prima che questo diventasse permeabile, è possibile impiegare come condizione iniziale $T_0(\zeta) = \Delta T(1 - \zeta/d)$. Utilizzando quest'ultima condizione si ottiene:

$$T(\zeta, t) = \begin{cases} \Delta T & \text{se } 0 \leq \zeta \leq V_T t \\ \Delta T \left(1 - \frac{\zeta - V_T t}{d}\right) & \text{se } V_T t < \zeta < d \\ 0 & \text{se } \zeta \geq d. \end{cases} \quad (2.21)$$

In Fig. (2.3) è rappresentato l'andamento della soluzione in eq. (2.25) al variare dell'altezza in dieci istanti temporali distinti. Le grandezze utilizzati e gli istanti considerati sono gli stessi usati per la Fig. (2.2).

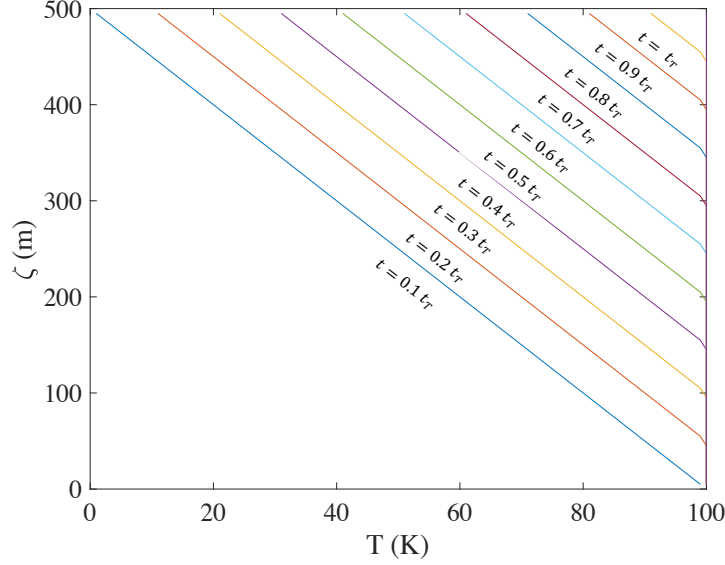


Figura 2.3: *Andamento della soluzione (2.25) al variare dell'altezza ζ in dieci istanti temporali.*

Lo studio che verrà riportato nel capitolo 3 prende in considerazione il caso con condizioni iniziali isoterme, descritto dall' eq. (2.19).

2.2.2 Avvezione transiente della pressione

Come spiegato da Nespoli et al. (2021), per comprendere l'evoluzione spazio-temporale della pressione, in accordo con l'eq. (2.12), è possibile considerare il problema unidimensionale (caratterizzato da deformazione uniassiale e stress costante verticale) nel quale l'unica componente non nulla del campo di spostamento è u_3 , dipendente solo dalla coordinata spaziale z . Questa approssimazione è sicuramente valida in prossimità dell'asse di simmetria della sorgente TPE. In questo caso $\tau_{13} = \tau_{23} = 0$, in accordo con l'eq. (2.4), e dall'eq. (2.10) si ha che τ_{33} è costante. Tramite l'eq. (1.32) è possibile ricavare $\epsilon_{33} = \epsilon_{kk}$ ed eguagliarla con l'espressione di ϵ_{kk} che si ottiene dall'eq. (2.4), ricavando:

$$\tau_{kk} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} (\tau_{33} - 4\mu\epsilon_0). \quad (2.22)$$

Dato che τ_{kk} non dipende nè dalla coordinata spaziale nè da quella temporale, l'eq. (2.12) può essere riscritta come segue:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right] p = \Sigma \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.23)$$

dove $\Sigma = (\beta_1 + \beta_2) \frac{B(1+\nu_u)(1-\nu)}{3(1+\nu_u)(1-\nu)-6(\nu_u-\nu)}$ è un parametro che descrive l'incremento di pressione generato da un unitario e repentino aumento di temperatura. Questa equazione può essere risolta usando la tecnica di separazione delle variabili imponendo come condizioni al contorno: $p = \Delta p$ in $\zeta = 0$, $p = 0$ in $\zeta = d$ e $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ in $r = a$ (il confine laterale della sorgente è assunto impermeabile al flusso del fluido) e come condizione iniziale: $p = 0$ in $0 < \zeta < d$.

Inserendo l'eq. (2.20) nell'eq. (2.23), e considerando le precedenti condizioni, possiamo riscrivere:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - D \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right] p = \Sigma V_T \Delta T \delta(\zeta - V_T t). \quad (2.24)$$

Un modo per risolvere il problema è considerando un'approssimazione quasi-statica per $t > t_P$, dove $t_P \doteq d^2/D$ è il tempo caratteristico di diffusione. E' quindi possibile riscrivere il problema in eq. (2.24) come segue:

$$\left[-D \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right] p = \Sigma V_T \Delta T \delta(\zeta - V_T t) \quad \begin{cases} p = \Delta p & \text{in } \zeta = 0, \forall t \geq 0 \\ p = 0 & \text{in } \zeta = d, \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Come mostrato da Nespoli et al. (2021) tale approssimazione può essere effettuata in quanto il tempo in cui il fronte di temperatura raggiunge il punto più alto della sorgente TPE, espresso come $t_T \doteq d/V_T$, è molto maggiore di t_P . Questa approssimazione permette di giungere alla seguente soluzione:

$$p(\zeta, t) = \begin{cases} \Delta p \left(1 - \frac{\zeta}{d}\right) + \Gamma \zeta \left(1 - \frac{V_T t}{d}\right) & \text{se } 0 \leq \zeta \leq V_T t \\ (\Delta p + \Gamma V_T t) \left(1 - \frac{\zeta}{d}\right) & \text{se } V_T t < \zeta \leq d, \end{cases} \quad (2.26)$$

dove $\Gamma = \frac{\Sigma V_T \Delta T}{D}$.

E' possibile osservare che il profilo di pressione è costituito da due segmenti con pendenza variabile nel tempo che si incontrano continuamente in $\zeta = V_T t$. In Fig. (2.4) è rappresentato l'andamento della soluzione in eq. (2.26) al variare dell'altezza in dieci istanti temporali distinti (da $t = 0.1 t_T$ a $t = t_T$, con intervalli regolari di $0.1 t_T$). In tale figura vengono considerati valori utilizzati nel modello descritto in questo elaborato: $d = 500$ m, $\Delta T = 100$ K, $V_T = 2.86 \cdot 10^{-6}$ m/s.

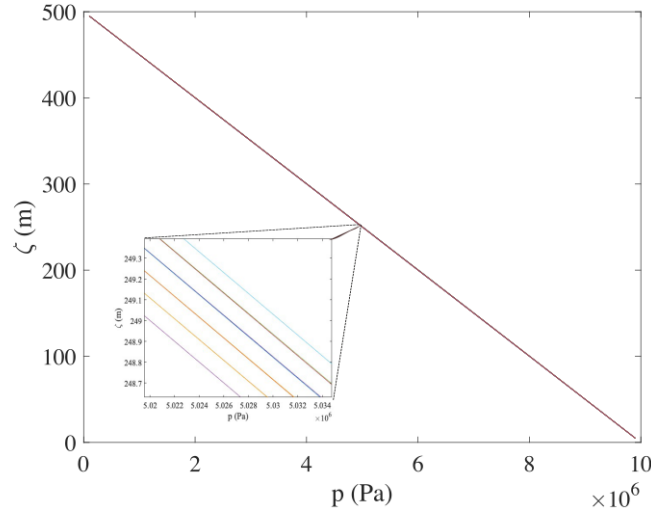


Figura 2.4: *Andamento della soluzione (2.26) al variare dell'altezza ζ in dieci istanti temporali. E' stato effettuato un ingrandimento per mostrare che linee corrispondenti a istanti temporali diversi non sono sovrapposte.*

E' stato possibile determinare l'espressione analitica dell'andamento della pressione nel caso conduttivo stazionario. Sostituendo l'eq. (2.25) nell'eq. (2.23) e applicando l'approssimazione quasi-statica descritta in precedenza, sono giunto alla seguente equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} = -\frac{\Gamma}{d} [\Theta(\zeta - V_T t) - \Theta(\zeta - d)] \quad \begin{cases} p = \Delta p & \text{in } \zeta = 0, \forall t \geq 0 \\ p = 0 & \text{in } \zeta = d, \forall t \geq 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} = 0 & \text{in } r = a, \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Applicando le condizioni al contorno e la continuità della funzione e della derivata prima in $\zeta = V_T t$ si giunge all'espressione di $p(\zeta, t)$:

$$p(\zeta, t) = \begin{cases} \Delta p + \left(-\frac{\Gamma}{d} V_T t + \frac{\Gamma}{2d^2} V_T^2 t^2 + \frac{\Gamma d - 2\Delta p}{2d}\right) \zeta & \text{se } 0 \leq \zeta \leq V_T t \\ -\frac{\Gamma}{2d} \zeta^2 + \left(\frac{\Gamma}{2d^2} V_T^2 t^2 + \frac{\Gamma d - 2\Delta p}{2d}\right) \zeta - \frac{\Gamma}{2d} V_T^2 t^2 + \Delta p & \text{se } V_T t < \zeta \leq d. \end{cases} \quad (2.28)$$

In Fig. (2.5) è rappresentato l'andamento della soluzione in eq. (2.28) al variare dell'altezza in dieci istanti temporali distinti. Le grandezze utilizzate e gli istanti considerati sono gli stessi utilizzati per la Fig. (2.4).

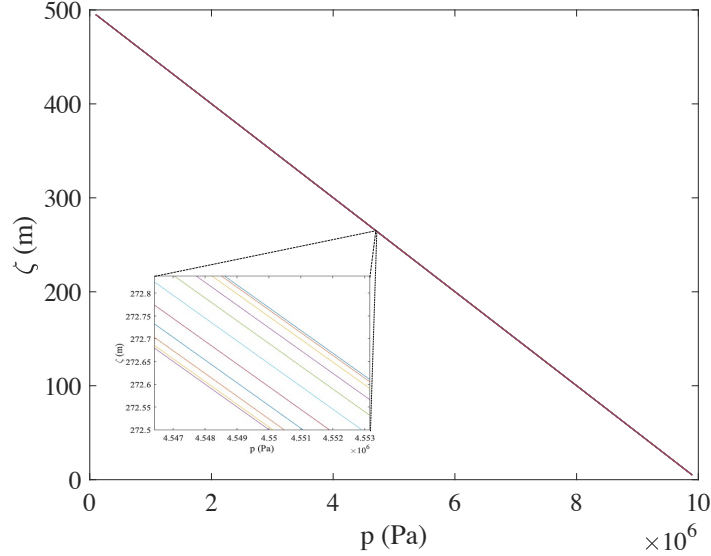


Figura 2.5: *Andamento della soluzione (2.28) al variare dell'altezza ζ in dieci istanti temporali. E' stato effettuato un ingrandimento per mostrare che linee corrispondenti a istanti temporali diversi non sono sovrapposte.*

Lo studio che verrà riportato in questo elaborato prende in considerazione il caso con condizioni iniziali isoterme, descritto dall' eq. (2.26).

2.3 Discretizzazione del modello in più dischi di spessore infinitesimo

Nel capitolo precedente abbiamo visto che considerando la risalita di fluidi caldi all'interno di un'inclusione cilindrica, ϵ_0 varia all'interno di questa sorgente TPE. Per calcolare gli effetti della risalita dei fluidi su spostamento, deformazione e sforzo generati da un'inclusione cilindrica TPE, possiamo procedere come segue.

Un cilindro è considerabile come la somma di N dischi, detti “*elementi di cilindro*”, con spessore molto minore del raggio (Fig. 2.6). In particolare, se N è dispari, un elemento avrà centro sul piano mediano, che coinciderà con il centro del cilindro, e saranno presenti $\frac{N-1}{2}$ elementi sopra e sotto il piano mediano. I centri dei dischi saranno traslati di $\left(\frac{d}{N} \cdot m_d\right)$, dove m_d è un numero intero compreso tra $-\frac{N-1}{2}$ e $\frac{N-1}{2}$, che vale 0 per il disco posto sul piano mediano e assume valori crescenti o decrescenti man mano che ci si allontana verso l'alto o verso il basso dal centro del cilindro. Lo spessore di ogni disco

è il medesimo e vale $d_e = \frac{d}{N}$. Possiamo determinare la profondità del centro del disco m_d -esimo come segue:

$$c^{(m_d)} = c_0 + m_d \cdot d_e, \quad (2.29)$$

dove c_0 è la profondità del centro del cilindro.

Se N è pari non ci saranno elementi sul piano mediano, ma quest'ultimo separerà il primo degli $N/2$ dischi sotto di esso e il primo degli $N/2$ dischi sopra di esso. I centri dei dischi saranno traslati di $\left(\frac{d}{N} \cdot (m_p \pm 1/2)\right)$, dove m_p è un numero intero compreso tra $-N/2 + 1$ e $N/2 - 1$, che vale 0 per i dischi che hanno una base sul piano mediano e assume valori crescenti o decrescenti man mano che ci si allontana verso il basso o verso l'alto dal centro del cilindro. Il segno $+$ corrisponde a valori positivi di m_p e il $-$ a negativi. Possiamo determinare la profondità del centro del disco m_p -esimo come segue:

$$c^{(m_p)} = c_0 + (m_p \pm 1/2) d_e. \quad (2.30)$$

I centri degli elementi saranno in entrambi i casi allineati lungo l'asse z . Una volta utilizzate le eq. (2.19) e (2.26) al tempo t e alla profondità $z = c^{(m_p)}$ per determinare ϵ_0 nel primo elemento, tramite il modello di inclusione TPE a disco in un semispazio è possibile determinare al tempo t per ciascuno dei dischi i campi di spostamento, deformazione e stress, e quindi la dilatazione cubica e il massimo sforzo di taglio, utilizzando le eq. (2.5), (2.6), (2.7), (1.17) e (1.7). Sommando gli effetti degli elementi si determinerà spostamento, deformazione e sforzo causati dal cilindro TPE al tempo t .

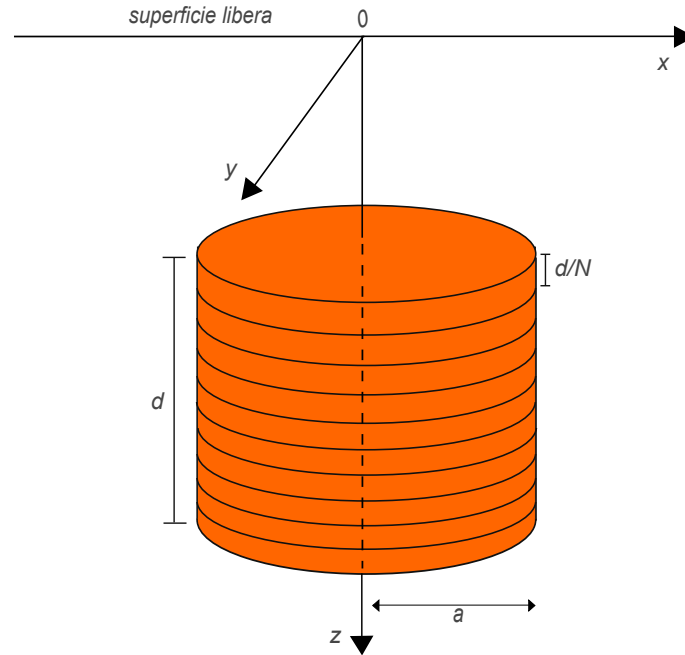


Figura 2.6: *Suddivisione del cilindro di spessore finito d in N dischi di spessore d/N .*

Nell'elaborato verrà esaminato un cilindro di spessore $d = 500$ m, raggio $a = 2500$ m, suddiviso in $N = 50$ dischi di spessore $d_e = 10$ m. Al fine di determinare pressione e temperatura sono stati usati i parametri utilizzati da Nespoli et al. (2021) e riportati da Wang (2017), riassunti nelle tabelle (2.1), (2.2), (2.3). Tali parametri sono adatti a descrivere l'inclusione TPE come un mezzo ad alta permeabilità in presenza di acqua in fase liquida. Utilizzando tali valori è possibile determinare i tempi caratteristici: $t_P = 3.00 \cdot 10^5$ s e $t_T = 1.75 \cdot 10^8$ s.

