Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

RIFLESSIONI SUL PERCHÉ SI STUDIA MATEMATICA

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Silvia Benvenuti

Presentata da:
Giulia Cecchini

Correlatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Manuela Fabbri

Sessione Unica
Anno Accademico 2021/2022

Al passato,
al presente,
al futuro ...

Introduzione

Alla base dello studio presentato nel seguente elaborato vi è l'analisi della matematica con riguardo alla sua natura e ai motivi per cui essa viene insegnata in tutti i gradi di istituzione scolastica italiana.
Le motivazioni che mi hanno spinto a scrivere questa tesi hanno una duplice natura: innanzitutto riflettere sulla continua domanda che mi è stata posta in questi anni *"ma perché studi proprio matematica?"*; in secondo luogo, il desiderio di approfondire i temi di cui sopra, incentivato dalle esperienze vissute nell'ambito del tirocinio universitario.

L'obiettivo di questa tesi è portare argomenti in grado di far ricredere almeno in minima parte coloro che basano la loro concezione di matematica su giudizi poco approfonditi o stereotipi, da una parte stimolandone la curiosità dall'altra chiarendo perché l'insegnamento della matematica nelle nostre scuole sia tanto importante.
Partendo dallo studio di quanto è presente in letteratura, si è condotta un'indagine, ricorrendo ad un questionario anonimo, che aveva come campione sia studenti di due differenti istituti scolastici di secondo grado sia persone di qualsiasi età e occupazione. Infine si è portato un esempio di matematica applicata, la Teoria delle decisioni.

La tesi è organizzata in quattro capitoli: nel primo capitolo si cerca di dare una definizione di matematica ponendo soprattutto l'attenzione sui risultati che si possono ottenere con una conoscenza, anche minima, della disciplina. Si analizzano inoltre i pregiudizi più frequenti sulla matematica e la visione sociale emersa da varie ricerche svolte negli anni passati.
Nel secondo capitolo ci si concentra sull'indagine effettuata con i questionari, riportando

un commento finale delle risposte ottenute e proponendo un confronto con quanto riportato in merito nel capitolo precedente.
Nel terzo capitolo si descrivono le normative italiane che disciplinano l'insegnamento matematico a scuola, con uno sguardo verso le competenze chiave a livello europeo.
Nel quarto capitolo si espongono le basi della Teoria delle decisioni. Si riportano esempi di sue applicazioni sia in contesti quotidiani sia in altri campi.
Si è scelta proprio questa branca perché ci sembra l'esempio perfetto che riesca a chiarire a tutti gli effetti l'importanza e l'utilità della matematica nel formare cittadini attivi, competenti e dotati di pensiero critico.

Indice

Introduzione **i**

1 Matematica? **1**

1.1 Che cos'è 2

1.2 Cosa sviluppa e potenzia in noi 6

1.3 Visione Sociale 9

1.4 Come si può sconfiggere il pregiudizio 13

2 Indagine sociale **17**

2.1 Questionario 17

2.2 Analisi dei risultati 20

2.2.1 Confronto fra scuole 20

2.2.2 Il pensiero di un campione eterogeneo 37

3 Matematica a scuola **43**

3.1 Normative 43

3.1.1 Storia della scuola italiana 43

3.2 Quadri di riferimento 45

3.2.1 Indicazioni Nazionali 47

3.2.2 Indicazioni Nazionali 47

3.2.3 Linee Guida 49

3.2.4 Sguardo generale su IN e LG 50

3.3 Competenza: sguardo introduttivo 51

3.3.1 Didattica per competenze 54

3.4 Competenze chiave europee 60
3.4.1 Competenze matematiche 61
3.4.2 Cosa significa esser "cittadino responsabile" 67

4 Introduzione alla Teoria delle decisioni 69
4.1 Decisioni in condizioni di incertezza 72
4.1.1 Decisioni condizionate da informazioni 79

Conclusioni 89

Bibliografia 91

Capitolo 1

Matematica?

La parola matematica ha le sue origini nel verbo greco $\mu\alpha\theta\acute{\alpha}\nu\omega$ (manthano) che significa *imparare.* Da questo, deriva il sostantivo $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (mathema) che è *scienza, conoscenza, apprendimento.*

L'egittologo Boris Di Rachewiltz, all'interno del suo libro "Egitto magico-religioso", suppone che in realtà il termine greco mathema derivi dalla parola egiziana *Maat* che, oltre ad essere il nome di una dea, racchiude in sé i significati di *ordine, verità, giustizia.*

Non vi è da stupirsi che l'origine della parola possa risalire all'antico Egitto. La matematica accompagna la vita dell'uomo sin dal Paleolitico.

I primi segni matematici di conteggio li troviamo sull'osso di Lebombo, Sud Africa, risalente a circa 37.000 anni fa. Vi troviamo incise 29 tacche probabilmente utilizzate per contare le fasi lunari.

Ma dobbiamo aspettare i Sumeri (2400 a.C.) per la nascita della ragioneria e i Babilonesi (2000 a.C.) per i primi documenti matematici con argomenti algebrici, secondo l'odierna classificazione.

