

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Astrofisica e Cosmologia

**Raggio di splashback e accrescimento negli ammassi di  
galassie del catalogo AMICO KiDS-DR3**

**Relatore:**  
Prof. Lauro Moscardini

**Candidato:**  
Lorenzo Palmucci

**Correlatori:**  
Dr. Giorgio Lesci  
Dr. Carlo Giocoli



# Indice

<b>Sommario</b>	<b>1</b>
<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Basi di cosmologia</b>	<b>5</b>
1.1 Materia ed energia oscura	5
1.2 Modello cosmologico standard	7
1.3 Formazione delle strutture cosmiche	10
1.3.1 Teoria Cosmologica di Jeans	11
1.3.2 Dissipazione delle perturbazioni	16
1.3.3 Modello del collasso sferico	18
<b>2 Basi di lensing gravitazionale debole</b>	<b>22</b>
2.1 Formalismo del lensing	23
2.2 Weak lensing	27
2.3 Processo di misura	29
<b>3 Ammassi di galassie</b>	<b>35</b>
3.1 Determinazione della massa	36
3.1.1 Equilibrio idrostatico da osservazioni X	37
3.1.2 Masse dinamiche	38
3.1.3 Effetto Sunyaev-Zel'dovich termico	38
3.1.4 Lensing gravitazionale	39
3.2 Profili di densità non troncati	40
3.2.1 Profilo Navarro, Frenk & White	40
3.2.2 Profilo di Einasto	42
3.3 Estensioni dei profili NFW ed Einasto	43
3.3.1 Profilo di Baltz, Marshall e Oguri	45
3.3.2 Termine di 2-halo	45
3.3.3 Profilo di Diemer Kravtsov	46
3.4 Il problema del mis-centering	47

3.5	Il raggio di splashback . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Dataset utilizzati</b>	<b>54</b>
4.1	KiDS-DR3 . . . . .	54
4.1.1	Catalogo di galassie . . . . .	55
4.2	Catalogo di ammassi AMICO KiDS-DR3 . . . . .	56
4.2.1	Modello per il segnale prodotto dagli ammassi . . . . .	57
4.2.2	Selezione dei candidati ammassi . . . . .	58
4.3	Profilo di ammassi da weak lensig . . . . .	60
4.3.1	Selezione sorgenti di background . . . . .	61
4.3.2	Misura stacked profilo di shear . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Implementazione dei codici e analisi dati</b>	<b>64</b>
5.1	Implementazione del profilo DK14 . . . . .	64
5.2	Markov Chain Monte Carlo . . . . .	65
5.3	Analisi preliminare su dati simulati . . . . .	68
5.4	Analisi degli ammassi AMICO KiDS-DR3 . . . . .	70
5.4.1	Relazione Massa-Ampiezza . . . . .	73
5.4.2	Stima del raggio di splashback . . . . .	76
5.4.3	Confronto dei vincoli su $R_{sp}$ con la letteratura . . . . .	81
5.4.4	Vincoli sul secondary infall . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Conclusioni e progetti futuri</b>	<b>87</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>90</b>



# Sommario

Gli ammassi di galassie rivestono un ruolo chiave negli studi cosmologici e astrofisici. L'andamento dei loro profili di densità risente delle proprietà principali che caratterizzano la materia oscura, la quale fornisce il contributo dominante in massa. Questi profili vengono descritti mediante opportuni modelli da cui poi si determinano i parametri strutturali dell'ammasso, la cui evoluzione permette di porre vincoli sui parametri cosmologici grazie alla teoria di formazione delle strutture. L'interesse verso gli ammassi di galassie ha portato nel corso degli anni a intraprendere l'osservazione di questi oggetti mediante l'utilizzo di survey multi-banda, per incrementarne la statistica e ottenere accurate misure del segnale. In particolare, le survey fotometriche permettono l'osservazione di un grande numero di galassie, e per questo sono ottimi candidati per l'individuazione di ammassi di galassie. Da queste è inoltre possibile ottenere una misura del segnale del lensing degli ammassi, grazie alle distorsioni causate sulle immagini delle galassie retrostanti. Ciò fornisce misure affidabili dei profili di densità degli ammassi. Inoltre, il segnale di lensing può essere mediato, tramite procedure di stacking, al fine di ricavare statisticamente le proprietà di questi oggetti con più elevata accuratezza.

In questo lavoro di tesi, ci siamo concentrati sulla regione esterna del profilo di densità degli ammassi selezionati, con metodi fotometrici, nella terza Data Release della Kilo Degree Survey (KiDS-DR3; [de Jong et al. 2017](#)), forniti nel catalogo AMICO KiDS-DR3 ([Maturi et al. 2019](#)). Tale regione viene definita come zona di secondary infall, ed è legata all'apocentro della prima orbita compiuta dal materiale che è stato accresciuto dall'ammasso. Per caratterizzare tale zona viene definito un nuovo raggio caratteristico dell'ammasso detto raggio di splash-back ( $R_{sp}$ ), identificato come il punto di minimo della derivata logaritmica della densità in funzione della distanza dal centro dell'ammasso. Questo nuovo raggio ha mostrato nei dati simulati una dipendenza dal tasso di accrescimento in massa dell'alone, rendendolo un nuovo potenziale parametro per mappare l'evoluzione in massa degli ammassi di galassie. Nel nostro caso tale raggio viene ricercato analizzando un set quattordici profili stacked di weak lensing, suddivisi in tre intervalli di redshift e quattro/cinque intervalli di ampiezza del segnale forniti dall'algoritmo utilizzato per l'identificazione degli ammassi, AMICO. Come vedremo, questa am-

piezza risulta essere un indicatore della massa dell'ammasso (Maturi et al. 2019; Bellagamba et al. 2019). Ognuno di questi profili viene esaminato utilizzando i modelli proposti da Navarro Frenk & White (Navarro et al. 1997), e da Einasto (Einasto 1965) assieme a due loro estensioni corrispondenti ai profili presentati in Baltz, Marshall & Oguri (Baltz et al. 2009) e in Diemer Kravtsov 2014 (Diemer & Kravtsov 2014). Quest'ultimo profilo è stato implementato, nel corso di questo lavoro, all'interno delle CosmoBolognaLib (CBL; Marulli et al. 2016), un set di librerie pubbliche in C++/Python sviluppate per il calcolo di problemi cosmologici numerici inerenti alla struttura su grande scala dell'universo. Tali librerie hanno fornito gli algoritmi utilizzati per tutte le analisi dei dati condotte in questa tesi.

Avendo a disposizione questi quattro diversi modelli per i profili di densità, abbiamo verificato la loro consistenza reciproca mediante la derivazione della relazione di scala tra massa da weak lensing e ampiezza, ottenuta anche in Bellagamba et al. (2019) Giocoli et al. (2021). Questo per verificare se la scelta del modelli utilizzato nell'analisi comporta delle sistematiche sulla derivazione della massa dai profili degli ammassi di galassie. Inoltre, abbiamo individuato il raggio  $R_{sp}$  all'interno dei nostri profili e verificato conseguentemente le sue relazioni con i parametri d'ammasso, seguendo quanto ottenuto nei lavori sui dati simulati (Diemer & Kravtsov 2014; More et al. 2015). I valori dei raggi derivati risultano in accordo con quelli ottenuti da altri lavori osservativi. Le relazioni invece hanno mostrato discrepanze con quanto predetto dai lavori di Diemer & Kravtsov (2014) e More et al. (2015). Nello specifico, ciò che otteniamo è un andamento crescente del raggio  $R_{sp}$  in funzione della massa dell'ammasso e del parametro peak height  $\nu$  opposto a quanto predetto nei lavori su dati simulati. Tale discrepanza risulta estremamente interessante perché si collega alla teoria di formazione delle strutture e/o alle proprietà della materia oscura, due ingredienti fondamentali dei moderni modelli cosmologici.

Alla fine di questo lavoro di tesi è stato condotto anche uno studio, analogo a quello svolto per il raggio di splashback, sui parametri che caratterizzano l'accrescimento di massa dell'alone. Anche in questo caso, l'evoluzione osservata in funzione del redshift ha mostrato un comportamento opposto per quanto riguarda il parametro che agisce da normalizzazione del termine di profilo di densità esterno. Investigheremo queste discrepanze con i risultati dalle simulazioni in futuro, tramite l'analisi dei dati forniti dalle prossime data release delle survey KiDS e da Euclid.

# Introduzione

L'identificazione e lo studio della struttura degli aloni di materia oscura rivestono un ruolo importante per gli studi cosmologici e astrofisici. Essi infatti sono estremamente utili per determinare i parametri cosmologici e le proprietà delle componenti di cui è composto l'universo. Tra questi, gli aloni estremamente massivi, quali gli ammassi di galassie, sono stati protagonisti di alcune delle scoperte più rilevanti sulla teoria di formazione delle strutture su grande scala e sulle proprietà della materia oscura (DM). Questa componente di materia non assorbe né emette fotoni, ma manifesta la sua presenza grazie alla gravità che esercita attorno alla materia circostante. Per questo motivo, gli aloni di DM vengono osservati principalmente mediante i fenomeni del lensing gravitazionale e alla dinamica delle componenti interne all'ammasso, i quali permettono la ricostruzione del relativo profilo di densità. Le osservazioni sulle galassie distorte dal fenomeno del weak lensing permettono di ricavare il potenziale gravitazionale, e la relativa densità superficiale, sia nelle zone interne che in quelle più periferiche dell'ammasso. In queste ultime avviene la transizione tra il materiale che sperimenta la caduta verso l'alone e quello già gravitazionalmente legato ad esso. Questa regione è identificabile mediante un aumento di pendenza del profilo di densità, molto pronunciata per ammassi dotati di grande massa ( $M > 10^{14} M_{\odot}$ ) e non coinvolti in fenomeni di merging violenti (Diemer & Kravtsov 2014). Tale zona è definita dall'apocentro della prima orbita che compie una struttura accresciuta dall'ammasso, e viene identificata mediante un raggio caratteristico detto raggio di *splashback*,  $R_{sp}$ . Recenti ricerche hanno già identificato questo raggio nelle simulazioni numeriche di ammassi di galassie (Diemer & Kravtsov 2014; More et al. 2015), ricavando in aggiunta una sua dipendenza dal tasso di accrescimento in massa dell'alone. Questa proprietà risulta interessante perché fornisce agli studi cosmologici un nuovo osservabile per mappare l'evoluzione delle strutture nel corso della vita dell'universo. Ispirandosi a lavori svolti su dati osservativi (Rana et al. 2023; Adhikari et al. 2021; Contigiani et al. 2023; Umetsu & Diemer 2017), questa tesi mira a identificare tale raggio utilizzando i dati derivanti dal catalogo di ammassi di galassie AMICO KiDS-DR3 (Maturi et al. 2019), e a verificare le dipendenze di  $R_{sp}$  da altri parametri strutturali degli ammassi, suggerite dai lavori svolti usando dati simula-



ti. Per fare questo sono stati utilizzati i profili stacked di ammassi raggruppati in intervalli di redshift e di un indicatore della massa, ovvero l'ampiezza del segnale fornito dall'algoritmo utilizzato per l'identificazione degli ammassi, AMICO. Questi profili sono stati modellati adottando i due profili di densità più comunemente usati in letteratura, ovvero quelli proposti da avarro Frenk & White e da Einasto, assieme a due loro estensioni (BMO, DK14) che tengono conto del troncamento di profili a grandi distanze dal centro dell'ammasso (Baltz et al. 2009; Diemer & Kravtsov 2014).

La misura dei parametri avviene mediante un'analisi bayesiana basata su Markov Chain Monte Carlo, una classe di algoritmi utilizzata per il campionamento di distribuzioni di probabilità a posteriori. Riassumendo, la tesi è strutturata nel seguente modo:

- Capitolo 1: viene trattato lo scenario cosmologico, presentando le componenti dominanti del nostro universo, il modello  $\Lambda$ CDM, e i punti principali della teoria di formazione delle strutture;
- Capitolo 2: si enunciano le proprietà fondamentali del fenomeno del weak lensing, tramite cui sono stati misurati i profili degli ammassi di galassie;
- Capitolo 3: viene fornita una descrizione generale delle proprietà e dell'utilizzo degli ammassi di galassie in ambito cosmologico e astrofisico;
- Capitolo 4: vengono presentati i dataset utilizzati per il lavoro di tesi, basati sui cataloghi AMICO KiDS-DR3 (ammassi di galassie) e KiDS-DR3 (galassie);
- Capitolo 5: vengono descritti i metodi e le considerazioni fatte per la derivazione dei parametri dai nostri osservabili, con un successivo studio delle correlazioni tra  $R_{sp}$  e altri parametri strutturali suggerite dai lavori su dati simulati (Diemer & Kravtsov 2014; More et al. 2015);
- Capitolo 6: vengono presentate le conclusioni di questo lavoro e descritte le prospettive future.

# Capitolo 1

## Basi di cosmologia

La cosmologia è la scienza che si occupa di studiare la struttura e l'evoluzione dell'universo. Essa si basa prevalentemente sul principio cosmologico, secondo il quale l'universo è isotropo e omogeneo su grande scala, e sulla relatività generale di Einstein, per descrivere l'azione della gravità sul tessuto dello spazio-tempo. Tra i più recenti successi di tale scienza vi è la determinazione delle componenti di materia e energia presenti nell'universo, le più importanti delle quali sono due forme sconosciute di densità di energia: la materia oscura (dark matter, DM) che, esercitando gravità, riveste un ruolo cruciale nella formazione delle strutture, e l'energia oscura (dark energy, DE), che invece influenza l'espansione dell'universo opponendosi, con la sua pressione negativa, alla gravità esercitata dalle altre componenti.

L'obiettivo di questo capitolo è quello di presentare i principali punti teorici e osservativi della cosmologia moderna. In particolare, dopo una presentazione delle componenti principali e del corrente modello cosmologico, ci dedicheremo alla teoria della formazione delle strutture. Questo per arrivare ad avere una conoscenza cosmologica di base che servirà a studiare gli ammassi di galassie, oggetto di studio in questa tesi.

### 1.1 Materia ed energia oscura

Quando parliamo di materia oscura intendiamo una materia, non ordinaria, che manifesta la sua presenza solo tramite l'effetto della sua gravità. Essa non interagisce dunque con i fotoni se non in maniera estremamente debole. Attualmente la fisica delle particelle non è in grado di dire quale specifica particella costituisca tale materia, tuttavia, dalle evidenze osservative, siamo riusciti ad identificare alcune delle sue proprietà. Della DM sappiamo che è neutra e stabile, altrimenti sarebbe stato possibile osservare la radiazione prodotta dal suo decadimento o dalla sua

interazione con un campo elettromagnetico. Oltre che con la radiazione, le sue ipotetiche particelle non interagiscono neppure con la materia ordinaria, in astrofisica detta materia barionica o più semplicemente barioni. Un qualunque tipo di interazione non gravitazionale tra queste due classi di materia dovrebbe comportare uno scambio di energia, la quale, per essere dissipata, genererebbe un segnale osservabile, come ad esempio della radiazione proveniente da effetti di ionizzazione del materiale presente nei rilevatori (Angle et al. 2008). Infine, secondo il modello standard delle particelle, la DM è non collisionale. Quest'ultima ipotesi è stata verificata proprio grazie agli studi condotti su ammassi di galassie. In particolare vale la pena citare i lavori svolti sul *Bullet Cluster* (1E 0657-56, Clowe et al. 2006), il quale è più propriamente un merger tra due ammassi che, grazie a osservazioni X e di lensing, ha fornito un'ulteriore prova empirica della natura non collisionale delle particelle di DM. In tale ammasso la componente barionica genera shock a causa della viscosità degli ioni costituenti il gas diffuso. Questa agisce come una frizione aggiuntiva che rallenta la componente ordinaria di materia rispetto a quella oscura, come osservabile in Fig. 1.1.

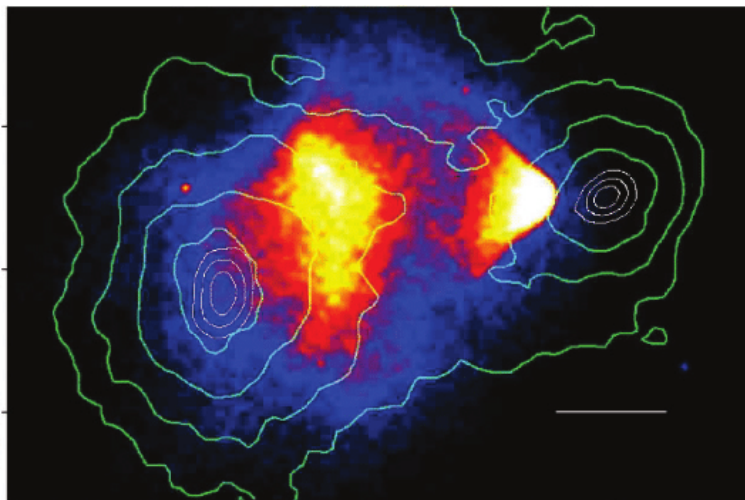


Figura 1.1: Contorni del profilo di massa, linee in verde, del *Bullet Cluster* (1E 0657-56, Clowe et al. 2006), ottenuti tramite misure da weak lensing, sovrapposti all'emissione X osservata (blu). I due lobi colorati dal rosso al bianco indicano le zone di shock del gas dove l'intensità della radiazione X è maggiore. Si noti come il profilo sia più esteso dell'emissione del gas che resta "indietro" a causa dei processi viscosi.

L'energia oscura invece è la componente che domina attualmente il nostro universo ed è anche quella su cui abbiamo meno conoscenze riguardo alla sua natura. Ciò che sappiamo è che agisce come una sorta di pressione che si oppone alla gravi-

tà e che la sua densità è tale da portare il nostro universo ad espandersi in maniera accelerata. La sua esistenza risulta necessaria nello spiegare i dati osservativi delle supernove Ia ad alto redshift (Riess et al. 1998) e il mancato contributo in energia necessario per ottenere un valore di  $\Omega_{tot} = \rho_{tot}/\rho_{crit} = 1$ . Questo parametro è il rapporto tra la densità di energia dell'universo e la densità caratteristica ottenuta dalle equazioni di Friedman, imponendo un universo a geometria Euclidea. Tale valore è stato vincolato dall'osservazione del primo picco dello spettro angolare di potenza della radiazione cosmica di fondo (CMB) (Planck Collaboration et al. 2020), il quale stabilisce che il nostro universo segue una geometria Euclidea (piatta). Queste osservazioni hanno fornito dunque la composizione del nostro universo:

- energia oscura:  $\sim 68\%$ ,
- materia oscura:  $\sim 31\%$ ,
- materia ordinaria ("barionica"):  $\sim 1\%$ .

## 1.2 Modello cosmologico standard

La materia e l'energia oscura sono entrambe presenti nel modello cosmologico  $\Lambda$ CDM, anche conosciuto come "Concordance Model", attualmente usato come modello di riferimento nella descrizione dell'universo. Nel modello  $\Lambda$ CDM, la  $\Lambda$  rappresenta il contributo dell'energia oscura in termini di costante cosmologica, mentre CDM sta per *Cold Dark Matter*. Questa è una componente di materia oscura fredda, definita in tal modo per la bassa velocità associata alle particelle che la compongono. Tale tipologia di DM è necessaria per la descrizione della formazione e della crescita delle strutture gravitazionalmente legate del nostro universo, e per spiegare le deboli fluttuazioni di temperatura osservate nella CMB. Questa predice un modello di formazione delle strutture di tipo *Bottom-up*. In tale scenario, le strutture che per prime tendono a collassare gravitazionalmente sono quelle con masse attorno alle  $10^6$  masse solari. Da questi aloni seme, si formano poi, per processi di accrescimento gerarchico, strutture sempre più massive, come ad esempio gli ammassi di galassie.

La base del modello  $\Lambda$ CDM è il modello dell'*Hot Big Bang*, basato sul principio cosmologico. Questo prevede l'esistenza di una singolarità "calda" all'origine dell'universo a cui segue una storia evolutiva di raffreddamento termico. La più importante prova di questo modello è stata l'osservazione della radiazione cosmica di fondo. Questa radiazione non può essere spiegata se non assumendo che un tempo l'universo fosse molto più denso e caldo rispetto a come lo osserviamo oggi. Tutt'ora, il modello del Big Bang presenta tuttavia dei problemi:

1. problema dell'origine: il fenomeno del Big Bang, in relatività generale, comporta una divergenza matematica, per  $t \rightarrow 0$  si ha  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\dot{a} \rightarrow \infty$  e  $T \rightarrow \infty$ , dove  $\rho$ ,  $\dot{a}$  e  $T$  sono rispettivamente la densità, la velocità di espansione e la temperatura dell'universo;
2. problema della costante cosmologica: legato alla spiegazione del valore estremamente piccolo di  $\Lambda \approx 10^{-55} \text{cm}^{-2}$ , tale problema persiste anche nell'interpretare  $\Lambda$  come l'energia del vuoto;
3. problema dell'orizzonte: la regione di connessione causale osservata nel segnale della CMB risulta essere maggiore di quella predetta dal modello;
4. problema della piattezza o età: è un problema di *fine-tuning* legato al fatto che l'universo ha "scelto" un valore molto improbabile di  $\Omega_{tot}$  primordiale estremamente vicino all'unità;
5. problema dei monopoli magnetici: nasce nel momento in cui si assume la teoria della grande unificazione (GUT) nel descrivere ciò che avviene quando l'universo ha un'energia tra  $10^{15}$  e  $10^{19}$  GeV. Tale teoria prevede la formazione di monopoli magnetici che tuttavia non vengono osservati.

I punti (1) e (2) sono attualmente irrisolti. Una possibile soluzione al primo può sorgere dall'elaborazione di una teoria quantistica della gravità in grado di descrivere l'universo negli istanti antecedenti al tempo di Planck ( $t_p \sim 10^{-43} \text{s}$ ). In quel regime gli effetti quantistici della gravità diventano tali da non poter più fare affidamento sui calcoli derivanti dalla teoria della relatività generale. Per ottenere questo tempo e le relative grandezze derivanti, si parte considerando il principio di indeterminazione di Heisenberg, nella forma

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar, \quad (1.1)$$

dove  $E$  e  $t$  rappresentano l'energia e il tempo, ed  $\hbar \equiv h/2\pi$  è la costante di Planck ridotta. Da questa, lavorando dimensionalmente, abbiamo

$$\Delta E \Delta t \approx m_p c^2 t_p = \rho_p l_p c^2 t_p = \frac{1}{G t_p^2} c^3 t_p^3 c^2 t_p = \frac{c^5 t_p^2}{G} \approx \hbar, \quad (1.2)$$

ed è quindi possibile definire un tempo legato alle tre costanti fondamentali delle principali teorie fisiche (quantistica, gravità, relatività):

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}. \quad (1.3)$$

Da tale grandezza è poi possibile stimare tutte le altre quantità di Planck comparse nell'Eq. (1.2):

$$l_p := t_p c \approx \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 1.7 \cdot 10^{-33} \text{ cm}, \quad (1.4)$$

$$\rho_p := \frac{1}{G t_p^2} \approx \frac{c^5}{G^2 \hbar} \approx 4 \cdot 10^{93} \text{ g/cm}^3, \quad (1.5)$$

$$m_p := \rho_p l_p^3 \approx \sqrt{\frac{\hbar c^2}{G}} \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ g}. \quad (1.6)$$

I restanti problemi possono essere naturalmente spiegati se si assume un modello aggiuntivo detto modello dell'inflazione. L'inflazione descrive un momento particolare della storia dell'universo che avviene attorno a energie di  $\sim 10^{15}$  GeV. Durante tale fase, l'universo è soggetto a un'espansione accelerata che lo porta ad essere ripulito da tutte le anisotropie presenti precedentemente. Tale espansione inoltre, diluisce la densità dei monopoli magnetici, rendendoli estremamente rari da osservare. Dopo l'inflazione l'universo riprende la sua espansione con uno spazio-tempo isotropo e omogeneo, a parte per piccolissime fluttuazioni che saranno il seme per la successiva formazione delle strutture cosmiche. I vari modelli, che tentano di descrivere questa particolare fase di vita dell'universo, hanno il vantaggio di essere facilmente verificabili. Questo poiché l'inflazione fa previsioni precise sui valori di alcuni osservabili, primo tra tutti il valore di  $\Omega_{tot} = 1$ . Questi, se misurati mediante osservazioni, forniscono una semplice verifica del modello permettendo di escludere le varianti che predicano valori differenti.

Nel modello  $\Lambda$ CDM, l'esistenza dei sistemi gravitazionalmente legati osservati è attribuita alla crescita di piccole perturbazioni. L'origine di queste ultime è attribuita alla presenza di fluttuazioni quantistiche generate alla fine dell'inflazione. Il tasso con cui queste sovra-densità crescono fornisce una stima fondamentale per il fattore d'espansione dell'universo. Infatti, più l'espansione è efficiente, più il collasso gravitazionale sarà ostacolato. Questo discorso ritornerà più avanti nel capitolo 3, in cui parleremo specificatamente degli ammassi di galassie e della loro importanza in cosmologia.

Dopo questa introduzione al modello standard cosmologico, elenchiamo in seguito i parametri che lo caratterizzano riportando i valori forniti da [Planck Collaboration et al. \(2020\)](#):

- $H_0 \approx 67.36$ : costante di Hubble, descrive il tasso di espansione dell'universo a  $z = 0$ ,
- $\Omega_m \approx 0.31$ : parametro di densità della materia,
- $\Omega_b \approx 0.05$ : parametro di densità barionica,

- $w_\Lambda$ : parametro dell'equazione di stato dell'energia oscura ( $p = w\rho c^2$ ). Nel  $\Lambda$ CDM tale valore è fissato a  $w_\Lambda = -1$ ,
- $\tau \approx 0.54$ : profondità ottica durante la reionizzazione,
- $n \approx 0.96$ : indice spettrale dello spettro di potenza primordiale,
- $A \approx 2.1 \cdot 10^{-9}$ : normalizzazione dello spettro di potenza.

Il parametro  $\tau$  riveste un ruolo importante negli studi della CMB, nel nostro caso, tuttavia, tale parametro non sarà rilevante per nella trattazione dei dati. Per concludere, i parametri  $A$  ed  $n$  sono relativi allo spettro di potenza della materia, la cui descrizione verrà affrontata nella Sezione 1.3.

### 1.3 Formazione delle strutture cosmiche

La formazione delle strutture è la teoria che si occupa di rispondere a come le galassie, gli ammassi di galassie e tutti gli oggetti su scale proto-galattiche sono nati e cresciuti nel corso del tempo. È una teoria legata al modello cosmologico assunto mediante i relativi parametri, descritti in Sezione 1.2, in quanto essi influenzano l'evoluzione delle strutture. Le condizioni iniziali vengono stabilite in base al modello inflazionario considerato, il quale descrive le piccole perturbazioni seme generate nel fluido cosmologico primordiale. Tali entità generano inizialmente fluttuazioni della metrica (e quindi del campo gravitazionale):

$$\delta\phi \propto \frac{G\delta M}{R} \propto \frac{G\delta\rho R^3}{R}, \quad (1.7)$$

le quali producono oscillazioni in densità nel fluido omogeneo ed isotropo. L'evoluzione di tale perturbazioni si può riscrivere in termini del "contrasto in densità", il quale tiene conto della densità media dell'universo ( $\bar{\rho}$ ):

$$\delta := \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (1.8)$$

Da Eq. (1.8), vediamo che possono esserci sia regioni sovradense che sottodense, questo perché, sapendo che la densità è una quantità intrinsecamente positiva o nulla, si ha che  $-1 \leq \delta < +\infty$ . Tali perturbazioni si studiano ricorrendo ad un approccio statistico. In quest'ottica, per valutare come la materia tende ad aggregarsi nell'universo si utilizza lo spettro di potenza delle perturbazioni,  $P(\mathbf{k})$ , dove  $\mathbf{k}$  è vettore d'onda, associato a una perturbazione di scala  $\lambda = 2\pi/k$ . Esso è una quantità cosmologica fondamentale, che descrive quanta potenza hanno le perturbazioni su una determinata scala.

$P(\mathbf{k})$  corrisponde alla trasformata di Fourier della funzione di correlazione a due punti,  $\xi(r)$ :

$$\xi(\mathbf{r}) := \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2\pi^3} \int d^3\mathbf{k}' P(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}'\mathbf{x}}. \quad (1.9)$$

$\xi(\mathbf{r})$ , a sua volta, è una misura del grado d'ordine di un sistema e descrive come alcune variabili, nel nostro caso il contrasto in densità, sono correlate in due diversi punti del sistema, uno definito dalla coordinata  $\mathbf{x}$  e l'altro posto a una distanza  $\mathbf{r}$  da esso. Si tratta di una doppia operazione di media, perché la media viene valutata per tutte le posizioni  $x$  e per tutti i punti a distanza  $r$  da ciascuna  $x$ . Per l'isotropia dell'universo,  $\xi$  è una funzione del modulo di  $r$ . Questa è esprimibile in termini di trasformata di Fourier:

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3\mathbf{k} \int d^3\mathbf{k}' \langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x} + \mathbf{r})] \exp[i\mathbf{k}'\mathbf{r}]. \quad (1.10)$$

Da questa si ricava

$$\langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle \equiv (2\pi)^3 P(\mathbf{k}) \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (1.11)$$

dove  $P(\mathbf{k})$  è lo spettro di potenza e  $\delta_D^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$  è la delta di Dirac in tre dimensioni.

Alla fine dell'inflazione, le fluttuazioni del campo  $\delta\Phi$  seguono, nello spazio di Fourier, una distribuzione stocastica e quindi gaussiana. Inoltre, non essendoci scale privilegiate, esse appaiono come una sorta di rumore bianco, con ampiezza quadratica media uguale su tutte le scale. Questa conclusione è una diretta predizione del modello dell'inflazione e fornisce lo spettro di potenza iniziale delle perturbazioni, chiamato "*Spettro di Zeldovich*":

$$P(k) = Ak^n ; \quad n = 1, \quad (1.12)$$

dove  $A$  è la normalizzazione misurabile dallo spettro della radiazione cosmica di fondo ed  $n$  la pendenza. Tale spettro viene poi modificato dai differenti processi evolutivi che avvengono nel corso dell'evoluzione dell'universo. Ciò rende tale quantità sensibile al modello cosmologico adottato e alle proprietà della DM generante le buche di potenziale. Lo spettro di potenza ritornerà utile per la descrizione del profilo di densità nelle regioni periferiche degli ammassi di galassie, dove il contributo della distribuzione della materia su grande scala domina rispetto a quello dell'alone principale.