ρ_s [kg/m ³]	c_s [J/(kg·K)]	Φ	k [m ²]	λ_s [W/(m·K)]	μ [Pa]	ν	K_s [Pa]	α_s [K ⁻¹]
2650	10 ³	0.19	$1.9 \cdot 10^{-3}$	2.5	$6 \cdot 10^9$	0.2	$36 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^{-5}$

Tabella 2.1: Valori dei parametri fisici caratterizzanti la matrice solida.

ρ_f [kg/m ³]	c_f [J/(kg·K)]	η [Pa·s]	λ_f [W/(m·K)]	α_f [K ⁻¹]
1000	4200	10 ⁻³	0.6	$5 \cdot 10^{-4}$

Tabella 2.2: Valori dei parametri fisici caratterizzanti il fluido che penetra all'interno della sorgente TPE.

H [Pa]	B	ν_u	D [m ² /s]
$10.1 \cdot 10^9$	0.62	0.33	1.6

Tabella 2.3: Valori dei parametri fisici caratterizzanti la sorgente TPE.

Capitolo 3

Risultati

In questo capitolo saranno riportati e analizzati gli andamenti complessivi dei campi di spostamento, deformazione, stress, e quindi della dilatazione cubica e del massimo sforzo di taglio, dovuti all'iniezione di fluido all'interno dell'inclusione TPE. Per determinare e graficare tali andamenti è stato utilizzato un codice scritto in linguaggio MATLAB.

Per ogni disco che costituisce il cilindro sono state calcolate le componenti u_1 e u_3 del campo di spostamento, le componenti ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} , $\epsilon_{13} = \epsilon_{31}$ del campo di deformazione, le componenti τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} e $\tau_{13} = \tau_{31}$ del campo di stress, la dilatazione cubica ϵ_{kk} e il massimo sforzo di taglio S_{max} . Per semplicità, in questo capitolo, verrà sempre considerato l'opposto della componente verticale u_3 , in modo che un aumento corrisponda a un sollevamento del suolo. La funzione che permette di assegnare tali valori richiede in input la variazione di pressione di poro e di temperatura a cui è sottoposta l'inclusione (eq. 2.26, 2.19), lo spessore e la profondità del disco studiato, il raggio della base del cilindro e le coordinate del punto in cui si vuole misurare la componente del campo, oltre che i parametri del mezzo TPE. Per studiare la parte singolare del campo di spostamento sono state utilizzate delle serie di polinomi descritte da Belardinelli et al. (2022) e Lamberti (2017), che, se non diversamente specificato, sono state troncate a $m = 300$. I risultati dello studio saranno valutati a tre differenti profondità, e verranno confrontati tre istanti temporali distinti. Successivamente verrà effettuata un'ulteriore analisi, alle tre profondità precedenti, in funzione del tempo in un punto fissato. In particolare le profondità analizzate saranno: quella della superficie terrestre ($z = 0$), quella del piano mediano del cilindro ($z = 2000$ m) e una profondità intermedia alle prime due ($z = 1000$ m); i tempi considerati saranno: $t = 0.1 t_T$, $t = 0.5 t_T$ e $t = t_T$, dove t_T è il tempo in cui il fronte di temperatura raggiunge il punto più alto della sorgente TPE. Verranno inoltre mostrate delle mappe che descrivono l'andamento, al variare della profondità e della coordinata spaziale x , della dilatazione cubica e del massimo sforzo di taglio, a ciascuno dei tre tempi precedenti. L'analisi in funzione del tempo verrà effettuata nel punto $x = 0$. Come già espresso nel paragrafo precedente, la soluzione dell'eq. (2.24) è determinata utilizzando l'approssimazione quasi-statica $t > t_P$, dato che t_T è di circa quattro ordini di grandezza superiore a t_P : i grafici che verranno mostrati nelle Fig. (3.4), (3.8), (3.11), (3.19) sono quindi effettuati plottando per $t > 2 t_P$. Per il motivo precedente la pressione, e quindi ogni componente di ciascun campo analizzato, potrà avere valore non nullo al tempo iniziale. Gli istanti temporali presi in considerazione per effettuare i grafici sono dieci: a partire da $t = 0.1 t_T$, fino a $t = t_T$, con intervalli regolari di $0.1 t_T$.

3.1 Analisi del campo di spostamento

Iniziamo con il considerare le componenti u_1 e $-u_3$ del campo di spostamento sulla superficie terrestre ($z = 0$), mostrate in Fig. (3.1). E' possibile osservare che la componente u_1 è nulla per tutti gli istanti temporali in $x = 0$, cresce fino raggiunge il massimo assoluto in $x = 2650 \div 2700$ m, e decresce tendendo a zero per valori superiori. $-u_3$ possiede valore massimo in $x = 0$ e decresce tendendo a zero all'aumentare di x , in maniera analoga a ogni singolo disco. In superficie lo spostamento subisce una variazione maggiore lungo la componente verticale e in corrispondenza dell'asse del cilindro.

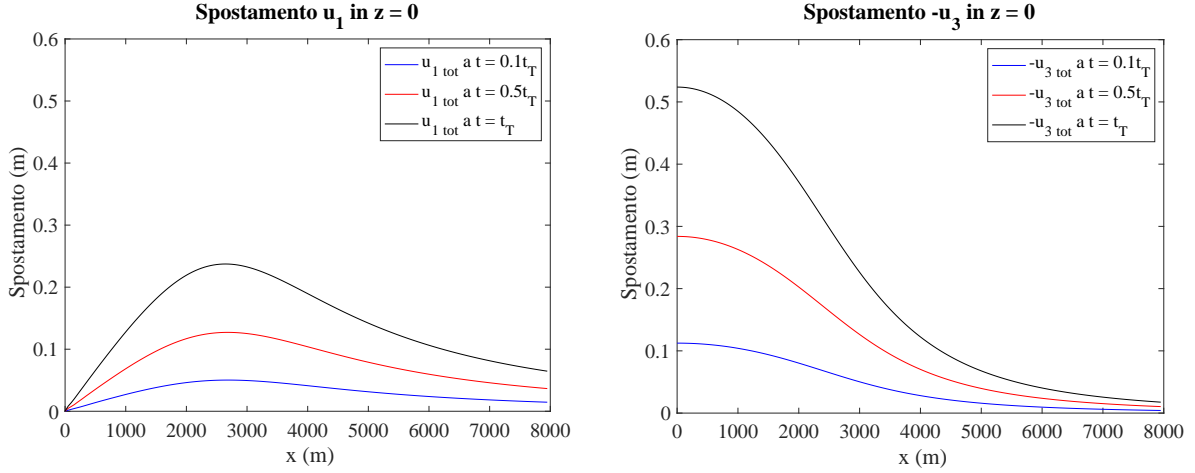


Figura 3.1: *Andamento, in tre diversi istanti temporali, in superficie ($z = 0$) delle componenti u_1 e $-u_3$ del campo di spostamento generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi.*

In Fig. (3.2) sono rappresentate le componenti del campo di spostamento alla profondità del piano mediano del cilindro ($z = 2000$ m). La componente di spostamento lungo l'asse orizzontale u_1 cresce all'interno del cilindro, fino a raggiungere valore massimo in corrispondenza del raggio, mentre decresce all'esterno. L'intensità di questa componente supera notevolmente quella ad altre profondità ed ha una crescita più rapida. In questo caso le serie di polinomi, necessarie per il calcolo della parte singolare di \mathbf{u} , sono state troncate a $m = 1000$, per migliorare il più possibile l'effetto della singolarità in $x = a$. Nel piano mediano, così come in superficie, la componente verticale del campo di spostamento è massima in $x = 0$. Nel piano mediano l'andamento di $-u_3$ non è coerente con quello che si ha alle altre profondità, infatti dopo un tempo pari a t_T la sua intensità è inferiore a quella a $t = 0.5 t_T$ all'interno del cilindro. Questo è dovuto al fatto che per tempi $t > 0.5 t_T$ il fronte avvertivo di temperatura si trova al di sopra del piano mediano del cilindro. Gli elementi di cilindro dell'inclusione attivati sopra al piano mediano contribuiscono generando uno spostamento u_3 positivo a $z = 2000$ m. Ogni disco che compone l'inclusione TPE genera infatti uno spostamento verticale negativo sopra di essa e positivo sotto di essa.

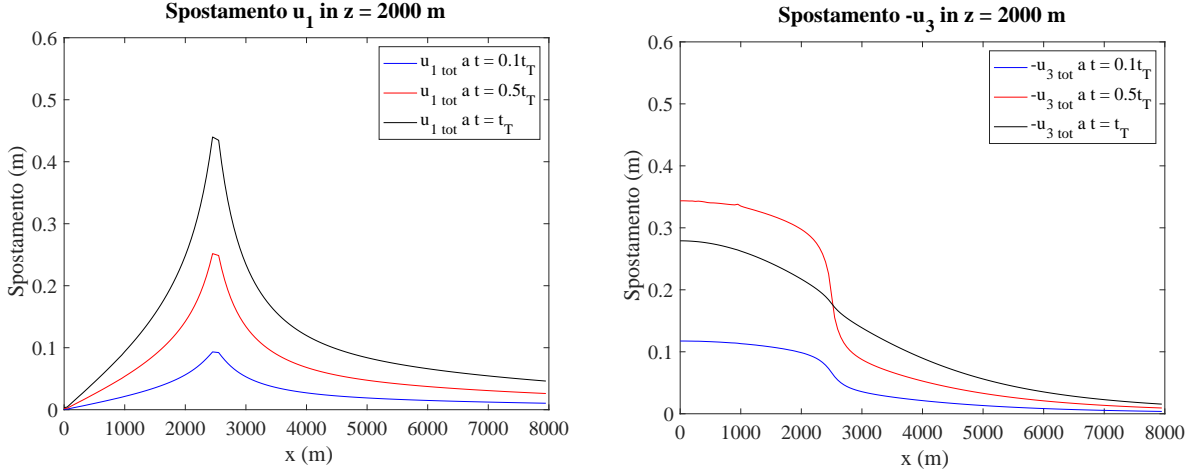


Figura 3.2: Andamento, in tre diversi istanti temporali, sul piano mediano ($z = 2000$ m) delle componenti u_1 e $-u_3$ del campo di spostamento generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi.

In Fig. (3.3) sono rappresentate le componenti del campo di spostamento a una profondità di $z = 1000$ m. Si può osservare che gli andamenti sono simili a quelli osservati in superficie (Fig. 3.1), con la differenza che la componente verticale u_3 assume, a parità di x e di t , valori superiori in modulo, in quanto i punti di osservazione sono più vicini al cilindro. Differentemente, u_1 nel punto di massimo, in questo caso localizzato a $x = 2500$ m, assume un valore inferiore.

Per tempi prossimi all'inizio dell'iniezione del fluido l'effetto di spostamento verticale in superficie, sul piano mediano e in $z = 1000$ m, sono molto simili. All'esterno del cilindro si ha una diminuzione più rapida che nel piano mediano.

Ogni componente del campo di spostamento, a ogni profondità e ad ogni istante temporale, tende a zero quando $x \gg a$, coerentemente con il fatto che gli effetti di una sorgente TPE decrescono man mano che aumenta la distanza del punto di osservazione dalla sorgente stessa. Allo stesso modo in $x = 0$ si ha che u_1 assume sempre valore nullo, cosicché in quel punto si ha solo spostamento verticale, per via della simmetria assiale dell'inclusione.

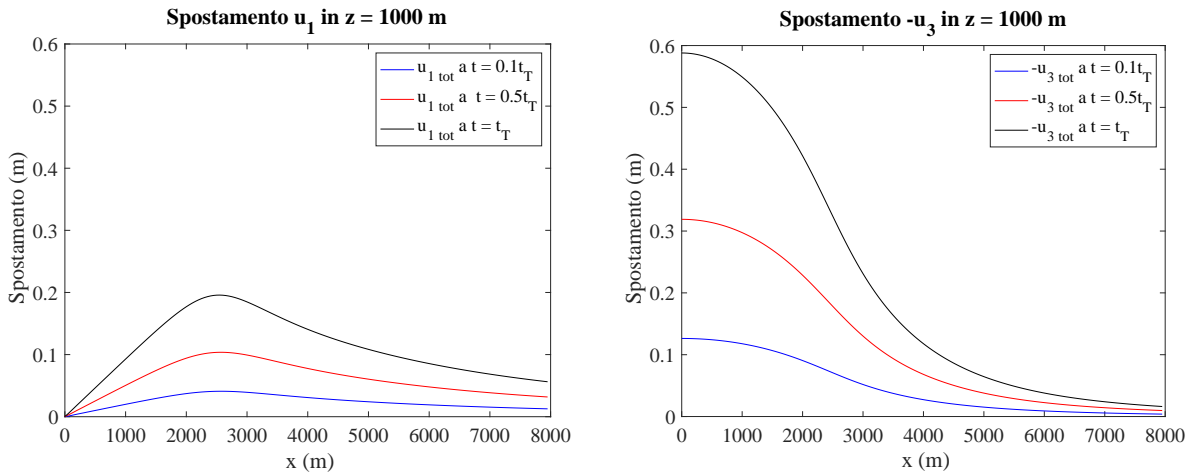


Figura 3.3: *Andamento, in tre diversi istanti temporali, a profondità $z = 1000$ m delle componenti u_1 e $-u_3$ del campo di spostamento generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi.*

In Fig. (3.4) è possibile osservare l'andamento temporale delle componenti nel punto $x = 0$ alle tre profondità analizzate in precedenza. La componente u_1 in tale punto è prossima al valore nullo, come era stato osservato per i tre grafici in Fig. (3.1), (3.2), (3.3). L'andamento complessivo di u_3 è più interessante, infatti potrebbe apparire lineare, ma in realtà non lo è. Per evidenziare questo fatto sono state poste delle linee rette punteggiate passanti per i punti iniziali e finali del grafico, che non si sovrappongono ad esso. L'andamento di u_3 in $z = 0$ e in $z = 1000$ m è pressochè lo stesso, mentre è differente sul piano mediano. Infatti in $z = 2000$ m si ha un andamento crescente per per tempi $t < 0.5 t_T$ e decrescente, in modo meno rapido, per tempi superiori a $t = 0.5 t_T$: ciò è dovuto al fatto che i dischi posti al di sotto del piano mediano provocano effetti di innalzamento, mentre quelli posti al di sopra provocano effetti di abbassamento. La non simmetria di queste curve rispetto a $t = 0.5 t_T$ è dovuta alla presenza della superficie libera.