Anche il caro metodo ipotetico-deduttivo, che tutt'ora è una delle principali caratteristiche della matematica e delle scienze in generale, ebbe origine con Eudosso e ottenne la sua fama grazie ad Euclide e i suoi *Elementi.*

1.1 Che cos'è

Con questo titolo ci si aspetterebbe di trovare qua di seguito una bella frase che finalmente definisca una volta per tutte cos'è la matematica.
Mi dispiace deludervi ma tutto questo non è possibile.
Vi sono svariati tipi di definizioni, dalle più filosofiche alle più rigide, passando anche per quelle ironiche come quella di C. Darwin: *il matematico è un cieco, in una stanza buia, che cerca un gatto nero che non c'è.*
È un argomento sul quale è ancora vivo il dibattito fra filosofi e matematici. I motivi alla base di questa controversa ricerca sono svariati. Ad esempio, le tradizioni diverse e i diversi campi in cui si diversifica, mettono in evidenza ora un aspetto ora un altro.
Nel XIX secolo si formarono tre principali filoni, ognuno dei quali riflette la propria filosofia della matematica:

1. **Logicismo** Definisce la matematica in termini di deduzione e logica, ponendo il focus su basi più astratte e una maggior ricerca di rigore.
   Nel 1870 la definizione data dal matematico B. Pierce fu *"La matematica è la scienza che trae le conclusioni necessarie".*

2. **Intuizionismo** Nasce dal pensiero del matematico Brouwer. Questo movimento giunse a risultati diversi dai teoremi della logica classica. Infatti, differenza sostanziale fra queste due correnti sta nella sostituzione della nozione di verità con quella di *giustificazione* nel suo calcolo logico. Ciò comporta che in un ragionamento logico, nel passaggio dalle premesse alle conclusioni, non si preserverà la validità dell'enunciato ma la sua giustificabilità. Questo è dovuto al fatto che in questa corrente di pensiero, si potrà assegnare valore di verità vero soltanto se si è capaci di verificarlo tramite una dimostrazione.
   Da come si deduce dal nome stesso, il fulcro è l'intuizione e la matematica è vista come una *costruzione di idee nella mente.*
   "L'unico fondamento possibile della matematica va ricercato in questa costruzione con l'obbligo di vigilare attentamente su quali costruzioni l'intuizione consente e quali no". L. E. J. Brouwer

3. **Formalismo** Questa corrente è del tutto diversa dalle precedenti poiché sposta completamente l'attenzione sui suoi simboli e sulle regole sintattiche per manipolarli.
   H. Curry la definisce così: *La matematica è la scienza dei sistemi formali.*

È evidente come ogni definizione sia in realtà diametralmente opposta alle altre e non esaustiva, non permettendo quindi il raggiungimento di un consenso.

Lo sviluppo stesso della disciplina rende difficile una sua definizione univoca. Infatti, se consideriamo la storia della matematica notiamo come nell'antichità prevaleva soprattutto una visione più concreta, come quella di Aristotele per cui *"La matematica è la scienza della quantità"*, mentre in tempi più recenti si optava più per prospettive che tenessero più in considerazione l'astrazione.
A metà dell'Ottocento, i matematici si resero conto che la necessità di dover affiancare ogni nuova nozione con un'interpretazione sensibile portava la ricerca ad arenarsi. S'insinuò quindi il pensiero che non erano gli aspetti qualitativi degli oggetti ad ispirare la materia ma, piuttosto, le relazioni che li legavano.
Agli inizi del secolo scorso, inizia a prender forma l'idea di **struttura**: enti diversi hanno ugual struttura se regolati e sorretti dalle stesse leggi.
Per cui l'oggetto ha importanza soltanto nella totalità delle sue relazioni e, di conseguenza, la matematica è la scienza che studia tali relazioni. Da questo provengono il gran potenziale dell'astrazione e il dono della sintesi, cioè gruppi di enti molto distinti in apparenza possono matematicamente accostarsi se hanno relazioni simili.
Questo approccio trova ancora oggi il consenso fra molti grandi esperti della disciplina.

Date tutte queste premesse, sarebbe arrogante da parte mia pretendere di fornire una definizione esaustiva.
Personalmente parlando, posso solo dirvi che talvolta mi piace considerarla come *"Una lingua che spiega il Tutto"*. Infatti, la matematica, così come ogni altra lingua, si basa su un proprio alfabeto, grazie al quale si formano delle parole. Con l'unione delle parole si creano frasi, che nel nostro caso saranno le formule. Le frasi ovviamente devono soddisfare un insieme di regole dettate dalla grammatica, che in matematica sono formate

da teoremi, assiomi, proprietà, corollari etc....
Per quanto concerne l'utilizzo, esso è identico a quello di qualsiasi altra lingua che conosciamo: descrivere, spiegare ed esprimere ogni cosa. Se ci soffermiamo un attimo a pensare, noteremo che tutto ciò che ci circonda, dalla particella subatomica ai più grandi sistemi di galassie, è descrivibile con la matematica.

Siccome non è possibile definire tout court "che cos'è", mi sembra opportuno provare a dare un'idea di alcuni aspetti, alcune caratteristiche che rendono unica la matematica.

Legame con le scienze naturali. Le più grandi innovazioni matematiche sono dovute ad indagini empiriche, altre traggono origine dalle attività umane, come la contabilità e i numeri. L'etimologia di geometria non è nient'altro che *misurazione della terra*, rifacendosi alla suddivisione dei terreni e costruzioni di piramidi.

Eterogenea. Questo è evidente considerando i tanti rami in cui si diversifica e le infinite applicazioni che talvolta passano a noi come tecnologie, senza renderci conto che alla loro base vi è la matematica.

Unita. Pur quanto eterogenea rimane fedele alla sua struttura da secoli, in definitiva rimane una cosa sola.

Estetica. Ricerca la bellezza all'interno della logica in modo da riuscire a trovare schemi e regolarità nascoste.

Studia sé stessa. Studiando le relazioni che intervengono fra gli oggetti si formano appunto delle strutture. Queste a loro volta divengono oggetti dei quali si è interessati a scoprire quali nuove relazioni sono presenti, e così via. Questo è una proprietà unica soltanto alla matematica.

Procedimento induttivo. Permette di cercare le leggi universali che unificano varie teorie. Possiamo paragonare la matematica ad una cassetta degli attrezzi che ci fornisce strumenti universali, quali il ragionamento, fondamentali a discernere i vari problemi della vita.

Fluida e dinamica. Può sembrare un assurdo ma in realtà la matematica è sempre aperta a nuove idee, dimostrazioni e teorie a patto che esse rispettino le relazioni e le leggi generali. Contrariamente a quanto si pensi, non è indipendente né dal tempo né dallo spazio dato che è formata da ragionamenti situati.