### 1.3.1 Teoria Cosmologica di Jeans

Il metodo di Jeans si applica allo studio dell'evoluzione lineare delle perturbazioni gravitazionali. Questo consiste nell'applicare piccole perturbazioni ad uno stato



a riposo la cui soluzione è nota, in modo da fornire soluzioni analitiche corrette fintanto che si rimane in regime lineare. Nella teoria classica, le soluzioni di partenza sono stazionarie e vengono dalle equazioni della conservazione della massa, del momento (equazione di Eulero) e dall'equazione di Poisson, affiancate da un'equazione di stato e dalla condizione di adiabaticità, riportate in tale ordine di seguito:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \rho - \nabla \phi, \\ \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \\ p = p(\rho, S) = p(\rho), \\ \frac{dS}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Nel sistema (1.13),  $\rho$ ,  $v$ ,  $\phi$ ,  $p$  ed  $S$  sono rispettivamente la densità, la velocità, il potenziale gravitazionale, la pressione e l'entropia che caratterizzano il fluido perfetto lasciato libero di evolvere. In particolare, l'entropia viene assunta costante per l'assunzione di adiabaticità. Questo in base alle osservazioni del fondo cosmico a microonde che hanno scoperto che le fluttuazioni primordiali possono essere descritte come perturbazioni adiabatiche (Planck Collaboration et al. 2020). Se vogliamo applicare la teoria di Jeans in un contesto cosmologico, dobbiamo escludere la stazionarietà delle soluzioni note per poter tener conto dell'effetto di espansione dello spazio-tempo. In questo caso la velocità in coordinate fisiche ( $r = a(t)x$ ), dove  $a$  è il fattore di espansione dell'universo ed  $x$  sono le coordinate comoventi, si esprime come:

$$u := \dot{r} = H(t)r + v_{pec}, \quad (1.14)$$

dove  $v_{pec}$  è una velocità peculiare e rappresenta la perturbazione rispetto al flusso di Hubble  $H(t)r$ , dovuta alle disomogeneità generate dal campo gravitazionale. Sostituendo la velocità  $u$  nel sistema (1.13) otteniamo:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{r}} \rho - \nabla_{\mathbf{r}} \phi \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi = 4\pi G \rho, \\ p = p(\rho, S) = p(\rho), \\ \frac{dS}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Nel sistema (1.15), cerchiamo soluzioni del tipo  $\rho = \rho_0(1 + \delta)$ ,  $u, \phi = \phi_0 + \delta\phi$  e  $p = p_0 + \delta p$ . Tali soluzioni rispettano la condizione di linearità se  $\delta \ll 1$ . Il fatto che si richieda tale condizione solo sulla  $\delta$  è legata al fatto che tutte le

altre variazioni ( $u$ ,  $\delta_\phi$ ,  $\delta_p$ ) sono proporzionali a quest'ultima. Si può dimostrare, con opportuni calcoli, che il modello prevede un'equazione di dispersione valida in regime lineare. Qui riportiamo una sua espressione per una singola componente di materia:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + (k^2 c_s^2 - 4\pi G\rho_0)\delta_k = 0, \quad (1.16)$$

dove  $\delta_k$  sono le ampiezze del contrasto in densità nello spazio di Fourier ottenuti dalla relazione  $\delta = \delta_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , con  $\mathbf{k}$  vettore d'onda. Il termine  $c_s$  rappresenta la velocità del suono nel fluido cosmologico, espressa come  $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$  ad entropia  $S$  costante. I punti posti sopra di essi indicano il grado della derivata temporale associata. Quando affrontiamo problemi cosmologici, dobbiamo ricordarci che abbiamo a che fare con dimensioni scala e tempi fondamentali a cui dobbiamo rapportarci. Nello studio del collasso delle strutture dobbiamo considerare tre scale fondamentali:

- Il raggio dell'orizzonte ( $R_H$ ), scala sotto la quale lo spazio-tempo è in connessione causale:

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}. \quad (1.17)$$

- La scala di Jeans, che fornisce la scala minima che un oggetto con determinate proprietà termodinamiche, come densità e temperatura, deve avere per iniziare il collasso gravitazionale. Il valore specifico dipende dalle assunzioni cosmologiche, ma in generale essa segue la seguente dipendenza:

$$\lambda_J \propto v \sqrt{\frac{1}{\rho}}. \quad (1.18)$$

- La scala di dissipazione o di *free-streaming* per la DM, è la scala al di sotto della quale le perturbazioni vengono cancellate. Dipende fortemente dalla componente considerata.

Le perturbazioni più grandi della scala dell'orizzonte cosmologico  $R_H$  crescono sempre; questo perché l'unica interazione presente è quella gravitazionale, generata dalla componente dominante che guida l'evoluzione. Nel caso particolare di un universo Einstein-de-Sitter (EdS), caratterizzato da un universo con  $\Omega_{tot} = 1$  e composto da una sola componente, la crescita del parametro  $\delta$  cambia a seconda che ci si trovi prima o dopo l'equivalenza radiazione-materia:

$$\delta_+ \propto \begin{cases} a^2 \propto t & \text{per } a < a_{eq}, \\ a \propto t^{2/3} & \text{per } a > a_{eq}. \end{cases} \quad (1.19)$$

Con equivalenza intendiamo il momento in cui la densità di materia dell'universo  $\rho_m$  eguaglia (per poi superare) quella della radiazione  $\rho_R$ :  $\rho_m(t_{eq}) = \rho_R(t_{eq})$ . Nel caso in cui l'universo fosse "chiuso" ( $\Omega_{tot} > 1$ ), o "aperto" ( $\Omega_{tot} < 1$ ), le perturbazioni crescerebbero rispettivamente più velocemente o più lentamente del caso EdS.

Tutto ciò è corretto fintanto che la scala delle perturbazioni è maggiore della scala dell'orizzonte. Al di sotto di essa ogni singola componente può avere fluttuazioni che evolvono in base alla micro-fisica a cui sono soggette. In questo regime è necessario sapere in quale intervallo di tempo si trova l'universo; i tempi che discriminano i modi di evoluzione sono quelli dell'equivalenza  $t_{eq}$  e del disaccoppiamento tra materia ordinaria e radiazione,  $t_{dec}$ . Il primo coincide con il momento spiegato precedentemente. Il secondo invece identifica il periodo in cui materia e radiazione non sono più in equilibrio termico tra loro. Quest'ultima condizione è rispettata se il tempo scala delle collisioni  $\tau_{coll}$  risulta inferiore del tasso di espansione dell'universo  $\tau_H$ , cioè se  $\tau_{coll} \ll \tau_H$ .

Questi si calcolano come:

$$\tau_{coll} \approx \frac{1}{n_p \sigma_{tc}} \approx \frac{m_p}{\rho_m \sigma_{tc}}, \quad (1.20)$$

$$\tau_H = \frac{1}{H}, \quad (1.21)$$

dove  $H = \dot{a}/a$  è il parametro di Hubble,  $m_p$  è la massa del protone e  $\sigma_c$  è la sezione d'urto tra fotoni e particelle del fluido cosmologico. Enunciati tali tempi, le perturbazioni al di sotto della scala dell'orizzonte evolvono in base alle seguenti condizioni:

- $t < t_{eq}$ : a questi tempi la scala di Jeans risulta essere sempre maggiore di quella dell'orizzonte, impedendo collassi gravitazionali. Per i barioni il motivo è che sono fortemente accoppiati con la radiazione e conseguentemente si propagano come un'onda a velocità relativistiche. La materia oscura per sua natura non è accoppiata con la radiazione ed è soggetta all'effetto della *stagnazione*,
- $t_{eq} < t < t_{dec}$ : i barioni continuano a oscillare poiché ancora accoppiati alla radiazione, ma la DM ora, come trovato in precedenza, può crescere come  $\delta_{DM} \propto a$ ,
- $t_{dec} < t$ : la DM mantiene lo stesso andamento, la differenza ora è che anche i barioni non sono più accoppiati con la radiazione e dunque sono liberi di collassare all'interno delle buche di potenziale generate dalla DM prima di  $t_{dec}$ . Tali buche facilitano il collasso e i barioni sperimentano un accrescimento accelerato definito *Baryon catch-up*:  $\delta_B \approx \delta_{DM}(1 - a_{dec}/a)$ .

Nell'era radiativa, ovvero per  $t < t_{eq}$ , abbiamo detto che quando le perturbazioni della DM entrano nell'orizzonte subiscono l'effetto della stagnazione, il quale consiste nell'arresto della crescita delle buche di potenziale di DM. Per visualizzarlo riscriviamo l'Eq. (1.16) per le perturbazioni della DM nell'era della radiazione:

$$\ddot{\delta}_{k,DM} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k,DM} + k^2 c_s^2 \delta_{k,DM} - 4\pi G \rho_{0,DM} \delta_{k,DM} = 0, \quad (1.22)$$

il secondo termine dell'equazione che dipende da  $\dot{\delta}_{k,DM}$  è legato all'espansione dell'universo e agisce come un termine di frizione ostacolando il collasso. Approssimando al caso di un universo dominato dalla radiazione, possiamo trovare una soluzione per la crescita delle perturbazioni della DM:

$$\delta_{k,DM} = 1 + \frac{3}{2} \frac{a}{a_{eq}}. \quad (1.23)$$

Tale espressione ci dice che le sovradensità  $\delta_{k,DM}$ , dentro l'orizzonte e prima dell'equivalenza, possono crescere al massimo di un fattore  $5/2$ . Questo fatto è una questione di tempi scala: in tale epoca l'espansione dell'universo è guidata dalla radiazione ( $\tau_H \approx 1/\sqrt{\rho_r}$ ) che come abbiamo detto si oppone al collasso gravitazionale dipendente dal tempo di *free-fall* ( $\tau_{ff} \approx 1/\sqrt{\rho_{DM}}$ ). Essendo la densità della radiazione dominante rispetto a quella della DM abbiamo che il tempo scala più breve è  $\tau_H$ , conseguentemente la crescita delle perturbazioni viene inibita. La Fig. 1.2 riassume l'evoluzione delle perturbazioni per le varie componenti.

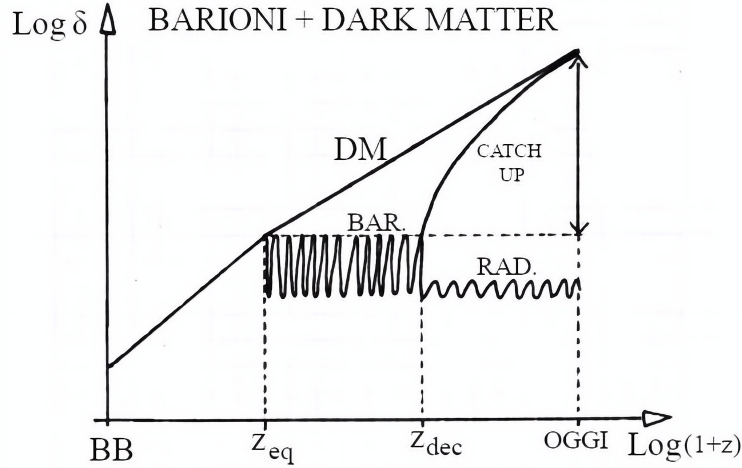


Figura 1.2: Evoluzione delle perturbazioni durante diverse epoche cosmologiche nel caso di un universo di EdS.

### 1.3.2 Dissipazione delle perturbazioni

Fino ad adesso abbiamo trattato come le perturbazioni possono crescere, per diversi tempi scala, dentro e fuori l'orizzonte. Tuttavia esse possono anche venire cancellate quando si trovano sotto una determinata scala. Nel caso della DM non si può parlare di vera e propria dissipazione poiché abbiamo a che fare con materia non collisionale. Quando la materia oscura si disaccoppia dalla radiazione, se siamo sotto la scala di Jeans, le sue particelle cominciano a propagarsi liberamente rispondendo al campo gravitazionale medio dell'Universo che tende a smorzare le fluttuazioni. Per dare una visione più quantitativa dell'effetto definiamo un'ulteriore scala fondamentale detta di *free-streaming*, corrispondente allo spazio che una ipotetica particella di DM percorre in un dato tempo  $t$ :

$$\lambda_{FS} = a(t) \int_0^t \frac{v(t')}{a(t')} dt', \quad (1.24)$$

dove  $v$  è la velocità di oscillazione delle perturbazioni. Dalla scala di free-streaming è semplice derivare la massa di *free-streaming* come  $M_{FS} \propto \lambda_{FS}^3 \rho_{DM}$ . Essa permette di definire le perturbazioni che, essendo maggiore di essa, originano le prime strutture che si sono venute a creare nell'universo. Tale quantità risulta più conveniente dell'omologa massa di Jeans  $M_J \propto \lambda_J^3 \rho_{DM}$ , usata per determinare la massa di oggetti in grado di collassare gravitazionalmente. Come mostrato in Fig. 1.3, l'evoluzione delle due masse caratteristiche di Jeans e di Free-streaming segue circa lo stesso andamento e coincidono al tempo dell'equivalenza. Questo ci dice che tutte le perturbazioni di DM con masse minori di  $M_j(a_{eq})$  vengono cancellate, viceversa quelle con massa superiore potranno sempre continuare a crescere e andranno a costituire i primi aloni di DM del nostro universo. Questo valore di soglia dipende fortemente dalle proprietà della materia oscura presente nel nostro universo.

Assumendo una natura particellare della DM, questa risulta suddivisibile in tre categorie: Hot Dark Matter (HDM), Cold Dark Matter (CDM) e Warm Dark Matter (WDM). Queste tipologie di DM si differenziano fra loro per la velocità delle particelle che le compongono. Questa si ripercuote sulla fisica del collasso gravitazionale: particelle con velocità elevata, dette per questo "calde", riescono più facilmente a fuggire da una buca di potenziale rispetto alla controparte "fredda". Questo può essere visto riprendendo l'Eq. (1.18) della scala di Jeans che mostra ad esempio come  $\lambda_{j,HDM} \gg \lambda_{j,CDM}$ .

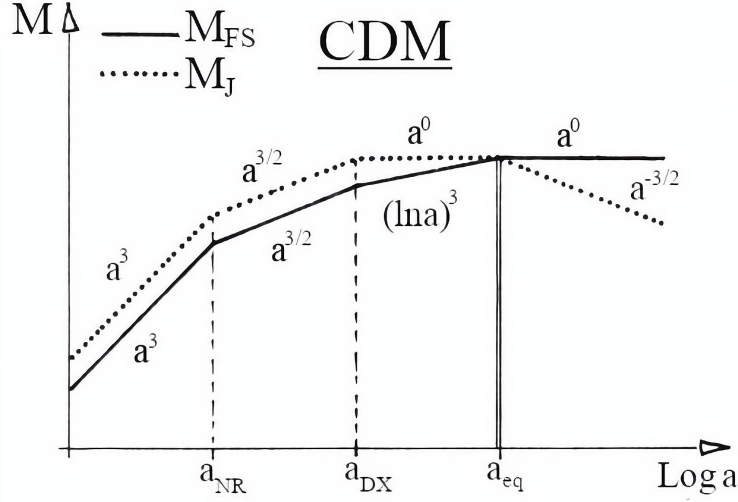


Figura 1.3: Evoluzione della massa di free-streaming comparata all'omologa massa di Jeans per la CDM. Si nota che dopo  $a_{eq}$  la prima rimane costante mentre quella di Jeans cala: questo è spiegato dal fatto che la scala di free-streaming dipende da una integrazione nel tempo mentre la seconda ne possiede una dipendenza istantanea.

Per fornire una motivazione fisica a tale distinzione, introduciamo due tempi scala (espressi in termini dal fattore di espansione  $a$ ).

- Momento di de-relativizzazione  $a_{nr}$ : momento in cui la velocità caratteristica delle particelle diventa non-relativistica, si calcola ponendo,

$$K_B T(a_{nr}) = m_{DM} c^2, \quad (1.25)$$

dove  $m_{DM}$  è la massa della particella di materia oscura e  $T_{nr}$  la temperatura al di sotto alla quale questa si de-relativizza,

- epoca del disaccoppiamento  $a_{d,DM}$ : da questo momento in poi la DM interagisce con le altre componenti dell'universo solo per via gravitazionale. Esso dipende dalla sezione d'urto delle particelle di materia oscura  $\sigma_{coll}$  e dalla loro densità numerica  $n$ ,

$$\tau_{coll} = \frac{1}{n\sigma_{coll}c}. \quad (1.26)$$

Dall'Eq. (1.25) notiamo che la dipendenza dalla massa fa sì che le particelle più massive si de-relativizzano prima della controparte leggera, questo permette di definire tale momento per ogni candidato di materia oscura. A questo punto si può definire una suddivisione dei candidati tra le due tipologie HDM e CDM:

- $a_{d,DM} < a_{nr}$  HDM: la particella rimane relativistica dopo essersi disaccoppiata,
- $a_{d,DM} > a_{nr}$  CDM: la particella assume velocità non relativistiche prima di disaccoppiarsi.

Poiché sia la massa di Jeans che di Free-streaming (1.24) dipendono dalla velocità, il valore di  $M_{fs}(a_{eq})$  per le due tipologie di materia oscura risulterà molto diverso. Per la HDM il candidato più accreditato è il neutrino massivo che, muovendosi alla velocità della luce, fornisce  $M_j(z_{eq}) \approx 10^{16} M_\odot$ , un valore maggiore dei più grandi oggetti virializzati che si osservano nell'Universo, cioè gli ammassi di galassie ( $M \sim 10^{15} M_\odot$ ). Per quanto riguarda la CDM, i migliori candidati attuali sono le WIMPs, per le quali si calcola  $M_j(z_{eq}) \approx 10^{5-6} M_\odot$ , dell'ordine della massa degli ammassi globulari. A seconda di quale componente risulti dominante, si distingueranno due storie di formazione delle strutture differenti. Per HDM lo scenario previsto è di tipo *Top-Down*: tutte le strutture con massa minore di  $M_j$  si formerebbero per frammentazione di strutture più grandi. Viceversa per la CDM lo scenario è di tipo *Bottom-Up*: in primis si formano le strutture piccole che poi, per aggregazione gerarchica, vanno a formare gli oggetti più grandi che osserviamo oggi.

### 1.3.3 Modello del collasso sferico

Precedentemente abbiamo visto come le perturbazioni evolvono in regime lineare. Questo è possibile fintanto che le perturbazioni di densità sono molto piccole, ovvero  $\delta \ll 1$ . Tuttavia molti oggetti, come galassie e ammassi, nelle loro regioni centrali hanno valori di  $\delta$  molto maggiori di uno, per cui è necessario, ad un certo punto della loro evoluzione, adottare una teoria non-lineare per una descrizione più appropriata di tali fenomeni. Qui trattiamo il modello più semplice basato su simmetrie sferiche, che ci permette di trovare soluzioni analitiche alla crescita delle fluttuazioni. Nel modello del collasso sferico assumiamo una perturbazione perfettamente sferica con una velocità comovente iniziale pari a zero. Il processo può essere descritto come un universo "chiuso", associato alla fluttuazione in densità, contenuto all'interno di un universo di *background*. In questo sistema possiamo definire il parametro di densità della perturbazione come:

$$\Omega_p = \frac{\rho_p}{\rho_{crit}} = \frac{\rho(t_i)(1 + \delta_i)}{\rho_{crit}(t_i)} = \Omega(t_i)(1 + \delta_i), \quad (1.27)$$

dove l'indice  $p$  è associato alla perturbazione e  $i$  si riferisce al momento iniziale. Gli universi di Friedman collassano solo se il loro parametro di densità è maggiore di uno, dunque per avere il collasso gravitazionale della perturbazione risulta

necessario un  $\Omega_p > 1$ , e ciò fornisce la seguente condizione:

$$\delta_i > \frac{1}{\Omega(t_i)} - 1. \quad (1.28)$$

L'equazione (1.28) fa sì che per universi chiusi ( $\Omega \geq 1$ ), ogni perturbazione positiva può collassare, d'altra parte, se ci troviamo in universi aperti ( $\Omega < 1$ ), collasseranno solo le fluttuazioni locali che rispettano l'Eq. (1.28)

Approssimare la perturbazione con un universo chiuso ci predice che, ad un certo istante, essa cesserà di espandersi per poi iniziare a contrarsi. Da quel momento in poi  $\rho_p$  inizia a crescere come riportato in Fig. 1.4. L'istante di tempo in cui la densità inizia ad aumentare segna un punto di minimo a cui corrisponde un dato valore di  $\delta$ :

$$\rho_p(t_{max}) = \rho_p(t_i) \left( \frac{a_i}{a_{max}} \right)^3 = \frac{3\pi}{32G} \frac{1}{t_{max}^2}, \quad (1.29)$$

$$\delta^{nl} = \frac{\rho_p(t_{max})}{\rho(t_{max})} - 1 \approx 4.6. \quad (1.30)$$

Il valore ottenuto mostra che già prima del collasso viene a mancare la condizione di linearità. Per confronto si può anche calcolare tale valore utilizzando la teoria lineare. In tal caso si ricava un valore di  $\delta^l \approx 1.07$  che differisce di un fattore quattro rispetto al valore reale. Questo evidenzia l'importanza di utilizzare un approccio non-lineare.

A differenza di un universo chiuso, le perturbazioni non collassano in un punto, ma raggiungono una situazione di equilibrio a causa della dispersione di velocità delle particelle per la DM e la pressione termica per la materia ordinaria. Ciò avviene a  $t_e = 2t_{max}$ , dopo tale punto la densità oscilla attorno alla posizione di equilibrio fino alla virializzazione del sistema a  $t_{vir} = 3t_{max}$ . Se ora utilizziamo il teorema del viriale possiamo calcolare il contrasto di densità in queste due nuove fasi:

$$E_{tot} = \frac{V}{2} = -T, \quad (1.31)$$

$$E_{tot}(t_e) = E_{tot}(t_{vir}) = \frac{V}{2} = -\frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_e}, \quad (1.32)$$

$$E_{tot}(t_{max}) = V = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_{max}}. \quad (1.33)$$

Poiché stiamo assumendo la conservazione dell'energia, abbiamo che  $E_{tot}(t_e) = E_{tot}(t_{max})$  quindi:

$$R_{max} = 2R_e \approx 2R_{vir}. \quad (1.34)$$



Il raggio ci permette poi di stimare la densità:

$$\rho_p(t_{vir}) \propto (R_{vir})^{-3} = 8(R_{max})^{-3} \propto 8\rho_p(t_{max}), \quad (1.35)$$

$$\rho_p(t_e) \propto 8\rho_p(t_{max}). \quad (1.36)$$

Per calcolare  $\delta$ , teniamo conto del fatto che la differenza tra la perturbazione al tempo  $t_e$  e  $t_{vir}$  non sta nella densità  $\rho_p$  di per sé, ma in come evolve la densità media dell'universo nell'intervallo di tempo  $t_{vir} - t_e$ . Mentre la perturbazione oscilla attorno alla posizione di equilibrio, l'universo di background si è espanso diminuendo la sua densità media e aumentando conseguentemente il  $\delta_\rho$  come mostrato in Fig. 1.4.

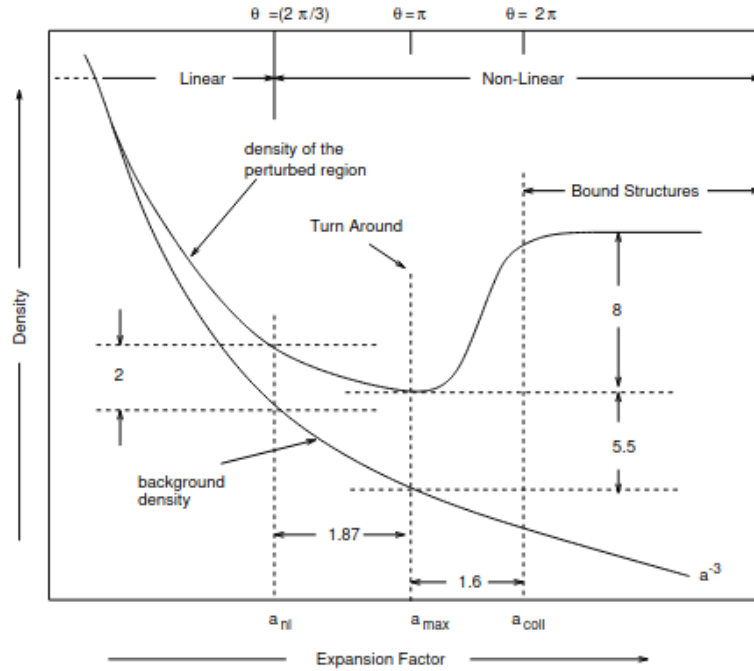


Figura 1.4: Evoluzioni delle fluttuazioni in densità nel modello del collasso sferico assumendo un universo EdS per il background (Padmanabhan 2003).

Per concludere calcoliamo i valori di  $\delta$  relativi al tempo dell'equilibrio e virializzazione per perturbazioni che evolvono in un universo EdS di polvere, in questo caso sappiamo che la densità dell'universo decresce come  $a^{-3}$ :

$$\delta_{eq} = \frac{\rho_p(t_e)}{\rho(t_e)} - 1 \approx 180, \quad (1.37)$$

$$\delta_{vir} = \frac{\rho_p(t_{vir})}{\rho(t_{vir})} - 1 \approx 400. \quad (1.38)$$

Come visto il modello sferico ci fornisce una semplice soluzione analitica in regime non-lineare, tuttavia ci sono alcune considerazioni di cui tener conto nell'usare tale approccio. Per prima cosa dobbiamo assumere una simmetria perfettamente sferica, questo nella realtà è quasi impossibile data anche l'influenza delle altre buche di potenziale vicine alla perturbazione. Inoltre i valori ottenuti dalle equazioni (1.30), (1.37) e (1.38) possono variare considerevolmente cambiando la cosmologia. D'altra parte i valori calcolati col metodo lineare, pur essendo non accurati, sono molto meno dipendenti dal modello cosmologico usato; come vedremo, questa loro proprietà li rende maggiormente utili quando si studia la distribuzione delle perturbazioni collassate, se utilizzati in modo opportuno. Un valore fondamentale è la sovra-densità critica lineare che ritornerà utile più avanti in questa tesi:

$$\delta_+(t_e) = \delta_+(t_{max}) \left( \frac{t_e}{t_{max}} \right)^{2/3} \approx 1.686. \quad (1.39)$$

Tale valore verrà utilizzato nella Sezione 3.2 per la costruzione dei profili di densità, utilizzati per l'estrapolazione dei parametri.

## Capitolo 2

# Basi di lensing gravitazionale debole

In questo capitolo analizzeremo i principali concetti dell'effetto di lente gravitazionale. In particolare ci concentreremo sul formalismo del cosiddetto regime di lensing debole o *weak lensing*, su cui si basa questa tesi. Per prima cosa analizziamo le caratteristiche generali e le quantità più importanti che descrivono il fenomeno, come ad esempio l'angolo di deflessione e la convergenza. Poi, ottenuta una visione generale, tratteremo il caso specifico del regime di weak lensing e il processo di raccolta dati con i problemi e i vantaggi associati.

Il fenomeno del lensing gravitazionale è una predizione della relatività generale, la quale descrive come una data concentrazione di materia generi un potenziale gravitazionale non omogeneo. Tale potenziale si manifesta come una curvatura dello spazio-tempo, modificando la traiettoria degli oggetti che lo attraversano, come ad esempio i fotoni. L'effetto fu osservato per la prima volta da A. Eddington durante l'eclissi del maggio 1919. In quell'occasione, si misurò uno spostamento dell'immagine di una stella, rispetto alla sua posizione originale, a causa del campo gravitazionale del Sole ([Eddington 1919](#)). Successivamente, con l'inizio delle osservazioni extra-galattiche, si riscoprì tale effetto attorno agli ammassi di galassie, la cui enorme massa causa effetti ancora più estremi, simili a quelli mostrati in [Fig. 2.1](#).

I vantaggi del lensing risiedono nella grande varietà di effetti generati, utili per lo studio astrofisico e cosmologico. Uno di questi, ad esempio, è la produzione di immagini multiple da singole sorgenti. Ciò si manifesta quando la curvatura causata dalla lente fornisce, ai fotoni della sorgente, più di un percorso per raggiungere l'osservatore. Tali tragitti tuttavia possono avere tempi di percorrenza diversi causando un ritardo tra le immagini. Il ritardo dipende dalle distanze cosmologiche percorse e dunque porta informazioni sulla geometria dell'universo, rendendo il lensing un osservabile per la determinazione dei parametri cosmologici ([Suyu et al. 2013](#)). Un altro possibile utilizzo cosmologico del lensing è lo studio delle galassie ad altissimo redshift, osservabili grazie all'effetto di amplificazione

della lente che, a causa della modifica dell'area della immagine e della conservazione della brillantezza superficiale, aumenta i flussi ricevuti dalla sorgente lensata. Un caso recente è stata l'osservazione della galassia MACS0647-JD a  $z \sim 11$  situata dietro l'ammasso MACSJ0647.7+7015 a  $z = 0.591$  (Hsiao et al. 2022). L'ultimo effetto che citiamo e che useremo in questa tesi, è il weak lensing. Questo fornisce un ulteriore metodo sia per la determinazione della massa degli oggetti astrofisici, senza assunzioni sulla loro composizione e stato dinamico, e sia per lo studio delle proprietà della materia oscura.



Figura 2.1: Ammasso di galassie Abell 370 (Hubble 2017), a  $z = 0.375$ . La sua massa elevata causa numerose distorsioni sulle immagini delle galassie di fondo.

## 2.1 Formalismo del lensing

Per fornire una descrizione più dettagliata di come l'effetto del weak lensing distorca le immagini di galassie, adottiamo un formalismo che ci permetta di arrivare a una semplice equazione della lente. Tale equazione permette di determinare la posizione e la forma reale della sorgente, partendo dall'immagine apparente generata dalla presenza della lente. Per avere una semplice trattazione, assumiamo che nel nostro sistema esistano tre piani paralleli chiamati "piano della sorgente", "piano della lente" e "piano dell'osservatore" (si veda Fig. 2.2). Nel primo di questi viene posizionata la sorgente puntiforme, mentre nel secondo piano viene concentrata tutta la massa (proiettata) che causa la deviazione dei fotoni, e nel terzo è posto l'osservatore.

Per proseguire assumiamo essere valida l'approssimazione di schermo sottile:

1. la deflessione avviene in una piccola regione di spazio e in un tempo scala dove l'effetto di espansione dell'universo risulta trascurabile,
2. è applicabile il limite di campo debole:  $\frac{|\Phi|}{c^2} \ll 1$ , con  $\phi$  potenziale gravitazionale della lente e  $c$  la velocità della luce,
3. il principio di Fermat risulta valido.

Caratterizzato il sistema, ci accingiamo a ricavare l'equazione della lente. Per farlo partiamo dal formalismo della relatività generale, utilizzando l'equazione della metrica insieme al limite di campo debole. Questo permette di ricavare un coefficiente di rifrazione  $n$  della nostra lente gravitazionale:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) d\vec{x}^2, \quad (2.1)$$

dove  $ds^2$  rappresenta una distanza tra due eventi in uno spazio-tempo in cui è presente un campo gravitazionale descritto dal tensore  $g_{\mu\nu}$ . Questo è interpretato come il potenziale della forza gravitazionale le cui componenti nelle varie coordinate sono date dagli indici  $\mu$  e  $\nu$ . A questo punto il coefficiente cercato si ricava dal rapporto della velocità della luce in uno spazio-tempo privo di curvatura  $v$  e quella estrapolata dall'Eq. (2.1),

$$v = \frac{|d\vec{x}|}{dt} \implies n = \frac{c}{v} \approx \frac{1}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \approx 1 - \frac{2\Phi}{c^2}. \quad (2.2)$$

Il passo successivo è trovare la nostra prima quantità fondamentale, ovvero l'angolo di deflessione della lente. Per fare ciò utilizziamo il principio di Fermat, il quale stabilisce che per conoscere il percorso eseguito da un fotone che ha viaggiato tra due punti dello spazio, dobbiamo trovare quello che minimizza il suo tempo di percorrenza. Questo porta ad esprimere la variazione della traiettoria del fotone in funzione dell'indice di rifrazione  $n$ :

$$\dot{\vec{e}} = \frac{1}{n} \vec{\nabla}_\perp n = \vec{\nabla}_\perp \ln(n), \quad (2.3)$$

dove, riprendendo l'Eq. (2.2), si può esprimere la dipendenza dal potenziale gravitazionale  $\Phi$ ,

$$\ln(n) \approx -2 \frac{\Phi}{c^2}. \quad (2.4)$$

Assunto ciò, il nostro angolo diventa:

$$\hat{\alpha} = \vec{e}_{in} - \vec{e}_{out} = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\nabla}_\perp \Phi d\zeta. \quad (2.5)$$

In Eq. (2.5),  $\zeta$  rappresenta la coordinata spaziale perpendicolare al piano della lente, sorgente e osservatore, sulla quale viene integrato il potenziale Newtoniano. Inoltre,  $\vec{e}_{in}$ ,  $\vec{e}_{out}$  sono il versore della traiettoria del fotone prima e dopo la deflessione, rispettivamente. Noto  $\hat{\alpha}$ , diventa immediato ricavare la nostra equazione della lente osservando il sistema in Fig. 2.2:

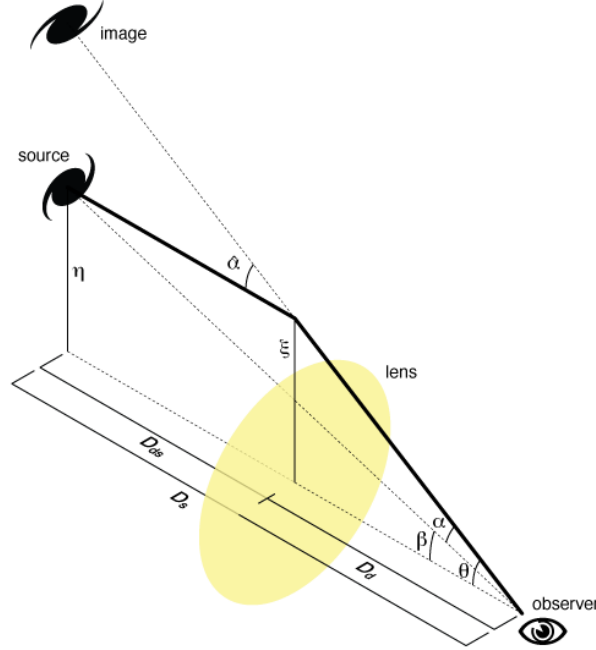


Figura 2.2: Schema della deviazione di un fotone per effetto di lente gravitazionale.

$$D_{LS}\hat{\alpha} = D_S\vec{\theta} - D_S\vec{\beta}, \quad (2.6)$$

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{LS}}{D_S}\hat{\alpha} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}, \quad (2.7)$$

$$\vec{\alpha} \equiv \frac{D_{LS}}{D_S}\hat{\alpha}, \quad (2.8)$$

dove  $D_s$  e  $D_{LS}$  sono rispettivamente le distanze tra osservatore-sorgente e lente-sorgente. Gli angoli  $\beta$  e  $\theta$  sono le posizioni angolari "vera" ed apparente dell'immagine osservata. Dall'Eq. (2.7) possiamo definire tutte le quantità utili alla parametrizzazione della nostra lente. Per ricavarle, è utile definire il potenziale effettivo del lensing. Questo equivale alla proiezione bi-dimensionale del potenziale Newtoniano lungo l'asse  $\zeta$ , riscalato da un rapporto delle tre distanze principali:

$$\hat{\Psi}(\vec{\theta}) = \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \frac{2}{c^2} \int \Phi(D_L \vec{\theta}, \zeta) d\zeta. \quad (2.9)$$

Questa quantità permette di derivare l'angolo di deflessione e la convergenza  $\kappa(\vec{\theta})$ :

$$\nabla_{\theta} \hat{\Psi}(\theta) = \hat{\alpha}(\theta), \quad (2.10)$$

$$\Delta_{\theta} \hat{\Psi}(\theta) = 2\kappa(\theta), \quad (2.11)$$

$$\kappa(\theta) = \frac{\Sigma(\theta)}{\Sigma_{cr}} \quad \text{con} \quad \Sigma_{cr} \equiv \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}. \quad (2.12)$$

La convergenza è importante poiché dipende dalla densità critica della lente,  $\Sigma_{cr}$ , usata per distinguere i regimi di lensing forte (strong) e debole (weak):

- Strong lensing: effetto che si manifesta nelle regioni più centrali del piano della lente (le zone con più alta densità superficiale), risulta facilmente osservabile grazie alla forte amplificazione e distorsione applicata sulle sorgenti retrostanti. Porta informazioni sulla parte più interna del potenziale gravitazionale della lente, tuttavia dipende debolmente dalle regioni più esterne;
- Weak lensing: dipende dalla materia situata nelle zone periferiche della distribuzione di densità. Qui, come vedremo, le distorsioni risulteranno facilmente descrivibili dallo "Jacobiano del lensing"  $A$ , descritto nella Sezione 2.2. Tuttavia, queste non sono facili da osservare, e per ricavare un buon segnale si eseguono medie su determinate regioni di cielo, costruendo ad esempio profili ad anelli.