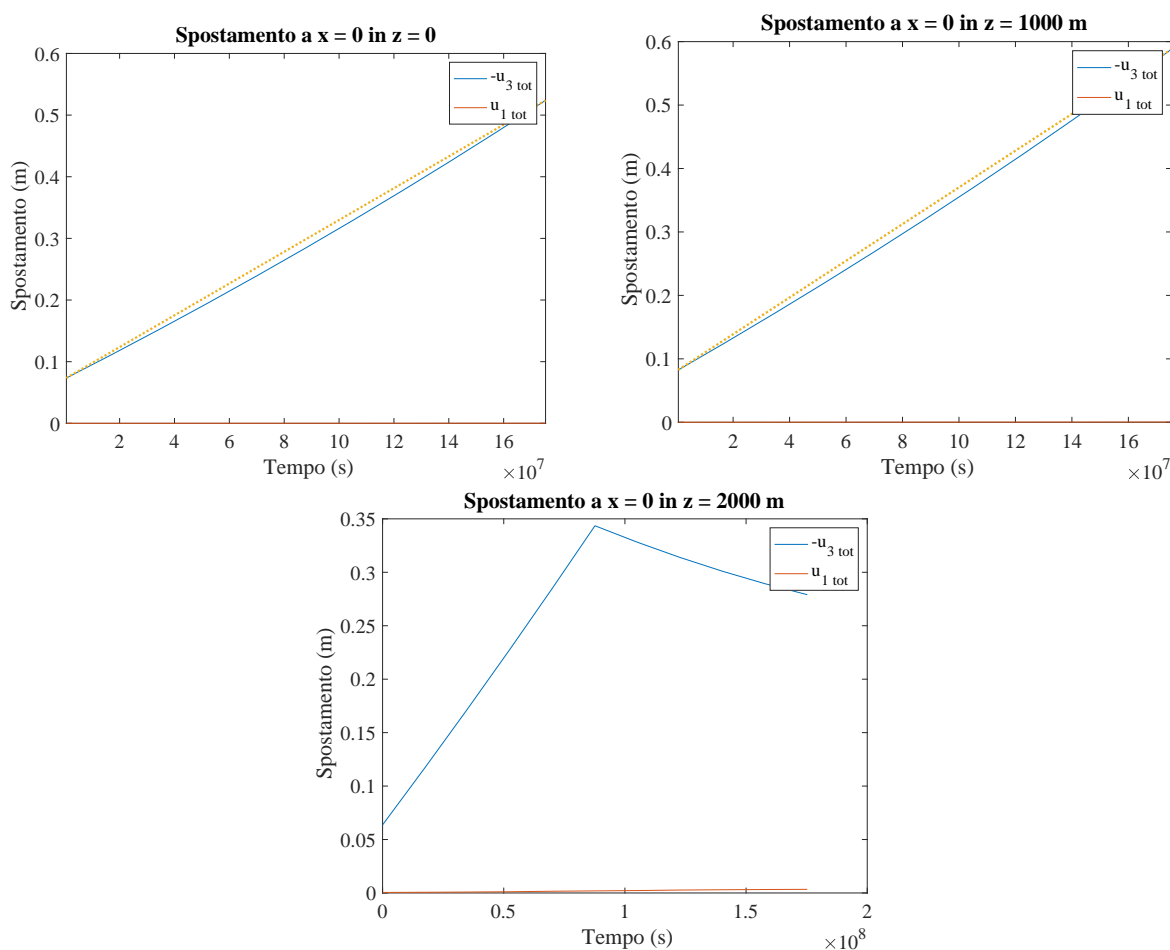


Figura 3.4: *Andamento temporale in $x = 0$ a profondità di $z = 0$, $z = 1000$ m, $z = 2000$ m delle componenti u_1 e $-u_3$ del campo di spostamento generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi. Per effettuare i grafici sono stati presi in considerazione dieci istanti temporali: a partire da $t = 0.1 t_T$, fino ad arrivare a $t = t_T$, con intervalli regolari di $0.1 t_T$. Al fine di una migliore visualizzazione dei singoli grafici, la scala delle ordinate delle prime due immagini è differente da quella della terza.*

3.2 Analisi del campo di deformazione

Nello studio del campo di deformazione sono state analizzate le componenti diagonali ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} e la componente di taglio $\epsilon_{13} = \epsilon_{31}$.

In Fig. (3.5) possiamo osservare tali componenti in $z = 0$. ϵ_{11} è prossima al valore nullo a $x/a = 1.04 \div 1.06$, negativa per x superiori e positiva per x inferiori. Lo zero non viene raggiunto nello stesso punto a ogni istante temporale, infatti la decrescita è più rapida man mano che il tempo aumenta. ϵ_{22} e ϵ_{11} sono massime in $x = 0$ e crescono in modulo all'aumentare del tempo. Gli effetti di ϵ_{22} sono sempre distensivi. ϵ_{33} è negativa per valori inferiori a $x/a = 1.5 \div 1.6$, mentre per valori superiori è positiva, ma dell'ordine di $10^{-6} \div 10^{-7}$. La componente ϵ_{13} è nulla in ogni punto. Questo effetto è dovuto alla presenza della superficie libera in $z = 0$, in cui $\tau_{33} = \tau_{13} = 0$.

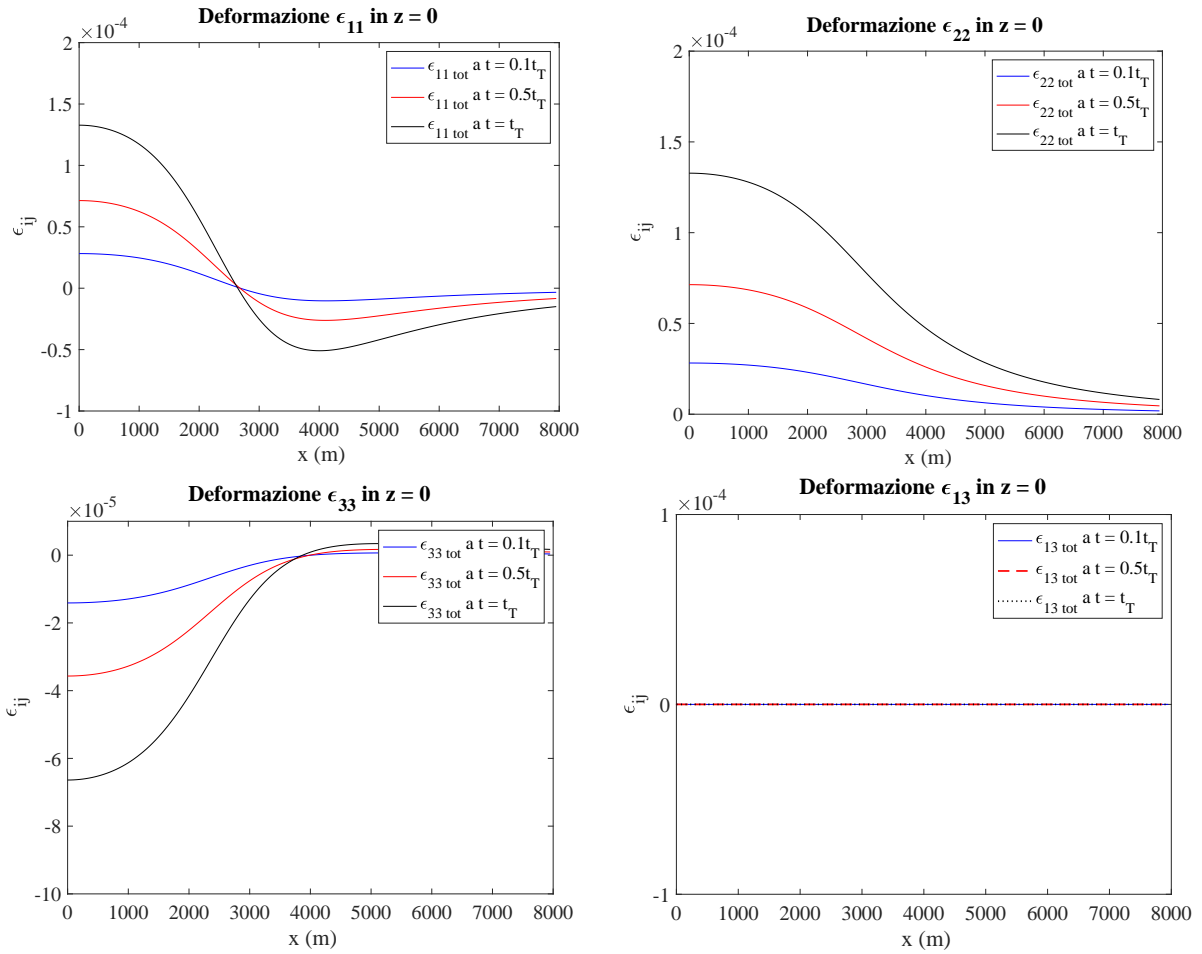


Figura 3.5: Andamento, in tre diversi istanti temporali, in superficie ($z = 0$), delle componenti ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} , ϵ_{13} del campo di deformazione generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi.

In Fig. (3.6) sono rappresentate le componenti del campo di deformazione alla profondità del piano mediano del cilindro ($z = 2000$ m). Nei seguenti grafici gli effetti che si verificano in $x = a$ sono dovuti alla singolarità presente in tale punto. ϵ_{11} è positiva per $x < a$ e negativa per $x > a$, cresce in modulo all'interno del disco e decresce all'esterno. Ciò accade in quanto l'effetto del fluido provoca all'interno del cilindro una dilatazione sulla componente orizzontale, che cresce allontanandosi dall'asse del disco. ϵ_{22} è sempre

positiva con valori dell'ordine di 10^{-4} all'interno del cilindro, e quindi genera sempre lievi effetti di allungamento lungo l'asse y . Anche ϵ_{13} è sempre positiva e dell'ordine di 10^{-4} all'interno del cilindro, però ha un comportamento differente: mentre ϵ_{22} provoca allungamenti più significativi per $x < a$, ϵ_{13} mostra una maggiore simmetria rispetto al bordo del cilindro. Inoltre, ϵ_{13} mostra un comportamento simile a quello osservato in $-u_3$, dato che in $x = a$ il suo valore è maggiore al tempo $t = 0.5 t_T$. Queste componenti assumono valori in modulo massimi in corrispondenza del bordo del cilindro. ϵ_{33} , a meno della singolarità, è sempre positiva, in quanto l'effetto di iniezione di fluido provoca nel piano mediano del cilindro solo allungamenti lungo l'asse z . Questi effetti risultano essere molto più elevati all'interno del cilindro. E' possibile osservare che l'ordine di grandezza di ϵ_{33} è superiore a quello di ogni componente ad ogni profondità, quindi gli effetti di deformazione lungo z sono massimi nel piano mediano.

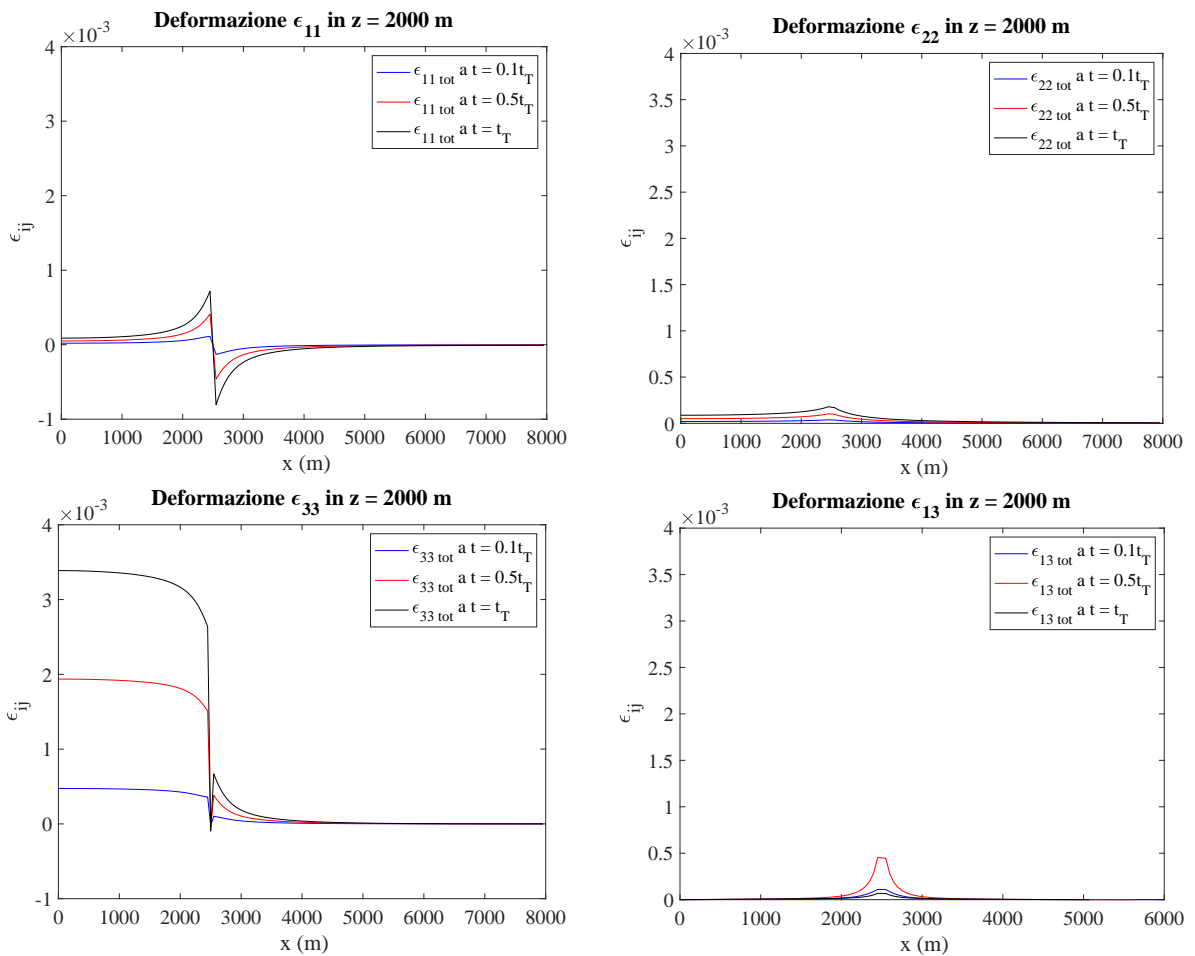


Figura 3.6: *Andamento, in tre diversi istanti temporali, sul piano mediano ($z = 2000$ m), delle componenti ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} , ϵ_{13} del campo di deformazione generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi.*

In Fig. (3.7) sono rappresentate le componenti del campo di deformazione a profondità $z = 1000$ m. L'andamento qualitativo delle componenti diagonali è simile a quello che si ha in superficie. ϵ_{11} e ϵ_{22} in questo caso raggiungono valori in modulo inferiori rispetto a quelli raggiunti in superficie, nonostante si stia considerando una profondità più prossima a quella dove è localizzata la sorgente. ϵ_{22} risulta essere circa uniforme per $x/a < 1.1$, mentre in superficie si osserva una decrescita più rapida. ϵ_{33} assume valori

maggiormente amplificati rispetto a quelli che si hanno in superficie e inferiori rispetto a quelli sul piano mediano. Come in superficie, essendo all'esterno della sorgente, si hanno effetti di accorciamento lungo z per valori inferiori a $x/a = 1.12 \div 1.16$. Il punto dopo il quale si osservano effetti di allungamento, si verifica per x decrescenti man mano che il tempo aumenta. ϵ_{13} , come a ogni profondità, è nulla per $x = 0$. Questa componente aumenta avvicinandosi al massimo ($x = 2400$ m) e decresce successivamente. L'ordine di grandezza di ϵ_{13} a questa profondità è lo stesso di quello assunto nel piano mediano. Per motivi analoghi a quelli enunciati per il campo di spostamento, tutte le componenti del campo di deformazione, ad ogni istante di tempo, tendono a zero quando $x \gg a$.