Stabilità. Quasi in contrasto con quanto appena detto, ma in realtà evidenzia come, una volta accettata una nuova idea, su di essa si baserà il nuovo lavoro.

Cooperativa. Non per forza il lavoro di un matematico è solitario, ove il lavoro intellettuale sostituisce le relazioni sociali. In passato, i luoghi in cui si coltivava la matematica era le corti imperiali, le scuole d'abaco e le università. I docenti antichi erano chiamati *lettori* proprio perché s'insegnava disputando e cioè dialogando.
Famosissimi sono anche gli scambi epistolari fra le grandi menti matematiche, grazie ai quali si facevano conoscere le proprie scoperte, si redigevano correzioni e si chiedevano consigli.

Gerarchica. Tutti i fatti di una teoria sono legati gli uni agli altri da deduzioni logiche. Questo comporta che non si possono comprendere i risultati senza capire l'intero processo.
Tale caratteristica la contraddistingue dalle altre scienze ed è uno dei motivi per cui è poco amata dagli studenti.

Formale. Si sa, è una scienza che usa un suo linguaggio specifico e che deve soddisfare regole così da non diventare contraddittoria. Ha i suoi schemi di ragionamento. Questa formalità trova giustificazione nell'astrattezza.

Astratta. È forse l'aspetto più noto della matematica e anche il più odiato. Racchiude in sé il grande potere di poter descrivere molte situazioni diverse usando una stessa formula.

Generale. È quasi la conseguenza dell'astrattezza. Strutture matematiche differenti hanno tantissime caratteristiche comuni che obbediscono a specifiche regole. Se si conoscono tali generalità, i casi specifici diverranno poi di facile manipolazione se non addirittura ovvi. Impostando già da subito una disciplina con questi criteri, è

possibile risparmiare tempo e lavoro evitando di dover modificare minuziosamente le descrizioni delle cose per adattarle al caso singolo. Poincaré, matematico di fine Ottocento, sintetizza perfettamente questi due ultimi aspetti asserendo che *La matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse".*

Portabilità. Frutto della generalità e altro motivo per cui è così fondamentale l'astrattezza. indipendentemente dal background che ha generato un tal concetto matematico, esso sarà talmente generale e astratto che potrà facilmente esser adoperato in questioni completamente diverse. È per questo che la matematica gode di innumerevoli applicazioni in campi apparentemente opposti.

1.2 Cosa sviluppa e potenzia in noi

Cerchiamo ora di capire cosa genera o cosa sviluppa in noi la conoscenza, anche minima, e la dimestichezza di questa disciplina. Alcune di queste tematiche si ritroveranno più avanti all'interno del capitolo 3.
Ovviamente in questa sezione diamo per scontato la capacità di calcolo.
Partiamo considerando i precedenti aspetti di generalità, astrattezza e socialità. Come già affermato, la matematica si basa su concetti generali, non contraddittori e tali da dover convincere tutti. Per far questo utilizza appunto un specifico linguaggio e concetti astratti. Tale linguaggio richiede che ci sia un certo allenamento nella manipolazione di simboli e concetti e il frutto di questo allenamento è il potenziamento di una certa **competenza linguistica**. Difatti, dovendo convincere gli altri dei risultati del nostro lavoro, necessitiamo di termini specifici ma soprattutto dobbiamo esser in grado di farlo nel giusto modo. Tutto ciò porta anche a sviluppare/rafforzare un certo **rigore** e **rispetto delle regole** e dei **contesti**.
Personalmente parlando, credo che la matematica faccia sorgere in noi una certa **attitudine alla vita**. Ne è un esempio il rigore e il rispetto delle regole indipendentemente dalla loro natura. Ma per meglio comprendere questo mio pensiero, continuiamo la trattazione analizzando anche altri aspetti.
È indubbio ritenere che la matematica promuova il **ragionamento critico** e con esso la **capacità critica**. Entrambi sono essenziali tanto nella matematica quanto nella vita.

All'interno dei processi logici prima di poter affermare con assoluta certezza la validità di una certa teoria si passano in rassegna varie ipotesi e conseguenze. L'intero processo è impregnato da questo tipo di ragionamento.
Traducendolo in termini di vita reale, queste facoltà ci difendono dall'essere raggirati, poiché cercheremo sempre di ragionare, cercare e analizzare le situazioni che ci si presenteranno. Questa tendenza stimola innegabilmente l'**autonomia** e la volontà di **ricercare la vera essenza** delle cose.
Dal momento che durante le fasi di questo modo di ragionare si vagliano varie strade, ne deriva anche la capacità di considerare diversi punti di vista e di esser disponibili a cambiare i propri se ci si rende conto che i nuovi presupposti risultino più veritieri, pertinenti e convincenti. In altre parole si tende ad incrementare un'importante **elasticità mentale**.
Rimanendo sempre all'interno del reale, tutti i giorni ci ritroviamo ad affrontare problemi di varia natura. Ciò che a noi interessa è risolverli. In quanto persone, siamo portate a pensare che ogni problema abbia una sua soluzione ma in verità dobbiamo accettare il fatto che non sempre essa esista o che sia unica, e questo è un'evidenza con la quale lo scienziato deve rapportarsi continuamente.
Solitamente per districarci da un problema eseguiamo inconsapevolmente questi quattro passi:

riconoscere che c'è un problema;

decidere quale soluzione ci può soddisfare;

descrivere il problema;

trovare una soluzione.