Per comprendere come descrivere l'amplificazione generata dalla lente, dobbiamo sapere che la natura dell'effetto non comporta né la creazione né l'assorbimento di fotoni, dunque il loro numero è conservato. Inoltre il processo risulta anche acromatico, ovvero il momento posseduto dai fotoni viene conservato. Tutto ciò implica a sua volta la conservazione della brillantezza superficiale  $I_{\nu}$ , la quale stabilisce che l'amplificazione  $\mu$  dipende solo dalla modifica dell'area della sorgente sul piano della lente:

$$F_{\nu} = \int_I I_{\nu}(\vec{\theta}) d^2\theta = \int_S I_{\nu}^S[\vec{\beta}(\vec{\theta})] \mu[\vec{\beta}(\vec{\theta})] d^2\beta, \quad (2.13)$$

$$\mu(\vec{\theta}) = \frac{dI}{dS} = \frac{d^2\theta}{d^2\beta} = \det A^{-1}(\vec{\theta}), \quad (2.14)$$

$$A \equiv \frac{d\vec{\beta}}{d\vec{\theta}}. \quad (2.15)$$

In queste equazioni  $I$  e  $S$  rappresentano le aree coperte dall'immagine sul piano della sorgente e della lente, descritte dalle corrispettive coordinate angolari  $\vec{\beta}$  e  $\vec{\theta}$ . Eq. (2.14) ci dice che nelle condizioni in cui il  $\det A$  sia uguale a zero, l'amplificazione diverge. Ricordando che  $\vec{\theta}$  è un vettore, tale condizione corrisponde a linee

chiamate *linee critiche*, sulle quali abbiamo i principali effetti di distorsioni del regime del lensing forte. In questo caso  $A$  è il tensore che descrive la mappatura dell'immagine tra il piano della sorgente e quello della lente, ed è caratterizzato dai parametri di quest'ultima.

## 2.2 Weak lensing

Come già anticipato, il weak lensing può essere descritto da distorsioni del primo ordine. Prendendo dunque l'equazione della lente (2.7) e assumendo che l'angolo di deflessione ridotto  $\vec{\alpha}$  non vari in maniera significativa per un dato spostamento  $d\vec{\theta}$ , abbiamo che uno spostamento  $d\vec{\beta}$  sul piano della sorgente si trasforma nel seguente modo:

$$d\vec{\beta} = \left( I_d - \frac{d\vec{\alpha}}{d\vec{\theta}} \right) d\vec{\theta}, \quad (2.16)$$

con  $I_d$  corrispondente alla matrice identità. Conseguentemente il tensore  $A$ , chiamato anche "Jacobiano del lensing", viene scritto mediante le derivate seconde del potenziale  $\Psi$ , le cui componenti sul piano del cielo vengono selezionate mediante gli indici  $i, j$ :

$$A = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\vec{\theta})}{\partial \theta_j} \right) = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \hat{\Psi}(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) = (\delta_{ij} - \hat{\Psi}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\Psi}_{11} & -\hat{\Psi}_{12} \\ -\hat{\Psi}_{12} & 1 - \hat{\Psi}_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

con tale notazione la matrice identità nell'Eq. (2.16) diventa la delta di Kronecker  $\delta_{ij}$ .

Risulta utile, ai fini descrittivi delle perturbazioni, suddividere  $A$  in una componente isotropica  $A_{iso,ij}$  e una anisotropica  $A_{aniso,ij}$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad A_{iso,ij} &= \frac{1}{2} Tr(A) \delta_{ij} = \left( 1 - \frac{1}{2} \Delta_{\theta} \hat{\Psi} \right) \delta_{ij} = (1 - \kappa) \delta_{ij}, \\ 2) \quad A_{aniso,ij} &= A_{ij} - \frac{1}{2} Tr(A) \delta_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\hat{\Psi}_{11} - \hat{\Psi}_{22}) & -\hat{\Psi}_{12} \\ -\hat{\Psi}_{12} & \frac{1}{2}(\hat{\Psi}_{11} - \hat{\Psi}_{22}) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La prima dipende dalla convergenza mediante la traccia  $Tr$  di  $A$ , la quale, essendo uno scalare, agisce come una contrazione o espansione isotropa dell'immagine. Al contrario, la seconda componente, chiamata anche matrice di shear,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

è responsabile per le distorsioni anisotropiche. La somma di questi due effetti si può facilmente schematizzare assumendo una sorgente circolare posizionata nel



piano della sorgente con rispettive coordinate  $(\beta_1, \beta_2)$ . Questa verrà mappata nel piano della lente secondo la seguente relazione:

$$\vec{\beta} = A(\vec{\theta})\vec{\theta}, \quad (2.19)$$

dove  $\theta$  corrisponde a un generico punto del piano della lente con coordinate  $(\theta_1, \theta_2)$ . Ora, riscrivendo  $\det A$  in funzione delle componenti  $k$  e degli autovalori della matrice di shear  $\pm\gamma = (\pm\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2})$ , otteniamo:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 = (1 - \kappa - \gamma)^2 \theta_1^2 + (1 - \kappa + \gamma)^2 \theta_2^2, \quad (2.21)$$

$$a = \frac{\beta}{1 - \kappa - \gamma} \quad b = \frac{\beta}{1 - \kappa + \gamma}, \quad (2.22)$$

dove Eq. (2.21) rappresenta un'ellisse con semi-assi  $a$  e  $b$ . Questi definiscono una ellitticità chiamata anche *shear ridotto* ( $g$ ):

$$\epsilon = \frac{a - b}{a + b} = \frac{\gamma}{1 - \kappa} = g. \quad (2.23)$$

Quindi il weak lensing rende ellittiche le immagini delle galassie di fondo, come schematizzato in Fig. 2.3.

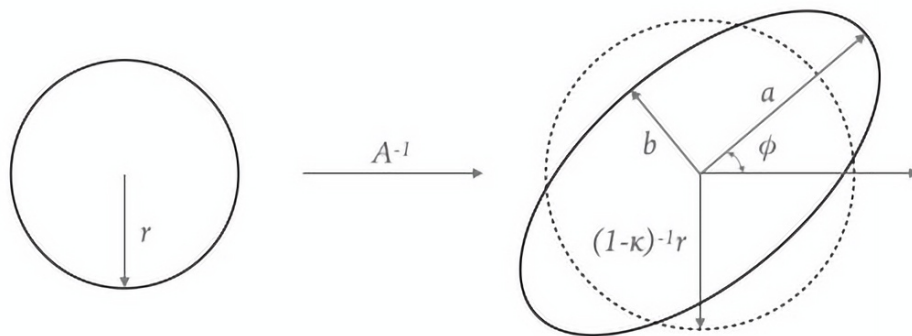


Figura 2.3: Effetto delle distorsioni al primo ordine. Nella figura si sovrappongono gli effetti dovuti alla convergenza  $1 - \kappa$  e allo shear, il primo causa una espansione isotropa dell'immagine, visibile dalla linea tratteggiata. La seconda crea una ellitticità i cui assi sono lungo gli autovalori della matrice di shear  $\pm\gamma$ .

Tale effetto risulterà più debole man mano che ci si allontana dal centro della lente. Per concludere, forniamo un'utile descrizione dell'ellitticità in forma complessa. In tale forma sono ottenute due componenti che forniscono il modulo di  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2, \quad (2.24)$$

$$|\epsilon| = \sqrt{\epsilon\bar{\epsilon}} = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}. \quad (2.25)$$

Questo formalismo sarà ripreso nella sezione successiva sui processi di misura.

## 2.3 Processo di misura

Ora, al fine di misurare l'ellitticità delle sorgenti lensate, usiamo la distribuzione di brillantezza superficiale delle galassie che sappiamo essere distorta dal potenziale del lensing. Per prima cosa cerchiamo il centroide dell'immagine:

$$\bar{\theta} = \frac{\int d^2\theta I(\theta) q_I[I(\theta)] \theta}{\int d^2\theta I(\theta) q_I[I(\theta)]}, \quad (2.26)$$

dove  $q_I$  rappresenta una funzione peso ed  $I$  la brillantezza superficiale che sappiamo essere conservata per i motivi enunciati nella Sezione 2.1. Definiamo poi il tensore dei momenti di brillantezza del second'ordine, i cui indici  $(i, j)$  sono associati alle componenti della coordinata spaziale  $\vec{\theta}$  espresse nella sezione precedente:

$$Q_{ij} = \frac{\int d^2\theta I(\theta) q_I[I(\theta)] (\theta_i - \bar{\theta}_i) (\theta_j - \bar{\theta}_j)}{\int d^2\theta I(\theta) q_I[I(\theta)]}. \quad (2.27)$$

Dai valori  $Q_{ij}$  risaliamo alla ellitticità complessa espressa in Eq. (2.24) mediante il calcolo degli autovalori della matrice  $\det(Q_{ij} - \lambda\delta_{ij})$ :

$$\lambda_+ = \frac{1}{2}(Q_{11} + Q_{22} + \sqrt{(Q_{11} - Q_{22})^2 + 4Q_{12}^2}) = \frac{1}{b^2}, \quad (2.28)$$

$$\lambda_- = \frac{1}{2}(Q_{11} + Q_{22} - \sqrt{(Q_{11} - Q_{22})^2 + 4Q_{12}^2}) = \frac{1}{a^2}. \quad (2.29)$$

Tali autovalori corrispondono all'inverso del quadrato dei semi-assi dell'ellisse  $(a, b)$ . A questo punto, per ricavare l'ellitticità complessa che ci interessa, basta inserire opportunamente tali autovalori nell'Eq. (2.23):

$$\epsilon = \frac{Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}}{Q_{11} + Q_{22} + 2\sqrt{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2}}. \quad (2.30)$$

Definito il metodo con cui ricavare  $\epsilon$ , ci adoperiamo per adottare un sistema di riferimento conveniente per misurare lo shear. Tale sistema si ottiene mediante una rotazione che permette di definire due nuove componenti di shear tangenziale ( $\gamma_t$ ) e radiale ( $\gamma_x$ ):

$$\begin{aligned}\gamma_t &= -\gamma_1 \cos 2\phi - \gamma_2 \sin 2\phi, \\ \gamma_x &= \gamma_1 \sin 2\phi + \gamma_2 \cos 2\phi,\end{aligned}$$

dove  $\phi$  è l'angolo di rotazione. Utilizziamo tale sistema perché, come è possibile notare in Fig. 2.4, le distorsioni da weak lensing agiscono solo sulla componente tangenziale dello shear. Da questo punto in poi, quando parleremo di segnale di shear e shear ridotto, ci riferiremo solo a quest'ultima componente.

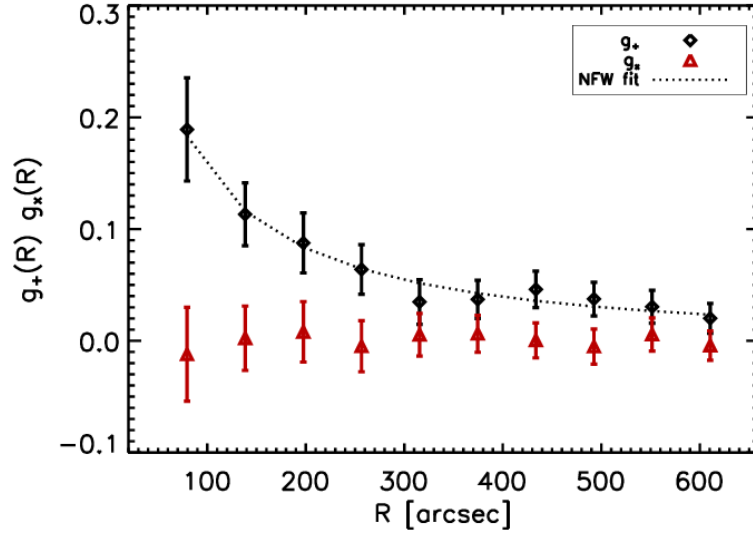


Figura 2.4: Andamento radiale dello shear ridotto tangenziale  $g_+$  e radiale  $g_x$ , misurati per alcuni ammassi simulati in Meneghetti et al. (2010). Notiamo che il segnale del secondo ( $g_x$ ) è consistente con zero.

Sfortunatamente, le sorgenti come le galassie non sono circolari, ma spesso hanno una ellitticità intrinseca, data ad esempio dalla loro inclinazione rispetto alla linea di vista come mostrato in Fig. 2.5. Questo fa sì che nella misura di  $g$  vi sia il contributo dell'effetto della lente sommato a quello intrinseco che contamina dunque il segnale di shear a cui siamo interessati. Questo problema, come vedremo, può essere considerevolmente ridotto se mediamo il segnale da più galassie su opportune regioni anulari attorno al centro dell'ammasso.

Per vedere come l'ellitticità intrinseca si inserisce nell'osservazione dell'immagine, si riscrivono i coefficienti  $Q_{s,ij}$  associati alla brillantezza superficiale della sola sorgente senza l'effetto della lente  $I_s$ :

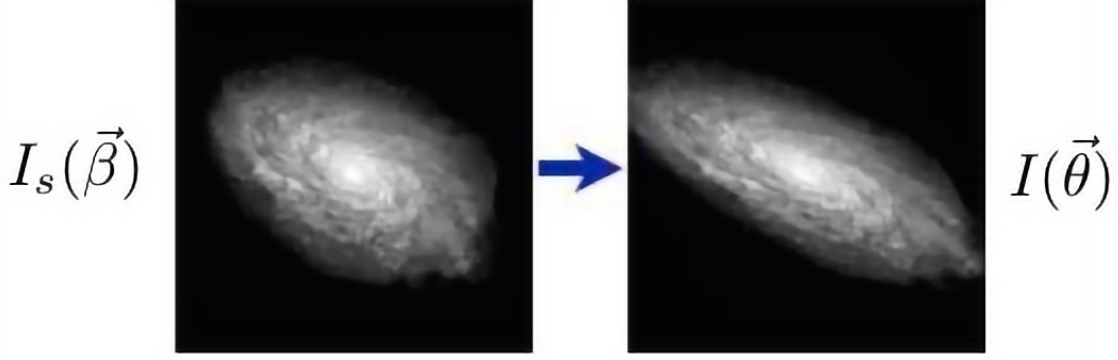


Figura 2.5: Variazione delle densità di brillantezza superficiale di una galassia dovuta all'effetto di weak lensing.

$$Q_{s,ij} = \frac{\int d^2\beta I_s(\beta) q_I[I_s(\beta)] (\beta_i - \bar{\beta}_i)(\beta_j - \bar{\beta}_j)}{\int d^2\beta I_s(\beta) q_I[I_s(\beta)]}. \quad (2.31)$$

Ora possiamo utilizzare le relazioni ricavate nello studio delle distorsioni al prim'ordine per trovare le trasformazioni tra la componente intrinseca  $Q_s$  e quella osservata  $Q$ :

$$A(\theta) = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 - g_1 & -g_2 \\ -g_2 & 1 + g_1 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$Q_s = AQA^T = AQA. \quad (2.33)$$

Tale relazione, unita con Eq. (2.30), fornisce le relazioni dell'ellitticità intrinseca  $\epsilon_s$  della sorgente con quella osservata a causa dell'effetto della lente  $\epsilon$ :

$$\epsilon_s = \begin{cases} \frac{\epsilon - g}{1 - \tilde{g}\epsilon} & ; |g| \leq 1; \\ \frac{1 - g\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon} - \tilde{g}} & ; |g| \geq 1, \end{cases} \quad (2.34)$$

dove  $\tilde{g}$  e  $\tilde{\epsilon}$  sono i complessi coniugati delle rispettive quantità  $g$  ed  $\epsilon$ . Se assumiamo che l'orientazione intrinseca delle galassie sia casuale, ovvero che le fasi dell'ellitticità complessa seguano una distribuzione randomica, otteniamo che il valore di

aspettazione  $E(\epsilon_s)$  è uguale a zero. Se tale condizione è verificata si ricava il seguente sistema:

$$E(\epsilon) = \begin{cases} g & ; |g| \leq 1; \\ \tilde{g}^{-1} & ; |g| \geq 1; \end{cases} . \quad (2.35)$$

Dunque lo shear ridotto, generato dalla lente, corrisponde a una misura dell'ellitticità osservata. Tuttavia questa è soggetta a un rumore determinato dalla dispersione intrinseca delle ellitticità:

$$\sigma_\epsilon = \sqrt{\langle \epsilon_s \tilde{\epsilon}_s \rangle} . \quad (2.36)$$

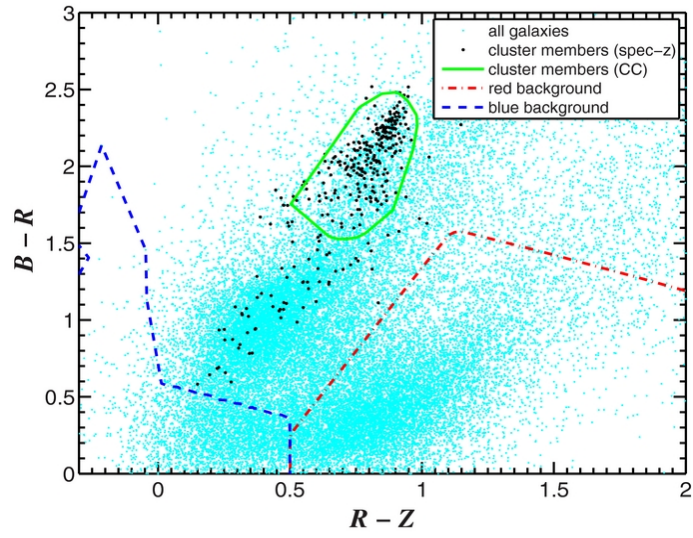
Il fatto che esso dipenda dalla media relativa alle sorgenti ci conferma, come detto prima, che il rumore può essere abbattuto mediando su un ampio numero di galassie. Per questo è necessario eseguire osservazioni profonde ed ottenere una misura il più corretta possibile.

Nel caso di effetto lensing causato da ammassi di galassie, oltre alla forma intrinseca delle galassie, anche la selezione delle sorgenti lensate può causare bias nella misura dello shear. Essa, infatti, causa una diluizione del segnale se nell'identificazione vengono incluse galassie frapposte tra l'osservatore e la lente, oppure galassie appartenenti all'ammasso stesso. Queste galassie non subiscono l'effetto di distorsione dovuto al potenziale della lente, e danno conseguentemente un segnale nullo. Il problema risulta particolarmente rilevante quando la selezione spettroscopica non è disponibile, e risulta dunque necessario usare metodi fotometrici per stimare i redshift delle sorgenti. Per questi approcci, ciò che si ricava è una distribuzione di probabilità del redshift,  $p(z)$ , che tuttavia può non presentare una forma gaussiana oppure può avere una deviazione standard molto estesa. La forma e la larghezza della  $p(z)$  possono essere sfruttate come pesi da associare alle galassie candidate come sorgenti, da assegnare poi a diversi ammassi di galassie selezionati. Un'ulteriore possibilità di selezionare le galassie lensate dagli ammassi, spesso adottata per aumentare il numero di sorgenti valide, è quella di usare una selezione colore-colore, in modo da sfruttare le proprietà fotometriche che accomunano le galassie d'ammasso. Uno studio condotto da [Umetsu et al. \(2012\)](#) ha trovato che queste sono raggruppate in una specifica regione del diagramma come mostrato in Fig. 2.6. Al di là di tali problemi, ci sono da tenere in considerazione anche gli effetti legati all'uso del telescopio e della relativa strumentazione:

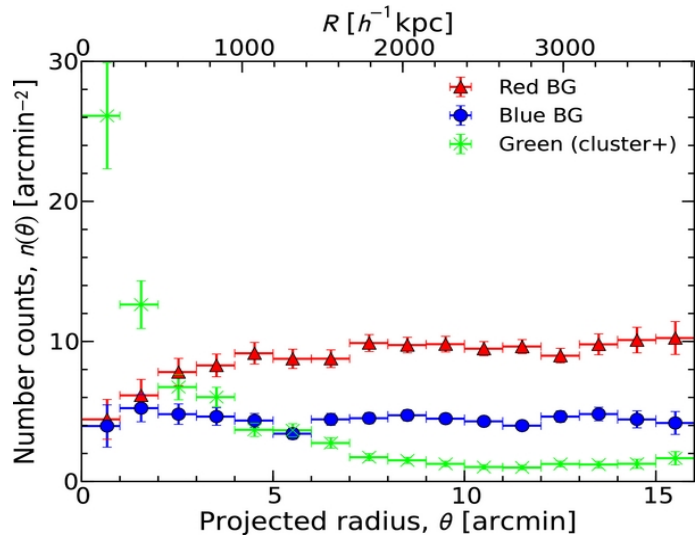
- effetto di *blurring* generato dalla PSF del telescopio o dell'atmosfera, questo tende a circolarizzare le immagini diluendo il segnale, ma può anche introdurre delle elongazioni artificiali non fisiche;
- le immagini sono pixelate e rendono difficile stimare correttamente i bordi delle galassie;

- altri effetti strumentali che possono mimare l'effetto di un segnale di shear, come ad esempio l'interazione con i raggi cosmici, saturazione e trasferimento di carica nei CCD.

Tutti questi effetti devono essere tenuti in considerazione per una corretta stima dell'errore sul segnale di shear.



(a)



(b)

Figura 2.6: (a) Individuazione galassie d'ammasso da Umetsu et al. (2012), selezionate da Subaru  $BR_c z'$ . (b) Densità numerica superficiale su raggio proiettato  $\theta$ . L'andamento dei punti verdi cala con l'aumentare di  $\theta$ , come ci si aspetta da galassie contenute all'interno dell'alone. I punti rossi e blu invece sono le galassie di campo e mostrano un andamento più uniforme tipico di una distribuzione di background.

# Capitolo 3

## Ammassi di galassie

Gli ammassi di galassie sono le strutture virializzate più grandi del nostro universo. Come abbiamo visto nella Sezione 1.3.2, questi si formano mediante processi di accrescimento gerarchico tra sistemi con massa minore formati precedentemente. La loro posizione attorno ai picchi più alti del campo di densità della DM li rende anche importanti strumenti di indagine cosmologica, in quanto è possibile calibrare in modo teorico, tramite simulazioni N-body, la loro abbondanza, bias, profilo di densità e proprietà strutturali (Sheth & Tormen 1999; Tinker et al. 2008; Despali et al. 2016). Infatti, studiando la loro densità numerica e come essa evolve con il redshift è possibile ricavare i parametri cosmologici, quali ad esempio i parametri  $\Omega_m$  e  $\sigma_8$ . Il primo rappresenta il rapporto tra la densità media di materia nell'universo e la sua densità critica. Il secondo fornisce la misura dell'ampiezza delle fluttuazioni di densità sulla scala di  $8 \text{ Mpc}/h$ . Oltre all'informazione quantitativa sulla densità di materia, le simulazioni N-body ci permettono anche di descrivere il profilo di densità degli ammassi, dominati dalla materia oscura. Tra questi vi sono quelli adottati in questo lavoro di tesi, come quelli proposti da Navarro Frenk e White (Navarro et al. 1997), da Baltz, Marshall e Oguri (Baltz et al. 2009) e da Diemer & Kravtsov 2014 (Diemer & Kravtsov 2014).

Gli ammassi di galassie fungono anche da laboratori astrofisici per lo studio di molti fenomeni, come il feedback da AGN, i moti di accrescimento di materia dalla ragnatela cosmica e l'evoluzione delle galassie in ambienti densi (Gendron-Marsolais et al. 2016; Zhu et al. 2022; Akerman et al. 2023). Gli ammassi hanno una massa tipica che varia tra  $10^{13} - 10^{15}$  masse solari e possono contenere da qualche decina fino a  $\sim 10^3$  galassie. Tuttavia la componente stellare non fornisce il principale contributo in massa.



Infatti all'interno degli ammassi di galassie vi è anche una componente diffusa di gas ionizzato (ICM) più la materia oscura (DM), con i seguenti contributi in massa:

- alone di DM  $\sim 85\%$ ,
- ICM  $\sim 14\%$ ,
- galassie  $\sim 1\%$ .

Come si può notare la DM risulta dominante e ciò permette di descrivere l'evoluzione e la formazione degli ammassi di galassie mediante il solo utilizzo del corrispondente potenziale. Tale semplificazione viene utilizzata nelle simulazioni delle strutture su grande scala, le quali hanno svolto, e svolgono tutt'oggi, un ruolo fondamentale nell'elaborazione dei modelli cosmologici. Queste seguono l'evoluzione delle fluttuazioni di densità all'interno di un dato volume in base alle assunzioni fatte su parametri cosmologici e sul candidato di materia oscura. In particolare, studiando l'evoluzione temporale dell'abbondanza degli ammassi per vari modelli cosmologici, si è potuto trovare la compatibilità tra il modello  $\Lambda$ CDM e i dati osservativi per ammassi a differenti redshift. Questo accordo ad esempio non è ottenibile con universi Euclidei privi di energia oscura come il modello Einstein De Sitter (Borgani & Kravtsov 2011; Borgani & Guzzo 2001). Le simulazioni su scale tipiche degli ammassi hanno fornito anche modelli per profili di densità. Le formule da esse derivate sono utilizzate per analizzare i dati osservativi e determinare i parametri fondamentali dell'ammasso quali la massa, la concentrazione e, nel nostro caso, il raggio di splashback.

### 3.1 Determinazione della massa

Nel contesto delle analisi della struttura a grande scala dell'universo, le variabili cosmologiche principali sono la massa e il redshift dei traccianti della distribuzione di materia. Gli ammassi di galassie sono ottimi candidati in quanto, come già accennato precedentemente, è possibile modellare la loro evoluzione con grande precisione tramite simulazioni N-body e sviluppare modelli analitici basati sul collasso ellissoidale (Sheth & Tormen 1999). Inoltre, è possibile stimare le masse degli ammassi di galassie con buona precisione tramite osservazioni in diverse bande dello spettro elettromagnetico.

A seguire vedremo alcuni dati osservativi sfruttati per il calcolo della massa:

1. effetto dell'equilibrio idrostatico tramite l'osservazione in banda X,
2. dinamica delle galassie membro in ottico e vicino-infrarosso,

3. effetto Sunyaev-Zel'dovich (SZ) nelle microonde,
4. lensing gravitazionale in ottico e vicino-infrarosso.

### 3.1.1 Equilibrio idrostatico da osservazioni X

Per quanto concerne la banda X, essa si basa sull'osservazione dell'ICM, costituito da un plasma diffuso all'interno degli ammassi di galassie, con una temperatura attorno ai  $10^7 - 10^8 K$ . Questa proprietà lo rende osservabile, nella banda X, grazie all'emissione di fotoni per processi di Bremsstrahlung, il quale fornisce il principale contributo allo spettro del continuo. Altre emissioni importanti sono legate ai processi di ricombinazione ed emissione in riga, che derivano dalla presenza di una componente metallica parzialmente ionizzata nell'ICM, prodotta dalla componente stellare e poi estesa mediante processi di diffusione e turbolenza del gas. Tale gas, se assunto in equilibrio idrostatico, permette di ricavare il profilo di massa dell'ammasso, a patto di conoscere la sua variazione in densità e temperatura in funzione del raggio, tramite la formula,

$$M(r) = \frac{rkT}{\mu m_p G} \left( -\frac{d \ln \rho}{d \ln r} - \frac{d \ln T}{d \ln r} \right), \quad (3.1)$$

dove  $\mu$  è il peso molecolare medio e  $m_p$  è la massa del protone. Per la descrizione del profilo di densità si ricorre solitamente all'uso del  $\beta$ -model ([Cavaliere & Fusco-Femiano 1976](#)):

$$\rho_{gas} = \rho_0 \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_c} \right)^2 \right]^{-3\beta/2}, \quad (3.2)$$

dove  $r_c$  definisce il raggio del "core" dell'ammasso e  $\beta$  è il rapporto tra l'energia cinetica delle galassie e l'energia termica del gas, ovvero,

$$\beta = \frac{\mu m_p \sigma^2}{k_b T}. \quad (3.3)$$

Il profilo di temperatura invece si estrapola mediante osservazioni X eseguite su regioni poste a diverse distanze dal centro dell'ammasso. Se la densità del gas è nota,  $T$  è misurato dal cut-off esponenziale dello spettro di Bremsstrahlung. Tale metodo tuttavia non è utilizzabile nel caso di merger tra ammassi poiché viene a mancare la condizione di equilibrio. Inoltre, nell'Eq. (3.1), si trascurano i contributi dati dalla pressione dei raggi cosmici, campi magnetici e turbolenza del plasma, che possono portare a sottostimare la misura della massa rispetto ad altri metodi.

### 3.1.2 Masse dinamiche

Nella banda ottica e del vicino-infrarosso è possibile osservare le galassie facenti parte dell'ammasso, tramite la cui cinematica si può derivare la massa dell'ammasso di appartenenza. Tale approccio, detto delle masse dinamiche, ha storicamente fornito la prima prova indiretta dell'esistenza della materia oscura grazie al lavoro di Zwicky del 1933 ([Andernach & Zwicky 2017](#)). Nel suo lavoro Zwicky trovò che la dispersione di velocità dalle galassie dentro l'ammasso della Chioma era troppo elevata per essere spiegata dalla gravità generata dalla sola componente luminosa. Questa dispersione ammontava a  $\sim 1000$  km/s e richiedeva una densità di galassie di almeno 400 volte quella osservata nell'ammasso. Per spiegare il suo risultato, Zwicky ipotizzò che la gravità mancante fosse generata da una componente di massa extra non emettente fotoni, ovvero da materia oscura.