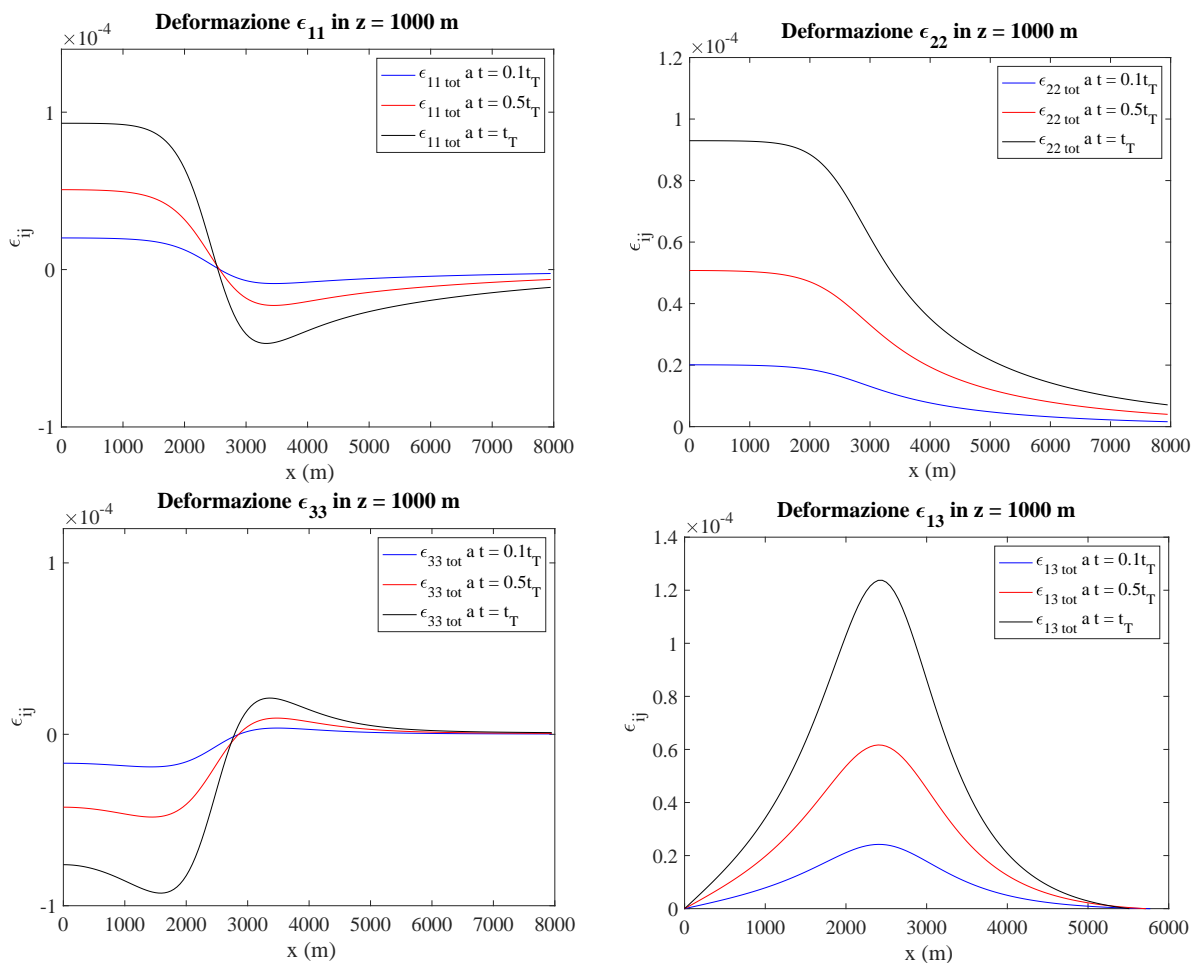


Figura 3.7: Andamento, in tre diversi istanti temporali, a profondità $z = 1000$ m delle componenti ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} , ϵ_{13} del campo di deformazione generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi.

In Fig. (3.8) è possibile osservare l'andamento temporale delle componenti del campo di deformazione nel punto $x = 0$ alle tre profondità analizzate in precedenza. L'andamento in $z = 0$ è qualitativamente analogo a quello in $z = 1000$ m. In particolare, ϵ_{11} ed ϵ_{22} hanno la stessa evoluzione temporale, che risulta essere non lineare e crescente. Per questo motivo all'aumentare del tempo si hanno effetti di allungamento lungo gli assi x e y . ϵ_{33} diventa più negativa in modo non lineare all'aumentare del tempo, quindi aumentano gli effetti di accorciamento lungo z . La non linearità è evidenziata dal fatto che le curve non si sovrappongono alle rispettive rette punteggiate. Sul piano mediano l'andamento di ϵ_{11} e ϵ_{22} è pressochè lineare e crescente. E' possibile osservare che per

$t < 0.5 t_T$ il valore di ϵ_{33} è circa $0.5 \cdot 10^{-3}$, mentre per $t > 0.5 t_T$ è circa $3.5 \cdot 10^{-3}$: si ha dunque una crescita rapida per $t = 0.5 t_T$, dovuta al fatto che gli effetti della deformazione sono molto maggiori all'interno del singolo disco, quindi si ha un notevole aumento dal momento che il fronte avvertivo raggiunge il disco posto sul piano mediano. La non linearità di ϵ_{33} in $z = 1000$ m è mostrata in un ingrandimento, in Fig. (3.9), della Fig. (3.8). La componente ϵ_{13} è nulla per ogni tempo e ad ogni profondità, come è possibile osservare anche dalle Fig. (3.5), (3.6), (3.7).

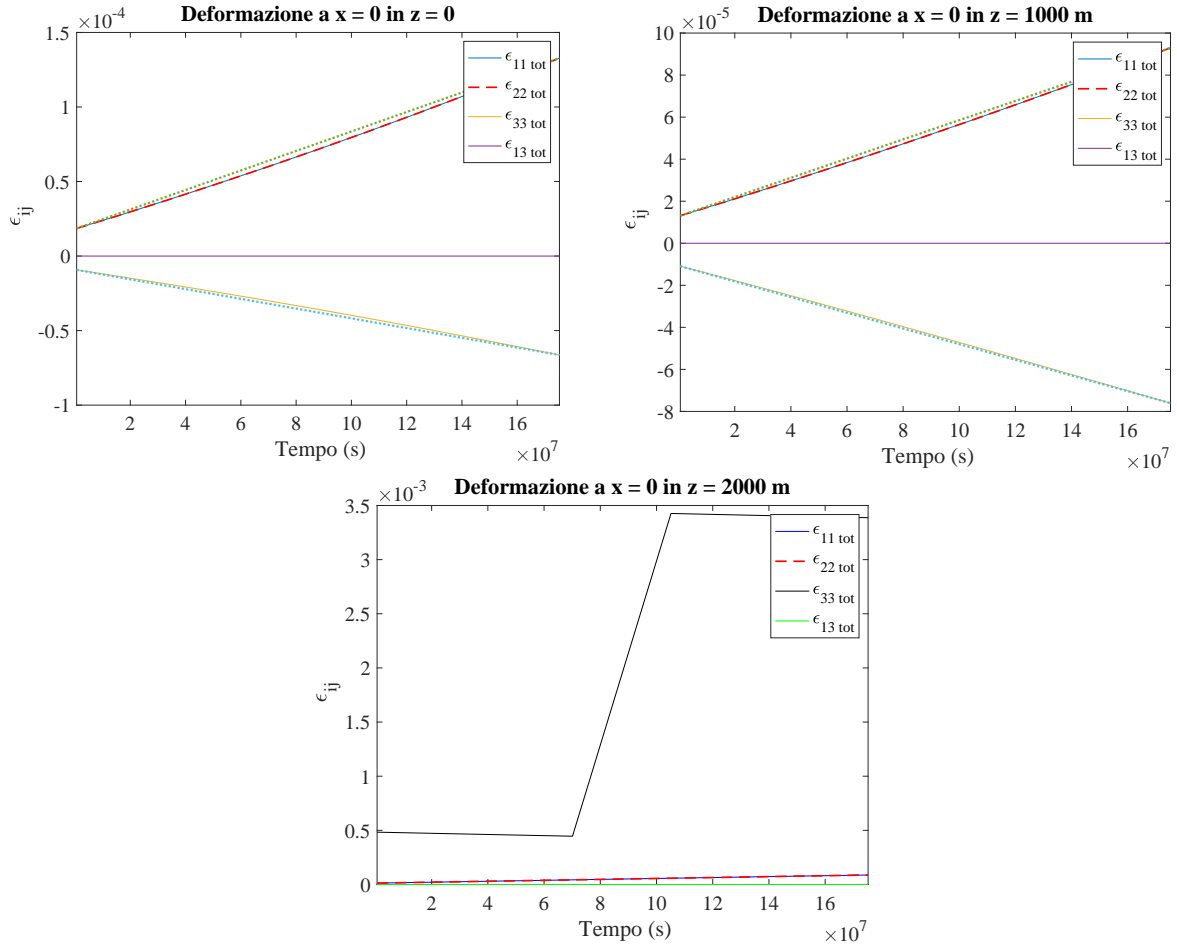


Figura 3.8: Andamento temporale in $x=0$ a profondità di $z=0$, $z=1000$ m, $z=2000$ m delle componenti ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} , ϵ_{13} del campo di deformazione generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi. Per effettuare i grafici sono stati presi in considerazione dieci istanti temporali: a partire da $t=0.1 t_T$, fino ad arrivare a $t=t_T$, con intervalli regolari di $0.1 t_T$. Al fine di una migliore visualizzazione dei singoli grafici, la scala delle ordinate delle immagini è differente.

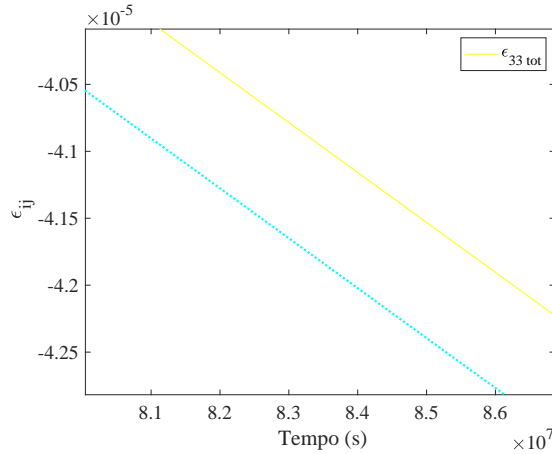


Figura 3.9: *Ingrandimento del grafico di ϵ_{33} in $x = 0$ a profondità $z = 1000$ m relativo alla seconda immagine della Fig. (3.8).*

3.2.1 Dilatazione cubica

Tramite l'eq. (1.7) è possibile determinare la variazione relativa di volume di un elemento di materiale appartenente alla sorgente TPE.

In Fig. (3.10) è rappresentato l'andamento della dilatazione cubica in $z = 0$, $z = 1000$ m e sul piano mediano. All'esterno del cilindro, sia in $z = 0$ che in $z = 1000$ m, si hanno effetti simili tra loro. In superficie è possibile osservare effetti distensivi che decrescono all'aumentare della distanza dall'asse del cilindro per valori inferiori a $x/a = 1.5 \div 1.6$, e compressivi per valori superiori. Gli effetti compressivi sono notevolmente inferiori (dell'ordine di $10^{-6} \div 10^{-7}$), in quanto si verificano a distanze elevate dall'asse del cilindro. A $z = 1000$ m il punto in cui ϵ_{kk} si annulla è maggiore e vale $x/a \simeq 2$. Gli effetti in superficie risultano essere maggiori rispetto a quelli all'interno della matrice in un piano più prossimo alla sorgente TPE. Sul piano mediano la dilatazione cubica è circa costante, dell'ordine di 10^{-3} all'interno del cilindro e nulla all'esterno. Questo è dovuto al fatto che il fluido penetra all'interno della sorgente e crea effetti distensivi significativi. Tale effetto è di un ordine di grandezza superiore di quello in superficie e sul piano $z = 1000$ m. Dai grafici in Fig. (3.6) si può comprendere che la componente che ha maggiore effetto sulla dilatazione cubica è ϵ_{33} , a sostegno del fatto che per la propagazione del fluido abbiamo assunto un problema con buona approssimazione uniassiale.

Per motivi analoghi a quelli enunciati per il campo di spostamento, la dilatazione cubica ad ogni istante di tempo, tende a zero quando $x \gg a$.