Per cui, innanzitutto dobbiamo individuare se siamo di fronte ad una situazione problematica. Questa fase ha carattere soggettivo poiché ciò che per me rappresenta un problema non per forza lo è per un'altra persona. In generale però riusciamo a capirlo dato che avvertiamo dentro di noi la forte urgenza di uscire dal disagio.
Partendo dal presupposto che non esiste un'unica soluzione per un problema, durante il secondo passaggio è importante determinare la soluzione che secondo il nostro parere

farà al caso nostro risolvendo il problema. Per poterla trovare possiamo affidarci sia all'esperienza che all'innovazione, nel caso in cui ci trovassimo in una situazione per noi del tutto nuova.
Gli strumenti che possiamo adoperare in questo secondo scenario sono la fantasia e il metodo. Il primo strumento è rischioso e comporta che ci sia l'unificazione fra ciò che sappiamo (nozioni interiorizzate) e ciò che ancora non si conosce. Inoltre, è necessaria una buona dose di fiducia nelle proprie capacità. Il metodo inficia l'abilità di suddividere il problema in sotto-problemi più semplici da affrontare.
La terza tappa permette di chiarire a noi e agli altri il problema guidandoci così verso una soluzione o facendoci accorgere che non ne possiede alcuna. Anche la descrizione risente molto del fattore di soggettività. Infine, si trova una soluzione e si verifica la sua efficacia.
Possiamo quindi parlare di **problem solving.** Essa è una competenza utilissima nella vita così come nella matematica. Difatti possiamo sostenere che il suo fulcro risieda appunto nella risoluzione di problemi. Fornendoci strumenti il più generali possibili, passando dal concreto all'astratto, possiamo poi utilizzarli nelle situazioni più disparate. Le descrizioni dei problemi vengono stilate utilizzando simboli ed equazioni, a garanzia della generalità e, troverà delle soluzioni che saranno astratte e simboliche. A noi non rimarrà altro che prendere tale soluzione e ricontestualizzarla al nostro problema.
Affinare questa mentalità ci consentirà di approcciarci alle varie complicazioni della vita facendoci meno sopraffare da sentimenti negativi e ansiogeni. Ci fornirà anzi un metodo che ci guida sin da subito a rimboccarci maniche e a razionalizzare il problema.
Non tralasciamo poi il potenziamento dell'**intuizione**, amica stretta del ragionamento critico e del problem solving, la quale però può risultare anche pericolosa se non trova giustificazione empirica portandoci all'errore. Ma a tale riguardo, si ha che sia la matematica, così come altre scienze, porta ad un **ridimensionamento del concetto di errore.** Basti pensare a come lo sviluppo della ricerca scientifica sia dovuto anche alla presenza di errori che aiutano il ricercatore a riconsiderare i propri passi e ad affinare le tecniche. Pertanto non esisterebbe la ricerca senza alcun tipo di errore. Ciò dovrebbe farci dedurre che non sempre l'errore ha connotazioni negative ma al contrario talvolta può esser fondamentale per ottenere risultati grandiosi.

Già da questa lista di capacità e competenze è facile intuire perché sia così importante l'insegnamento della matematica.

1.3 Visione Sociale

Come si evince anche dalle risposte ai questionari (analizzate in seguito nel capitolo 2), la matematica è la materia che, più di tutte, evoca emozioni negative: ansia, sfiducia, diffidenza, insicurezza ....

Le lezioni a scuola vengono spesso reputate **noiose, difficili e pesanti** rispetto a quelle di altre materie. Molto è dovuto proprio alle caratteristiche stesse della matematica: il suo essere gerarchica, astratta e formale comporta allo studente un impegno costante e uno studio che spazia dal teorico al pratico durante il quale deve utilizzare il ragionamento ed un linguaggio specifico. Questo, invece di esser considerato come un importante alleato che permette di semplificare la scrittura di vari risultati e rendendoli così generici, lo si considera nostro nemico portando alla **demonizzazione della formula**, spesso presentata come un oggetto che complica lo studio dovendola imparare a memoria.

Inoltre, a livello di valori personali, l'obiettivo di imparare la matematica ricopre un livello molto basso poiché la si considera **inutile** nella vita di tutti i giorni.

Se facessimo ora un confronto con le risposte ottenute dalla mia indagine, vedremmo che in realtà questa scala di valori è cambiata. Infatti, la matematica viene considerata molto importante e utile nella vita quotidiana dato che permette di sviluppare una forma di ragionamento critico che risulterà essenziale per risolvere varie situazioni problematiche.

Sovente l'alunno non attua un approccio sistematico allo studio della matematica dato che lo reputa **dispendioso** e, se ci aggiungiamo anche la convinzione che essa sia in realtà inutile, il tutto viene vissuto come **troppo faticoso**. Ma la conseguenza di uno studio così altalenante è di non riuscire ad afferrare i concetti, perdersi all'interno dei vari argomenti. Ciò porta inevitabilmente all'incomprensione di quello che si sta insegnando e nella persona può generarsi una sensazione di alienazione rispetto al contesto classe ed un'**aspettativa di fallimento** dei nostri sforzi.

Le aspettative sono quindi cariche di emozioni negative, e generano così un circolo vi-

zioso che richiede veramente molto lavoro e fatica per uscirne prima che tali concezioni riescano a fissarsi/radicarsi con forza nella nostra mente.
La matematica ha una forte immagine e non lascia nessuno indifferente. È per questo che la società, influenzata anche dai media, i giornali, i teatri, il cinema, ha una vivida visione di essa. Generalmente la si reputa staccata dalle altre scienze e meno pericolosa ma in realtà è la scienza più colpita dal *pregiudizio*.
Risulta quasi scontato ma se si pronuncia la parola "matematica" tutti (o quasi) pensiamo **ai numeri, ai conti, alle equazioni** identificando in questo modo l'intera disciplina con essi. Sicuramente questo è il bagaglio che ci portiamo dietro dalle nostre esperienze scolastiche, ove ci trovavamo a dover risolvere esercizi su esercizi in maniera completamente meccanica. In parte, questa prospettiva è anche giustificabile dato che la matematica che viene spiegata a scuola non è molto attraente e lascia poco spazio al ragionamento. Però se riandate a leggere il Capitolo 1.2, il far di conto viene sì e no menzionato proprio perché non è questo il fulcro della matematica.
E, se proprio vogliamo dir tutta la verità, la maggior parte dei matematici non sono bravi coi conti!
Comunque, dal momento in cui la si considera solo numeri e conti è ovvio considerarla una disciplina **arida, fredda**, completamente **astratta** e **misteriosa**. In pratica è un insieme di risultati piovuti dal cielo, creati per puro logicismo dalla volontà di qualcuno. Ciò significherebbe che la matematica è un gioco formato da definizioni e regole, messe insieme senza una ragione né uno scopo. Rendiamoci però conto che se così fosse, nessuna persona intelligente mostrerebbe un minimo di interesse nei riguardi di una disciplina di questo genere.
Inoltre, l'astrazione è scarsamente riconosciuta come un importante modo di ragionare; piuttosto la si considera un ostacolo che si frappone fra i problemi matematici (e quindi astratti) e noi che siamo alquanto concreti, richiedendoci una fatica immensa per comprenderli.
L'astrazione insieme a questa fatica, portano come risultato **"l'assioma del talento"**. Per studiare matematica, a qualsiasi livello o grado scolastico, la società ritiene che si debba esser portati, come se non la si potesse imparare ma che la si possa capire solo se per nascita abbiamo ricevuto in dono il *talento matematico*.