Assumendo l'equilibrio viriale, la massa dinamica risulta determinabile dalla seguente equazione:

$$\frac{M}{M_{\odot}} = \frac{3\pi}{2} \frac{R_{vir}\sigma^2}{G} \approx 10^{15} \left( \frac{R_{vir}}{1\text{Mpc}} \right) \left( \frac{\sigma}{1000\text{ km/s}} \right)^2, \quad (3.4)$$

dove  $\sigma$  è la dispersione di velocità delle galassie lungo la linea di vista ed  $R_{vir}$  è il raggio viriale. Eq (3.4) dipende unicamente dalla massa totale della buca di potenziale e non dalle singole masse delle galassie. Tuttavia, la massa derivata con questo metodo può essere sovrastimata se alcune galassie, lungo la linea di vista, vengono associate erroneamente come membri dell'ammasso. Per questo motivo è essenziale utilizzare il metodo delle masse dinamiche se si hanno a disposizione i redshift spettroscopici delle galassie membro, in quanto estremamente più accurati rispetto ai redshift fotometrici.

### 3.1.3 Effetto Sunyaev-Zel'dovich termico

Un'altra banda utilizzabile, per determinare la massa degli ammassi, è quella delle microonde, in cui si osserva la radiazione cosmica di fondo. I fotoni di quest'ultima, interagendo per scattering *Compton Inverso* con il gas caldo presente nell'ammasso, causano una distorsione dello spettro di corpo nero della CMB. Tale distorsione è nota come effetto Sunyaev-Zel'dovich termico (SZ) ([Sunyaev & Zeldovich 1972](#)) ed è osservabile attorno ai 220 GHz. Da tale effetto si può misurare il flusso integrato associato ([Melin et al. 2011](#)), tramite la formula:

$$Y_{SZ} \propto \int n_e T_e dV, \quad (3.5)$$

che mostra la dipendenza dalla densità  $n_e$  e dalla temperatura  $T_e$  dell'ICM. Le misure di tali quantità, combinate con le osservazioni in banda X, possono contribuire alla misura della massa ([Angulo et al. 2012](#)).

L'effetto non dipende dal redshift dell'ammasso e non comporta una diminuzione della brillantezza superficiale del segnale della CMB. Come conseguenza, l'effetto SZ viene anche utilizzato nelle survey per l'individuazione degli ammassi ad alti redshift, permettendo di campionare regioni dell'universo difficilmente osservabili con altri approcci.

### 3.1.4 Lensing gravitazionale

Come già spiegato nel capitolo (2) sulle basi del weak lensing, il lensing gravitazionale si manifesta mediante perturbazioni della geometria dello spazio-tempo attorno agli ammassi di galassie. Queste generano distorsioni sulle immagini delle sorgenti poste dietro di esso creando archi gravitazionali, galassie distorte e multiple.

L'entità di tale effetto dipende unicamente dalla massa totale del sistema e non dal suo stato fisico, come può essere ad esempio la condizione di equilibrio vista per la radiazione X. Le corrispondenti osservazioni vengono svolte per lo più in ottico e vicino-infrarosso, data la natura galattica delle sorgenti utilizzate. Tuttavia, anche le osservazioni della distorsione del segnale della CMB in corrispondenza degli ammassi fornisce ottime stime della massa. La stima avviene mediante il fit del profilo di shear, descritto dai dati osservativi, con un dato modello del profilo di densità superficiale dell'ammasso. Per il regime di weak lensing, da noi utilizzato, è fondamentale disporre di una grande quantità di galassie, su cui mediare la misura del lensing. Questo al fine di compensare la debolezza del segnale e il forte rumore legato a un singolo oggetto.

Per definire il profilo degli ammassi è utile ricorrere alla sua forma differenziale proiettata. Tale osservabile ha il vantaggio di essere direttamente collegato allo shear tangenziale che porta l'informazione dell'effetto della lente:

$$\Delta\Sigma(R) = \bar{\Sigma}(< R) - \Sigma(R) = \Sigma_{crit}\gamma_t, \quad (3.6)$$

dove  $\Sigma$  rappresenta la densità superficiale in funzione del raggio proiettato  $R$ ,  $\bar{\Sigma}(< R)$  è il relativo valor medio nella zona interna al raggio  $R$  e  $\Sigma_{crit}$  è la densità critica della lente espressa nell'Eq. (2.12). Quest'ultima assume valori diversi per ogni  $i$ -esima galassia a causa del rapporto delle distanze angolari  $D_S/D_{LS}$  e viene estrapolata usando la distribuzione di probabilità in redshift  $p_i(z)$  (Bellagamba et al. 2019). Come già esplicitato nella Sezione 2.3, ciò che noi misuriamo dalle osservazioni è lo shear ridotto  $g = \gamma/(1 + \kappa)$ . Nelle zone dove domina il regime di weak lensing, la densità superficiale risulta molto minore della densità critica, questo fatto comporta  $\kappa \ll 1$  e conseguentemente  $\gamma_t \sim g_t$ . Sapendo questo, non ci resta che costruire l'osservabile  $\Delta\Sigma$ , seguendo l'esempio di Bellagamba et al.

(2019):

$$\Delta\Sigma(R_j) = \left( \frac{\sum_{i \in j} (w_i \Sigma_{crit,i}^{-2}) \gamma_{t,i} \Sigma_{crit,i}}{\sum_{i \in j} (w_i \Sigma_{crit,i}^{-2})} \right) \frac{1}{1 + K(R_j)}. \quad (3.7)$$

Tale equazione fornisce il valore di  $\Delta\Sigma$  per ogni  $j$ -esimo anello radiale la cui corrispondente distanza media dal centro è  $R_j$ , mentre  $w_i$  sono i pesi assegnati alle misure dell'ellitticità delle sorgenti. La funzione  $K(R_j)$  presente nel secondo termine dell'Eq. (3.7) è la correzione media per raggio anulare, dovuta alla calibrazione moltiplicativa dello shear ( $m_i$ ):

$$K(R_j) = \frac{\sum_{i \in j} (w_i \Sigma_{crit,i}^{-2}) m_i}{\sum_{i \in j} (w_i \Sigma_{crit,i}^{-2})}; \quad (3.8)$$

i valori di  $m_i$ , come il peso  $w_i$ , sono forniti dal catalogo delle galassie che descriveremo nella Sezione 4.1.1.

## 3.2 Profili di densità non troncati

In questa tesi, considereremo come dati osservativi i profili degli ammassi derivati dal weak lensing. Da questi, per poter estrapolare i parametri strutturali degli ammassi, occorrerà eseguire dei fit assumendo modelli opportuni forniti in letteratura. In questa sezione descriveremo i profili di densità tridimensionali più diffusamente utilizzati in letteratura, e i relativi limiti riscontrati nella riproduzione dei dati simulati. Questi profili e le loro estensioni sono implementati all'interno delle CosmoBolognaLib (CBL; Marulli et al. 2016), utilizzate per questo lavoro di tesi. Le CBL sono delle librerie pubbliche scritte in codice C++ e Python, sviluppate per il calcolo numerico dedicato ad analisi cosmologiche.

### 3.2.1 Profilo Navarro, Frenk & White

Uno dei profili di densità della materia oscura più comunemente utilizzato è quello proposto da Navarro Frenk White (NFW; Navarro et al. 1997). Questo profilo è stato ricavato dalle simulazioni N-body di particelle di materia oscura fredda (CDM). Il profilo in tre dimensioni è espresso come:

$$\rho(r) = \rho_c \frac{\delta_c}{\frac{r}{r_s} \left( 1 + \frac{r}{r_s} \right)^2}, \quad (3.9)$$

dove  $r_s$  è il raggio caratteristico dell'ammasso,  $\rho_c$  la densità critica dell'universo e  $\delta_c$  è una densità caratteristica adimensionale, dipendente dalla densità media

dell'universo al tempo della formazione dell'ammasso (Navarro et al. 1997). Il profilo NFW è caratterizzato da due andamenti limite: per raggi  $r > r_s$  la densità tende a calare come  $r^{-3}$ , viceversa per  $r < r_s$  l'andamento è più smussato e varia come  $r^{-1}$ . Il profilo risulta completamente caratterizzato assumendo una data massa scala  $M_\Delta$  e una data concentrazione associata  $c = r_\Delta/r_s$ <sup>1</sup>. Quest'ultima si relaziona con la densità caratteristica  $\delta_c$  mediante la seguente espressione:

$$\delta_c = \frac{\Delta}{3} \frac{c^3}{\left[ \ln(1+c) - \frac{c}{1+c} \right]}. \quad (3.10)$$

Il parametro  $c$  indica la concentrazione di massa nella parte centrale dell'alone e mostra una dipendenza sistematica dalla massa: all'aumentare di questa, la  $c$  diminuisce. In Navarro et al. (1997) ciò viene spiegato come diretta conseguenza del modello di accrescimento gerarchico enunciato nella Sezione 1.3.2, il quale prevede il collasso di oggetti meno massivi ad alti redshift che coalescono formando sistemi via via più grandi. Gli aloni formati quando l'universo era più denso e "giovane" ereditano densità caratteristiche  $\delta_c$  più elevate, e dunque anche concentrazioni maggiori rispetto agli aloni formati più recentemente. Il vantaggio del NFW è che fornisce una forma del profilo universale per le regioni più interne degli aloni di materia oscura, indipendente dalla massa e dai parametri cosmologici. Tuttavia, come vedremo più avanti, spostandoci nelle regioni periferiche, tale profilo necessiterà di una correzione per riprodurre i dati con migliore accuratezza.

Come visto nella Sezione 3.1.4, il nostro osservabile è il profilo di densità superficiale differenziale  $\Delta\Sigma(R)$ . Per ricavarlo dall'Eq. (3.9) si utilizza la seguente formula:

$$\Delta\Sigma(R) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r\Sigma(r)dr - \Sigma(R), \quad (3.11)$$

dove  $R$  rappresenta il raggio dell'ammasso perpendicolare alla linea di vista e  $\Sigma$  e la densità superficiale:

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(\sqrt{R^2 + \chi^2}\right) d\chi, \quad (3.12)$$

dove  $\chi$  rappresenta la coordinata parallela alla linea di vista.

---

<sup>1</sup> $\Delta$  rappresenta il rapporto della densità media del profilo interno a  $r_\Delta$  e la densità tipica dell'universo ( $\rho_{crit}$ ).

### 3.2.2 Profilo di Einasto

Il secondo profilo che consideriamo in questa tesi è quello proposto da [Einasto \(1965\)](#). Esso fu originariamente proposto per descrivere la componente stellare delle galassie, ma fu successivamente riscoperto nelle simulazioni cosmologiche N-body di sole particelle di materia oscura ([Navarro et al. 2004](#)). La sua espressione è la seguente:

$$\rho(r) = \rho_s \exp \left\{ -\frac{2}{\alpha} \left[ \left( \frac{r}{r_s} \right)^\alpha - 1 \right] \right\}. \quad (3.13)$$

Anche per questo profilo i parametri scala che lo definiscono sono la massa  $M_\Delta$  e la relativa concentrazione  $c = r_\Delta/r_s$ . Questi, come nel profilo NFW, sono correlati tra loro in modo da rispettare le dipendenze derivanti dalla storia di formazione degli aloni. Notiamo che, a differenza del profilo NFW, esso possiede un parametro in più, ovvero  $\alpha$ , che regola la pendenza della regione centrale del profilo come illustrato in Fig. 3.1.

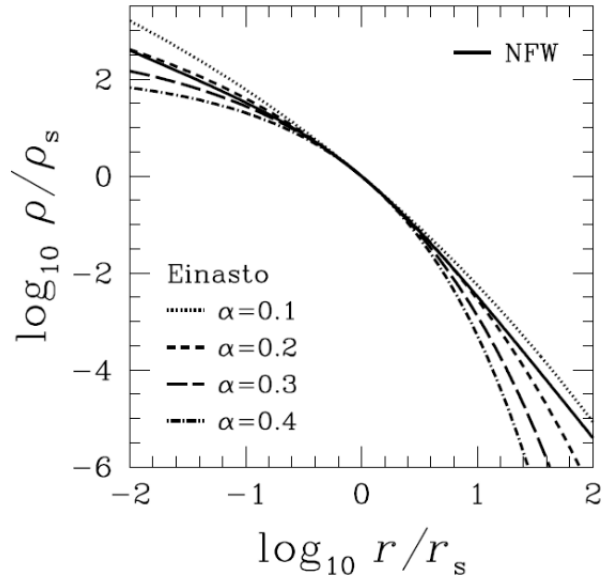


Figura 3.1: Profilo di Einasto per differenti valori del parametro  $\alpha$ . Per confronto viene anche mostrato il profilo NFW con la linea continua.

Le simulazioni cosmologiche hanno mostrato come il parametro  $\alpha$  sia utile per una descrizione più accurata del profilo di densità degli aloni rispetto al profilo NFW, in modo tale da ottenere migliori stime della concentrazione ([Navarro et al. 2004](#)). In particolare, lo studio condotto da [Gao et al. \(2008\)](#) ha evidenziato come il parametro  $\alpha$  presenti un valore più elevato per aloni con maggiore massa e/o

redshift. Tale andamento è stato spiegato da [Gao et al. \(2008\)](#) come una debole dipendenza dal parametro adimensionale *peak-height*:

$$\alpha = 0.155 + 0.009\nu^2, \quad (3.14)$$

dove  $\nu$  è definito come:

$$\nu = \frac{\delta_c}{\sigma(M, z)} = \frac{\delta_c}{\sigma(M, z=0) * D_+(z)}. \quad (3.15)$$

Nell'Eq. (3.15),  $D_+(z)$  è il fattore lineare di crescita normalizzato al valore odierno ( $z = 0$ ) e  $\delta_c = 1.686$  è la sovra-densità critica lineare del collasso ricavata nella Sezione 1.3.3. Qui  $\sigma$  è la radice quadrata della varianza in massa dell'universo, nel nostro caso espressa come:

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 P_{lin}(k, z) W(k, R), \quad (3.16)$$

$$W(x) = \left(\frac{3}{x}\right)^3 (\sin x - x \cos x), \quad (3.17)$$

dove  $W(x)$  è la "funzione finestra" e  $P_{lin}(k, z)$  è lo spettro di potenza delle perturbazioni. Per i profili usati in questa tesi, lo spettro di potenza è calcolato come in [Eisenstein & Hu \(1999\)](#).

### 3.3 Estensioni dei profili NFW ed Einasto

I profili presentati nelle sezioni (3.2.1) ed (3.2.2) caratterizzano bene l'andamento della densità nelle regioni centrali dell'ammasso, ma esibiscono discrepanze significative quando si va a modellare la regione periferica. Nello specifico, le deviazioni diventano non trascurabili quando andiamo a raggi  $r \geq 0.5R_{200m}$ , dove  $R_{200m}$  è il raggio entro cui la densità media è 200 volte la densità media dell'universo. Tale regione è situata a grandi distanze dal centro dell'ammasso, e dunque l'effetto dell'espansione dell'universo deve essere tenuto in considerazione nella descrizione dell'andamento del profilo di densità. Come mostrato nella Fig. 3.2, gli aloni molto massivi mostrano un pronunciato irripidimento del profilo a  $r \geq 0.5R_{200m}$ . Tuttavia, questa caratteristica non è inclusa nei profili NFW o Einasto. Per questo risulta necessario elaborare nuovi modelli che possano descrivere l'andamento nelle zone esterne del profilo di densità. Inoltre, vedremo che sarà necessario includere anche il troncamento della regione interna descritta dai profili NFW e Einasto. Di seguito, dunque, andremo a descrivere due soluzioni per estendere i profili NFW ed Einasto.



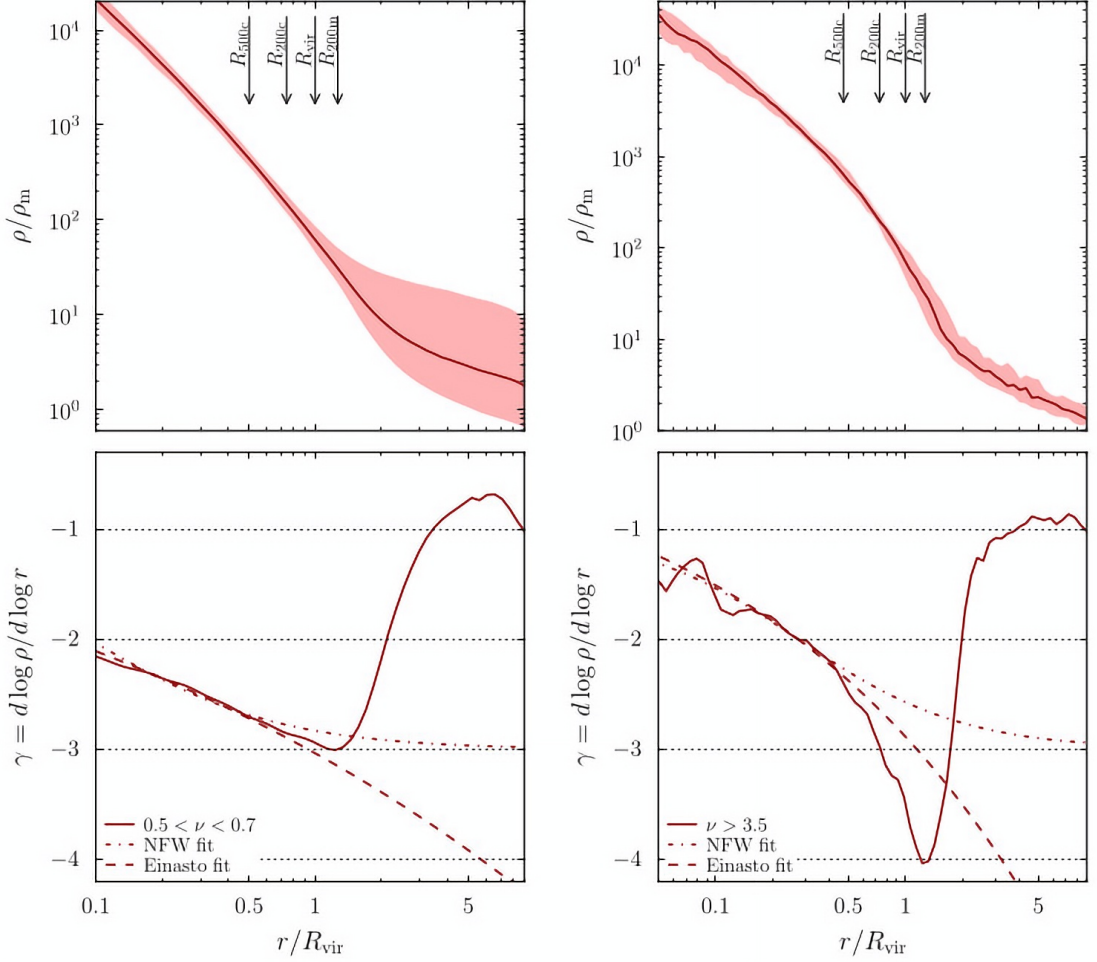


Figura 3.2: Profili di densità di due campioni di aloni rappresentativi di due range del parametro peak height,  $\nu$ , ovvero  $0.5 < \nu < 0.7$  e  $\nu > 3.5$  (Diemer & Kravtsov 2014). Sia per i campioni a bassa massa (pannelli a sinistra) che per quelli ad alta massa (pannelli a destra), le bande rosa rappresentano il modello di Diemer & Kravtsov (2014) entro il 68% di confidenza. Entrambi sono mostrati a  $z = 0$ . Le figure in basso mostrano che l'andamento radiale della derivata logaritmica dei profili NFW e Einasto è poco accurato nel descrivere la regione a circa  $r > 0.5R_{vir}$ . Questa discrepanza risulta maggiore negli aloni con più alta massa. Nelle figure superiori vengono anche riportate le posizioni di altri raggi caratteristici.

### 3.3.1 Profilo di Baltz, Marshall e Oguri

Il primo profilo che prendiamo in esame è quello sviluppato da [Baltz et al. \(2009\)](#), denominato BMO. Questo è un'estensione del profilo NFW, in cui viene aggiunto un termine moltiplicativo caratterizzato da un nuovo parametro  $r_t \equiv F_t r_\Delta$ , dove  $r_\Delta$  è il raggio che include una data sovra-densità di massa, e  $F_t$  è il fattore di troncamento. Il parametro  $r_t$ , infatti, corrisponde a un raggio di troncamento, la cui posizione cade nei pressi del punto in cui si manifesta l'irripidimento del profilo, come accennato precedentemente. In particolare, il profilo BMO ha la seguente forma funzionale:

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right) \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2} \left(\frac{r_t^2}{r^2 + r_t^2}\right)^n, \quad (3.18)$$

dove  $n$  definisce la ripidità della zona di troncamento. Seguendo [Beraldo e Silva et al. \(2013\)](#), in questo lavoro di tesi il suo valore è fissato a  $n = 2$ . Il profilo BMO risolve un altro problema presente nel profilo NFW, ovvero quello di avere una massa totale divergente all'infinito. L'integrale della densità è dunque più realistico.

### 3.3.2 Termine di 2-halo

Gli ammassi di galassie vanno accuratamente studiati in un contesto cosmologico, dove l'espansione dell'universo, l'accrescimento di materiale esterno e la storia evolutiva influiscono sui profili di massa. Tutto questo causa, rispetto ai profili comunemente usati, un aumento di pendenza nelle regioni esterne. Quando modelliamo le zone più esterne con i profili NFW, Einasto e BMO, dobbiamo quindi tenere conto del contributo derivante dalla materia esterna correlata all'alone. Questo contributo viene sommato ai modelli in termini di densità superficiale, ed è chiamato termine di 2-halo ([Bellagamba et al. 2019](#)):

$$\Sigma_{2h}(R) = \int \frac{l dl}{2\pi} J_0(l\theta) \frac{\bar{\rho}_m(z) b(M, z)}{(1+z)^3 D_l^2(z)} P(k_l, z), \quad (3.19)$$

dove  $P(k_l, z)$  è lo spettro di potenza descritto nei capitoli precedenti,  $k_l = l/(1+z)/D_l(z)$  è il modulo del vettore d'onda,  $J_0$  è la funzione di Bessel di ordine 0, e  $b$  rappresenta il bias della distribuzione degli aloni rispetto alla distribuzione della materia sottostante:

$$b = \frac{\delta_{gal}}{\delta_M}. \quad (3.20)$$

Per questa tesi il bias viene calcolato mediante il rapporto tra lo spettro di potenza degli aloni e lo spettro di potenza lineare della DM (Tinker et al. 2010):

$$b^2(k) = \frac{P_h(k)}{P_{lin}(k)} \quad (3.21)$$

Notiamo che questi termini dipendono più dalla cosmologia che dalle proprietà dell'alone principale.

### 3.3.3 Profilo di Diemer Kravtsov

L'estensione del profilo di Einasto, descritto nella Sezione 3.2.2, è quello proposto da Diemer & Kravtsov (2014):

$$\rho(r) = \rho_s \exp \left\{ -\frac{2}{\alpha} \left[ \left( \frac{r}{r_s} \right)^\alpha - 1 \right] \right\} f_{trans} + \rho_{outer}, \quad (3.22)$$

$$f_{trans} = \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_t} \right)^\beta \right]^{-\frac{\gamma}{\beta}}, \quad (3.23)$$

$$\rho_{outer} = \rho_m \left[ b_e \left( \frac{r}{5R_{200m}} \right)^{-s_e} + 1 \right]. \quad (3.24)$$

Come mostrato dall'Eq. (3.22), questo modello è caratterizzato da tre componenti. Il profilo interno è un classico profilo di Einasto: quest'ultimo, in analogia con il profilo BMO, viene moltiplicato per un termine di transizione  $f_{trans}$ , necessario per descrivere la zona del raggio che chiameremo di splashback. Tale associazione deriva dalla dinamica degli oggetti accresciuti dall'alone nella zona del *Secondary Infall*. Questi, dopo essere caduti nella buca ed essere passati per il centro, tornano nelle zone esterne e raggiungono il punto più lontano della loro orbita dopo la caduta nell'ammasso. Da qui ritornano verso l'interno, da cui il nome splashback. In questo termine dunque ritroviamo un raggio di troncamento,  $r_t$ , analogamente a quanto visto nel profilo BMO, assieme a due nuovi parametri:

- $\beta$ , che descrive la rapidità con cui la pendenza cambia attorno alla zona di transizione;
- $\gamma$ , che definisce la pendenza del profilo attorno alla stessa zona di  $\beta$ .

Il termine  $\rho_{outer}$ , detto *infalling-term*, descrive la regione più esterna del profilo come fatto dal 2-halo ad esempio nel BMO. Questo è descritto come una legge di potenza a cui si somma la densità media di materia dell'universo  $\rho_m$ . Seguendo Diemer & Kravtsov (2014), abbiamo scelto  $5R_{200m}$  come raggio di pivot nel termine esterno, dove  $R_{200m}$  è il raggio che include una densità media 200 volte

maggiore della densità media dell'universo a un dato  $z$ . I parametri liberi in  $\rho_{outer}$  sono  $b_e$  e  $s_e$ , i quali svolgono il ruolo di normalizzazione e pendenza della legge di potenza. Notiamo che se  $s_e \gg 1$  il profilo raggiunge  $\rho_m$  per raggi molto grandi. Tuttavia, è improbabile che la materia raggiunga tale valore seguendo una legge di potenza. Per questo [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#) fornisce anche un termine più accurato che tiene conto della funzione di correlazione della materia che influenza la forma del profilo a  $r > 9R_{vir}$  raggiungendo così  $\rho_m$  a raggi estremamente più grandi. Poiché la regione a cui siamo interessati in questo lavoro è sufficientemente prossima al centro, l'Eq. (3.24) risulta essere una buona approssimazione. Nell'implementazione numerica del profilo DK14, non tutti i parametri dichiarati vengono lasciati liberi. Nelle librerie *CosmoBolognaLib*, il profilo è stato implementato con il parametro  $\beta = 4$  e  $\gamma = 4\nu_{vir}$ , dove  $\nu_{vir}$  corrisponde alla *peak height*, descritta nella Sezione 3.2.2, corrispondente alla massa viriale dell'alone. Questa scelta segue quanto proposto nell'articolo di [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#).

### 3.4 Il problema del mis-centering

Quando si effettuano analisi sui profili estratti da dati di weak lensing, una tipica fonte di incertezza sulla stima dei parametri proviene dalla errata identificazione del centro dell'alone. Nel nostro caso il centro degli ammassi di galassie selezionati coincide con la posizione individuata dall'algoritmo "Adaptive Matched Identifier of Clustered Objects" (AMICO), usato per la creazione del relativo catalogo.

I dettagli sull'algoritmo di identificazione di AMICO verranno trattati nel Capitolo 4, inerente al dataset. Per ora ci interessa notare che il centro della distribuzione delle galassie, utilizzato in AMICO, potrebbe non coincidere con il picco della massa, creando problemi nella stima dei profili radiali.

Come vedremo nella Sezione 4.3, in questo lavoro di tesi verranno effettuate delle misure stacked di weaklensing, in cui l'effetto di mis-centering può introdurre errori quando andiamo a sovrapporre i singoli profili per un dato bin di redshift e proxy della massa. Per parametrizzare questa incertezza ricorriamo al metodo utilizzato in [Bellagamba et al. \(2019\)](#). Per parametrizzare questa incertezza, si considera una componente del modello prodotta dagli aloni la cui posizione ha un'incertezza non trascurabile rispetto al centro assunto da AMICO. Per definirla, ipotizziamo che esista una distribuzione di probabilità per il disallineamento del centro della lente rispetto alla posizione trovata da AMICO. Detto questo, se assumiamo che essa segua una distribuzione gaussiana, la probabilità di avere una lente posta ad una distanza  $R_s$  dal centro assunto diventa:

$$P(R_s) = \frac{R_s}{\sigma_{off}^2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{R_s}{\sigma_{off}} \right)^2 \right], \quad (3.25)$$

dove  $\sigma_{off}$  rappresenta la deviazione standard della popolazione di lenti decentrate. La distribuzione  $P(R_s)$  agisce come una funzione peso, utilizzata per definire la componente di densità superficiale,  $\Sigma$ , relativa a una popolazione di aloni decentrati, mediante la formula

$$\Sigma_{off}(R) = \int P(R_s)\Sigma(R|R_s)dR_s. \quad (3.26)$$

Qui  $\Sigma(R|R_s)$  corrisponde al profilo mediato azimutalmente relativo alla popolazione di aloni con decentramento pari a  $R_s$ :

$$\Sigma(R|R_s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi \Sigma_{cen} \left( \sqrt{R^2 + R_s^2 + 2RR_s \cos \theta} \right) d\theta, \quad (3.27)$$

dove  $\Sigma_{cen}$  è la distribuzione di densità superficiale ricavata dall'Eq. (3.12) per un dato profilo di densità.

A questo punto, il nostro modello per l'alone principale può essere descritto mediante la somma di una popolazione centrata e una decentrata:

$$\Sigma_{1h}(R) = (1 - f_{off})\Sigma_{cen}(R) + f_{off}\Sigma_{off}(R), \quad (3.28)$$

dove  $f_{off}$  è la frazione degli aloni stacked che appartiene alla popolazione decentrata. Tale suddivisione in due componenti tiene conto dell'incertezza legata al centramento delle lenti, introducendo due nuovi parametri all'interno del modello ( $\sigma_{off}$  e  $f_{off}$ ).

### 3.5 Il raggio di splashback

Come enunciato nella Sezione 3.3.3, il raggio di splashback,  $R_{sp}$ , nasce da un'interpretazione della regione di *secondary infall*, dove la materia, dopo essere stata accresciuta, raggiunge il punto di massima distanza dal centro dell'ammasso ovvero l'apocentro della sua prima orbita. Considerare  $R_{sp}$  pone anche rimedio alle difficoltà introdotte quando usiamo i criteri di sovra-densità sferica come base per definire i raggi tipici degli ammassi. Questo metodo tradizionale porta a definizioni quali  $R_{200c}$  e  $R_{200m}$ , che rappresentano i raggi dell'ammasso la cui densità media interna è rispettivamente duecento volte la densità critica e duecento volte la densità media dell'universo, o il raggio viriale  $R_{vir}$ . Sfortunatamente, questi raggi seguono una "*pseudo-evoluzione*" che affligge le misure di massa. Essi infatti sono definiti in funzione di quantità dipendenti da una proprietà media dell'universo, la quale evolve nel tempo. Questo può portare a sovra-stimare o sotto-stimare la massa a seconda dei processi che coinvolgono l'accrescimento in massa dell'ammasso e della cosmologia adottata. Come soluzione è stato proposto di utilizzare  $R_{sp}$ , che è un

raggio proprio dell'ammasso, non soggetto dunque a questo tipo di problemi. Esso definisce il bordo fisico dell'ammasso, in quanto tutta la materia esterna ad esso è considerata essere in fase di caduta all'interno dell'alone, mentre quella interna ad esso orbita attorno al centro dell'ammasso a cui è legato gravitazionalmente.