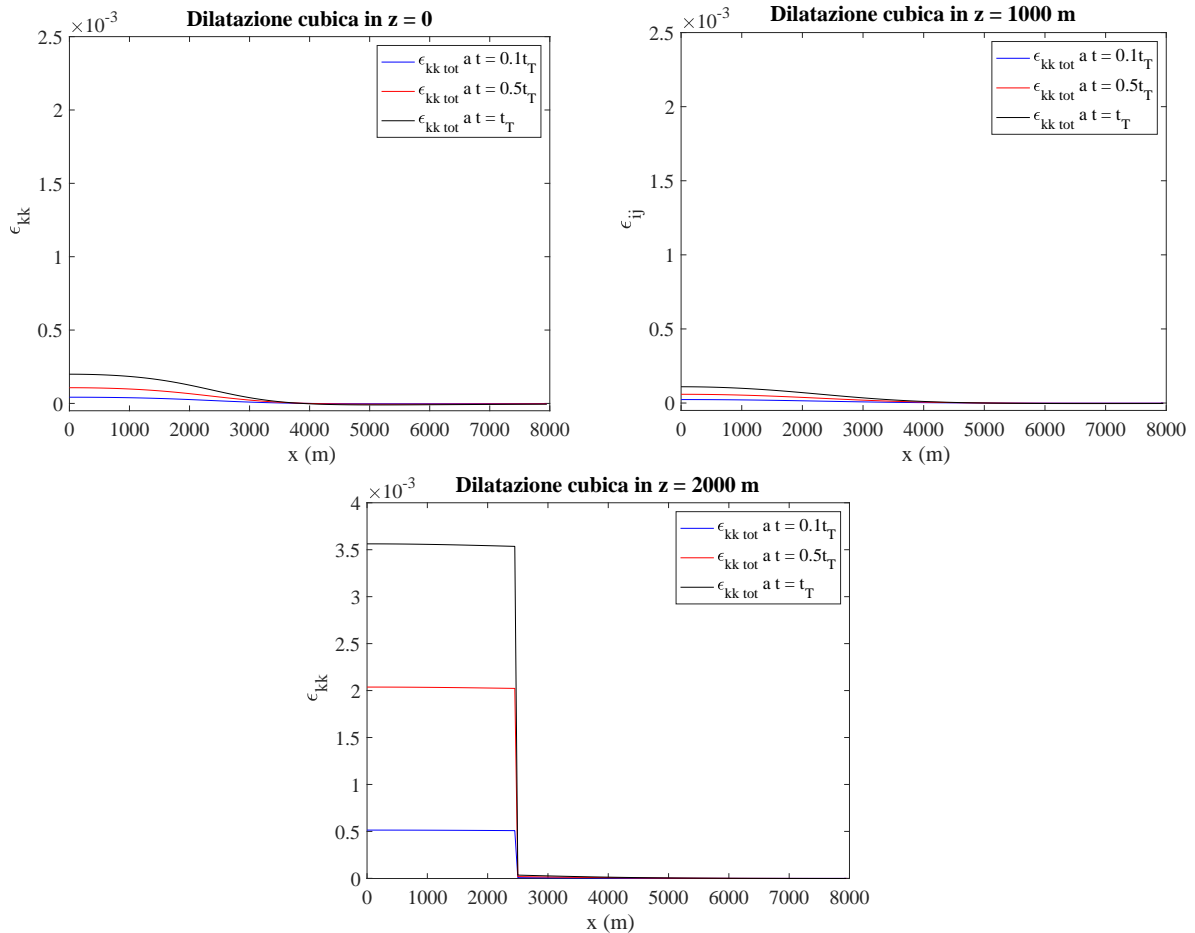
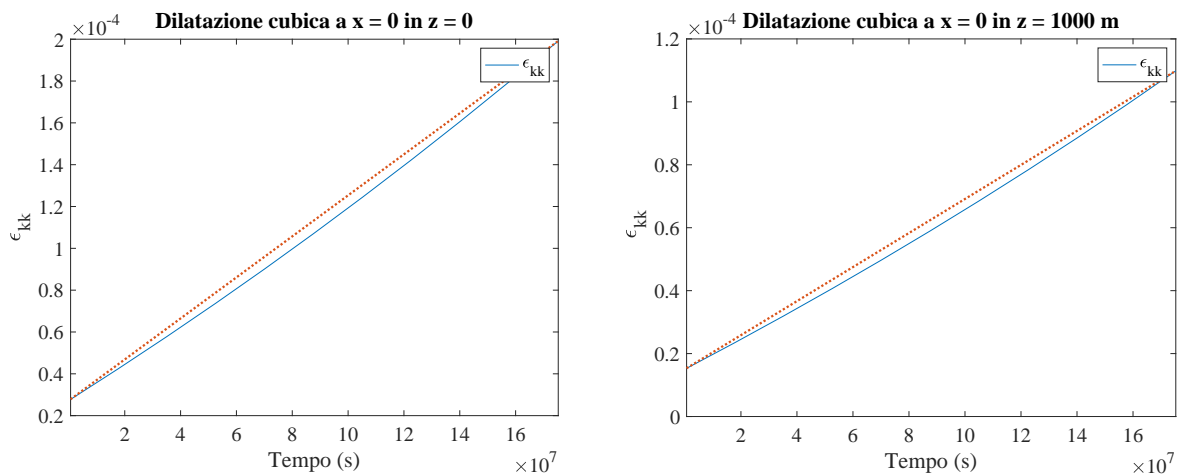


Figura 3.10: *Andamento, in tre diversi istanti temporali, a profondità $z = 0$, $z = 1000$ m, $z = 2000$ m, della dilatazione cubica ϵ_{kk} generata da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi.*

In Fig. (3.11) è possibile osservare l'andamento temporale della dilatazione cubica nel punto $x = 0$ alle tre profondità analizzate in precedenza. In superficie e in $z = 1000$ m la dilatazione cubica aumenta nel tempo in modo non lineare. La non linearità è evidenziata dal fatto che la retta punteggiata non coincide con la curva. Sul piano mediano la dilatazione cubica cresce all'interno del cilindro, e si mantiene pressoché costante nel tempo. ϵ_{kk} aumenta rapidamente non appena il fronte avvertivo supera $z = 2000$ m.



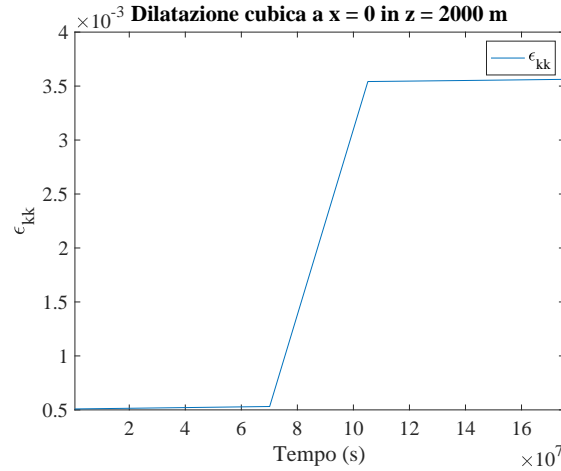
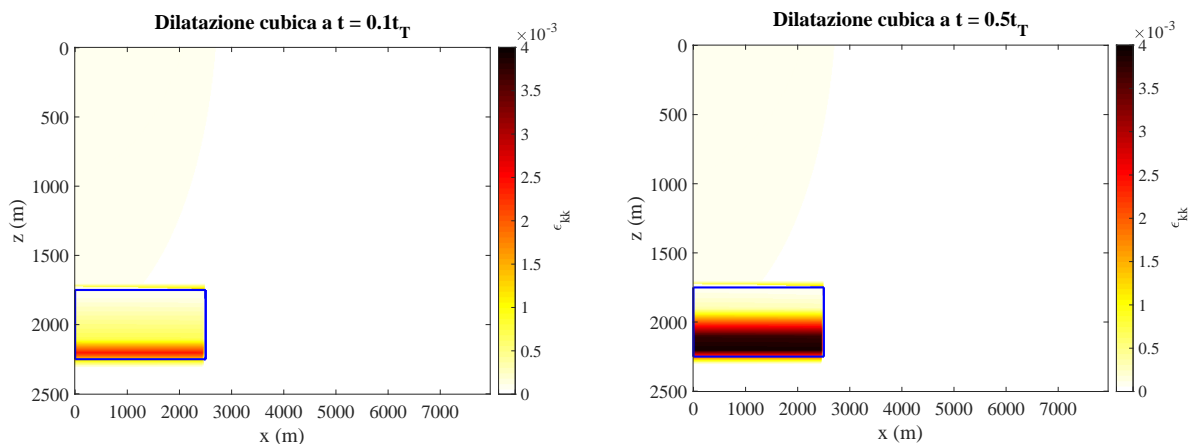


Figura 3.11: *Andamento in funzione del tempo, a profondità $z = 0$, $z = 1000$ m, $z = 2000$ m, della dilatazione cubica ϵ_{kk} generata da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi. Per effettuare i grafici sono stati presi in considerazione dieci istanti temporali: a partire da $t = 0.1 t_T$, fino ad arrivare a $t = t_T$, con intervalli regolari di $0.1 t_T$. Al fine di una migliore visualizzazione dei singoli grafici, la scala delle ordinate delle prime due immagini è differente da quella della terza.*

Per mostrare l'andamento della dilatazione cubica in funzione della profondità e della distanza orizzontale dall'asse dei dischi sono state effettuate delle mappe, mostrate in Fig. (3.12). All'aumentare del tempo gli effetti della dilatazione cubica aumentano, in accordo con ciò che è mostrato in Fig. (3.11). A ogni istante temporale il massimo della dilatazione cubica si ha in corrispondenza della base del cilindro e, all'interno di esso, decresce progressivamente al diminuire della profondità. Per profondità superiori al piano inferiore del cilindro ($z = 2250$ m), si ha che gli effetti di dilatazione cubica sono quasi nulli. Allo stesso modo, per valori di profondità minori di quella del piano superiore, gli effetti aumentano all'avvicinarsi della superficie. All'aumentare del tempo si ha che la dilatazione cubica cresce. E' possibile osservare che al tempo $t = t_T$, avvicinandosi alla superficie, ϵ_{kk} non è trascurabile anche per x leggermente superiori ad a .



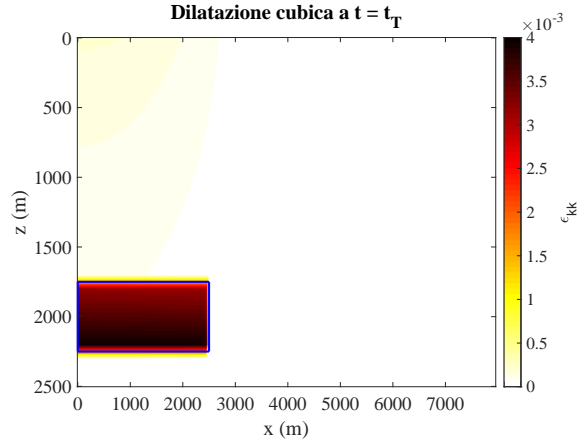
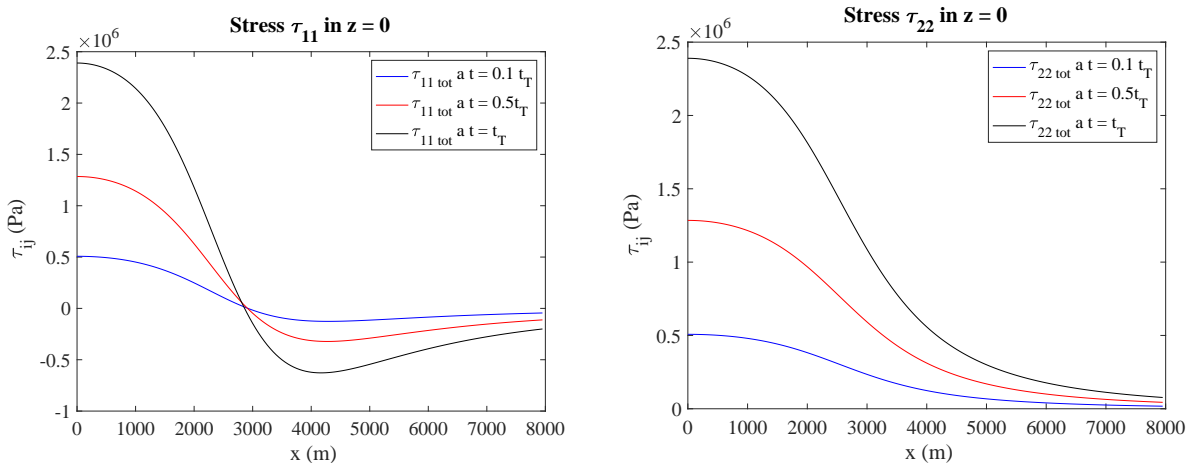


Figura 3.12: *Andamento, in tre istanti temporali, della dilatazione cubica ϵ_{kk} generata da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi. La scala di colori posta sulla destra di ogni figura rappresenta l'entità di ϵ_{kk} . Le linee blu rappresentano i confini del cilindro.*

3.3 Analisi del campo di stress

Nello studio del campo di stress sono state analizzate le componenti diagonali τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} e quella di taglio $\tau_{13} = \tau_{31}$.

In Fig. (3.13) possiamo osservare tali componenti in $z = 0$. τ_{11} è positiva per valori inferiori a $x/a = 1.1 \div 1.2$, e negativa per valori superiori. Il punto in cui il segno cambia è leggermente superiore al raggio del cilindro. L'andamento risulta essere qualitativamente simile a quello di ϵ_{11} , infatti la zona in cui si assiste al cambio di segno è la medesima e corrisponde a dove u_1 presenta un massimo. τ_{22} è sempre positiva e crescente all'aumentare del tempo. Anche l'andamento di τ_{22} rispecchia quello di ϵ_{22} . τ_{33} e τ_{13} sono identicamente nulle ad ogni istante temporale in quanto il piano $z = 0$ è la superficie libera. Le componenti del tensore di deformazione in superficie, oggetto di confronto, si possono osservare in Fig. (3.5).



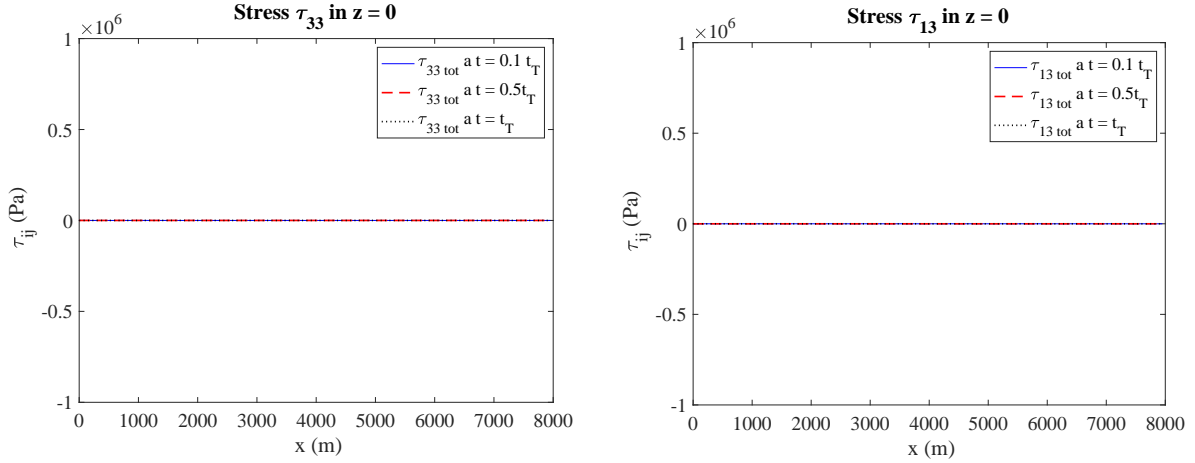


Figura 3.13: *Andamento, in tre diversi istanti temporali, in superficie ($z = 0$) delle componenti τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} , τ_{13} del campo di sforzo generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi.*

In Fig. (3.14) sono rappresentate le componenti del campo di sforzo sul piano mediano del cilindro. τ_{11} è negativa ovunque, e cresce in modulo all'aumentare del tempo. E' ben visibile l'effetto della singolarità in $x = a$, che causa una brusca diminuzione degli effetti dello sforzo all'esterno del cilindro. Fissato un istante di tempo, τ_{22} è pressochè uniforme all'interno e all'esterno del cilindro, con variazioni in corrispondenza del raggio. Questa componente assume un ordine di grandezza inferiore in prossimità del bordo del cilindro, e decresce tendendo a zero all'aumentare della distanza. τ_{33} , analogamente a τ_{22} , assume valori positivi all'esterno del cilindro e negativi all'interno, maggiori in modulo vicino alla singolarità. Gli effetti all'interno del cilindro aumentano maggiormente nel tempo rispetto a quelli all'esterno, infatti per x appena superiori al raggio si ha una differenza dell'ordine di 10^6 Pa tra ciò che accade a $t = 0.5 t_T$ e $t = t_T$, mentre all'interno questa differenza è dell'ordine di 10^7 Pa. L'ordine di grandezza di τ_{33} , così come quello di τ_{13} , è inferiore rispetto a quello di τ_{11} e τ_{22} ad ogni istante di tempo. A differenza di τ_{11} e τ_{22} , che variano significativamente nel tempo, τ_{33} è circa costante, quindi l'assunzione di sforzo verticale costante utilizzata per rappresentare il moto del fluido è ragionevole. τ_{13} assume valori positivi in ogni punto, significativi in un intorno di $x = a$. L'andamento, come suggerito dalla relazione costitutiva, è analogo a quello di ϵ_{13} , mostrato in Fig. (3.6), e le differenze tra gli effetti all'interno e all'esterno del cilindro sono trascurabili. E' possibile osservare che sul piano mediano ogni componente assume valori di almeno un ordine di grandezza superiore rispetto alla superficie.