In aggiunta, tale talento sembrerebbe prerogativa completamente *maschile*. Quasi sicuramente quest'idea è un retaggio della vecchia visione maschilista che precludeva al mondo femminile gli studi scientifici. Oggi giorno, per quanto si stia cercando di fornire tanti modelli femminili, questo stereotipo è ancora presente. Lo dimostrano anche tante ricerche (ed è emerso anche dalla mia indagine) come le studentesse, sentendo il peso di tali convinzioni, vivono l'insegnamento della matematico con **ansia**. Questa emozione atavica e salvavita, è molto potente ma, tuttavia, in situazioni come questa dà prova del proprio potere ma in maniera controproducente perché porta il soggetto a convincersi di non esser all'altezza, bloccando così il sistema cognitivo. Ne deriva che le ragazze trovano in questo malessere una giustificazione per non interessarsi alla matematica, a ritenerla così un *qualcosa che non fa per loro* aderendo in questa maniera loro stesse al cliché. Questa convinzione del talento è sostenuta anche da tanti genitori i quali non mostrano gran preoccupazione nel sapere che il proprio figlio mostra qualche difficoltà in matematica, anzi quasi lo giustificano. Difatti, quante volte sentiamo dire "*tanto non ci capivo nulla a scuola*" con un atteggiamento sbarazzino, rasentando quasi il vanto, e anche da persone che godono di una certa cultura o ricoprono importanti cariche politiche.
Ma invece di considerarlo una normalità, o anzi peggio una qualità, ci dovremmo spaventare. Dimostra quanto poco si è abili nell'usare gli artifici matematici: come possiamo pensare di vivere in una moderna *società globale della conoscenza*, se anche chi ci governa non è autonomo nel sviluppare un pensiero razionale?
Per quanto riguarda il contesto scolastico, la visione della matematica risente molto anche del ruolo e dell'atteggiamento del professore dato che gli studenti rapportano la materia con chi la insegna. Anche i docenti di matematica portano su di sé il peso del preconcetto, ma ciò che è più pericoloso è che molti professori, soprattutto coloro che non posseggono una preparazione matematica/fisica, credono a loro volta a questi falsi miti sulla matematica. In aggiunta, a causa di proprie esperienze passate, provano anch'essi quel complesso miscuglio di emozioni negative dei loro studenti andando così inevitabilmente ad inficiare sull'insegnamento. In classe si potrebbe creare un clima teso in cui l'errore non è ammesso, si tenderà in questo modo al "**compromesso della risposta corretta**". In tale situazione, gli studenti cercheranno sempre di dare una risposta e il professore si soffermerà soltanto sull'esattezza o meno di tale risposta, non ponendo

attenzione se vi sono incomprensioni o errori nel processo di formazione di tale risultato. In questa maniera il ragionamento sarà limitato, si assocerà matematica = studio mnemonico ricreando così il pericoloso circolo vizioso di cui abbiamo parlato prima.
La visione sociale della matematica si crea non solo grazie alle nostre esperienze scolastiche ma anche con il contributo di articoli, notizie e film. Ne sono stati girati diversi che raccontano la vita e le scoperte di grandi menti matematiche/fisiche ritraendoli sempre però come dei **geni, folli** che rinunciano alla loro vita in nome dei loro studi, persone **prive di emozioni e sentimenti**. Tutto questo si traduce nello stereotipo del matematico come uno **sfigato**, sicuramente **brutto, gelido** e **pericoloso per quanto geniale**. Si dà in questo modo ragione all'assioma del talento maschile della matematica, la quale è una disciplina per pochi eletti. Il rischio poi è quello di allontanare i giovani dalle carriere scientifiche e soprattutto matematiche, sfiduciati anche dalla poca informazione sui possibili sbocchi lavorativi di tale percorso formativo.
Da poco tempo si è introdotta una parola che dipinge perfettamente la conseguenza forse più pericolosa e preoccupante di un atteggiamento verso la matematica dettato dal pregiudizio: l'***anumerismo***.
Esso indica l'incapacità di maneggiare comodamente i concetti base della matematica, come i dati e i numeri, dovuta ad una mancanza o una povertà di tali conoscenze. Questa parola fu introdotta grazie al titolo del libro di Paulos "*El hombre anumérico*" (traduzione spagnola del titolo "*Innumeracy: Mathematical Illiteracy and its Consequences*"). In pratica possiamo paragonare la relazione anumerismo - matematica con quella presente tra analfabetismo - lingua comune. Tale ignoranza porta ad una chiusura del sistema cognitivo di fronte a ragionamenti matematici anche elementari portando a conseguenze di vario genere.
Pensiamo ad esempio a come possa tradursi in una mala gestione del diabete se il paziente non è in grado di calcolare, a seconda dell'apporto calorico assunto, la giusta quantità di insulina. Fortunatamente, in questo caso c'è la tecnologia a darci una mano compensando così il divario: tuttavia, le mancanze non sempre possono far affidamento a qualche strumento. L'anumerismo rende le persone più suscettibili di manipolazione, ad accettare conclusioni e notizie senza averci riflettuto sopra dato che di fronte ai numeri siamo propensi a mostrare piena fiducia; inoltre lascia campo libero alla pseudoscienza.