Per poter studiare e individuare il raggio di splashback, è necessario ricorrere alle osservazioni di weak lensing o anche alla distribuzione proiettata delle galassie satelliti (Murata et al. 2020). Per casi analoghi a questo lavoro di tesi, dove si sono sfruttate le osservazioni da weak lensing, si mediano le misure del segnale di shear su più ammassi, binnati per una certa quantità fisica. In tale processo torna utile scegliere di riscalarare la scala delle distanze per un raggio opportuno, in modo da avere i profili il più possibili auto-similari tra loro. La scelta del raggio scala viene eseguita tenendo conto del lavoro di Diemer & Kravtsov (2014). Nell'articolo si analizzano diversi profili di densità simulati a differenti redshift: questi, se riscalarati per  $R_{200m}$  o  $R_{200c}$ , risultano essere auto-similari in una determinata regione. Utilizzando  $R_{200m}$ , la parte auto-similare risulta essere quella periferica, mentre scalando per il raggio basato sulla densità critica  $R_{200c}$ , si sovrappone la parte interna che precede la zona di troncamento. Fig. 3.3 mostra in maggior dettaglio quanto appena discusso. Il lavoro di Diemer & Kravtsov (2014) fornisce anche un'utile definizione per identificare il raggio  $R_{sp}$  come il punto di minimo della derivata logaritmica del profilo di densità,  $d \log \rho / d \log R$ . Questo risulta essere molto evidente se si sceglie di adoperare l'omonimo profilo fornito nell'articolo. La Fig. 3.4 ad esempio riporta l'andamento della derivata logaritmica della densità per i quattro diversi profili analizzati in questo capitolo. Ad ognuno di questi, eccetto per il profilo DK14, viene aggiunto il contributo dato dal termine di 2halo e vengono assunti gli stessi identici parametri:

- $\frac{M_{200m}}{M_{\odot}} = 10^{14}$ ,
- $c = 5$ ,
- $z = 0.2$ ,
- $b_e = 1$ ,
- $s_e = 1.5$ ,
- $F_t = 3$ .

Come si può notare in Fig. 3.4, il DK14 mostra cambiamenti più repentini nella pendenza del profilo. Questo permette una stima di  $R_{sp}$  più accurata rispetto a quanto derivato dagli altri profili, come vedremo nel Capitolo 5.

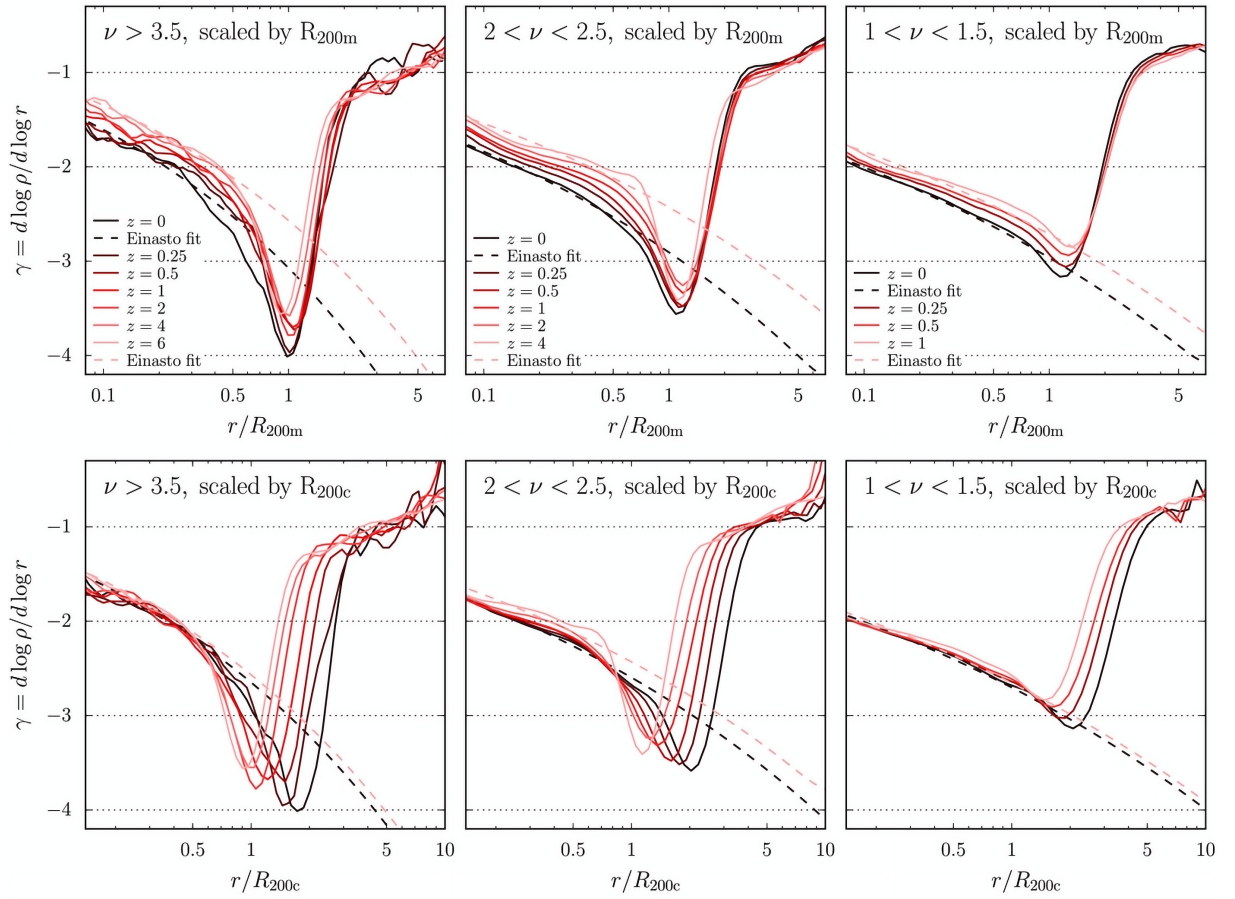


Figura 3.3: Profili di densità analizzati in [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#) per tre valori di altezza del picco  $\nu$ . I profili risultano auto-similari a diverse distanze dal centro dell'ammasso a seconda che il raggio scali con  $R_{200c}$  o  $R_{200m}$ .



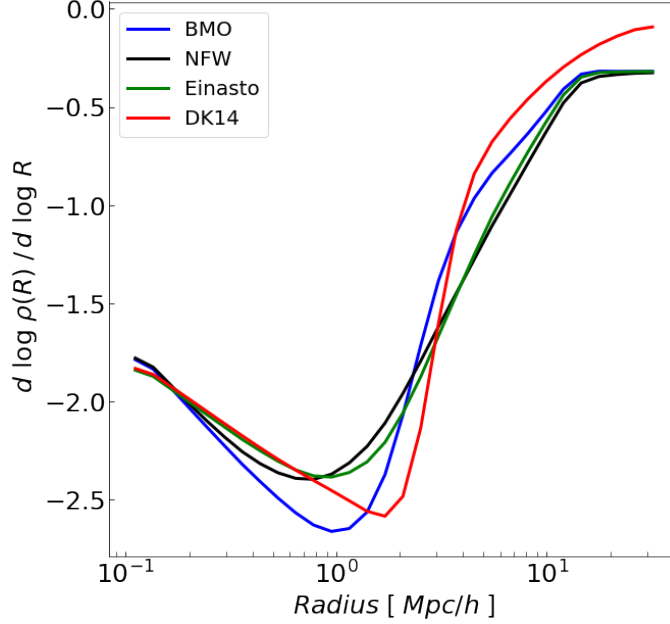


Figura 3.4: Andamenti della derivata logaritmica della densità in funzione della distanza radiale dal centro dell’ammasso. Vengono riportati i casi per i quattro profili presi in esame e con identici parametri.

A tale proposito, nel lavoro di [More et al. \(2015\)](#) è stato mostrato che la posizione di  $R_{sp}$  nei profili di densità simulati risulta dipendente dal tasso di accrescimento,  $\Gamma$ , dell’ammasso, definito in [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#),

$$\Gamma \equiv \frac{\Delta \log M_{vir}}{\Delta \log(a)}, \quad (3.29)$$

dove  $a$  è il fattore di scala dell’universo. Una spiegazione teorica di tale dipendenza è stata elaborata da [Adhikari et al. \(2014\)](#). In questo lavoro,  $R_{sp}$  è ottenuto dall’evoluzione di un modello del collasso sferico, dove l’unica variabile libera di evolvere è la massa. Conseguentemente, la dipendenza dal tempo del profilo di massa è determinata unicamente dall’accrescimento dell’ammasso, il quale, se molto veloce, riduce l’apocentro dell’orbita delle particelle che cadono in esso.

In particolare, [More et al. \(2015\)](#) trovano che il rapporto  $R_{sp}/R_{200m}$  varia in funzione del redshift e del tasso di accrescimento  $\Gamma$  secondo la seguente formula:

$$\frac{R_{sp}}{R_{200m}} = 0.54 [1 + 0.53\Omega_m(z)] (1 + 1.36 e^{-\Gamma/3.04}). \quad (3.30)$$

In Fig. 3.5 vengono mostrati due ammassi simulati a  $z = 0$ , con differenti tassi di accrescimento, in modo da evidenziare le differenze che esso comporta sulle



posizione relative tra i diversi raggi caratteristici dell'ammasso. In particolare, si nota che per tassi di accrescimento elevati, il rapporto  $R_{sp}/R_{200m}$  risulta inferiore rispetto al caso di un accrescimento più moderato.

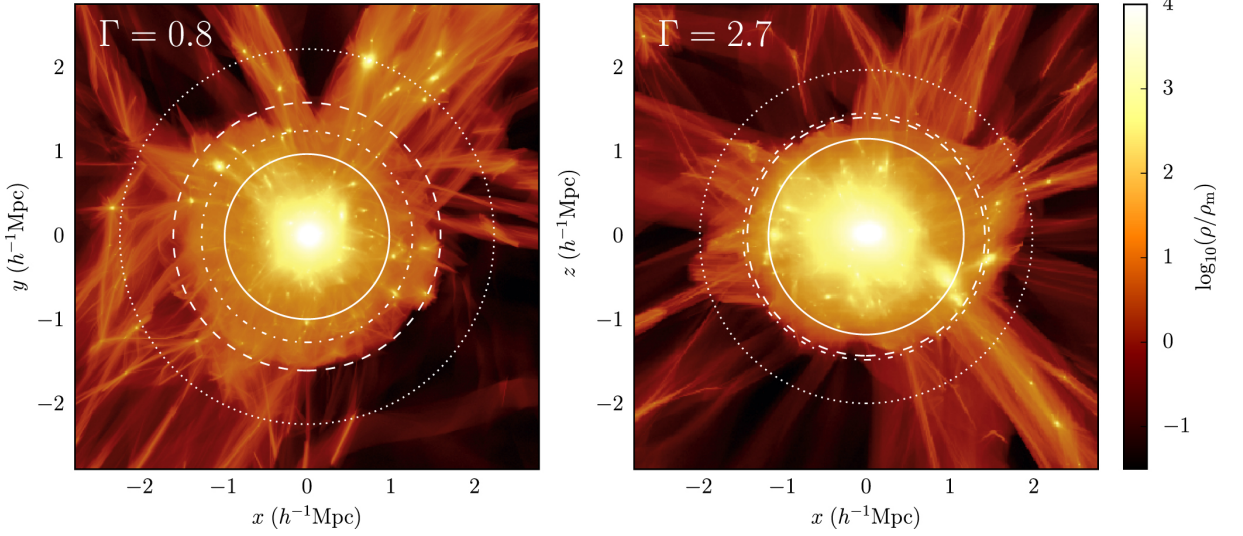


Figura 3.5: Simulazione di [More et al. \(2015\)](#). Nell'immagine sono mostrati i casi con due diversi tassi di accrescimento:  $\Gamma = 0.8$  e  $\Gamma = 2.7$ . I due aloni hanno masse simili, di  $M_{vir} = 1.1 \cdot 10^{14}$  e  $1.8 \cdot 10^{14}$  masse solari. Le diverse linee bianche segnano  $R_{vir}$  (continua),  $R_{200m}$  (punto-trattino),  $R_{sp}$  (tratteggiata) e il  $R_{infall}$  (punteggiata).

[More et al. \(2015\)](#), inoltre, forniscono anche una relazione analoga in funzione del parametro  $\nu$ , in quanto più facilmente derivabile dai dati osservativi. Tale parametro dipende dalla massa e dalla cosmologia, e rappresenta l'altezza del picco della perturbazione di materia. Questa relazione è espressa come segue:

$$\frac{R_{sp}}{R_{200m}} = 0.81 (1 + 0.97 e^{-\nu/2.44}). \quad (3.31)$$

Riassumendo, l'identificazione e la profondità della regione del raggio di splash-back presente nei profili di densità simulati dipendono principalmente da  $\Gamma$ . Tale dipendenza, inoltre, induce un corrispondente andamento con il fattore di *peak height*: ammassi con alti valori di  $\nu$  tendono ad avere maggiori valori di  $\Gamma$  ([Diemer & Kravtsov 2014](#); [More et al. 2015](#)). In aggiunta, si trova che oggetti con alti valori di  $\nu$  tendono a essere più isolati, e conseguentemente il materiale che sperimenta l'accrescimento verso l'ammasso è meno disturbato dalla gravità generata dalla presenza di possibili aloni vicini.

Mappare l'evoluzione dell'accrescimento di massa degli ammassi è un obiettivo molto interessante. Esso permetterebbe di avere uno strumento in più per studiare

l'evoluzione delle strutture cosmiche nel corso del tempo, fornire importanti indizi sulla natura della materia oscura, dell'energia oscura e testare la teoria della gravità (Adhikari et al. 2018). La correlazione espressa in Eq. (3.30) deve essere ritrovata nei dati osservativi e confrontata con quanto ottenuto nello studio sulle simulazioni (Diemer & Kravtsov 2014; More et al. 2015). In quest'ottica, molti lavori si sono indirizzati verso l'identificazione di questo nuovo osservabile, riuscendo a misurarlo o a stabilire limiti di soglia da diversi cataloghi di ammassi, selezionanti in banda X, ottica o grazie all'effetto Sunyaev-Zeldovich (Rana et al. 2023; Umetsu & Diemer 2017; Melin et al. 2011; Adhikari et al. 2021; Contigiani et al. 2023). Gli studi più recenti hanno anche iniziato a testare le possibili relazioni di scala che possono intercorrere tra il raggio di splashback e le proprietà strutturali dell'ammasso. Questi hanno trovato correlazioni tra  $R_{sp}$  e quantità quali la luminosità X e la massa dell'ammasso (Contigiani et al. 2023; Rana et al. 2023).

Tuttavia, la letteratura attuale mostra come molte misure del raggio di splashback posseggano errori di misura molto elevati. Questi rendono difficile definire relazioni analoghe all'Eq. (3.30) e (3.31). Ciò che si può fare è ricercare altri tipi di correlazioni con quantità più facilmente calcolabili rispetto al tasso di accrescimento. In questa tesi, ad esempio, si è cercato un legame tra  $R_{sp}$  e la massa e il redshift degli ammassi. Questo basandoci sulle seguenti considerazioni:

- ammassi più massicci hanno buche di potenziale più profonde, dunque posseggono una maggior forza di attrazione sulla materia esterna. Inoltre questi tipi di ammassi di galassie tendono ad avere un accrescimento meno disturbato dalla presenza di strutture vicine.
- Ad alti redshift, l'universo possiede una densità media maggiore di quella locale a  $z = 0$ , in base alla relazione  $\rho_m \propto (1 + z)^3$ , e conseguentemente ammassi distanti hanno più materiale a disposizione da poter accrescere.

La buona determinazione di queste relazioni di scala dipende sia dalle assunzioni fatte, sia dalla qualità dei dati osservativi che forniscono i profili di densità da weak lensing.

# Capitolo 4

## Dataset utilizzati

Questo capitolo è dedicato alla descrizione dei dataset da cui sono stati ricavati, mediante analisi di weak lensing, i profili di densità degli ammassi analizzati in questa tesi. Questi osservabili forniranno, mediante l'analisi bayesiana con i modelli descritti nella Sezione 3.2, la stima dei relativi parametri che li caratterizzano, come la massa e il raggio di troncamento. Per la misura di tali profili, necessitiamo di informazioni sulle proprietà di campo ed intrinseche delle galassie e degli ammassi presenti nell'area di cielo osservata, contenute all'interno di due corrispettivi cataloghi.

Questo capitolo verrà suddiviso nel seguente modo: forniremo in primis le informazioni chiave sul telescopio utilizzato e le caratteristiche del catalogo di galassie ottenuto. Successivamente, vedremo come da questo si ricava il catalogo degli ammassi mediante l'utilizzo dell'algoritmo AMICO. Infine analizzeremo il metodo di estrazione dei profili di densità degli ammassi, concentrandoci sulla selezione delle sorgenti lensate da ogni ammasso e sulla procedura di *Stacking* del segnale di weak lensing.

### 4.1 KiDS-DR3

Per questo lavoro di tesi abbiamo utilizzato la terza Data Release della *Kilo-Degree Survey* (KiDS-DR3, [de Jong et al. 2017](#)), contenente informazioni su circa 50 milioni di sorgenti. Essa è una survey di galassie pubblica dell'European Southern Observatory (ESO) eseguita mediante il telescopio VLT Survey (VST) da 2.6 metri di diametro, mostrato in Fig. 4.1. Le immagini sono state raccolte con l'ausilio della wide field OmegaCAM da 268 megapixel, tramite cui sono stati osservati 450 gradi quadri di cielo con l'uso dei filtri ottici  $u$ ,  $g$ ,  $r$ ,  $i$ . Questa fotocamera fornisce un campo di vista di 1 grado quadro.



Figura 4.1: Immagine del telescopio VST installato all’osservatorio del Paranal.

Il piano focale possiede una risoluzione di 0.214 arcosecondi per pixel grazie alla sua struttura costituita da 32 pixel CCD da 2048 x 4096 (de Jong et al. 2017).

Lo scopo principale della collaborazione KiDS è quello di mappare la struttura su grande scala dell’universo, in modo da fornire una tomografia del segnale di weak lensing nell’area di cielo coperta dalla survey. Tale obiettivo ha portato ad implementare metodi per eseguire accurate misurazioni di shear e di redshift fotometrico (Li et al. 2023). Conseguentemente, ciò porta i dati KiDS ad essere utilizzati anche per altri scopi scientifici, come ad esempio lo studio della distribuzione di materia all’interno delle strutture gravitazionalmente legate (Ingoglia et al. 2022). Per quest’ultimo scopo, KiDS-DR3 è un dataset eccellente sia per l’identificazione di ammassi che per la misura del segnale di lensing da essi prodotto. Nelle seguenti sezioni, presenteremo il catalogo di galassie e quello di ammassi ottenuti da KiDS-DR3, soffermandoci sui processi utilizzati per la determinazione delle quantità fondamentali per il nostro studio.

### 4.1.1 Catalogo di galassie

Il catalogo KiDS fornisce le coordinate spaziali delle galassie, assieme ai redshift fotometrici e alle rispettive magnitudini di apertura di 2 arcosecondi nelle bande  $u$ ,  $g$ ,  $r$ ,  $i$ . Per tali bande, i limiti a  $5\sigma$  corrispondono a magnitudini 24.3, 25.1, 24.9 e 23.8, rispettivamente. Inoltre, vengono fornite le misure dello shear da weak lensing, derivate dal calcolo della posizione e della forma delle galassie come dettagliato nella Sezione 2.3. In questo lavoro di tesi, i dati di KiDS vengono processati con lensfit (Miller et al. 2007, 2013) dai dati forniti dalle immagini nella

banda  $r$ . Queste sono state osservate sotto le migliori condizioni di *dark time* e dunque dotate di una migliore qualità [de Jong et al. \(2017\)](#). Il catalogo finale fornisce misure di shear per circa 15 milioni di galassie, con una densità numerica effettiva di  $n_{eff} = 8.53$  galassie per  $\text{arcmin}^{-2}$ , su un'area effettiva totale di  $360.3 \text{ deg}^2$ . Per una discussione più approfondita delle proprietà di shear del campione di galassie si vedano i riferimenti a [de Jong et al. \(2017\)](#).

Un altro parametro fondamentale del catalogo di galassie è la distribuzione di probabilità del redshift fotometrico,  $p(z)$ . Essa, infatti, sarà utilizzata successivamente per la selezione delle galassie valide come sorgenti che si trovano dietro gli ammassi. Queste distribuzioni sono ricavate con l'utilizzo del metodo *Bayesian template fitting photo-z* (BPZ), sviluppato da [Benítez \(2000\)](#). Questo approccio fornisce anche una stima del parametro ODDS, che rappresenta una misura della *uni-modalità* della  $p(z)$ . Esso, infatti, quantifica la frazione della distribuzione  $p(z)$  concentrata attorno picco, e ciò lo rende un indicatore di affidabilità dei redshift fotometrici. Inoltre, come riportato in [de Jong et al. \(2017\)](#), da un confronto con i redshift spettroscopici forniti dalla survey *Galaxy And Mass Assembly* (GAMA; [Liske et al. 2015](#)), si ottiene una dispersione sul picco delle  $p(z)$  KiDS-DR3 di  $\sigma_z \sim 0.04(1+z)$ . Tale dispersione verrà propagato nella misura dei redshift degli ammassi e nella misura dei loro profili di densità.

## 4.2 Catalogo di ammassi AMICO KiDS-DR3

Il catalogo di ammassi usato in questa tesi è quello elaborato in [Maturi et al. \(2019\)](#). Esso è stato derivato usando l'algoritmo "Adaptive Matched Identifier of Clustered Objects" (AMICO; [Bellagamba et al. 2018](#)). Il suo utilizzo permette di individuare gli ammassi partendo da un dataset fotometrico di galassie, nel nostro caso quello fornito da KiDS-DR3. Il parametro fondamentale utilizzato da AMICO è l'ampiezza del segnale  $A$ , la quale è una misura proporzionale dell'abbondanza di galassie dell'ammasso e funge da parametro proxy della massa. Tale proprietà si può confermare osservando il grafico in Fig. 4.2 presente nell'articolo di [Maturi et al. \(2019\)](#). In questo grafico vengono confrontati i valori di massa di 13 ammassi forniti dal catalogo MCXC ([Piffaretti et al. 2011](#)) con i corrispettivi valori di ampiezza determinati da AMICO.

Il funzionamento di AMICO si basa su una tecnica di *optimal matched filter*, il cui formalismo prevede di modellare i dati mediante la sovrapposizione del segnale relativo agli ammassi di galassie, più un rumore generato dal campo di fondo  $N$ :

$$D(\vec{\theta}, \vec{m}, \vec{z}) = A(\vec{\theta}_c, z_c) M_c(\vec{\theta} - \vec{\theta}_c, \vec{m}, \vec{z}) + N(\vec{m}, \vec{z}). \quad (4.1)$$

Nell'Eq. (4.1), i dati relativi alla densità delle galassie  $D$  sono espressi in funzione delle coordinate angolari in cielo  $\vec{\theta}$ , del redshift  $z$  e del vettore  $\vec{m}$ . Quest'ultimo,

oltre a rappresentare le magnitudini fotometriche, può contenere osservabili disponibili nel catalogo delle galassie, come ad esempio il tipo morfologico e l'ellitticità. Le quantità  $\theta_c$  e  $z_c$  sono la posizione e il redshift del punto corrispondente al centro dell'ammasso considerato, il cui profilo di massa è descritto dal modello  $M_c$ .

Il processo eseguito da AMICO è quello di rimuovere in maniera iterativa gli ammassi candidati dalla mappa di ampiezza. In particolare, una volta identificata dalla mappa di galassie il candidato ammasso con massima likelihood, si rimuove il suo contributo e si rivaluta la likelihood e la varianza per identificare un nuovo candidato utilizzando la stessa procedura precedente. Tale metodo permette di massimizzare il rapporto segnale-rumore (S/N) dei candidati più "deboli".

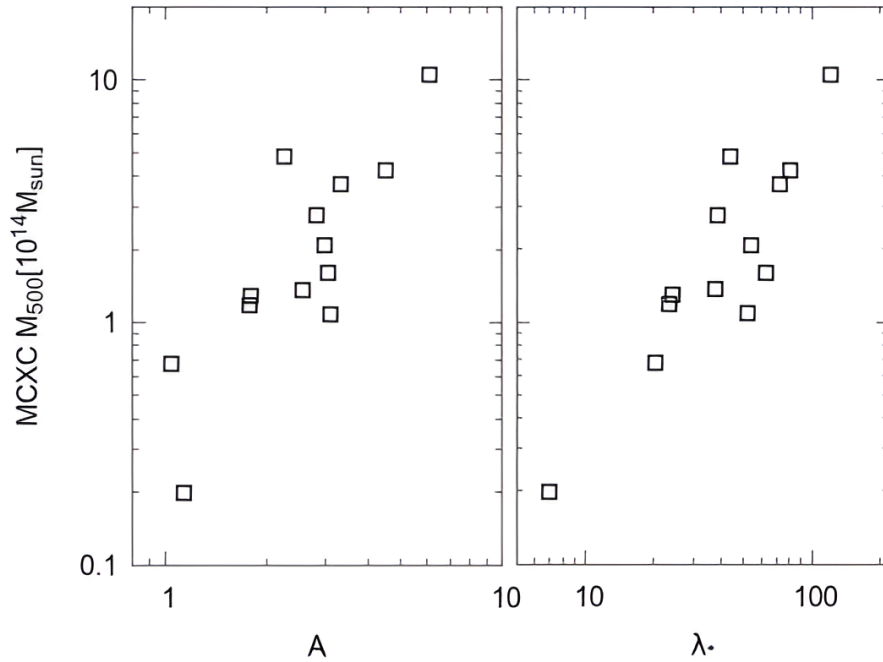


Figura 4.2: Correlazione tra ampiezza ( $A$ ) e la ricchezza ( $\lambda_*$ ) descritti in [Maturi et al. \(2019\)](#) e le masse fornite dal catalogo MCXC ([Piffaretti et al. 2011](#)).

#### 4.2.1 Modello per il segnale prodotto dagli ammassi

Di seguito forniamo la descrizione del modello  $M_c$ , che descrive il profilo usato da AMICO per le sue identificazioni di ammassi. Tale modello viene costruito mediante il formalismo usato in [Bellagamba et al. \(2018\)](#) e [Maturi et al. \(2019\)](#),

che fornisce la seguente l'espressione generale

$$M_c(r, m) = \Psi(r)\Phi(m), \quad (4.2)$$

dove  $\Psi(r)$ ,  $\Phi(m)$  sono rispettivamente le distribuzioni in massa e in magnitudine. Nella costruzione del catalogo AMICO-KiDS-DR3, per la distribuzione in magnitudine, si è utilizzata la funzione di Schechter (Schechter 1976):

$$\Phi(m) = 10^{-0.4(m-m_*)(\alpha+1)} \exp[-10^{-0.4(m-m_*)(\alpha+1)}], \quad (4.3)$$

dove  $m_*$  è la magnitudine tipica stellare e  $\alpha$  è il parametro che definisce la pendenza nella regione popolata da galassie con grandi magnitudini, ovvero con  $m > m_*$ . Della funzione di Schechter ci interessa solo la sua forma funzionale, in quanto la relativa normalizzazione sarà poi assorbita dalle costanti nella costruzione del termine di ampiezza  $A$ . I parametri  $\alpha$  e  $m_*$  sono estrapolati dai modelli di evoluzione stellare descritti nei dati della *Dark Energy Survey* (DES) (Zenteno et al. 2016). Per il profilo radiale di massa, invece, si è utilizzato un profilo NFW (Navarro et al. 1997):

$$\Psi(r) = \frac{B}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}, \quad (4.4)$$

dove  $B$  agisce da normalizzazione della distribuzione. Il raggio scala è definito come  $r_s = R_{200c}/c_{200c}$  dove si è assunto un valore per la concentrazione pari a  $c_{200c} = 3.59$  e  $R_{200}$  corrispondente a una massa di  $M_{200c} = 10^{14}M_\odot/h$  (Maturi et al. 2019; Hennig et al. 2017).

## 4.2.2 Selezione dei candidati ammassi

La ricerca dei candidati ammassi è guidata dal fattore di ampiezza  $A$ . Questo viene derivato dalla teoria dell'*Optimal Filtering*, che utilizza una convoluzione della distribuzione 3D delle galassie mediante una funzione filtro  $\psi_c$ :

$$A(\theta_c, z_c) = \alpha^{-1}(z_c) \int \psi_c(\vec{\theta} - \vec{\theta}_c, \vec{m}, z) D(\vec{\theta}, \vec{m}, z) d^2\theta d^n m dz - B(z_c), \quad (4.5)$$

dove  $D(\vec{\theta}, \vec{m}, z)$ ,  $\vec{\theta}$ ,  $\vec{\theta}_c$  e  $\vec{m}$  sono gli stessi parametri dell'Eq. (4.1), descritti nella Sezione 4.2,  $n$  indica il numero di dimensioni che caratterizza il vettore  $\vec{m}$  e  $B(z_c)$  invece è legato alla sottrazione del background. La normalizzazione viene affidata alla costante  $\alpha$ , data da:

$$\alpha(z_c) = \int \psi_c^2(\vec{\theta} - \vec{\theta}_c, \vec{m}, z) N(\vec{m}, z_c) d^2\theta d^n m dz. \quad (4.6)$$



In questa equazione,  $N(\vec{m}, z_c)$  rappresenta il rumore del campo di fondo espresso in Eq. (4.1), calcolato in  $z_c$ . Assumendo che il rumore sia generato dalla distribuzione Poissoniana dei conteggi di galassie, tale da renderlo uniforme, la funzione filtro assume la seguente espressione:

$$\psi_c = \frac{M_c(\theta_i - \theta_c, m_i)}{N(m_i, z_c)}. \quad (4.7)$$

Se ora passiamo al caso di oggetti discreti quali le galassie, l'Eq (4.5) si può riscrivere nella forma seguente:

$$A(\theta_c, z_c) = \alpha^{-1}(z_c) \sum_{i=1}^{N_{gal}} \frac{M_c(\theta_i - \theta_c, m_i) p_i(z_c)}{N(m_i, z_c)} - B(z_c), \quad (4.8)$$

dove  $p_i(z)$  è la distribuzione del redshift fotometrico della  $i$ -esima galassia e  $\alpha$  la normalizzazione del filtro. Con tale metodo, la deviazione standard sull'ampiezza si esprime come:

$$\sigma_A(\vec{\theta}_c, z_c) = \alpha(z_c)^{-1} + A(\vec{\theta}_c, z_c) \frac{\gamma(z_c)}{\alpha(z_c)^2}. \quad (4.9)$$

Qui il primo termine si riferisce alle fluttuazioni stocastiche del fondo e il secondo è legato alle fluttuazioni Poissoniane date dalle galassie di un ammasso con ampiezza  $A$ . I parametri  $B$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$  dipendono esclusivamente dai modelli relativi agli ammassi e al campo, che definiscono il filtro (Bellagamba et al. 2018). Una volta che  $A$  viene calcolato per tutte le posizioni angolari e relativi redshift, si identifica il primo candidato ammasso associato alla posizione con la massima likelihood,

$$L(\vec{\theta}_c, z_c) = L_0 + A^2(\vec{\theta}_c, z_c) \alpha(z_c). \quad (4.10)$$

Una volta individuato il primo ammasso, etichettato con l'indice  $j$ , si procede a valutare la probabilità di ogni  $i$ -esima galassia, presente in quella regione, di appartenere ad esso:

$$P_i(j) = P_{f,i} \frac{A_j M_j(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}_j, \vec{m}_i) p_i(z_j)}{A_j M_j(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}_j, \vec{m}_i) p_i(z_j) + N(\vec{m}_i, z_j)}, \quad (4.11)$$

$$P_{f,i} = \sum_j P_i(j). \quad (4.12)$$

Questa definizione tiene in considerazione il fatto che una galassia possa essere associata a più ammassi. Questo perché le identificazioni possono sovrapporsi lungo la linea di vista, oppure possono esserci ammassi molto vicini. La quantità  $P_{f,i}$  è la probabilità della  $i$ -esima galassia di appartenere al campo. Ultimato il



calcolo, si rimuove il contributo del  $j$ -esimo ammasso dalla mappa di ampiezza, si ricalcola la likelihood e infine la successiva identificazione corrisponderà di nuovo al punto di massima likelihood. Si ripete dunque il processo in modo iterativo fino a quando non viene raggiunto un dato limite nel rapporto segnale-rumore, espresso come  $S/N \equiv A/\sigma_A$ . Tale procedura ha prodotto il catalogo AMICO-KiDS-DR3 (Maturi et al. 2019), che comprende 7988 ammassi con  $S/N > 3.5$ , nell'intervallo in redshift di  $0.1 < z < 0.8$ .

Per il lavoro di questa tesi, sono stati utilizzati gli ammassi compresi nell'intervallo di  $0.1 < z < 0.6$  per un totale di 6962 candidati, la cui distribuzione in redshift è mostrata in Fig. 4.3. Tale restrizione viene fatta per escludere ammassi che non permettono una buona stima del segnale di lensing, a causa della bassa densità delle sorgenti di background (Bellagamba et al. 2019).