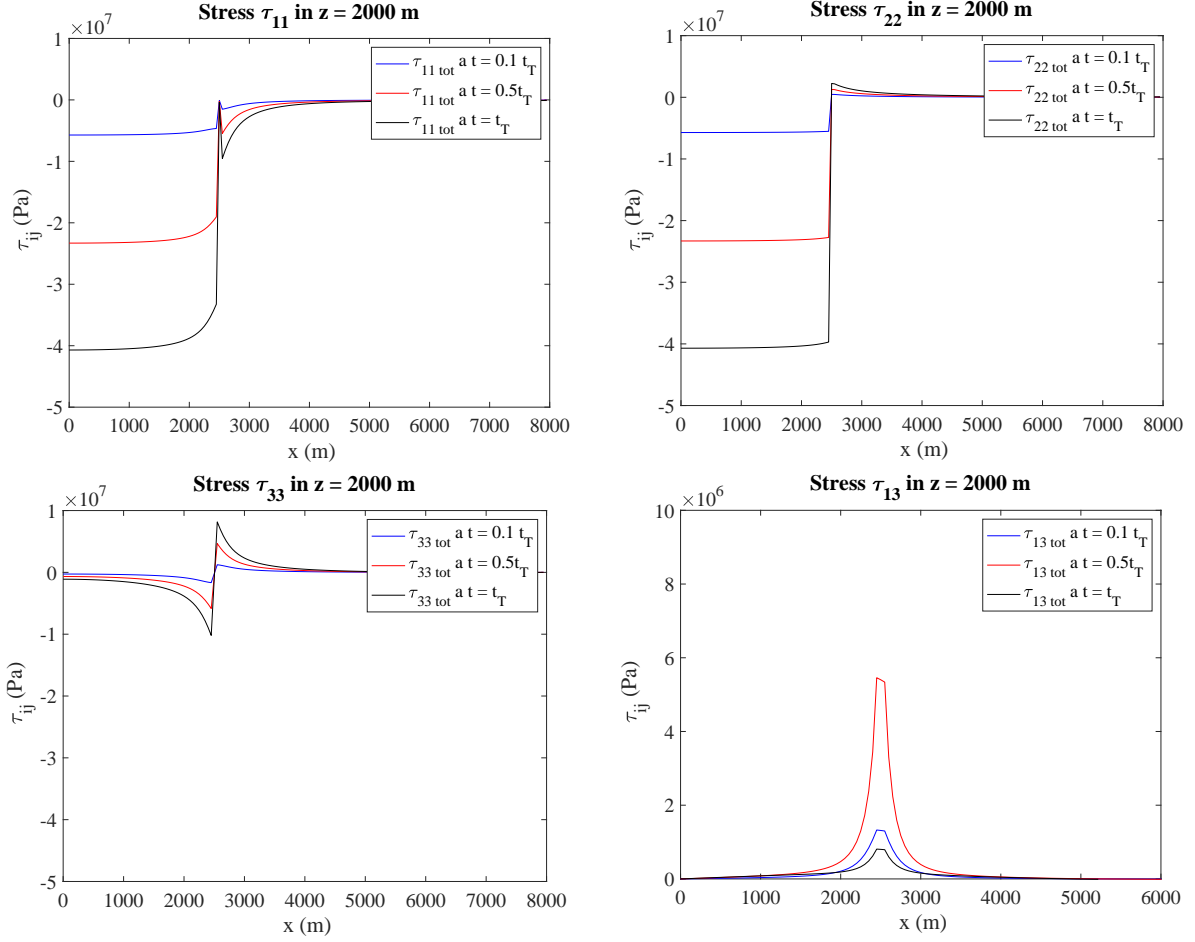


Figura 3.14: Andamento, in tre diversi istanti temporali, sul piano mediano ($z = 2000$ m), delle componenti τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} , τ_{13} del campo di sforzo generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi.

In Fig. (3.15) sono rappresentate le componenti del campo di sforzo a una profondità $z = 1000$ m. Queste risultano essere di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quelle sul piano mediano. τ_{11} e τ_{22} hanno andamenti simili a quelli in superficie e a ϵ_{11} e ϵ_{22} . Come già osservato per il campo di deformazione, gli effetti in superficie sono maggiori di quelli in questo piano, in quanto a parità di ascissa si ha ordinata maggiore in modulo. τ_{11} cambia segno per x compreso tra 2650 m e 2700 m. τ_{33} risulta essere negativa in corrispondenza dell'interno dei dischi e positiva all'esterno, similmente a come accade nel piano mediano. Una differenza si presenta in corrispondenza di $x \simeq a$, infatti nel piano mediano si passa dal minimo negativo al massimo positivo non appena $x > a$, mentre in questo caso il passaggio è graduale e il punto in cui τ_{33} si annulla non è in corrispondenza del raggio ma è a un'ascissa leggermente superiore (compresa tra 2600 m e 2700 m). Le curve di tale componente non sono simmetriche rispetto al punto in cui si annullano, infatti il modulo del rapporto tra i punti di massimo e di minimo è compreso tra 2.2 e 2.4 per ogni istante considerato. τ_{13} , diversamente che sul piano mediano, è positiva per $x < 5500$ m, mentre per x maggiori, a ogni istante temporale, assume valori anche negativi, di entità trascurabile rispetto agli altri. A ogni istante temporale il punto di massimo è localizzato in $x \simeq 2400$ m, quindi in un punto leggermente inferiore di $x = a$. Per motivi analoghi a quelli enunciati per il campo di spostamento, tutte le componenti del campo di sforzo, ad ogni istante di tempo, tendono a zero quando $x \gg a$.

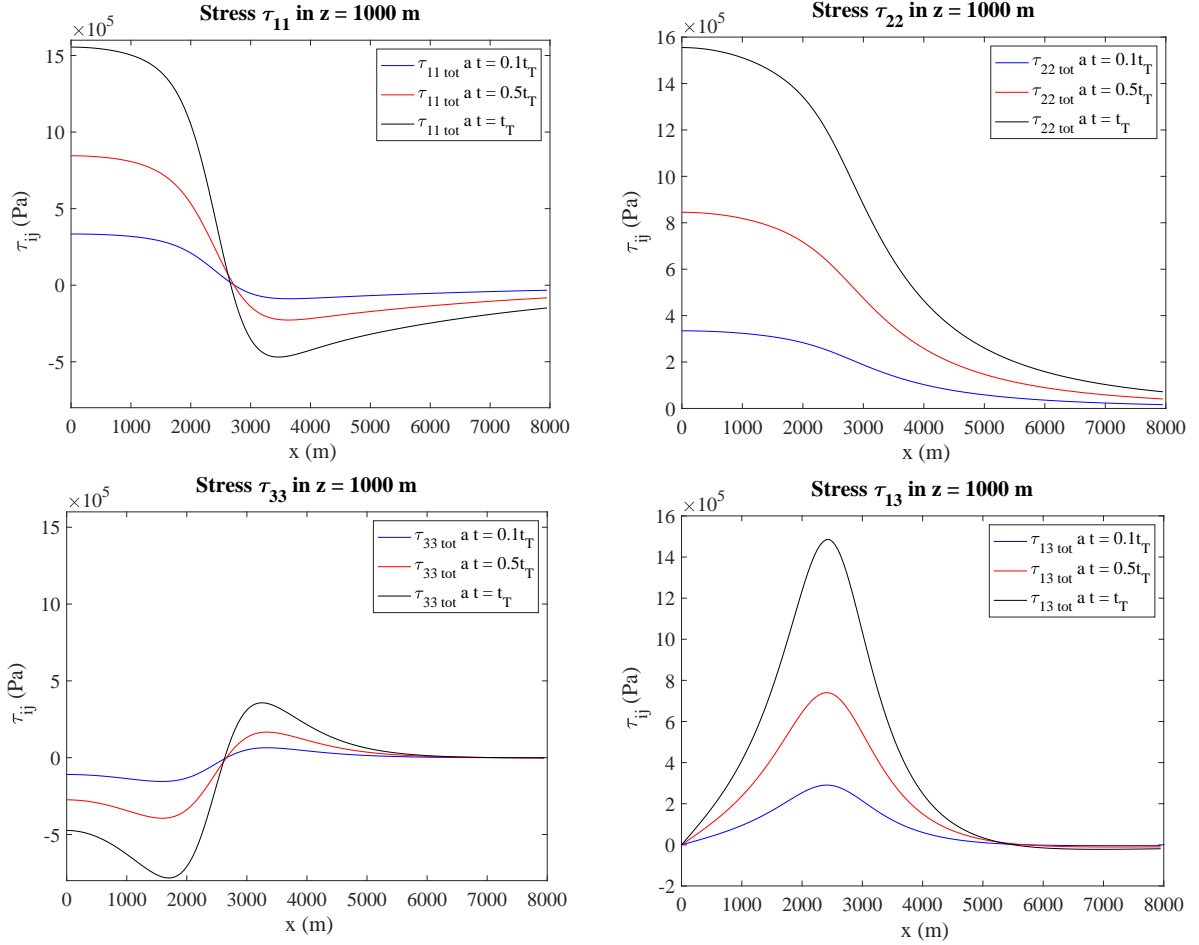


Figura 3.15: *Andamento, in tre diversi istanti temporali, a profondità $z = 1000$ m, delle componenti τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} , τ_{13} del campo di sforzo generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi.*

In Fig. (3.16) è possibile osservare l'andamento temporale delle componenti del campo di sforzo nel punto $x = 0$ alle tre profondità analizzate in precedenza. τ_{11} e τ_{22} hanno lo stesso andamento temporale a ogni profondità, che, in superficie e a $z = 1000$ m, risulta essere non lineare. τ_{33} in $z = 0$ è identicamente nulla ad ogni istante per la presenza della superficie libera. In $z = 1000$ m essa assume valori crescenti in modulo ma di segno negativo. L'andamento a questa profondità è non lineare ed è meno accentuato rispetto a quello delle altre due componenti. Sul piano mediano τ_{33} ha un andamento non lineare e quasi costante nel tempo, in quanto la pendenza è ridotta. In superficie e nel piano $z = 1000$ m, a meno della componente τ_{33} che è nulla in superficie libera, sforzo e deformazione hanno qualitativamente gli stessi andamenti. Nel piano mediano, a meno del fatto che la deformazione varia nel quadrante positivo e lo sforzo in quello negativo, il comportamento di ϵ_{33} è analogo a quello di τ_{11} e τ_{22} , mentre ϵ_{11} e ϵ_{22} hanno andamento analogo a quello di τ_{33} . La non linearità è evidenziata dal fatto che le curve non coincidono con le rispettive rette punteggiate passanti per i punti estremi dei grafici. In particolare, per τ_{33} in $z = 1000$ m è stato effettuato un ingrandimento in Fig. (3.9). La componente τ_{13} in $x = 0$ è nulla ad ogni profondità e ad ogni istante temporale. I risultati mostrati in questi grafici sono concordi con quelli presenti nelle Fig. (3.13), (3.14), (3.15).

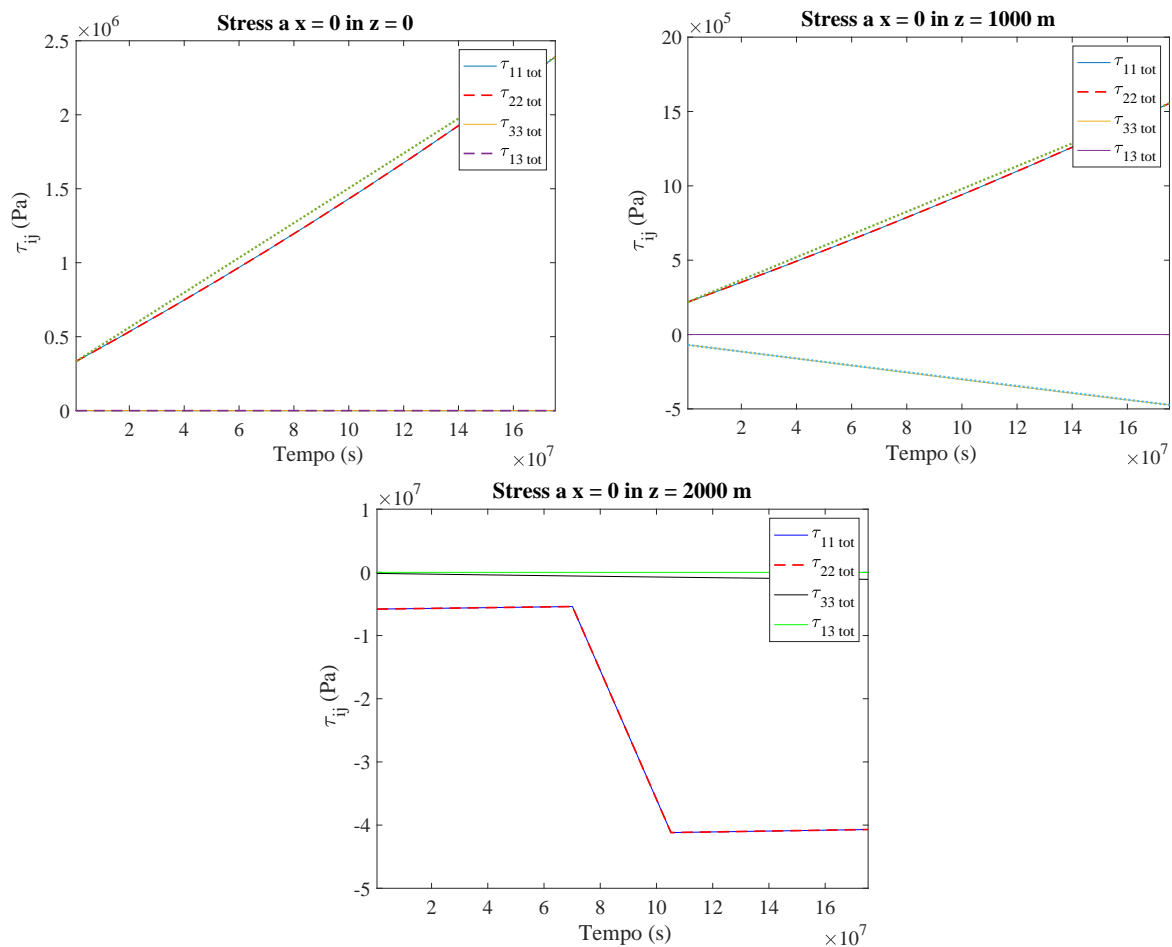


Figura 3.16: Andamento temporale in $x = 0$ a profondità di $z = 0$, $z = 1000$ m, $z = 2000$ m delle componenti τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} , τ_{13} del campo di sforzo generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi. Per effettuare i grafici sono stati presi in considerazione dieci istanti temporali: a partire da $t = 0.1 t_T$, fino ad arrivare a $t = t_T$, con intervalli regolari di $0.1 t_T$. Al fine di una migliore visualizzazione dei singoli grafici, la scala delle ordinate delle prime due immagini è differente da quella della terza.