È proprio su questa debolezza che si fanno forza i media e le varie notizie che girano in rete. Spessissimo veniamo bombardati da articoli che riportano cifre, percentuali e risultati di sondaggi nelle quali però vengono sapientemente omesse parti rilevanti ai fini della corretta comprensione creando così notizie sensazionalistiche.
Facciamo subito un esempio di queste manipolazioni di informazioni: se leggessimo sul giornale della nostra città un titolo riportante la notizia che il tasso di criminalità è aumentato del 60% in più rispetto all'anno passato, sono certa che tutti avvertiremmo una certa preoccupazione. Ma se invece di questo titolo sensazionalistico leggessimo i dati esatti, e cioè che nell'anno precedente il numero di casi furono 8 e che di conseguenza, calcolandone il 60% in più, quest'anno sono 13 sicuramente tutti noi ridimensioneremmo il nostro timore.
Nel seguente paragrafo vedremo come in parte possiamo cercare di arginare/contrastare questo gravoso problema.

1.4 Come si può sconfiggere il pregiudizio

L'arma più efficace per combattere il pregiudizio, e con esso tutte le sue possibili conseguenze, è la **comunicazione**. In sua mancanza si lascia inesorabilmente spazio alla pseudoscienza e all'ignoranza e, quindi, sulla base di questo presupposto informare è uno dei doveri di qualsiasi ricercatore così da prospettarsi una comprensione, seppur in caso parziale, da parte della società dell'importanza dei risultati del suo operato.
Dato che la matematica è considerata una disciplina fredda e inutile, si dovrebbe a maggior ragione cercare di comunicarla soprattutto in un'epoca come la nostra, caratterizzata da innovazione e progresso tecnologico. In definitiva, il benessere sociale dipende in maniera decisiva dalla cultura matematica ed è proprio per questo che ci si deve impegnare affinché l'atteggiamento verso questa scienza cambi completamente.
Ma comunicare la scienza, in particolare la matematica, non è affatto facile, richiede molto impegno personale ed esperienza. Ancora oggi, soprattutto in Italia, l'attività di comunicazione viene vista come una perdita di tempo, quasi per nulla retribuita; inoltre, chi se ne occupa è vittima del pregiudizio che "forse non è sufficientemente bravo per far ricerca".

Risulta quindi chiaro capire perché i nostri ricercatori non posseggano una buona formazione nel campo della comunicazione né perché non siano interessati a farlo. Spesso, infatti, notiamo che gli scienziati *monologano* con gli interlocutori invece che dialogare, le cause di questo risiedono sia nei motivi sopra detti sia perché raramente accettano ciò che il giornalista scientifico P. Greco chiama "*il principio d'indeterminazione della comunicazione della scienza: non posso esprimere un concetto scientifico, contemporaneamente, con massima comunicabilità e massimo rigore*". Aderire a tale principio è fondamentale soprattutto se s'intende parlare di matematica dal momento che, a causa del suo formalismo e linguaggio, rende più difficile l'instaurarsi di una proficua rete di scambio di sapere.

Gli scopi di una buona comunicazione sono, per la maggior parte, motivare, incuriosire e poi chiaramente informare e formalizzare; pertanto, al fine di riuscire ad ottenerla, esistono diverse strategie.

In primo luogo per incuriosire potrebbe esser utile scegliere un ambiente tranquillo e cercare di arricchire la conversazione con umorismo, aneddoti storici e collegamenti interdisciplinari con materie antitetiche la matematica. Poi, una volta che si è riusciti a risvegliare l'interesse altrui, si può passare alla formalizzazione e informazione stando attenti a non svilire troppo la nostra disciplina. Pertanto, si dovrà sempre utilizzare un linguaggio adatto a descrivere in dettaglio l'argomento ma meno rigoroso.

Oltre al pubblico generico, l'ambito più importante per il futuro della società è quello scolastico. In questo contesto, se un insegnante non motiva e incuriosisce i propri studenti, ha scarse possibilità di esser ascoltato poi se vi aggiungiamo anche che la matematica scolastica è poco attraente ed è piena di simboli capiamo che è quasi impossibile che i medesimi alunni demotivati s'impegneranno.

Uno degli obiettivi del docente è quindi quello di far comprendere cosa e perché si stanno studiando determinati argomenti. Contrariamente a quanto si possa pensare, lo studente è molto interessato a scoprire tale ragione infatti, durante le varie lezioni di matematica, spesso al professore viene chiesto "*ma a cosa serve sapere fare questo?*". Questa rappresenta una preziosa occasione da cogliere, essenziale per incuriosire la classe. Premetto che non è assolutamente semplice riuscire a trovare la giusta risposta. Lo studente ha una idea sulle situazioni a cui andrà incontro nella propria vita contrariamente al docente