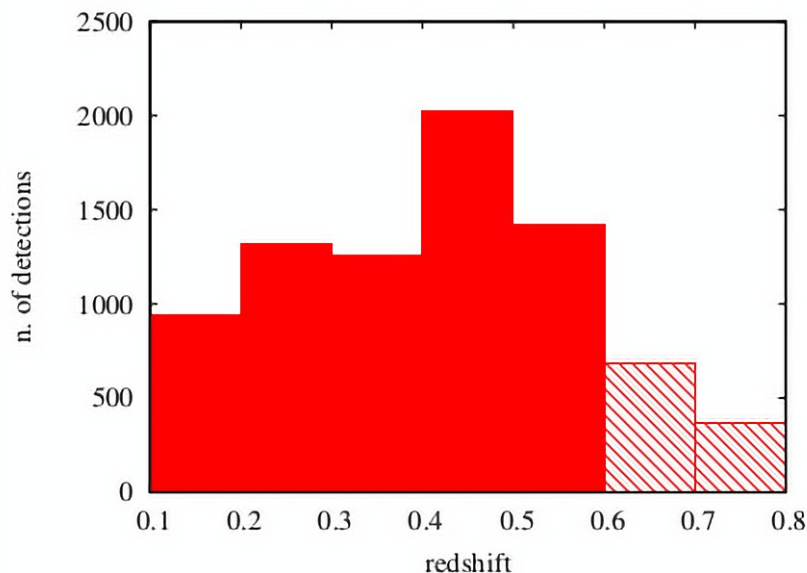


Figura 4.3: Distribuzione in redshift degli ammassi individuati nel catalogo AMICO KiDS-DR3. La parte tratteggiata indica i bin delle popolazioni escluse dai limiti imposti sull'intervallo di  $z$  (Bellagamba et al. 2019).

### 4.3 Profilo di ammassi da weak lensing

Dai cataloghi di galassie e ammassi, descritti nelle Sezioni 4.1.1 e 4.2, si procede alla creazione dei profili di densità *stacked* degli ammassi. Questa procedura comporta

una somma pesata dei singoli segnali di lensing nel processo di misura del profilo di shear. Il motivo di tale procedura è dovuto al fatto che al segnale di shear di un singolo ammasso corrisponde, tipicamente, un basso rapporto segnale-rumore. Per questa ragione, i profili che ricaveremo e i relativi parametri quali la massa e il raggio di splashback ( $R_{sp}$ ), saranno quantità medie di una data popolazione di ammassi, raggruppati in intervalli basati al redshift e all'ampiezza.

### 4.3.1 Selezione sorgenti di background

Come già discusso nella Sezione 2.3, la selezione delle sorgenti lensate è tra punti cruciali nella misurazione dell'effetto di lente gravitazionale. Questo perché l'eventuale selezione di sorgenti appartenenti all'ammasso o in primo piano rispetto a esso comporterebbe una diluizione del segnale di shear. In questo lavoro di tesi vengono utilizzati due criteri di selezione, uno basato sui redshift fotometrici e l'altro basato sui colori delle galassie. Il primo di questi utilizza la distribuzione del redshift fotometrico delle galassie  $p(z)$ . Tale approccio esclude tutte le sorgenti che posseggono una probabilità non trascurabile di avere un redshift uguale o inferiore a quello della lente. I criteri scelti sono i seguenti (Giocoli et al. 2021; Bellagamba et al. 2019):

- $z_{gal,min} > z_{ten} + \Delta z$ ,
- $0.2 < z_{gal} < 1.$ ,
- $ODDS \geq 0.8$ ,

dove  $z_{ten}$  e  $z_{gal}$  sono rispettivamente i redshift più probabili della lente e della galassia. Il valore di  $\Delta z$  è 0.05 (Giocoli et al. 2021; Bellagamba et al. 2019), simile all'incertezza del redshift delle galassie in KiDS-DR3 e maggiore dell'errore tipico sul redshift degli ammassi. Nella prima condizione,  $z_{gal,min}$  è il limite inferiore della  $p(z)$ , corrispondente al limite della regione che racchiude i  $2\sigma$  della distribuzione di probabilità. La scelta posta sul parametro ODDS, già enunciato nella Sezione 4.1.1, esclude le galassie la cui distribuzione risulta poco precisa, con ad esempio possibili picchi secondari o code particolarmente lunghe.

Questo approccio agisce in modo conservativo, escludendo tutte quelle sorgenti in prossimità della lente o con un redshift non ben definito. Per recuperare parte di queste sorgenti scartate, utili ad aumentare il segnale di shear, si fa uso della selezione basata colore delle galassie. Come già descritto nella Sezione 2.3, tale approccio sfrutta una selezione in colore delle galassie per escludere quelle appartenenti all'ammasso o in primo piano rispetto a esso; nello specifico il taglio utilizzato è il seguente (Bellagamba et al. 2019):

$$(g - r < 0.3) \quad \vee \quad (r - i > 1.3) \quad \vee \quad (r - i) > (g - r),$$

dove  $u, g, r, i$  sono le magnitudini delle galassie osservate in KiDS e  $\vee$  rappresenta l'operatore logico "o". Anche per questo metodo si richiede che il redshift associato alle galassie sia maggiore del limite inferiore di  $z_{min} = 0.2$ .

Riassumendo, perché una galassia venga conteggiata come sorgente distorta da un ammasso, essa deve rispettare i criteri previsti da almeno uno dei due metodi illustrati in questa sezione.

### 4.3.2 Misura stacked profilo di shear

Nella Sezione 3.1.4 abbiamo visto come ricavare, mediante l'Eq. (3.7), il profilo di densità differenziale di un singolo ammasso. Tuttavia, abbiamo discusso sul fatto che nella stragrande maggioranza dei casi questo presenta un segnale troppo debole per effettuare studi sufficientemente accurati. Per ovviare a questo problema, dobbiamo generalizzare i nostri osservabili al caso di singole popolazioni di ammassi, raggruppate in bin di redshift e ampiezza. Queste si ottengono mediante una somma pesata dei profili  $\Delta\Sigma(R_j)$  di ogni membro della popolazione dell'intervallo:

$$\Delta\Sigma_N(R_j) = \frac{\sum_{n \in N} W_{n,j} \Delta\Sigma_n(R_j)}{\sum_{n \in N} W_{n,j}}, \quad (4.13)$$

$$W_{n,j} = \sum_{i \in j} w_i \Sigma_{crit,i}^2, \quad (4.14)$$

dove  $N$  indica il bin di ammassi selezionato ed  $n$  il contributo dell' $n$ -esimo ammasso contenuto in esso. La quantità  $W_{n,j}$  è il peso associato al  $j$ -esimo anello radiale dell' $n$ -esimo membro del bin, con  $i$  che si estende sulle corrispondenti galassie di sfondo.

Per concludere riassumiamo brevemente i criteri e i parametri fissati per la creazione dei profili stacked:

- i parametri cosmologici utilizzati sono quelli corrispondenti al caso TT,TE,EE+lowE+lensing, presenti nella Tabella 2 di [Planck Collaboration et al. \(2020\)](#);
- scegliamo come proxy della massa l'ampiezza associata al candidato ammasso;
- poniamo come intervallo radiale  $[0.1 - 35] \text{ Mpc } h^{-1}$ , e lo dividiamo in 30 bin logaritmici;
- si pone come rapporto segnale-rumore minimo  $S/N = 3.5$ ;

Da questi si ottengono i profili stacked mostrati nella Fig. 4.4, ottenuti tramite l'utilizzo delle CBL:

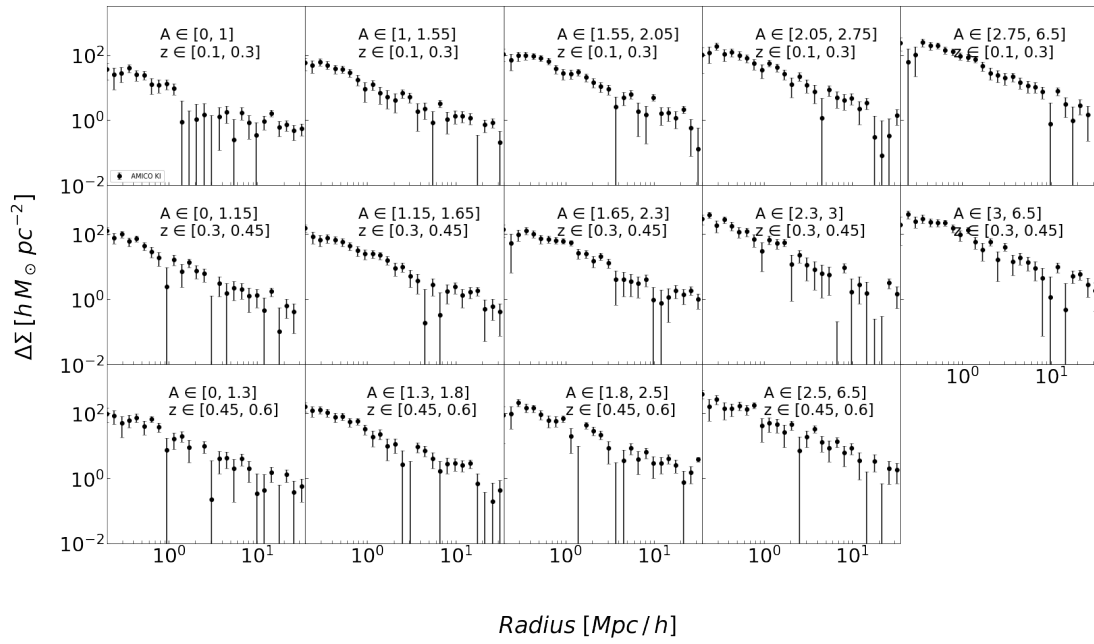


Figura 4.4: Andamento della densità superficiale differenziale  $\Delta\Sigma$  in funzione del raggio, per i bin di  $z$  e  $A$  adottati in [Giocoli et al. \(2021\)](#) e utilizzati in questa tesi.

# Capitolo 5

## Implementazione dei codici e analisi dati

In questo capitolo descriveremo le analisi che hanno condotto alla derivazione dei parametri strutturali degli ammassi AMICO KiDS-DR3, usando la statistica bayesiana mediante Markov Chain Monte Carlo. Mostriamo anche risultati derivati dall'analisi di dati simulati, ottenuti assumendo diversi modelli di profili di densità. Verrà inoltre descritta l'implementazione del profilo DK14 nelle CosmoBolognaLib (CBL; [Marulli et al. 2016](#)), un set di librerie scritte in C++/Python per lo svolgimento di analisi numeriche cosmologiche relative alla struttura su grande scala dell'universo. In particolare, le CBL sono state utilizzate sia per le misure dei profili stacked (Sezione [4.3.2](#)), sia per l'analisi statistica dei dati.

### 5.1 Implementazione del profilo DK14

Un'ampia porzione del lavoro svolto in questa tesi è relativa all'implementazione del profilo DK14, descritto nella Sezione [3.3.3](#), all'interno delle librerie CBL. I riferimenti seguiti per questo processo sono stati l'articolo di [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#) e le librerie Python Colossus ([Diemer 2018](#)). In particolare, seguendo [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#), per la descrizione del profilo più interno degli ammassi abbiamo assunto il profilo Einasto, descritto in Sezione [3.2.2](#), con parametro di pendenza interna  $\alpha$  espresso come in Eq. [\(3.14\)](#). Inoltre, in Eq. [\(3.22\)](#), i parametri  $\beta$  e  $\gamma$  del profilo DK14 sono fissati ai valori  $\beta = 4$  e  $\gamma = 4\nu_{\text{vir}}$ , rispettivamente, dove  $\nu_{\text{vir}}$  è l'altezza di picco viriale. Sottolineiamo che questa scelta dei parametri è data da uno dei fit eseguiti in [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#), dove è stato dimostrato che, esprimendo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  in modi alternativi, i parametri strutturali principali degli ammassi non variano significativamente.

Una volta implementato il profilo di densità in tre dimensioni, si procede con l'implementazione del calcolo della densità superficiale  $\Sigma(R)$ , descritta in Eq. (3.12), e della densità superficiale differenziale  $\Delta\Sigma(R)$ , in Eq. (3.11). In Fig. 5.1 vediamo le differenze percentuali tra i risultati ottenuti utilizzando le librerie CBL e Colossus. Nel caso del profilo di densità 3D, tali differenze rimangono inferiori allo 0.03%. Tuttavia, nel caso inerente al calcolo di  $\Delta\Sigma$ , tale differenza raggiunge valori attorno al 5 – 6%. Questo è dovuto al fatto che, per il calcolo di  $\Sigma(R)$ , Colossus adotta un intervallo di integrazione della densità 3D piuttosto ristretto, mentre nelle CBL abbiamo esteso tale intervallo ottenendo risultati più stabili ad alti raggi. Infatti abbiamo verificato che, per alcune combinazioni di parametri,  $\Sigma(R)$  ottenuta con Colossus oscilla ad alti raggi a causa di problemi numerici.

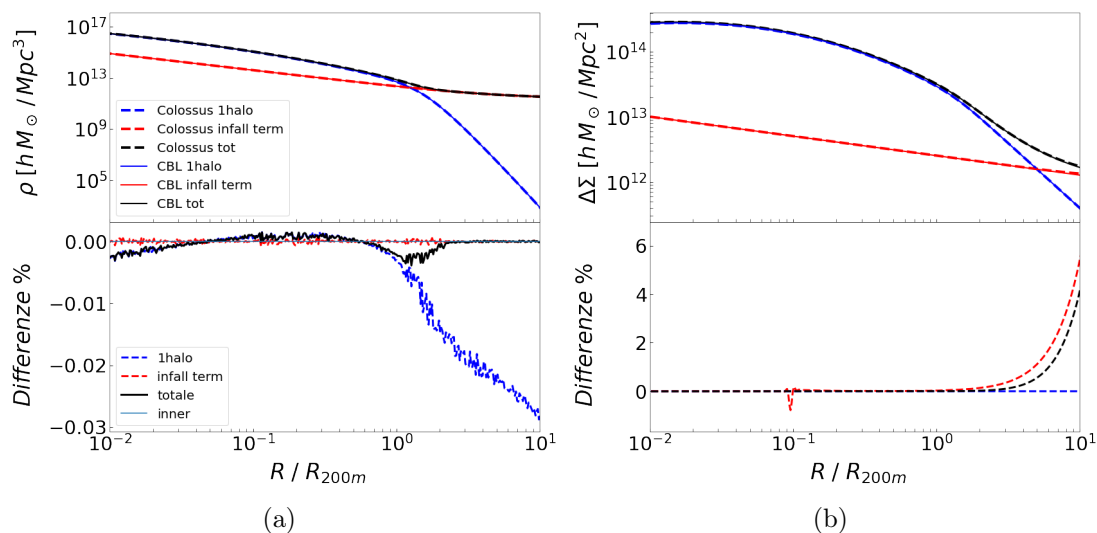


Figura 5.1: Confronto tra gli andamenti dei profili di densità 3D (a) e della densità superficiale differenziale (b) in funzione del raggio  $R$  (in unità di  $R_{200m}$ ), per il profilo DK14 calcolato da Colossus e dalle CBL. Per ognuno dei casi si riporta l'andamento dato dal termine interno ( $\rho_{Einasto} \cdot f_{trans}$ ) (blu),  $\rho_{outer}$  (rosso) e la densità totale  $\rho(r)$  (nero) dell'Eq. (3.22). Sotto ad ogni figura vengono riportate le differenze percentuali rispetto al valore ottenuto dalle CBL:  $(Colossus - CBL) / CBL \cdot 100$ .

## 5.2 Markov Chain Monte Carlo

Negli ultimi decenni, lo sviluppo tecnologico ha portato a strumenti in grado di raccogliere una gran quantità di dati, permettendo anche uno sviluppo delle risorse per il calcolo numerico tramite High Performance Computing. Ad oggi, tale cambiamento ha incrementato l'utilizzo dei metodi *Monte Carlo*, i quali sfruttano una

combinazione di simulazioni numeriche e generazione di numeri casuali per risolvere problemi matematici che non presentano soluzioni analitiche. Nel caso specifico degli studi astrofisici e cosmologici, vengono estensivamente utilizzate le *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). Se applicate alla statistica bayesiana, le MCMC forniscono un semplice approccio per la stima dei parametri da cui dipende un modello teorico.

Per capire meglio come le MCMC operano in statistica bayesiana enunciamo il teorema di Bayes:

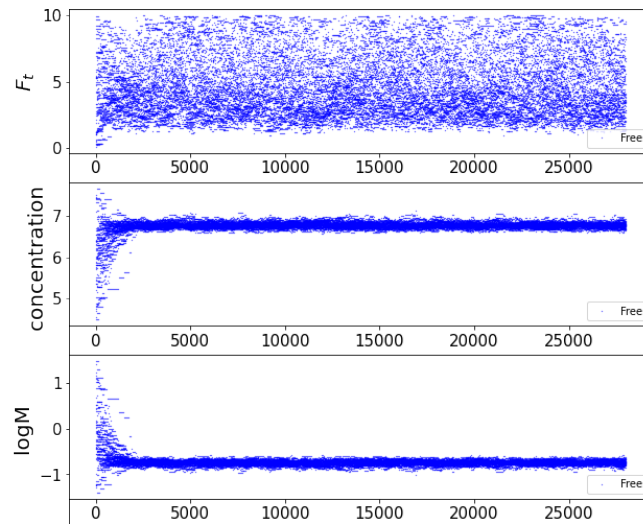
$$P(\Theta_{\mathbf{M}}|\mathbf{D}, M) = \frac{P(\mathbf{D}|\Theta_{\mathbf{M}}, M)P(\Theta_{\mathbf{M}}|M)}{P(\mathbf{D}|M)}, \quad (5.1)$$

dove  $P(\Theta_{\mathbf{M}}|\mathbf{D}, M)$  rappresenta la probabilità congiunta di avere un determinato set di parametri  $\Theta_{\mathbf{M}}$  di un modello  $M$ , dato un insieme di dati  $\mathbf{D}$  e un modello  $M$ . Questa rappresenta una probabilità a posteriori, comunemente denominata *posterior*. Le altre funzioni in Eq. (5.1) sono:

- $P(\mathbf{D}|\Theta_{\mathbf{M}}, M)$ : rappresenta la nostra *likelihood*.
- $P(\Theta_{\mathbf{M}}|M)$ : descrive la probabilità a priori, detta *prior*, di avere un determinato set dei parametri  $\Theta_{\mathbf{M}}$  per un dato modello  $M$ .
- $P(\mathbf{D}|M)$ : detta *evidence*, è una distribuzione di probabilità che quantifica quanto bene il nostro modello  $M$  spiega i dati  $D$ . Tale termine può essere assunto come costante una volta che il modello e i dati sono stati fissati.

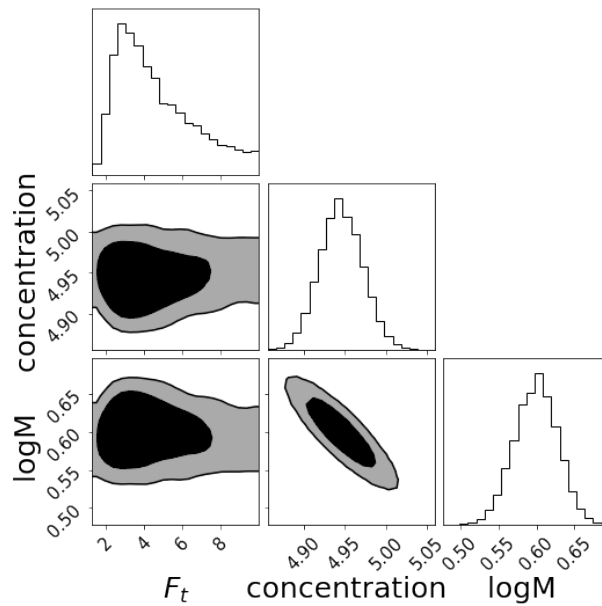
Dunque, dato un set di  $n$  parametri liberi  $\Theta_{\mathbf{M}}$ , le MCMC si occupano di campionare ogni  $\Theta_{M,i}$ , con  $i = 1, \dots, n$ , dalla distribuzione di probabilità  $P(\Theta_{\mathbf{M}}|\mathbf{D}, M)$ . Per far questo, si generano delle catene di Markov all'interno dello spazio dei parametri definito dai priors. Queste andranno a riprodurre le distribuzioni di probabilità a posteriori proiettate negli  $n$  sotto-spazi dei parametri. La ricostruzione della posterior avviene grazie al fatto che ogni punto della catena, cioè il campione  $X_j$ , è correlato solo con il punto precedente  $X_{j-1}$ , dove  $j$  va da 0 a  $N_{chain}$ , ovvero il numero totale di passi della catena. Ciò consente la convergenza della posterior, e quindi la stima dei parametri di un modello.

Fig. 5.2 mostra una rappresentazione grafica di ciò che si ottiene da una MCMC. In particolare, mostriamo l'andamento delle catene in funzione della loro lunghezza e i *contour plot*, ovvero le posterior 1D e 2D dei parametri del modello, da cui si possono ricavare i relativi momenti statistici. Sono riportati i casi ottenuti da un'analisi per la determinazione dei tre parametri strutturali di un profilo BMO, ovvero la massa, la concentrazione e il fattore di troncamento. Per questo lavoro di tesi, il campionamento viene eseguito con l'utilizzo dell'algoritmo *stretch move* (Goodman & Weare 2010), implementato nelle CBL.



(a)

COMBINAZIONE  $z\_bin = 0$   $A\_bin = 4$



(b)

Figura 5.2: Esempio di un tipico risultato ottenuto mediante le MCMC. (a) Sviluppo delle catene di Markov nei tre sotto-spazi dei parametri  $F_t$ , logM e  $c$ , in funzione nel numero di campionamenti. (b) Istogrammi 1D dei valori ottenuti e relativi contorni di confidenza 2D al 68% e al 95%.



### 5.3 Analisi preliminare su dati simulati

Allo scopo di verificare che tutti i modelli del profilo di densità, descritti nelle Sezioni (3.2) e (3.3), forniscano risultati consistenti sui parametri principali degli ammassi, ovvero massa e concentrazione, abbiamo eseguito una prima analisi MCMC su un ammasso simulato da [Euclid Collaboration: Giocoli et al. \(2023\)](#), estratto dalle simulazioni idrodinamiche "The Three Hundred" di [Cui et al. \(2018\)](#). Tale simulazione fornisce il profilo  $\Delta\Sigma$  di un alone la cui estensione radiale è suddivisa in 22 bin logaritmici compresi tra 0.2 e 1.6 Mpc/h, proiettato lungo tre diverse linee di vista. Il campo di vista è di 5 Mpc di lato, e lungo la linea di vista è stata proiettata tutta la materia presente in un cilindro di lunghezza 10 Mpc. Queste misure sono state effettuate grazie all'ausilio della libreria Python COMB-CL, la quale è stata sviluppata all'interno della collaborazione Euclid per la derivazione della massa da dati di weak lensing degli ammassi individuati. I valori dei parametri di riferimento sono forniti dalla simulazione e corrispondono alla concentrazione  $c$ , al redshift  $z$ , e alla massa  $M_{200c}$  entro il raggio  $R_{200c}$ , ovvero il raggio entro cui la densità media è 200 volte maggiore della densità critica dell'universo a un dato redshift  $z$ . Tali valori di riferimento sono:

- $\log\left(\frac{M_{200c}}{M_\odot}\right) = 14.827$ ,
- $c = 3.274$ ,
- $z = 0.22$ .

Per ognuno dei modelli di profilo, abbiamo assunto dei priors uniformi sia su  $c$  che sulla massa, corrispondenti a  $c \in [1, 20]$  e  $\log(M_{200c}/M_\odot) \in [13, 15]$ , rispettivamente. Per i due modelli in cui è presente il fattore di troncamento  $F_t$ , ovvero BMO e DK14, abbiamo eseguito due test: uno fissando  $F_t = 3$ , e uno con  $F_t$  con prior uniforme  $F_t \in [0.01, 10]$ . In entrambi i casi le distribuzioni a posteriori forniscono valori di massa e concentrazione che non differiscono in maniera significativa. Questo è aspettato, in quanto l'estensione radiale della simulazione risulta distante dalla regione dove viene collocato il raggio di troncamento  $R_t$ , come vediamo in Fig. 5.3. Questo rende il parametro  $F_t$  poco influente per il fit del modello. In quest'ultima figura vengono anche riportate le posteriori ricavate dalle proiezioni dell'ammasso denominate 0 e 1, mentre la proiezione 2 non è mostrata in quanto fornisce risultati simili a quelli ricavati dalla 0. I risultati in Fig. 5.3 mostrano come i profili tendano a convergere sugli stessi valori di massa e  $c$ . Ciò assicura che i modelli NFW, Einasto, BMO e DK14 forniscono valori consistenti di massa e concentrazione, se viene analizzato il segnale di weak lensing relativo alla regione più interna degli ammassi. Ritroveremo risultati analoghi nell'analisi dei dati KiDS-DR3 descritta nella sezione seguente.

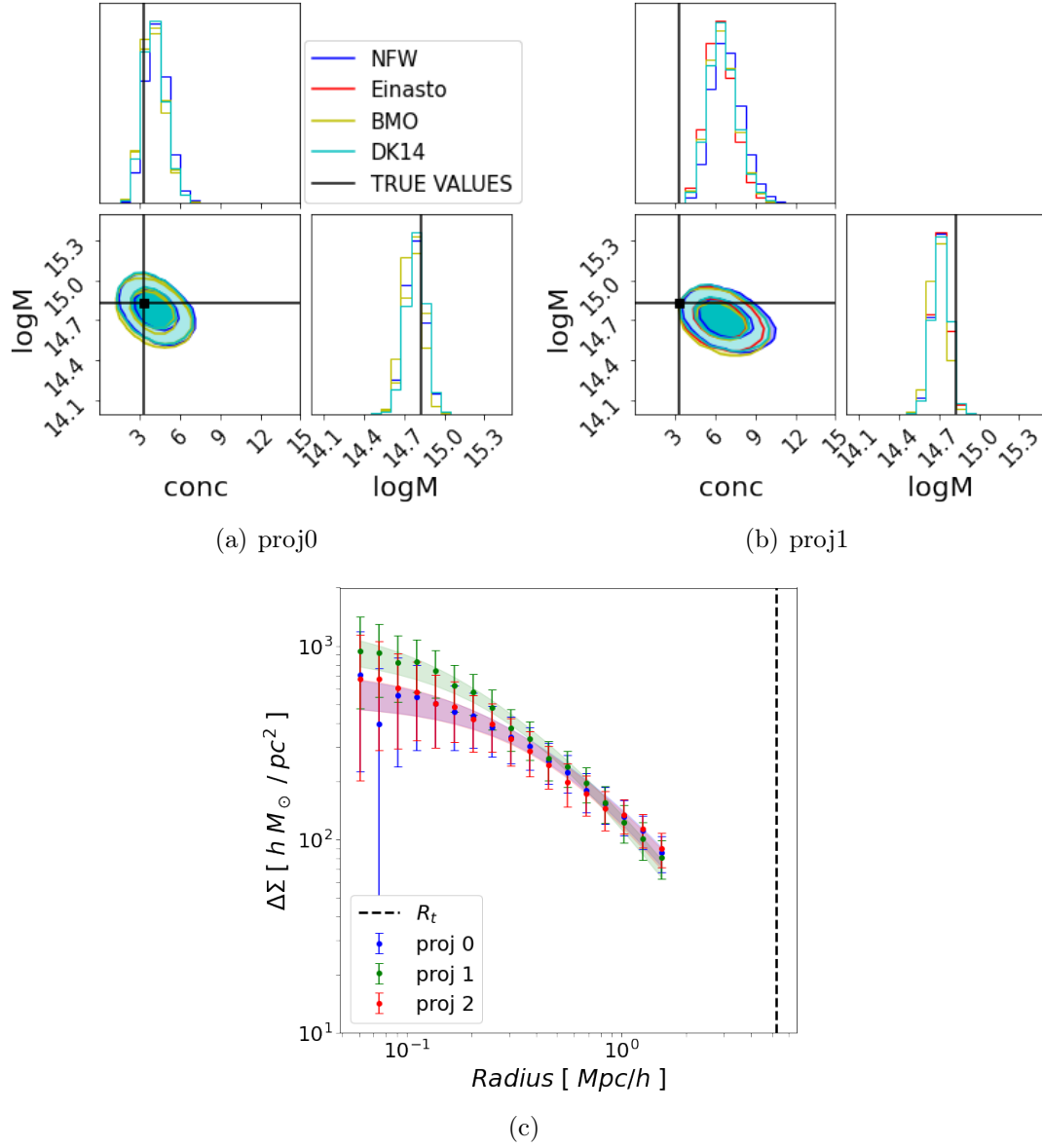


Figura 5.3: Distribuzioni a posteriori delle MCMC per due diverse proiezioni di un ammasso simulato (a,b), e rispettive misure di  $\Delta\Sigma$  con bande al 68% di confidenza del modello DK14 (c). Le linee verticali e orizzontali nere in (a) e (b) rappresentano i valori veri di  $\text{Log}M$  e  $c$ . La linea tratteggiata nera in (c) rappresenta il raggio di troncamento  $R_t$  fissato a  $F_t = 3$ .

Infine, le differenze tra i risultati della MCMC e i valori di riferimento di  $M_{200c}$  e  $c$ , evidenti in Fig. 5.3, sono dovute al fatto che l’ammasso simulato non è sferico. Questo implica l’esistenza di bias nella stima della massa e della concentrazione (si veda [Euclid Collaboration: Giocoli et al. 2023](#)).

## 5.4 Analisi degli ammassi AMICO KiDS-DR3

In questa sezione presentiamo i risultati principali della nostra analisi, basata sui dati KiDS-DR3. Per prima cosa, andremo a verificare se anche lo studio effettuato sui dati fornisce valori di massa consistenti per i diversi profili di densità, come ottenuto dalle simulazioni (Sezione 5.3). In questo modo verificheremo l’esistenza di possibili sistematiche legate al modello, ai priors sui parametri, o agli intervalli radiali del fit considerati per le analisi con le MCMC. In seguito, ci concentreremo sulle stime del raggio di splashback,  $R_{sp}$ , e sulle sue correlazioni con gli osservabili e i parametri strutturali dell’ammasso. In particolare andremo a ricercare una possibile relazione tra  $R_{sp}$  e la massa degli ammassi, per poi concludere il lavoro confrontando i valori del raggio di splashback, da noi trovati, con quelli ottenuti in letteratura.

Per ogni modello di profilo di densità, abbiamo eseguito un’analisi assumendo i seguenti priors:

- $F_t : [0.5, 5]$
- $\log \frac{M_{200}}{M_\odot h^{-1}} : [12.5, 15.5]$ ,
- $c : [1, 20]$ ,
- $f_{off} = 0$ ,
- $\sigma_{off} = 0$ ,
- $b_e : [0.1, 5.0]$ ,
- $s_e : [0.5, 2.0]$ ,

dove le parentesi quadre indicano l’assunzione di un prior uniforme. Sottolineiamo che il fattore di troncamento,  $F_t$ , appare solo nei modelli BMO e DK14, mentre  $b_e$  e  $s_e$  sono presenti soltanto nel termine esterno del profilo DK14. Abbiamo deciso di trascurare gli effetti legati al mis-centering, imponendo  $f_{off} = 0$  e  $\sigma_{off} = 0$ , in quanto abbiamo verificato che non introducono variazioni significative nei vincoli sui parametri di interesse. Inoltre, come mostrato da [Bellagamba et al. \(2019\)](#) e [Giocoli et al. \(2021\)](#), i dati KiDS-DR3 non permettono di porre vincoli significativi

su  $f_{off}$  e  $\sigma_{off}$ . In questa tesi non ci soffermeremo sulle stime del parametro di concentrazione, in quanto, per il dataset analizzato, sono state già estensivamente discusse in [Ingoglia et al. \(2022\)](#).