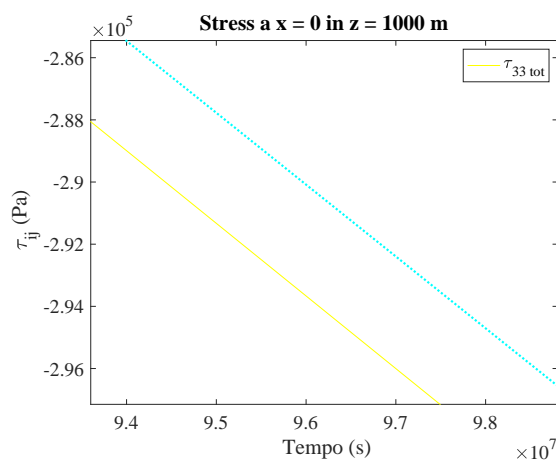


Figura 3.17: Ingrandimento del grafico di τ_{33} in $x = 0$ a profondità $z = 1000$ m relativo alla seconda immagine della Fig. (3.16).

3.3.1 Massimo sforzo di taglio

Tramite l' eq. (1.17) è possibile determinare lo sforzo di taglio massimo della sorgente TPE. In Fig. (3.18) è rappresentato il suo andamento in superficie, in $z = 1000$ m e sul piano mediano. In superficie S_{max} ha un massimo in corrispondenza dell'asse del cilindro e decresce fino a un punto simile a una cuspide situato in $x/a = 1.16 \div 1.2$. Tale punto è raggiunto ad ascisse inferiori all'aumentare del tempo, ma in ogni caso superiori a quella del raggio. Il massimo presente in $z = 0$ è dell'ordine di 10^6 Pa per $t = t_T$ e $t = 0.5 t_T$, mentre per $t = 0.1 t_T$ è di 10^5 Pa. In $z = 1000$ m il massimo è assunto a ogni istante temporale in $x = 2250$ m e ha gli stessi ordini di grandezza enunciati precedentemente. La decrescita a zero che si ha per x maggiori del massimo è più rapida rispetto alla crescita presente per valori inferiori. Sul piano mediano si assiste ad una brusca variazione di S_{max} dall'interno all'esterno del cilindro, che aumenta con il passare del tempo: l'ordine di grandezza del massimo sforzo di taglio per ascisse inferiori al punto di singolarità è di 10^7 Pa per $t = t_T$, $t = 0.5 t_T$ e di 10^6 Pa per $t = 0.1 t_T$. Per $x > a$ si ha una rapida decrescita a zero. E' stata effettuata un'interpolazione lineare tra 2350 m $\leq x \leq 2550$ m, mostrata con la linea tratteggiata, in modo da ovviare alle singolarità presenti in prossimità del raggio del cilindro.

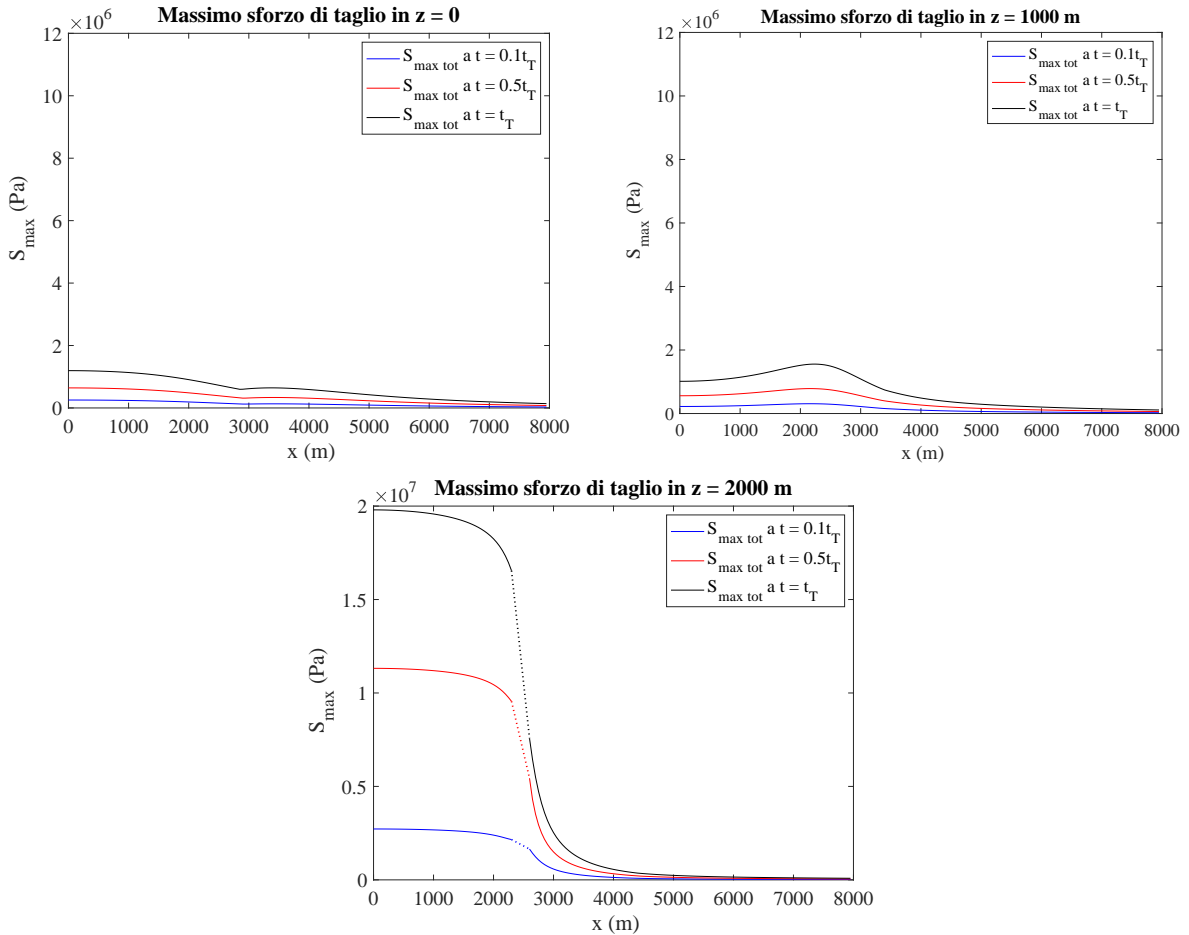


Figura 3.18: Andamento, in tre diversi istanti temporali, a profondità $z = 0$, $z = 1000$ m, $z = 2000$ m, del massimo sforzo di taglio S_{max} generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi.

In Fig. (3.19) è possibile osservare l'andamento temporale del massimo sforzo di taglio nel punto $x = 0$ alle tre profondità analizzate in precedenza. In superficie e in $z = 1000$ m si

ha un andamento non lineare, come mostrato dalle rette punteggiate che non coincidono con il grafico di S_{max} . L'andamento rispecchia quello della dilatazione cubica (Fig. 3.11).

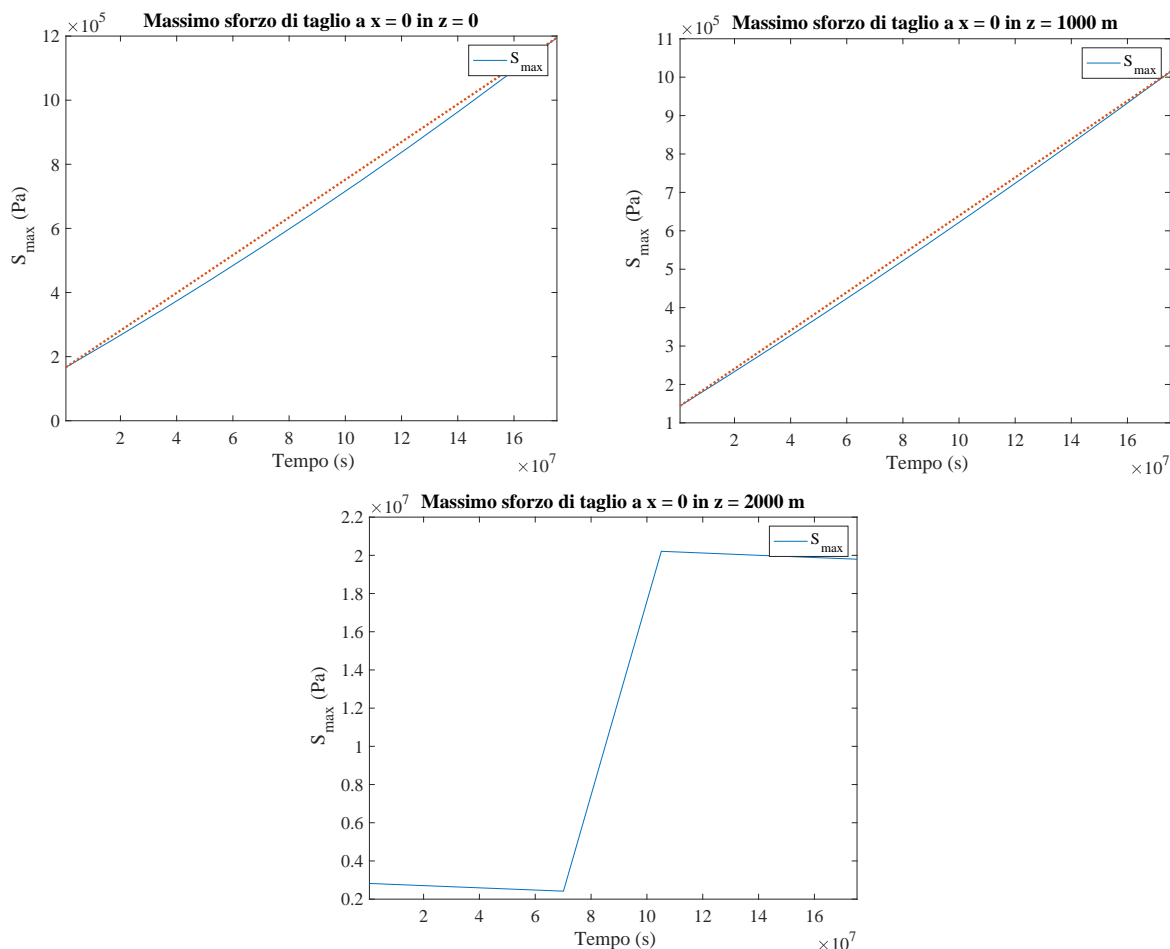


Figura 3.19: *Andamento in funzione del tempo, a profondità $z = 0$, $z = 1000$ m, $z = 2000$ m, del massimo sforzo di taglio S_{max} generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi. Per effettuare i grafici sono stati presi in considerazione dieci istanti temporali: a partire da $t = 0.1 t_T$, fino ad arrivare a $t = t_T$, con intervalli regolari di $0.1 t_T$. Al fine di una migliore visualizzazione dei singoli grafici, la scala delle ordinate delle prime due immagini è differente da quella della terza.*

Analogamente a quanto fatto per la dilatazione cubica, per mostrare l'andamento del massimo sforzo di taglio in funzione della profondità e della distanza orizzontale dall'asse del cilindro, sono state effettuate delle mappe, mostrate in Fig. (3.20). A ogni istante temporale il massimo di S_{max} si ha in prossimità del bordo inferiore del cilindro e, all'interno di esso, S_{max} diminuisce all'aumentare di z . Si osserva che a istanti temporali più elevati una porzione maggiore di cilindro è soggetta a elevati sforzi di taglio. All'esterno del cilindro si hanno valori considerevoli anche a profondità prossime alla superficie libera, che aumentano all'aumentare del tempo e diminuiscono per $x > a$. Per $t = 0.1 t_T$ il massimo sforzo di taglio è nullo a basse profondità, anche se non svanisce per $0 < x < 1000$ m in superficie. Per $t = 0.5 t_T$ e $t = t_T$ gli effetti di S_{max} si estendono a ogni profondità considerata, anche se con intensità notevolmente inferiore rispetto a quella presente per $1750 \text{ m} < z < 2250 \text{ m}$, per $x/a < 2$. A differenza di ciò che accade per la dilatazione cubica, specialmente a tempi più elevati, il massimo sforzo di taglio

non tende a zero appena x supera il raggio del cilindro, ma la decrescita avviene in modo graduale.

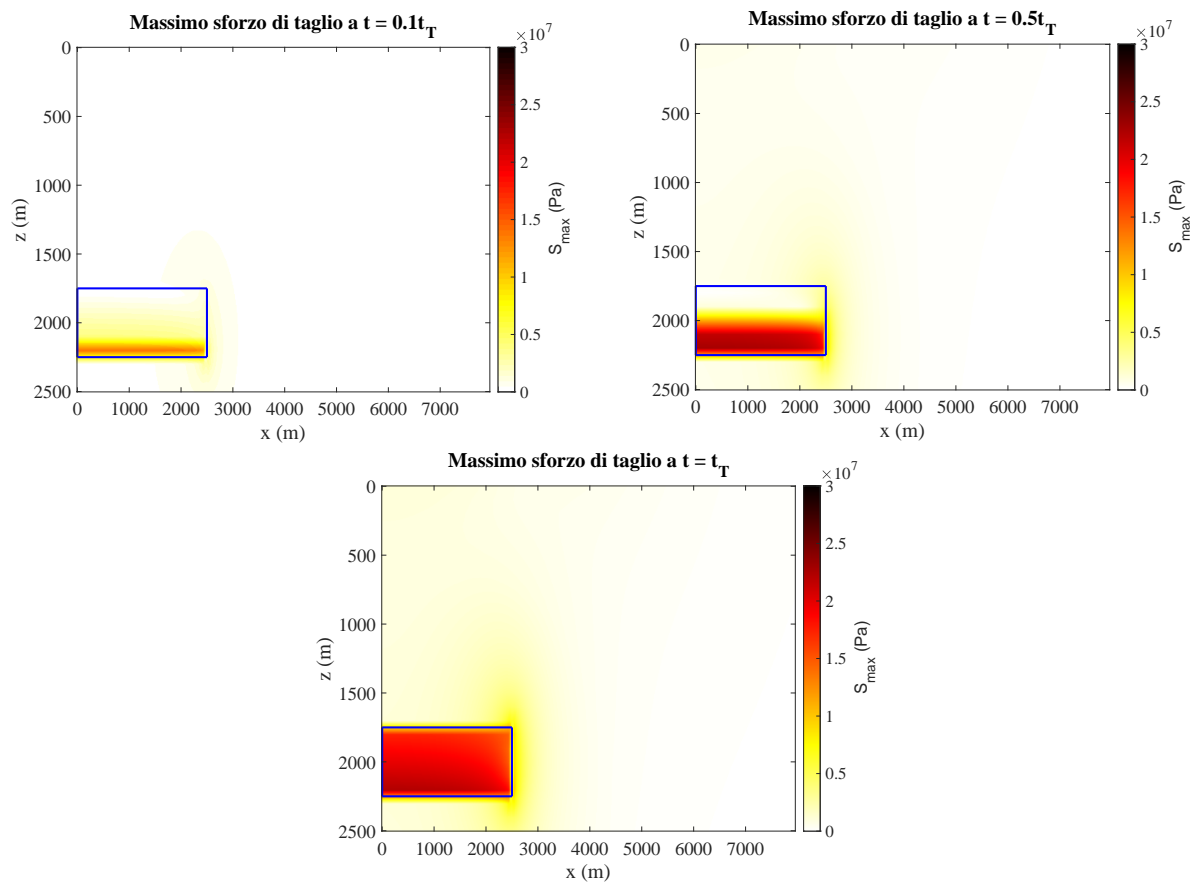


Figura 3.20: *Andamento, a tre istanti temporali, del massimo sforzo di taglio S_{max} generato da un cilindro di spessore 500 m formato da 50 dischi. La scala di colori posta sulla destra di ogni figura rappresenta l'entità di S_{max} . Le linee blu rappresentano i confini del cilindro.*

Capitolo 4

Conclusioni

A partire dal modello di inclusione TPE di forma cilindrica, basato sulla discretizzazione del cilindro in più dischi di spessore inferiore, sono stati studiati gli effetti transienti di temperatura e pressione utilizzando le rispettive espressioni analitiche ottenute da Nespoli et al. (2021) e Belardinelli et al. (2022), descritte dalle eq. (2.19), (2.26). La discretizzazione in più dischi, come spiegato nel capitolo 2, risulta fondamentale in quanto permette di rappresentare la risalita di fluidi caldi e pressurizzati all'interno dell'inclusione cilindrica: ϵ_0 , espresso dalla relazione in eq. (1.33), dipendendo da pressione e temperatura, varia con profondità e tempo e può essere considerato uniforme per un singolo disco ma non per il cilindro.