che, pur trovando mille esempi di applicazioni interessanti, dalle più banali alle più tecniche, difficilmente riuscirà a soddisfare la sua perplessità scovando l'esatto esempio che si aspettava. In questo modo la matematica sembra esser davvero inutile. Ma dopotutto siamo matematici e non lettori del futuro, per cui non possiamo indovinare con esattezza una loro probabile situazione futura in cui sicuramente gli sarà utile l'argomento che si sta per trattare. Oltre a questo, notiamo come sia praticamente impossibile identificare con precisione il momento in cui abbiamo imparato a fare una cosa specifica.
Anche Steve Jobs, in un suo discorso alla Stanford University, ha parlato di come sia impossibile nel presente "unire i puntini" (cioè l'insieme delle conoscenze acquisite) guardando al futuro; si può farlo soltanto dopo, guardando indietro. Bisogna quindi avere sempre un pò di fiducia che i puntini che noi oggi tracciamo prima o poi troveranno la loro ragione per unirsi e questo ci fornirà speranza anche nei momenti più bui.
In definitiva, il tentativo di fornire una possibile applicazione è più stimolante invece che troncare la loro curiosità discendo che non si ha tempo per approfondire la questione o che devono esser capaci di manipolarlo al fine di andar bene nel prossimo compito in classe. Infatti, in questa maniera si rafforza l'idea che la matematica sia un insieme non opinabile di formule e dogmi, messi insieme senza un motivo apparente. Al contrario, incentivare gli studenti farà sì che essi affronteranno con meno fatica lo studio, spronati dalla curiosità. Un professore che si impegna in tal senso, guadagnerà non solo in termini di miglior risultati ma conquisterà anche stima e rispetto da parte della classe, contrastando così lo stereotipo dell'arcigno professore di matematica.
Anche nel settore scolastico ci sono diverse strategie di "attacco": ci si deve tener ben lontani dal somministrare una lista di formule da imparare a memoria e di risposte preconfezionate. Invece si deve far apprezzare che in matematica tutto quello che viene presentato ha un senso logico e che c'è sempre una spiegazione alla base.
All'interno della lezione si possono includere delle curiosità storiche, sia sulla vita dei vari matematici sia sul contesto dell'epoca, ed evidenziare come il processo storico - umano abbia portato, partendo da bisogni concreti o astratti, alla formulazione di una tale teoria. In questa maniera l'alunno può scoprire che la matematica non è tutta già decisa "da tanto e da qualcuno" ma che ancora oggi è una disciplina in evoluzione. Inoltre, apprendendo come nei secoli si sia giunti alla formulazione di importanti risultati, si accorgono

come nessuno è immune all'errore.
Molto importante e utile è cercare di instaurare con la classe un clima sereno e favorevole allo scambio. In un contesto del genere, le lezioni si possono improntare anche su un dialogo reciproco fra studenti e professore, privandolo così del falso ruolo di fonte di verità. Verrà sicuramente dato maggior rilievo al ragionamento e al processo che vi sta dietro, si analizzeranno le diverse idee che vengono a crearsi, si ridimensionerà la paura di dar risposte sbagliate ma anzi si rafforzerà l'idea che per imparare sbagliare sia necessario. In questo modo, si suscita interesse sostenendo l'apprendimento e si ostacola l'ansia e tutte le altre spiacevoli emozioni, le quali bloccano il sistema cognitivo.
Per tentare di ovviare il problema del matematichese, si possono svolgere delle attività di lettura matematica così da aiutare e accompagnare lo studente, soprattutto all'inizio, a saper leggere il linguaggio, a "tradurlo" e a comprenderlo; abilità che gli sarà utile sia nel presente ma specialmente nel futuro.
Fortunatamente oggi si è capita l'importanza di stimolare gli studenti nelle scuole e del ruolo essenziale che in questo processo ricopre il docente. Pertanto adesso esistono tanti siti che forniscono materiale innovativo e strategie al mondo della didattica e anche i ricercatori in questo ramo, ricercano sempre più il feedback di coloro che lavorano sul campo così da affinare i propri studi.
In sintesi, qualsiasi sia il contesto che si sceglie, si deve dar il giusto peso alla comunicazione e alla didattica cercando di far passare il messaggio che ci sono cose della matematica che è giusto sapere e che si è completamente in grado di capire; tali conoscenze li renderanno cittadini più attivi e responsabili sia nei propri riguardi che in quelli della società intera.

Capitolo 2

Indagine sociale

Nelle precedenti pagine si è analizzato quelli che sono i pregiudizi che si ritrovano in prevalenza nella letteratura e la visione sociale della matematica che è emersa da varie ricerche svolte negli ultimi anni.
Nel corso dei miei mesi di tirocinio in un istituto scolastico, ho avuto l'opportunità di fare esperienza diretta di quella che mi auguro sarà la mia professione futura. Proprio durante questa occasione, mi è sorta la curiosità di sapere quali fossero le opinioni degli studenti in merito alla matematica.
Pertanto, ho preparato un questionario anonimo e l'ho proposto agli studenti di due differenti istituti scolastici della mia città, Pesaro: l'Istituto Tecnico Economico e Tecnologico, ove ho svolto il tirocinio, e il Liceo Classico. Le classi sono le medesime: due classi seconde e due quarte.
Successivamente ho ritenuto interessante allargare tale indagine ad altre persone, rivolgendo il questionario a volontari di ogni età, titolo di studio e occupazione.

2.1 Questionario

L'elaborazione di questo questionario mi è stata possibile grazie all'utilizzo della piattaforma Google Forms.
Da varie ricerche è emerso che le femmine, al contrario dei maschi, sono più predisposte a domande a risposta aperta, nel rispetto di questo durante la progettazione del test ho

inserito sia domande a crocette sia domande che richiedevano una risposta più ampia. La struttura del questionario è la seguente:

1. Sesso:
   Maschio Femmina Preferisco non specificarlo
2. Quale scuola stai frequentando? Quale classe?
   ---
3. Che cos'è secondo te la matematica? (giustifica la tua risposta)
   ---
4. Scrivi tre parole che ti vengono in mente pensando alla matematica e spiega il perché.
   ---
5. Quali sono per te i motivi per cui questa materia viene insegnata a scuola? (giustifica la tua risposta)
   ---
6. Secondo te, la matematica è diversa dalle altre materie scientifiche? (chimica, fisica, biologia...)
   Sì No
7. Se sì, quali sono a tuo parere gli aspetti che la rendono diversa dalle altre? (giustifica la tua risposta)
   ---
8. Che emozioni/sentimenti provi durante le lezioni di matematica?
   (giustifica la tua risposta)
   ---
9. Tali emozioni/sentimenti li provi anche con altre materie?
   Sì No
10. Se sì, in quali altre materie li provi? (giustifica la tua risposta)
    ---