Riguardo alla cosmologia, si assume un universo piatto  $\Lambda$ CDM con parametro di Hubble  $h = 0.7$  e con parametro di densità della materia  $\Omega_m = 0.3$ . Per i restanti parametri cosmologici, quali ad esempio  $\sigma_8$  e  $\Omega_\Lambda$ , si utilizzano i valori derivati dall'analisi dei dati CMB ottenuti da Planck, corrispondenti al caso TT,TE,EE+lowE+lensing, presenti nella Tabella 2 di [Planck Collaboration et al. \(2020\)](#). Inoltre, per descrivere le zone esterne nel caso dei profili NFW, BMO e Einasto, dominate dal contributo della materia correlata con gli ammassi, viene aggiunto il termine di 2-halo descritto in Eq. (3.19). Nel caso del DK14, invece, questa aggiunta non è necessaria in quanto il termine di 2-halo viene sostituito e modellato dal termine di infall.

Per descrivere propriamente il segnale di weak lensing sulle grandi scale, si devono tenere in considerazione le sistematiche e le incertezze che incombono quando andiamo ad analizzare valori di  $\Delta\Sigma$  molto bassi. Per ovviare a ciò sfruttiamo i profili stacked costruiti attorno a posizioni random per differenti bin di redshift ricavati in [Giocoli et al. \(2021\)](#) e riportati in Fig. 5.4.

Questi vengono poi sottratti ai profili misurati, descritti in Sezione 4.3.2, in modo da eliminare il contributo di rumore random nel segnale di weak lensing, causato anche dalla limitata regione del campo di vista e dalle maschere della survey. Fig. 5.5 mostra come tale sottrazione risulta trascurabile specialmente nelle regioni interne, con una qualche differenza più rilevante quando si considerano le zone più lontane dal centro dell'ammasso. Inoltre, nelle analisi seguenti escluderemo il segnale al di sotto di  $0.2 h^{-1}\text{Mpc}$ , poiché in tale regione viene meno la validità dell'approssimazione di lensing debole, e le misure sono molto soggette a contaminazioni dovute alle galassie membro degli ammassi ([Bellagamba et al. 2019](#)).

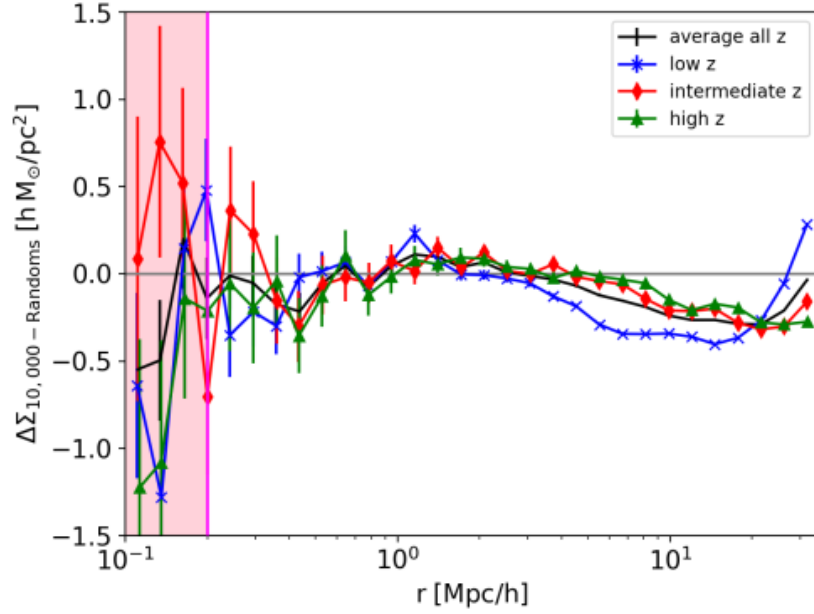


Figura 5.4: Eccesso del profilo di densità di massa superficiale intorno a centri casuali per i tre intervalli di redshift in cui sono stati suddivisi gli ammassi AMICO KiDS-DR3: basso redshift,  $z \in [0.1, 0.3]$ , redshift intermedio,  $z \in [0.3, 0.45]$ , e alto redshift  $z \in [0.45, 0.6]$  (Giocoli et al. 2021). I dati blu, rossi e verdi riportano le misure medie per ogni intervallo di redshift, includendo nel profilo i termini di 1-halo e 2-halo fino a una distanza radiale di  $35 \text{ Mpc}/h$ . L'area rosa mostra i punti, non considerati nell'analisi, al di sotto di  $0.2 \text{ Mpc}/h$ . Le barre di errore mostrano la radice quadrata dei termini presenti nella matrice di covarianza  $C_{random}(r, r')$  ricavata da Giocoli et al. (2021).

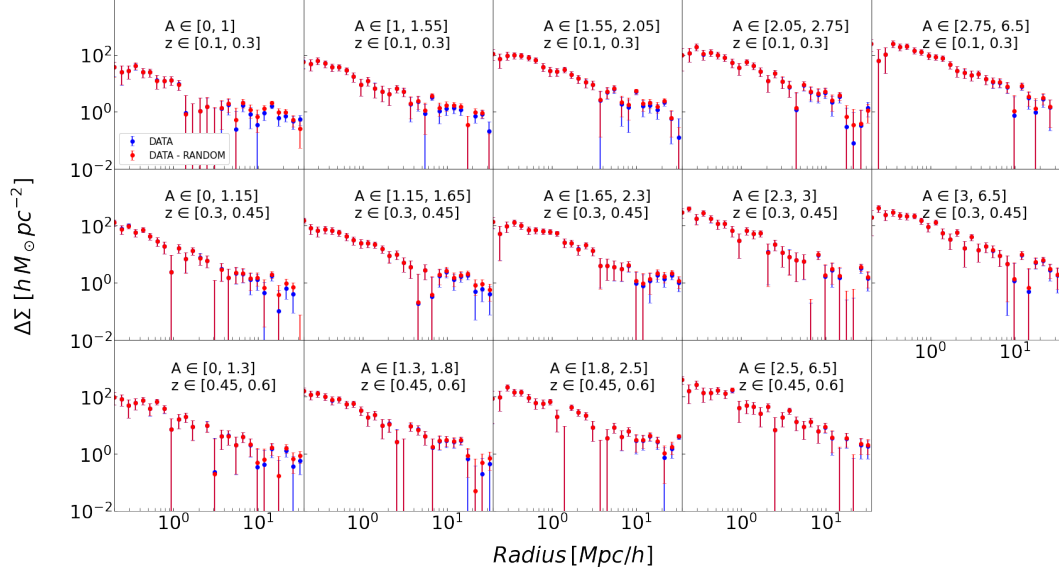


Figura 5.5: Profili di densità superficiale differenziale stacked divisi in bin di redshift e ampiezza. I pallini rossi e blu rappresentano rispettivamente i valori radiali di  $\Delta\Sigma$  senza e con la sottrazione dei profili stacked costruiti attorno a centri random e mediati nei tre bin di redshift.

### 5.4.1 Relazione Massa-Ampiezza

Dai profili misurati, mostrati in Fig. 5.5, è possibile ricavare la relazione di scala tra la massa di weak lensing e l'ampiezza,  $A$ , del segnale fornita da AMICO, descritta in Sezione 4.2.2. Infatti, come vedremo,  $A$  correla con la massa ed è quindi un suo proxy. Conseguentemente a quanto discusso nella Sezione 5.3, poiché la massa di un dato profilo non dovrebbe variare in base al modello adoperato, ci aspettiamo di trovare la stessa relazione tra massa e  $A$  per ognuno di essi. La procedura di fitting è analoga a quanto eseguito in Bellagamba et al. (2019); Giocoli et al. (2021), in cui la relazione di scala viene modellata utilizzando una forma log-lineare,

$$\log \frac{M_{200}}{10^{14} M_{\odot}/h} = \alpha + \beta \log \frac{A}{A_{piv}} + \gamma \log \frac{E(z)}{E(z_{piv})}, \quad (5.2)$$

con  $z_{piv} = 0.35$ ,  $A_{piv} = 3$  e  $E(z) = H(z)/H_0$ . Per la determinazione dei tre coefficienti abbiamo assunto priors uniformi corrispondenti a  $\alpha \in [-1, 1]$ ,  $\beta \in [0.1, 5]$ ,  $\gamma \in [-5, 5]$ . Inoltre, abbiamo scelto di adoperare come raggio scala  $R_{200c}$ . Tale scelta viene dalle considerazioni fatte sulle proprietà di auto-similarità della regione interna dei profili discusse in Sezione 3.5. Abbiamo eseguito inizialmente l'analisi modellando le misure tra 0.2 e 3.16  $h^{-1}$ Mpc.

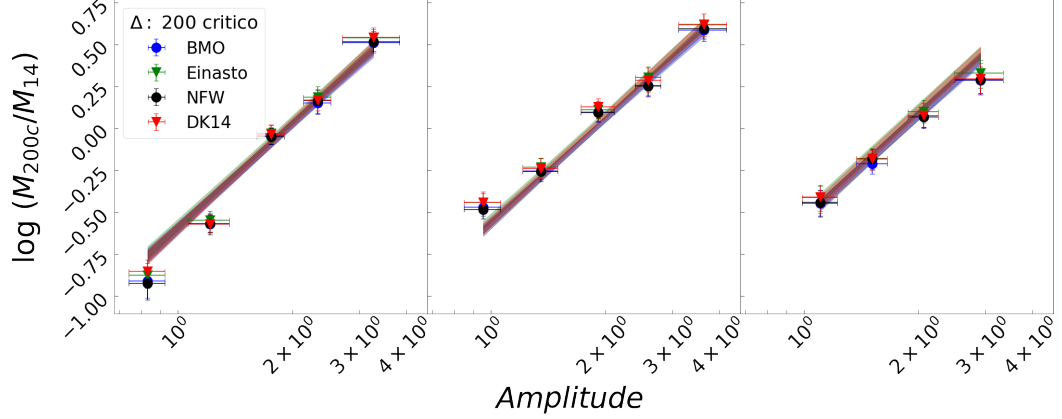


Figura 5.6: Relazione di scala Massa-Ampiezza ottenuta modellando la regione tra i 0.2 e i 3.16  $h^{-1}\text{Mpc}$ . I punti indicano il valori mediани di massa ottenuti dalle posterior, con barre di errore relative al 16° e 84° percentile, per BMO (blu), Einasto (verde), NFW (nero), DK14 (rosso). Le bande indicano il modello della relazione di scala entro il 68% di confidenza.

In Fig. 5.6 vengono riportate le relazioni di scala ottenute in questo intervallo di raggio dell’ammasso. Come si può notare, le relazioni e le relative masse derivate dai vari modelli risultano essere consistenti tra di loro entro il valore di  $1\sigma$ . Abbiamo verificato che si ottengono risultati analoghi assumendo  $R_{200m}$  come raggio di scala, anziché  $R_{200c}$ . Nello specifico, i modelli Einasto e DK14 tendono mediamente a sovrastimare del 7% il valore predetto da NFW e BMO. Questa caratteristica assume maggior rilevanza quando si estende il raggio massimo del fit a 35  $h^{-1}\text{Mpc}$ , dove domina il contributo descritto dal termine di 2-halo e dal termine di infall del DK14. La Fig. 5.7 riporta quest’ultimo caso, dove risulta maggiormente evidente la presenza di discrepanze tra i valori predetti dai profili Einasto e DK14 confrontati con quelli ricavati utilizzando NFW e BMO. Questo vale nel caso di utilizzo di ognuno dei raggi scala usati per l’analisi dei dati, ovvero  $R_{200m}$  e  $R_{200c}$ . Infatti, il valore tipico delle differenze percentuali tra le masse aumenta fino a un valore di circa il 15%, e le relazioni di scala non sono in accordo entro  $1\sigma$  in tutti i bin di redshift.

Tali discrepanze nelle relazioni di scala possono causare delle differenze significative nella stima dei parametri cosmologici ottenuti, ad esempio, da conteggi di ammassi. Infatti, nel Capitolo 3 abbiamo parlato di come gli ammassi siano sonde cosmologiche di grande importanza, e di come la loro distribuzione di densità numerica, dipendente dalla massa, fornisca un osservabile utile a verificare i modelli cosmologici. Per questo motivo, in futuro eseguiremo un’analisi cosmologica analoga a quella sviluppata da [Lesci et al. \(2022\)](#), basata sui conteggi degli

ammassi AMICO KIDS-DR3, al fine di valutare l'impatto dell'uso dei profili Einasto e DK14 sulle stime dei parametri cosmologici. Svilupperemo, inoltre, delle simulazioni di ammassi che permettano l'analisi del segnale di weak lensing fino a raggi dell'ordine di  $10 h^{-1}\text{Mpc}$ , estendendo di un ordine di grandezza il raggio massimo del fit disponibile nelle simulazioni analizzate in Sezione 5.3.

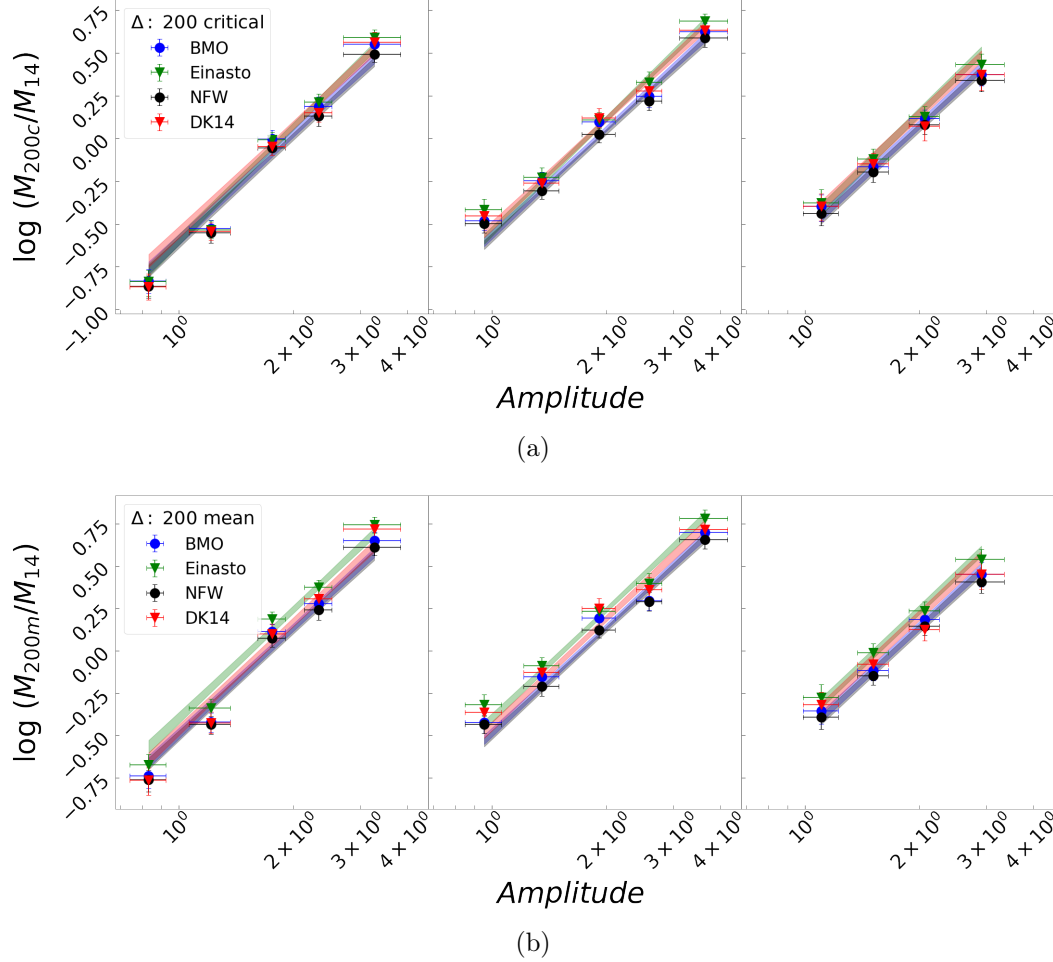


Figura 5.7: Relazione di scala Massa-Ampiezza ottenuta estendendo l'intervallo del modello fino a  $35 h^{-1} \text{Mpc}/h$  con raggio scala utilizzato pari a  $R_{200c}$  (a) e  $R_{200m}$  (b). I simboli utilizzati sono uguali a quelli descritti in Fig. 5.6.



## 5.4.2 Stima del raggio di splashback

Una volta stimata la relazione di scala fra massa e Ampiezza, ci interessiamo all'individuazione del raggio di splashback all'interno dei medesimi dati. A ogni passo della MCMC, viene calcolata la derivata logaritmica del profilo di densità tridimensionale, il cui punto di minimo stabilisce la posizione di  $R_{sp}$  rispetto alla scala radiale. Tale punto, ricordiamo, è associato all'apocentro dell'orbita del materiale accresciuto dall'ammasso. La derivazione del raggio  $R_{sp}$ , assieme al rapporto  $R_{sp}/R_{\Delta}$ , è ottenuta dunque simultaneamente agli altri parametri dell'ammasso, come riportato in Fig. 5.8. Osservando le posterior ottenute, si è scelto di riportare solo i risultati derivati tramite l'uso del profilo DK14. Questo perché i risultati ottenuti con i profili BMO, NFW e Einasto non sempre mostrano distribuzioni a posteriori unimodali per  $R_{sp}$ . Una possibile motivazione può venire dal fatto che questi modelli, contenenti il termine di 2-halo, mostrano dei minimi della derivata logaritmica meno pronunciati rispetto al profilo DK14. Questo può causare forti variazioni nel raggio  $R_{sp}$ , anche nel caso di piccole variazioni di massa. Tale caratteristica sarà comunque investigata in futuro.

A causa dell'incertezza sui dati risulta difficile vincolare il parametro  $F_t$ , sebbene, come vedremo, le posterior di  $R_{sp}$  siano ben definite. Nei pochi casi in cui  $F_t$  viene vincolato dall'analisi dei profili stacked, esso risulta essere in accordo col valore atteso di  $F_t = 3$ , senza mostrare andamenti significativi con la massa e il redshift. Il fatto che  $F_t$  non sia vincolato è probabilmente dovuto al fatto che il raggio di troncamento tende a posizionarsi nella regione dove domina il contributo del profilo esterno, rendendo una sua variazione poco significativa ai fini del fit. Poiché siamo interessati a una quantità che caratterizza la zona di transizione tra il profilo interno e quello esterno, adoperiamo le MCMC calcolate con intervallo del fit compreso tra 0.2 e 35  $h^{-1}$ Mpc. Per quanto riguarda il raggio scala  $R_{\Delta}$ , si effettuano le analisi con l'uso del raggio  $R_{200m}$ . Questo per poter confrontare i risultati di questo lavoro di tesi con quelli presenti in letteratura, che utilizzano comunemente il raggio  $R_{200m}$  per la riscalarle le distanze radiali. In Fig. 5.9 vengono riportate la posizione dei raggi  $R_{sp}$  all'interno dei profili stacked analizzati e il modello DK14, descritto dall'area blu corrispondente al 68% di confidenza. L'area inerente alla banda verticale fornisce la barra di errore del raggio di splashback compresa tra il 16° e 84° percentile. Individuato tale raggio, abbiamo analizzato le sue possibili correlazioni con osservabili e parametri caratterizzanti i profili. Per prima cosa si è riprodotto, con l'uso dei valori mediani ricavati dalle MCMC, il cambio di pendenza relativo alla derivata logaritmica della densità 3D, in modo da studiarne le differenze in base all'ampiezza  $A$ . Per questi andamenti si riportano in Fig. 5.10 le curve rispetto alla scala radiale e rispetto al rapporto  $R/R_{200m}$ , in modo da seguire gli esempi riportati nella letteratura.

COMBINAZIONE  $z_{\text{bin}} = 1$   $A_{\text{bin}} = 4$

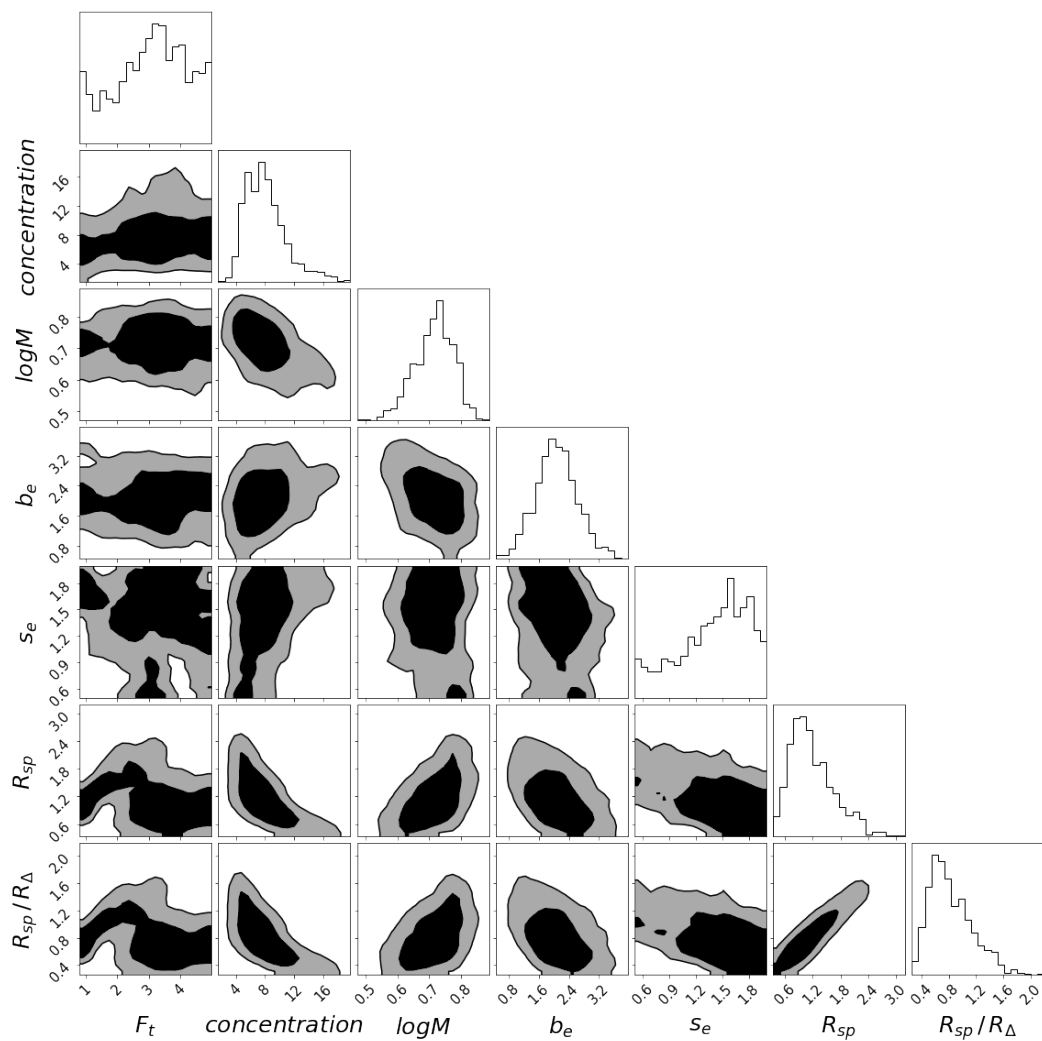


Figura 5.8: Posterior dei parametri del modello DK14 ottenute dall'analisi MCMC, per il profilo stacked associato agli intervalli  $z \in [0.3, 0.45]$  e  $A \in [3.0, 6.5]$ . In questo caso si è adottato come raggio scala  $R_{200m}$  e il fit range  $[0.2, 35] h^{-1}\text{Mpc}$ .

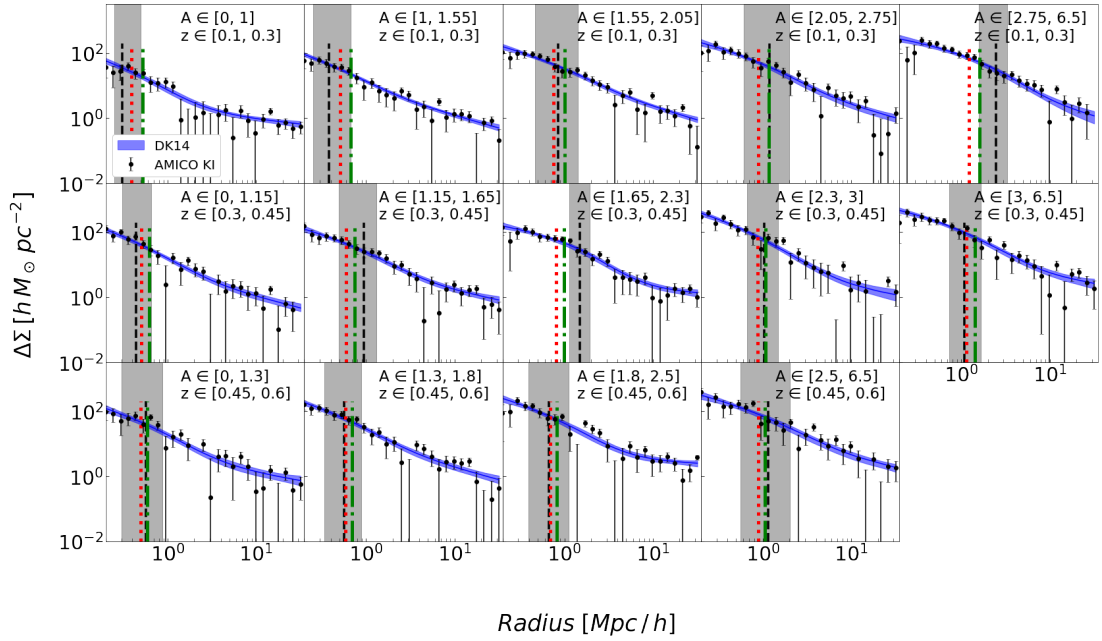
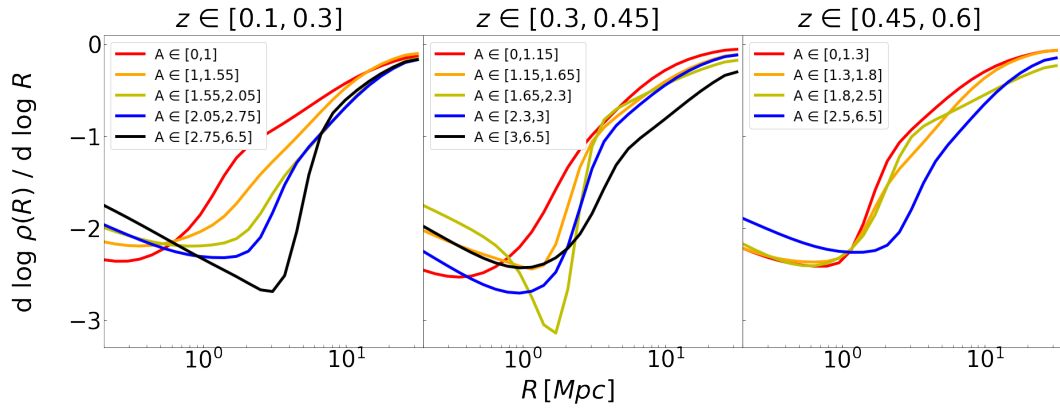
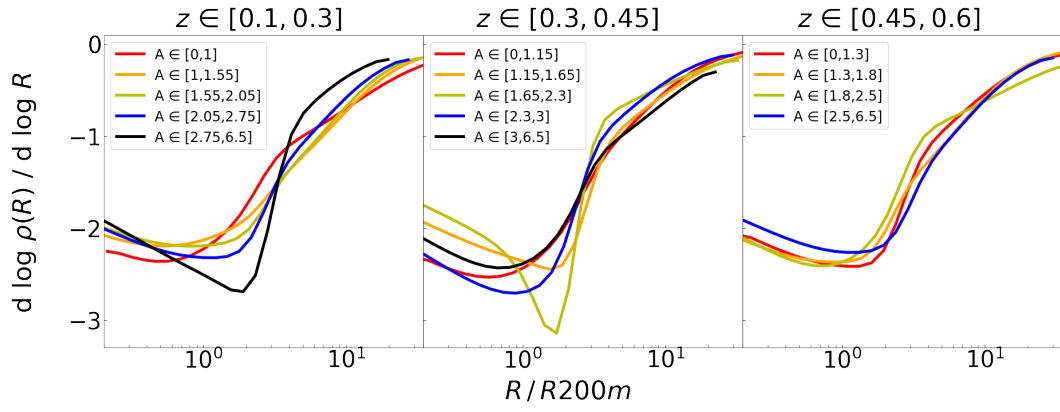


Figura 5.9: Profili stacked di  $\Delta\Sigma$  misurati (pallini neri), e i corrispondenti modelli forniti dall'analisi con MCMC entro il 68% di confidenza (bande blu). Viene anche riportata la posizione del raggio di splashback (linee verticali nere) con la relativa incertezza al 68% di confidenza (bande verticali grigie). Le linee verticali punteggiate rosse e quelle tratteggio-punto verdi riportano, rispettivamente, le posizioni dei raggi  $R_{200c}$  e  $R_{200m}$ .



(a)



(b)

Figura 5.10: Derivata logaritmica della densità in funzione del rapporto  $R_{sp}/R_{200c}$  (a) e  $R_{sp}/R_{200m}$  (b). Sono riportati i casi di diversi intervalli di ampiezza accumulati dal corrispettivo in redshift.

Per il nostro campione, il raggio di splashback sembra essere correlato con l'ampiezza del corrispettivo ammasso: ammassi con maggiore ampiezza tendono ad avere il minimo della curva a raggi maggiori e anche a maggiori valori del rapporto  $R/R_{200m}$ . Tale andamento, riscontrato per l'ampiezza  $A$ , si ricollega alla ricerca di possibili correlazioni tra il raggio  $R_{sp}$  e i parametri dell'ammasso. Abbiamo quindi calibrato una relazione di scala tra  $R_{sp}$  e massa, analoga a quella elaborata nella sezione precedente. In Fig. 5.11 viene riportata la relazione al 68% di confidenza (area rossa), ottenuta combinando i dati dei tre differenti intervalli di redshift. L'andamento viene modellato assumendo una forma log-lineare come

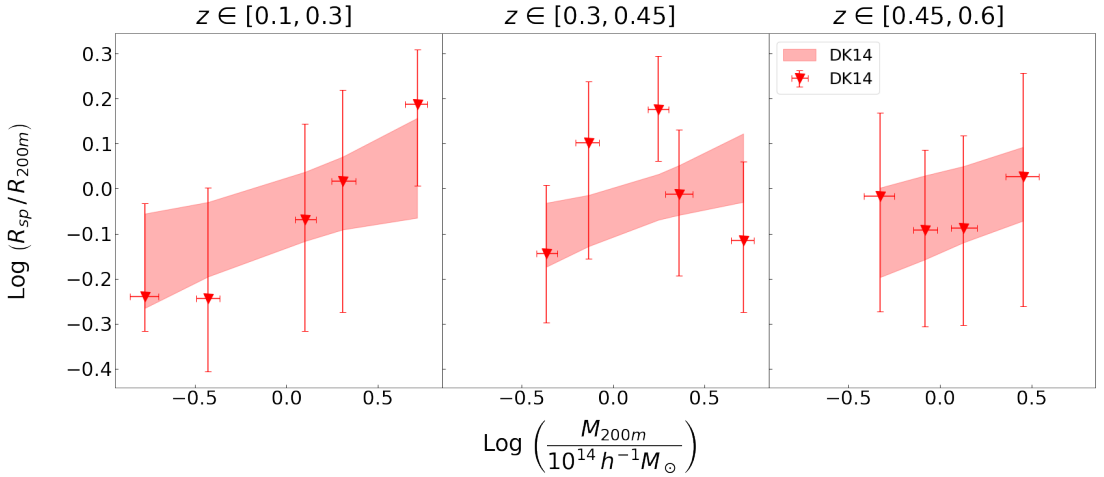


Figura 5.11: Posizione del raggio di splashback riscaldato per il valore di  $R_{200m}$  in funzione del logaritmo della massa. I dati rappresentano i valori medi ottenuti dall'analisi MCMC con le barre di errore relative al 16° e 84° percentile. L'area rossa corrisponde al modello al 68%.

nel caso della relazione di scala tra massa da weak lensing e ampiezza,

$$\log \frac{R_{sp}}{R_{200m}} = A + B \log \frac{M_{200m}}{M_{piv}} + C \log \frac{1+z}{1+z_{piv}}, \quad (5.3)$$

dove si assume  $z_{piv} = 0.3$ ,  $M_{piv} = 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$ , e prior uniformi per i coefficienti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , nell'intervallo  $[-10, 10]$ . In Fig. 5.12 riportiamo le posterior di tali parametri.