Le assunzioni effettuate nel capitolo 2 sono risultate ragionevoli: l'approssimazione uni-assiale è verificata dal fatto che ϵ_{33} è la componente del campo di deformazione che contribuisce maggiormente alla dilatazione cubica, come mostrato in Fig. (3.5), (3.6), (3.7), (3.10); l'assunzione di sforzo verticale costante è valida dal momento che τ_{33} è l'unica componente del campo di sforzo che è pressochè costante nel tempo, come mostrato in Fig. (3.16).

Si è verificato che, generalmente, ogni componente di ogni campo, nonchè la dilatazione cubica e il massimo sforzo di taglio, crescono (in modulo) all'aumentare del tempo. E' fatta eccezione per u_3 sul piano mediano, mostrato in Fig. (3.2), (3.4), che aumenta per tempi inferiori a $0.5 t_T$ e diminuisce in modo asimmetrico per valori superiori. Ciò è coerente con quanto ci si aspetta dato che $t = 0.5 t_T$ è il tempo impiegato dal fronte avvertivo per giungere sul piano mediano e i dischi posti al di sotto di $z = 2000$ m generano effetti di innalzamento, mentre quelli posti al di sotto generano effetti di abbassamento. L'asimmetria è dovuta alla presenza della superficie libera. Il fatto che sul piano mediano le componenti aumentino in modulo significativamente quando il fronte avvertivo supera $z = 2000$ m è evidenziato anche dallo studio in funzione del tempo di ϵ_{33} , ϵ_{kk} , τ_{33} e S_{max} , mostrati rispettivamente in Fig. (3.8), (3.11), (3.16), (3.19).

Nel capitolo 2 ho inoltre ricavato le soluzioni analitiche di temperatura e pressione nel caso di condizioni iniziali conduttive-stazionarie, riportate in eq. (2.25), (2.28). Mostrare l'andamento del campo di spostamento, sforzo e deformazione in questo caso particolare, può essere uno spunto per la continuazione di questo lavoro.

Bibliografia

- [1] Belardinelli, M. E., Nespoli, M., Bonafede, M. (2022). *Stress changes caused by exsolution of magmatic fluids within an axisymmetric inclusion*. Geophysical Journal International 230, pp. 870-892.
- [2] Belardinelli, M. E., Bonafede, M., and Nespoli, M. (2019). *Stress heterogeneities ad failure mechanism induced by temperature and pore pressure increase in volcanic regions*. Earth and Planetary Science Letters.
- [3] Benussi, C. (2020). *Effetto dello spessore di un'inclusione termo-poro-elastica in aree vulcaniche e idrotermali*. Tesi di Laurea Magistrale in Fisica del Sistema Terra, Alma Mater Studiorum, Università degli Studi di Bologna.
- [4] Biot, M.A. (1980). *General Theory of three-dimensional consolidation*. Journal of Applied Physics, vol. 12(2):155-164.
- [5] Bonafede, M., Belardinelli, M. E., *Appunti dal corso di Fisica dei Solidi e dei Fluidi*.
- [6] Bonafede, M., Belardinelli, M. E., *Appunti dal corso di Fondamenti di Geofisica 1*.
- [7] Bonafede, M., Ferrari, C. (2009) *Analytical models of deformation and residual gravity changes due to a mogi source in a viscoelastic medium*. Tectonophysics 471 (1-2), 4-13.
- [8] Eshelby, J. D (1957). *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems*. Proc. R. Soc. Lond. A.
- [9] Fialko, Y., Khazan, Y., Simons, M. (2001). *Deformation due to a pressurized horizontal circular crack in an elastic half-space, with applications to volcano geodesy*. Geophys. J. Int. 146 (1), 181-190.
- [10] Jundenherc, S., Zollo, A. (2004). *The bay of Naples (southern Italy): Constraints on the volcanic structures inferred form a dense seismic survey*. J. Geophys. Res. 109 (B10).
- [11] Lamberti, I. (2017) *Modelling the stress field induced by changes in temperature and pore pressure in a volcanic region*. Tesi di Laurea Triennale, Alma Mater Studiorum, Università degli Studi di Bologna.
- [12] Mantiloni, L. (2019). *Modelling displacement and stress fields in hydrothermal regions: the case of a thermo-poro-elastic inclusion in a poro-elastic half-space*. Tesi di Laurea Magistrale in Fisica del Sistema Terra, Alma Mater Studiorum, Università degli Studi di Bologna.

- [13] Mantiloni, L., Belardinelli, M. E., Bonafede, M., and Nespoli, M. (2020). *Deformation and stress in hydrothermal regions: the case of a disk-shaped inclusion in a half-space*. Journal of Volcanology and Geothermal Research.
- [14] McKee, C., Mori, G., Talai, B. (1989). *Microgravity change and ground deformation at Rabaul caldera, 1973-1985*. Volcanic Hazards. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 399-428.
- [15] Mindlin, R. D. (1936). *Force at a point in the interior of a semi-infinite solid*. Physics 7 (5), 195-202.
- [16] Nespoli, M., Belardinelli, M. E., Bonafede, M. (2021). *Stress and deformation induced in layered media by cylindrical thermo-poro-elastic sources: An application to Campi Flegrei (Italy)*. Journal of Volcanology and Geothermal Research 415, pp. 1-13.
- [17] Okada, Y. (1985). *Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space*. Bull. Seismol. Soc. Am. 75 (4). 1135-1154.
- [18] Okada, Y. (1992). *Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space*. Bull. Seismol. Soc. Am. 82 (2). 1018-1040.
- [19] Rice, J. R. and Cleary, M. P. (1999). *Some basic stress diffusion solution for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents*. Reviews of geophysics and space physics, vol.14.
- [20] Wang, H.F., (2017). *Theory of Linear Poroelasticity With Applications to Geomechanics and Hydrogeology*. Princeton University Press.

Appendice A

Legge di Darcy

La legge di Darcy è una legge sperimentale che descrive il moto di un fluido di viscosità η attraverso un mezzo poroso permeabile avente permeabilità k . La dimensione di η è Pa·s, mentre quella di k è m^2 . La legge di Darcy assume la forma:

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\eta} \nabla p. \quad (\text{A.1})$$

\mathbf{q} è la “*velocità di Darcy*” e rappresenta il volume di fluido che attraversa l’unità di superficie di materiale poroso nell’unità di tempo. ∇p è il gradiente della pressione in eccesso rispetto al gradiente idrostatico. Consideriamo una versione modificata dell’esperimento di Darcy, descritta in Fig. (A.1).

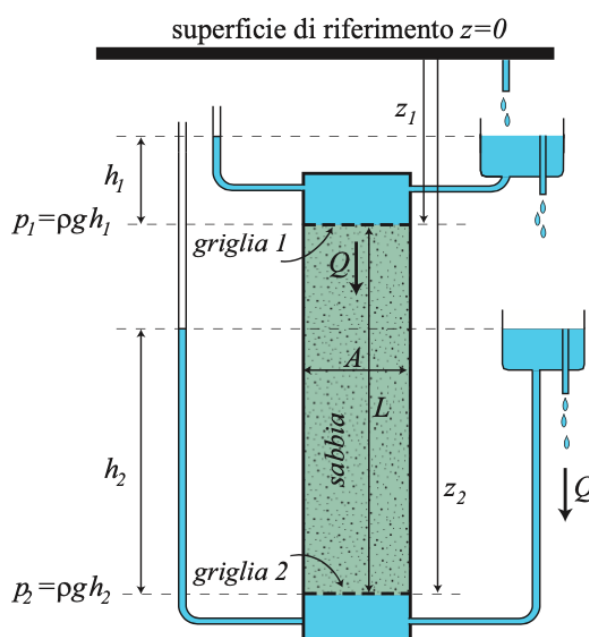


Figura A.1: Schema dell’esperimento di Darcy.

Se $\frac{\partial p}{\partial z} \neq \rho_f g$, il fluido non è in equilibrio e il flusso del fluido è proporzionale a:

$$\nabla p = \nabla p_h - \rho_f \mathbf{g}. \quad (\text{A.2})$$

∇p è il gradiente di p_h in eccesso del gradiente idrostatico e p è chiamata “*pressione efficace*”. Il volume di fluido Q che attraversa verticalmente il mezzo poroso nell’unità di tempo è proporzionale all’area A della sezione trasversale di materiale, inversamente

proporzionale alla sua lunghezza $L = z_2 - z_1$, e direttamente proporzionale alla differenza dei valori di pressione efficace p tra le griglie di imbocco e di uscita:

$$Q = -K_H A \frac{p_2 - p_1}{L} = -K_H A \frac{(p_{h2} - p_{h1}) - \rho_f g (z_2 - z_1)}{z_2 - z_1} = -K_H A \rho_f g \frac{(h_2 - h_1) - (z_2 - z_1)}{z_2 - z_1}.$$

K_H è una costante di proporzionalità e il segno negativo è dovuto al fatto che il flusso avviene lungo la direzione positiva di z se $p_2 < p_1$. Il “*flusso specifico*” è definito come $q = \frac{Q}{A}$, quindi, considerando un valore infinitesimo $z_2 - z_1$ ed effettuando una generalizzazione al caso vettoriale, si ha:

$$\mathbf{q} = -K_H \nabla p = -K_H (\nabla p_h - \rho_f \mathbf{g}). \quad (\text{A.3})$$

La costante K_H rappresenta la facilità con cui il fluido si propaga attraverso la matrice porosa, e può essere espressa da:

$$K_H = \frac{k}{\eta}, \quad (\text{A.4})$$

e ha quindi dimensione: $\text{m}^2 \cdot \text{Pa}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

Appendice B

Metodo di Eshelby

Eshelby, nel suo articolo risalente al 1957, permise di determinare una soluzione ad alcuni problemi di meccanica dei continui nei quali l'uniformità del mezzo elastico è perturbata dalla presenza di una regione sottoposta a variazioni di volume e forma, o che ha parametri elastici differenti dal resto del mezzo. In particolare, Eshelby permise di determinare la deformazione e lo stress all'interno di una regione, chiamata “*inclusione*”, circondata da una superficie chiusa S in un materiale omogeneo ed elastico, detto “*matrice*”, che subisce una spontanea variazione di volume e forma. Prima di descrivere tali passaggi è necessario introdurre le assunzioni fatte da Eshelby:

- I. L'inclusione e la matrice sono unite durante la trasformazione. Quindi, considerando ogni coppia di punti adiacenti immediatamente all'interno e all'esterno della regione, non vi è spostamento relativo tra loro alla fine del processo.
- II. L'inclusione e la matrice hanno, prima della trasformazione, stress nullo e condividono gli stessi parametri elastici.

Gli step concettuali formulati da Eshelby sono i seguenti:

1. Si effettua un taglio lungo S e si rimuove l'inclusione dalla matrice, lasciando una cavità con lo stesso volume e forma dell'inclusione. Alla fine del processo l'inclusione sarà ancora libera da stress, così come la matrice, e la loro forma originale è preservata per il “*teorema di unicità di Kirchoff*”.
2. Lasciare che l'inclusione subisca la sua variazione di volume e forma, generate nel caso di TPE da incrementi di pressione di poro e temperatura, che si traduce in una deformazione uniforme libera da stress ϵ_{ij}^* .
3. Per reinserire l'inclusione all'interno della cavità, portarla al suo volume e alla sua forma originari attraverso l'applicazione di trazioni di superficie T_j su S . Queste possono essere espresse come $T_j = \tau_{ij}^* n_i$, dove n_i è l' i -esima componente normale della superficie dell'inclusione S , e $\tau_{ij}^* = -(\lambda \epsilon_{kk}^* \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^*)$ è il tensore di stress derivato da ϵ_{ij}^* , risultante in una deformazione $-\epsilon_{ij}^*$. Il segno $-$ nell'espressione di τ_{ij}^* è dovuto al fatto che è necessario rimuovere la precedente deformazione ϵ_{ij}^* per riportare l'inclusione alla sua forma e volume originari.
4. Reinserire l'inclusione nella cavità e saldare il materiale insieme a S , mantenendo le trazioni superficiali applicate, che ora diventano un infinitesimo strato di forze diffuse su tutta la superficie S . Ogni punto della matrice e dell'inclusione è nella

stessa posizione che occupava all'inizio. Quindi il campo di spostamento è nullo ovunque e la matrice è ancora priva di stress, mentre all'interno dell'inclusione lo stress vale τ_{ij}^* .

5. Lo strato di forze introdotte precedentemente su ogni elemento infinitesimo di superficie dS è dato da $dF_i = \tau_{ij}^* n_j dS$. Per eliminarlo imponendo la continuità della trazione sulla superficie è necessario applicare un'ulteriore distribuzione $dF_i = -\tau_{ij}^* n_j dS$ su S . Ciò equivale a lasciare che le forze del corpo che hanno mantenuto l'inclusione nella sua forma precedente si rilassino, permettendo alla matrice di limitare l'inclusione. Questo nuovo strato opposto di forze porta alla presenza di un campo di spostamento non nullo sia all'interno della matrice che all'interno dell'inclusione.

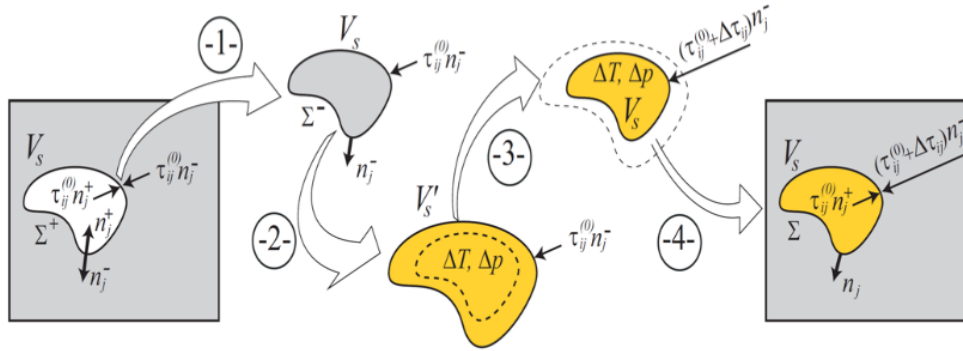


Figura B.1: *Illustrazione degli step concettuali del metodo di Eshelby (Belardinelli et al., 2019), dove non si assume l'ipotesi II, ma un campo di sforzo iniziale $\tau_{ij}^{(0)}$ e le trazioni che è necessario applicare per ripristinare la forma dell'inclusione sono indicate $\Delta\tau_{ij} n_j^-$.*