Vediamo che la dipendenza dal redshift risulta consistente con zero, confermando le proprietà di auto-similarità della regione esterna nei profili analizzati da Diemer & Kravtsov (2014). Per quanto riguarda la masse, i dati suggeriscono l'esistenza di una correlazione positiva con essa, confermando anche l'andamento osservato per l'osservabile ampiezza in Fig. 5.10. Ciò risulta essere molto interessante, in quanto evidenzia che nel caso di ammassi selezionati in banda ottica,

l'andamento risulta opposto con quanto ottenuto dai lavori svolti sui dati simulati. Questi, ricordiamo, prevedono un valore del rapporto  $R_{sp}/R_{200m}$  che cala con l'aumentare del parametro  $\nu_{200m}$ , correlato a sua volta in maniera positiva con la massa. Tale risultato potrebbe essere legato agli ammassi selezionati in banda ottica e andrebbe approfondito utilizzando dati di migliore qualità e/o con campioni più ampi. Se questa dipendenza di  $R_{sp}$  dalla massa verrà confermata nelle survey future, si porrebbero nuove e interessanti discussioni sulle assunzioni fatte in Diemer & Kravtsov (2014) e More et al. (2015) per definire i modelli evolutivi degli ammassi di galassie. Ad esempio, un comportamento anomalo potrebbe essere correlato a una possibile natura collisionale della materia oscura. Quanto discusso vale anche per i risultati ottenuti dall'analisi col raggio scala  $R_{200c}$ , in quanto forniscono analoghe barre di errore, incertezze sulla relazione e valori dei coefficienti.

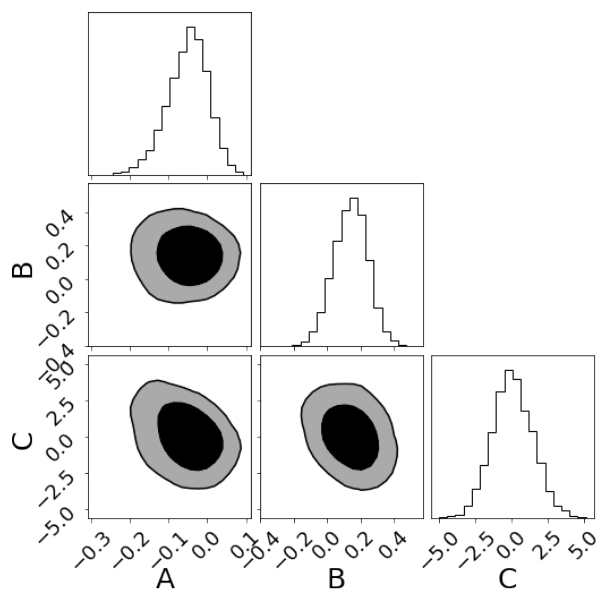


Figura 5.12: Distribuzioni a posteriori 1D dei coefficienti della relazione di scala  $R_{sp}-M_{200m}$ , e i corrispettivi contorni di confidenza 2D al 68% e 95%.

### 5.4.3 Confronto dei vincoli su $R_{sp}$ con la letteratura

Nella Sezione 3.5 abbiamo evidenziato come uno dei principali interessi inerenti a  $R_{sp}$  sia la sua possibile dipendenza dai parametri strutturali ed evolutivi degli ammassi (More et al. 2015; Rana et al. 2023). In particolare, due di questi parametri sono il tasso di accrescimento in massa e il parametro di *peak-height*  $\nu_{200m}$ ,

ottenuto dai valori derivati dall’analisi della massa  $M_{200m}$  e del redshift:

$$\nu_{200m} \equiv \frac{\delta_c}{\sigma(M_{200m}) D(z)}, \quad (5.4)$$

dove  $\delta_c = 1.686$  è la sovradensità critica,  $\sigma$  è la radice della varianza delle fluttuazioni iniziali di densità, e  $D(z)$  è il fattore di crescita delle perturbazioni. Conseguentemente abbiamo utilizzato il parametro  $\nu_{200m}$  come variabile di input per calibrare la relazione di scala fornita da [More et al. \(2015\)](#) e presentata nell’Eq. (3.31);

$$\frac{R_{sp}}{R_{200m}} = A (1 + B e^{-\nu/2.44}). \quad (5.5)$$

Tale relazione viene calcolata combinando i dati relativi a ognuno dei tre intervalli di redshift in cui sono suddivisi i dati. In Fig. 5.13, confrontiamo i risultati da noi trovati con quelli derivati dalla letteratura. Questi vengono riportati nel piano  $R_{sp}/R_{200m} - \nu_{200m}$ . La linea nera tratteggiata corrisponde alla formula aspettata da [More et al. \(2015\)](#) in cui vengono ricavati i valori di  $A = 0.81$  e  $B = 0.97$  mediante la calibrazione su simulazioni numeriche. La banda rossa fornisce l’intervallo di confidenza al 68% per la relazione derivata dall’Eq. (5.5), basata sui dati AMICO KiDS-DR3, in cui per  $A$  e  $B$  abbiamo assunto prior uniformi nell’intervallo  $[-20, 20]$ . La linea tratteggiata rossa corrisponde invece alla relazione ottenuta in questo lavoro di tesi, dove i nuovi valori dei coefficienti corrispondono a  $A = 1.71$  e  $B = -1.30$ . Il fatto di ottenere un  $B$  negativo porta a ottenere un andamento crescente del rapporto  $R_{sp}/R_{200m}$  in funzione del parametro  $\nu$ .

Troviamo che i valori da noi ottenuti sono in ottimo accordo con quelli derivati da lavori osservativi in letteratura. Inoltre, ad alti valori di  $\nu$ , troviamo un accordo entro  $1\sigma$  con quanto predetto dalla relazione di [More et al. \(2015\)](#). La discrepanza sorge, tuttavia, nel caso di bassi valori di  $\nu$ , corrispondenti agli ammassi di galassie meno massivi presenti nel campione analizzato. Tale risultato risulta estremamente interessante, in quanto per la prima volta l’utilizzo di un campione di ammassi identificati in banda ottica, ha portato a osservare una discrepanza con quanto predetto dagli studi analoghi su dati simulati. Questa tensione tra le due tipologie di dati è fornita per la prima volta in questo lavoro di tesi, e si pensa possa fornire nuovi spunti su una teoria riguardante l’evoluzione del raggio di splashback. Una motivazione di quanto trovato può essere collegata alla storia di formazione degli ammassi di galassie: gli aloni con piccola massa si formano a redshift più elevati, conseguentemente, essi tendono ad essere più virializzati della controparte più massiccia, in quanto accrescono materiale da un tempo più lungo. Viceversa gli ammassi più massicci sono ancora in fase di formazione e hanno avuto poco tempo per accrescere materiale e dunque il loro raggio di splashback risulta più grande.

Sotto quest'ottica, la dipendenza del raggio  $R_{sp}$  non sarebbe da vincolare tanto da quantità "attuali" come il tasso di accrescimento in massa, ma da variazioni di parametri che tengano conto di un più ampio intervallo temporale della storia evolutiva dell'ammasso. Ovviamente un'altra possibilità è quella di cambiare le assunzioni fatte nelle simulazioni numeriche di ammassi, così da osservare se quanto trovato risulti consistente con una natura collisionale della materia oscura, oppure con l'utilizzo di teorie della gravità modificata.



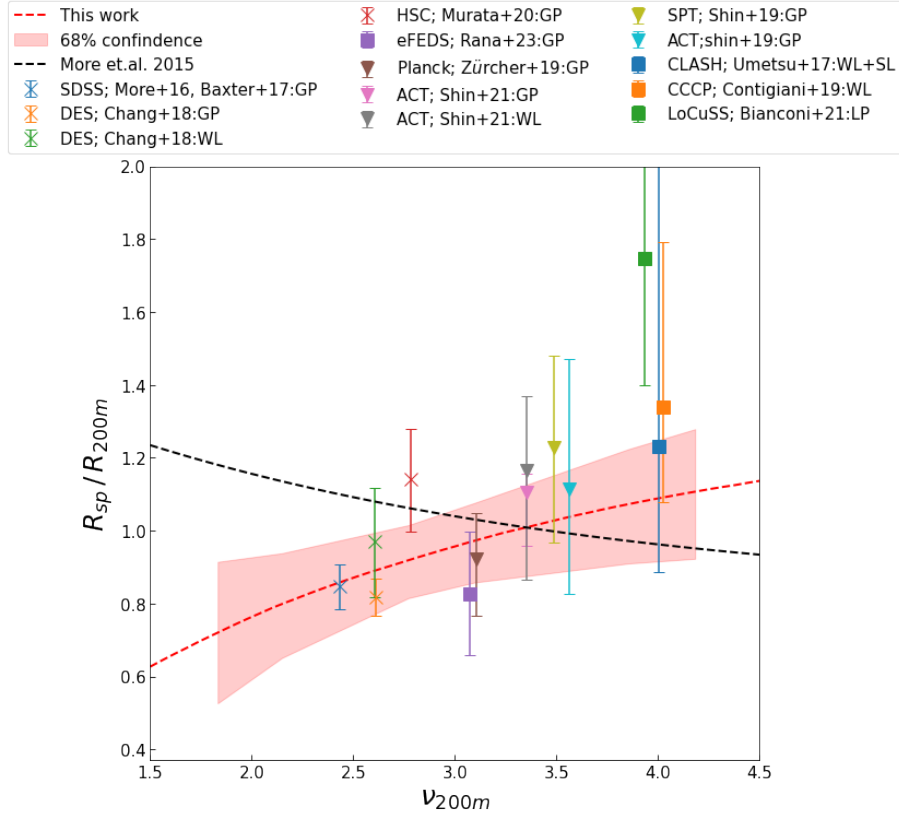


Figura 5.13: Confronto dei risultati ottenuti sulla relazione tra  $R_{sp}/R_{200m}$  e  $\nu_{200m}$  con quelli derivati da altri studi. L'area rossa riporta la relazione ottenuta in questo lavoro entro il 68% di confidenza, con il relativo valore medio (linea tratteggiata rossa). La linea tratteggiata nera riporta la relazione di [More et al. \(2015\)](#). Seguendo quanto riportato in [Rana et al. \(2023\)](#), i punti vengono etichettati usando il nome della survey, la referenza dell'articolo e con il metodo utilizzato nelle analisi: weak lensing (WL), strong lensing (SL), densità numerica delle galassie (GP) e profili di luminosità stacked (LP). I punti quadrati dati segnano i valori derivati da ammassi selezionati in banda X, i triangolari quelli ottenuti mediante l'identificazione con l'effetto Sunyaev-Zel'dovich (SZ), e i punti a croce quelli ottenuti con osservazioni ottiche.

#### 5.4.4 Vincoli sul secondary infall

Riportiamo in questa sezione una ulteriore analisi condotta sui due parametri liberi che caratterizzano il profilo di densità esterno per il modello di [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#). Questi, ricordiamo, sono i parametri  $b_e$  ed  $s_e$ , che corrispondono alla normalizzazione e alla pendenza della legge di potenza che descrive tale termine. Essi rappresentano il contributo del potenziale gravitazionale associato alla materia che si trova in fase di caduta verso l'ammasso. In maniera analoga a quanto svolto per la massa e il raggio di splashback, abbiamo cercato correlazioni tra i valori mediani di questi due parametri con i corrispettivi valori di massa e redshift. La Fig. 5.14 riporta le relazioni ottenute per i parametri derivati con l'uso dei due raggi scala  $R_{200m}$  e  $R_{200c}$ . Le relazioni vengono modellate usando una formula analoga a quella tra  $R_{sp}$  e la massa in Sezione 5.4.2,

$$\log [b_e; s_e] = A + B \log \frac{M_{200m}}{M_{piv}} + C \log \frac{1+z}{1+z_{piv}}, \quad (5.6)$$

con gli stessi valori di  $M_{piv}$  e  $z_{piv}$ . Per i coefficienti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , vengono utilizzati prior uniformi nell'intervallo  $[-10, 10]$ .

Per quanto concerne gli andamenti in massa, come vediamo in Fig. 5.14, essi sono in accordo con quelli previsti dal lavoro di [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#), mostrando andamenti crescenti per il parametro  $s_e$  e decrescenti per  $b_e$ . L'evoluzione in redshift è consistente per quanto riguarda la pendenza  $s_e$ , ma [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#) predicono un andamento crescente di  $b_e$  con il redshift, ovvero l'opposto di quanto ottenuto dalla nostra analisi.

In letteratura non vengono fornite motivazioni fisiche per questi due parametri, relegandoli a semplici parametri atti a caratterizzare il contributo in densità dato dal materiale esterno all'ammasso. Possiamo, tuttavia, interpretare  $b_e$  come rappresentante della quantità della materia esterna che circonda l'ammasso e che viene accresciuta in esso. Tale interpretazione tuttavia porterebbe ad aspettarsi un andamento simile a quello di [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#): ai redshift più alti l'universo risultava più denso rispetto a  $z = 0$ , e conseguentemente ammassi situati a redshift più alti dovrebbero avere più materiale disponibile per l'accrescimento. Dunque, ciò dovrebbe portare a un valore più elevato di  $b_e$  ad alti redshift. Lo stesso vale se si interpreta  $b_e$  come un bias cosmologico, in quanto anche in questo caso ci si aspetterebbe una crescita di  $b_e$  con il redshift. L'andamento contrario trovato nella nostra analisi, dunque, fornisce un'ulteriore fonte di spunto per lavori futuri. In particolare, quanto ottenuto andrebbe ricercato anche per le ulteriori varianti del termine di infallig utilizzate in letteratura e che adoperano entrambi i parametri  $b_e$  ed  $s_e$ . Una di queste viene presentata sempre nel lavoro di [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#), e include il contributo della materia correlata all'ammasso che va a modificare il profilo descritto dalla legge di potenza da noi utilizzata.

L'inclusione di questo termine di 2-halo potrebbe modificare gli andamenti osservati per i parametri di infalling, rendendoli compatibili con quanto ottenuto dalle simulazioni.

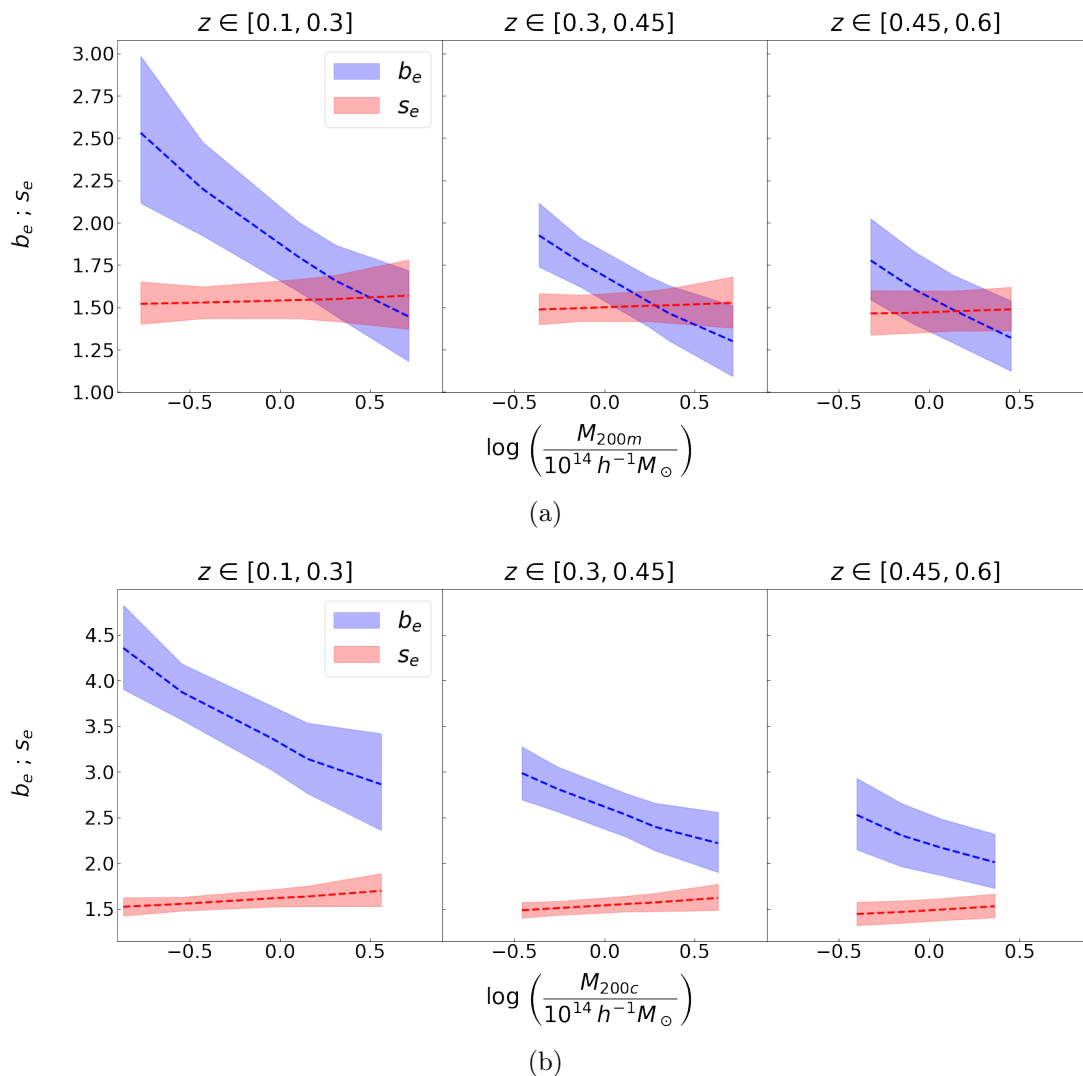


Figura 5.14: Andamento dei parametri  $b_e$ ,  $s_e$  in funzione della massa  $M_{\Delta}$  per i casi con  $\Delta = 200m$  (a) e  $\Delta = 200c$  (b). Le bande riportano la relazione al 68% di confidenza per i parametri  $b_e$  (blu) ed  $s_e$  (rosso).

# Capitolo 6

## Conclusioni e progetti futuri

Il raggio di splashback rappresenta il bordo degli ammassi di galassie, descritto dal minimo della derivata logaritmica radiale della densità. La sua correlazione principale è quella che lo lega al tasso di accrescimento in massa dell'ammasso. Ciò lo rende un nuovo potenziale osservabile per gli studi legati alla teoria di formazione delle strutture, fornendo vincoli osservativi sulla storia dell'accrescimento in massa degli aloni di materia oscura. Il tasso di accrescimento tuttavia non è sempre facilmente stimabile quando si lavora su dati osservativi, per cui già a partire dai primi lavori eseguiti su dati simulati, si è cercato di trovare altre relazioni con parametri di più facile determinazione, come ad esempio il parametro di peak height  $\nu$  (More et al. 2015). Questo si deriva dalla massa stimata, ad esempio, da osservazioni di weak lensing, e assumendo una data cosmologia. I lavori più recenti si sono indirizzati sull'uso di ammassi selezionati da diverse tipologie di surveys per individuare il raggio  $R_{sp}$  utilizzando il modello elaborato da Diemer & Kravtsov (2014).

Questo lavoro di tesi riporta lo studio condotto sugli ammassi basati sul catalogo AMICO KiDS-DR3 (Maturi et al. 2019), selezionati mediante dati fotometrici, per i quali abbiamo determinato per la prima volta il raggio di splashback usando dati di lensing gravitazionale debole. Il campione finale utilizzato per l'analisi comprende quattordici profili di densità superficiale differenziale, ottenuti mediando il segnale di ammassi di galassie suddivisi in tre intervalli di redshift:  $z \in [0.1, 0.3]$ ,  $z \in [0.3, 0.45]$  e  $z \in [0.45, 0.6]$ . In ognuno di questi bin di redshift, sono stati ottenuti profili in quattro/cinque intervalli di ampiezza, la quale è un proxy di massa. Abbiamo poi eseguito un'analisi bayesiana basata su Markov Chain Monte Carlo utilizzando le CosmoBolognaLib (Marulli et al. 2016), un set di librerie per analisi numeriche cosmologiche. Di seguito riassumiamo i principali risultati ottenuti in questa tesi.

- Abbiamo modellato i profili osservati degli ammassi utilizzando i modelli

proposti da Navarro Frenk & White, Einasto, considerando le loro corrispettive estensioni: Baltz, Marshall & Oguri e Diemer Kravtsov 2014. Per questi abbiamo assunto priors uniformi sui parametri di massa, concentrazione e raggio di troncamento per le componenti interna del profilo descritta dal termine 1-halo. Per il profilo esterno, abbiamo utilizzato il termine di 2-halo per modellare il contributo della massa correlata all'ammasso. Questo ad eccezione del profilo DK14, il quale usa un termine di infall per descrivere il materiale esterno in fase di accrescimento nell'ammasso. In quest'ultimo caso vengono aggiunti due parametri liberi, corrispondenti alla normalizzazione ( $b_e$ ) e alla pendenza ( $s_e$ ) della legge di potenza associata.

- Abbiamo verificato la relazione tra massa stimata da dati di weak lensing e ampiezza del segnale, ottenuta nei lavori di [Bellagamba et al. \(2019\)](#) e [Gioioli et al. \(2021\)](#). Questo per poter verificare la consistenza tra i valori di massa ottenuti dalle analisi con differenti profili di densità. Utilizzando i dati osservativi, abbiamo trovato che i valori ottenuti mediante i profili DK14 ed Einasto mostrano una differenza percentuale di circa il 15% rispetto ai valori ottenuti dai profili BMO e NFW. Questa differenza si manifesta, in particolare, quando includiamo nell'intervallo radiale del fit la regione dominata dai termini di 2-halo e di infall per il profilo DK14. Tale risultato pone dei quesiti sulle ripercussioni che ciò può avere in applicazioni cosmologiche. L'effetto del profilo esterno sulla determinazione della massa dell'ammasso dovrà essere studiato più approfonditamente, con le relative conseguenze sulla determinazione dei parametri cosmologici.
- Abbiamo individuato il raggio di splashback nei profili stacked analizzati e riportato le posizioni dei minimi della derivata logaritmica della densità, in cui si identifica il raggio di splashback. I valori di  $R_{sp}$  sono stati utilizzati per studiare le possibili correlazioni tra il rapporto  $R_{sp}/R_{\Delta}$  e i parametri caratterizzanti l'ammasso. Questo seguendo quanto ottenuto in letteratura, con particolare attenzione ai lavori eseguiti su simulazioni.
- Utilizzando i raggi e i valori mediani delle masse, abbiamo elaborato una relazione di scala analoga a quella presente in [More et al. \(2015\)](#). L'andamento ottenuto ha mostrato una discrepanza con i risultati delle simulazioni, predicendo un'evoluzione crescente di  $R_{sp}/R_{\Delta}$  in funzione del parametro  $\nu$ , opposta a quanto atteso. I singoli valori dei raggi  $R_{sp}$ , ottenuti in questa tesi, si sono tuttavia mostrati consistenti con le recenti stime ottenute da altri dati osservativi.
- Studiando il comportamento della normalizzazione  $b_e$  e della pendenza  $s_e$ , associate alla legge di potenza che descrive il profilo esterno del DK14, ab-

biamo trovato consistenza con gli andamenti previsti in funzione della massa. Tuttavia, per la dipendenza dal redshift, abbiamo trovato una tendenza opposta a quanto predetto in [Diemer & Kravtsov \(2014\)](#) per il parametro  $b_e$ . Questo suggerisce di approfondire in futuro la natura fisica di questa normalizzazione.

I nostri risultati hanno mostrato per la prima volta, mediante osservazioni di weak lensing, discrepanze sul comportamento di  $R_{sp}$  rispetto a quanto predetto dai dati simulati. Ciò motiva l'interesse per continuare le osservazioni di questa particolare regione del profilo di densità, e del raggio che la caratterizza. Questo nell'ottica di fornire un nuovo osservabile per testare le teorie di formazione delle strutture e la natura della DM, la quale è un ingrediente fondamentale per eseguire le simulazioni cosmologiche.

Per il momento, le future analisi pensate per questo lavoro di tesi seguono l'esempio di [Rana et al. \(2023\)](#). In futuro tenteremo di ricavare una misura del raggio di splashback utilizzando la distribuzione delle galassie membro dell'ammasso. Questo ci permetterà di fare un'analisi congiunta delle posteriors ottenute dal lensing debole e dalla distribuzione delle galassie, per studiare biases e sistematiche eventuali presenti nei due metodi. Oltre a questo, l'obiettivo principale resta quello di riapplicare le analisi eseguite avendo a disposizione campioni di dati più ampi e di qualità migliore, in modo da restringere l'incertezza sui valori dei parametri e conseguentemente sui coefficiente delle relazioni di scala presentate. Su questo punto sarebbe interessante utilizzare la successiva release di KiDS-DR4, dove vengono inclusi i dati VIKING nel vicino infrarosso, fornendo così misure fotometriche per un totale di 9 filtri a banda larga (u,g,r,i,Z,Y,J,H,K). Tutto ciò per ampliare la conoscenza su questo nuovo osservabile per l'analisi della teoria della formazione delle strutture, anche alla luce dei dati futuri che arriveranno dalla missione Euclid.

# Bibliografia

- Adhikari, S., Dalal, N., & Chamberlain, R. T. 2014, *J. Cosm. Astro-Particle Phys.*, 2014, 019
- Adhikari, S., Sakstein, J., Jain, B., Dalal, N., & Li, B. 2018, *J. Cosm. Astro-Particle Phys.*, 2018, 033
- Adhikari, S., Shin, T.-h., Jain, B., et al. 2021, *ApJ*, 923, 37
- Akerman, N., Tonnesen, S., Poggianti, B. M., Smith, R., & Marasco, A. 2023, *arXiv e-prints*, arXiv:2301.09652
- Andernach, H. & Zwicky, F. 2017, *arXiv e-prints*, arXiv:1711.01693
- Angle, J., Aprile, E., Arneodo, F., et al. 2008, *Phys. Rev. Letters*, 100, 021303
- Angulo, R. E., Springel, V., White, S. D. M., et al. 2012, *MNRAS*, 426, 2046
- Baltz, E. A., Marshall, P., & Oguri, M. 2009, *J. Cosm. Astro-Particle Phys.*, 2009, 015
- Bellagamba, F., Roncarelli, M., Maturi, M., & Moscardini, L. 2018, *MNRAS*, 473, 5221
- Bellagamba, F., Sereno, M., Roncarelli, M., et al. 2019, *MNRAS*, 484, 1598
- Benítez, N. 2000, *ApJ*, 536, 571
- Beraldo e Silva, L. J., Lima, M., & Sodr e, L. 2013, *MNRAS*, 436, 2616
- Borgani, S. & Guzzo, L. 2001, *Nature*, 409, 39
- Borgani, S. & Kravtsov, A. 2011, *Advanced Science Letters*, 4, 204
- Cavaliere, A. & Fusco-Femiano, R. 1976, *A&A*, 49, 137
- Clowe, D., Brada , M., Gonzalez, A. H., et al. 2006, *ApJ Lett.*, 648, L109

Contigiani, O., Hoekstra, H., Brouwer, M. M., et al. 2023, *MNRAS*, **518**, 2640

Cui, W., Knebe, A., Yepes, G., et al. 2018, *MNRAS*, **480**, 2898

de Jong, J. T. A., Verdoes Kleijn, G. A., Erben, T., et al. 2017, *A&A*, **604**, A134

Despali, G., Giocoli, C., Angulo, R. E., et al. 2016, *MNRAS*, **456**, 2486

Diemer, B. 2018, *ApJ Suppl.*, **239**, 35

Diemer, B. & Kravtsov, A. V. 2014, *ApJ*, **789**, 1

Eddington, A. S. 1919, *Nature*, **104**, 372

Einasto, J. 1965, Trudy Astrofizicheskogo Instituta Alma-Ata, **5**, 87

Eisenstein, D. J. & Hu, W. 1999, *ApJ*, **511**, 5

Euclid Collaboration: Giocoli, C., Meneghetti, M., Rasia, E., et al. 2023, *arXiv e-prints*, [arXiv:2302.00687](https://arxiv.org/abs/2302.00687)

Gao, L., Navarro, J. F., Cole, S., et al. 2008, *MNRAS*, **387**, 536

Gendron-Marsolais, M.-L., Hlavacek-Larrondo, J., Clarke, T. E., et al. 2016, in AAS/High Energy Astrophysics Division, Vol. 15, AAS/High Energy Astrophysics Division #15, **101.03**

Giocoli, C., Marulli, F., Moscardini, L., et al. 2021, *A&A*, **653**, A19

Goodman, J. & Weare, J. 2010, *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, **5**, 65

Hennig, C., Mohr, J. J., Zenteno, A., et al. 2017, *MNRAS*, **467**, 4015

Hsiao, T. Y.-Y., Coe, D., Abdurro'uf, et al. 2022, *arXiv e-prints*, [arXiv:2210.14123](https://arxiv.org/abs/2210.14123)

Hubble. 2017, heic1711a, available on line

Ingolia, L., Covone, G., Sereno, M., et al. 2022, *MNRAS*, **511**, 1484

Lesci, G. F., Marulli, F., Moscardini, L., et al. 2022, *A&A*, **659**, A88

Li, S.-S., Kuijken, K., Hoekstra, H., et al. 2023, *A&A*, **670**, A100

Liske, J., Baldry, I. K., Driver, S. P., et al. 2015, *MNRAS*, **452**, 2087

Marulli, F., Veropalumbo, A., & Moresco, M. 2016, *Astronomy and Computing*, **14**, 35



Maturi, M., Bellagamba, F., Radovich, M., et al. 2019, *MNRAS*, **485**, 498

Melin, J. B., Bartlett, J. G., Delabrouille, J., et al. 2011, *A&A*, **525**, A139

Meneghetti, M., Rasia, E., Merten, J., et al. 2010, *A&A*, **514**, A93

Miller, L., Heymans, C., Kitching, T. D., et al. 2013, *MNRAS*, **429**, 2858

Miller, L., Kitching, T. D., Heymans, C., Heavens, A. F., & van Waerbeke, L. 2007, *MNRAS*, **382**, 315

More, S., Diemer, B., & Kravtsov, A. V. 2015, *ApJ*, **810**, 36

Murata, R., Sunayama, T., Oguri, M., et al. 2020, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **72**, 64

Navarro, J. F., Frenk, C. S., & White, S. D. M. 1997, *ApJ*, **490**, 493

Navarro, J. F., Hayashi, E., Power, C., et al. 2004, *MNRAS*, **349**, 1039

Padmanabhan, T. 2003, *Phys. Rept.*, **380**, 235

Piffaretti, R., Arnaud, M., Pratt, G. W., Pointecouteau, E., & Melin, J. B. 2011, *A&A*, **534**, A109

Planck Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y., et al. 2020, *A&A*, **641**, A6

Rana, D., More, S., Miyatake, H., et al. 2023, *arXiv e-prints*, arXiv:2301.03626

Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., et al. 1998, *Astron. J.*, **116**, 1009

Schechter, P. 1976, *ApJ*, **203**, 297

Sheth, R. K. & Tormen, G. 1999, *MNRAS*, **308**, 119

Sunyaev, R. A. & Zeldovich, Y. B. 1972, *Comments on Astrophysics and Space Physics*, **4**, 173

Suyu, S. H., Auger, M. W., Hilbert, S., et al. 2013, *ApJ*, **766**, 70

Tinker, J., Kravtsov, A. V., Klypin, A., et al. 2008, *ApJ*, **688**, 709

Tinker, J. L., Robertson, B. E., Kravtsov, A. V., et al. 2010, *ApJ*, **724**, 878

Umetsu, K. & Diemer, B. 2017, *ApJ*, **836**, 231

Umetsu, K., Medezinski, E., Nonino, M., et al. 2012, *ApJ*, **755**, 56

Zenteno, A., Mohr, J. J., Desai, S., et al. 2016, *MNRAS*, **462**, 830

Zhu, W., Zhang, F., & Feng, L.-L. 2022, *ApJ*, **924**, 132