11. Hai incontrato o incontri delle difficoltà con la matematica?
    Sì No

12. Se sì, quali sono?
    _____

13. Se fosse possibile, modificheresti l'insegnamento della matematica?
    Sì No

14. Se sì, compila le seguenti frasi:
    La matematica mi piacerebbe di più se _____
    La matematica mi piacerebbe di meno se _____

15. Sceglieresti di studiare matematica se fosse opzionale?
    Sì No

16. Utilizzi la matematica al di fuori del contesto scolastico?
    Sì No

17. Se hai risposto sì, quando e come?
    _____

18. In cosa pensi potrebbe servirti la matematica nella tua vita?
    _____

19. A tuo parere, esiste una relazione tra matematica e la responsabilità umana?
    Sì No Non saprei

20. Reputi che la conoscenza matematica possa rendere una persona più responsabile?
    Sì No

21. Giustifica la tua risposta alla precedente domanda.
    _____

Per poter espandere la ricerca a persone di ogni età e occupazione, alcune domande sono state leggermente modificate. Inoltre in questo caso, per per capire meglio le risposte fornite, ho aggiunto un'ulteriore domanda:

Secondo te, cosa rende un cittadino responsabile?

2.2 Analisi dei risultati

Approfondiamo ora quali sono state le risposte, partendo dal confronto di quanto ottenuto dagli studenti dei due istituti scolastici per poi giungere allo studio della prospettiva sociale più ampia.

2.2.1 Confronto fra scuole

L'idea di proporre il questionario in questi due istituti diversi, un liceo classico e un istituto tecnico, è nata dal desiderio di conoscere quanto le future prospettive occupazionali (che siano di lavoro o di studio) e le differenti estrazioni sociali potessero influenzare il modo di concepire la matematica. Oltre a questi due fattori, ho anche tenuto in considerazione la diversa forma mentis dei ragazzi.

Classi Seconde

Il numero totale di studenti presi in considerazione per le classi seconde è 39, di cui 17 all'istituto tecnico e 22 al liceo classico.
Approfondiremo lo studio di alcune domande per poi passare ad un resoconto finale che tenga conto di tutte le risposte ai vari quesiti. Partiamo allora con la prima domanda:
Che cos'è secondo te la matematica?
Già dalle prime risposte ottenute si possono notare delle differenze tra i due istituti:
Nell'istituto tecnico le risposte si possono principalmente distinguere in due categorie:

- quelle che sottolineano l'importanza e l'utilità di questa disciplina nella vita quotidiana e nel futuro mondo del lavoro;
- quelle che, con l'uso di aggettivi per la maggior parte negativi, descrivono la loro percezione della matematica: infatti, anche quando la si definisce una materia bella ed interessante, gli studenti sottolineano il fatto che la considerano una materia difficile, impegnativa e noiosa.

Al liceo, invece, questa distinzione non è poi così marcata. Anche in questo contesto si richiama l'utilità della matematica, mentre per quanto riguarda la visione qualitativa della disciplina si tende più che altro a rimarcare il fatto che tale materia non sia nelle loro corde. Oltre a queste, nelle risposte si ritrovano più facilmente definizioni classiche e formali, come ad esempio definire la matematica come la scienza che studia i numeri. Riporto qui alcune definizioni che mi hanno particolarmente colpito:
"metodo per risolvere problemi in modo da rendere più facile approcciarsi al mondo"
"modo per imparare a gestire situazioni che mi capitano nella vita"
"cambia il modo di pensare delle persone"
"linguaggio dell'universo, il più completo e distaccato con cui si esprimono molte cose"
"scienza complessa e misteriosa che può contemporaneamente spaventare e affascinare".

Passiamo ora alla domanda successiva:
Scrivi tre parole che ti vengono in mente pensando alla matematica e spiega il perché.
Nell'istituto tecnico 13 persone su 17 hanno utilizzato la parola `complicata - difficile` giustificando tale scelta dicendo che è una materia difficile a causa degli argomenti che via via diventano sempre più ardui da comprendere richiedendo competenze maggiori.
In seguito, poi, le definizioni che si presentano con maggior frequenza sono: `faticosa`: perché non basta il semplice ascolto in classe ma è necessario esercitarsi tanto; `stressante`: perché richiede molta esercitazione che difficilmente riesce agli studenti; `impegnativa`: perché richiede molto impegno, sia in termini di studio che di tempo; `noiosa`: sensazione avvertita durante lo svolgimento di esercizi; `interessante`: aggettivo associato ai ragionamenti matematici e a certi argomenti affrontati.
Le definizioni usate da parte degli studenti del liceo invece sono più varie. In questo caso, infatti, si riscontrano maggiormente parole che descrivono gli stati d'animo degli alunni di natura solitamente negativa, come ad esempio: `pathos, angoscia, confusione, ansia, esaurimento, scocciatura`: la giustificazione è più o meno poi la stessa e cioè la difficoltà nel comprendere gli argomenti e nel risolvere gli esercizi.
Le parole `complicata- difficile` e `impegnativa` sono state utilizzate rispettivamente soltanto due ed una volta. Oltre a queste successivamente si ritrovano poi tanti termini ri-

guardanti gli elementi matematici, come `numero, equazioni, calcoli, operazioni`.
Il termine più utilizzato è `logica`: vista come base del ragionamento e necessaria per risolvere i problemi quotidiani ma risulta eccessiva, soprattutto se confrontata con le materie umanistiche.
È stata descritta con termini che non mi sarei aspettata di leggere:
`antichità`: sottolineando come esistano prove della sua esistenza sin dagli albori della società
`ordine`: perché possiede un suo ordine interno, riscontrabile anche nella sua scrittura
`visione`: perché a volte sembra quasi che i matematici riescano a vedere cose invisibili ad altri.
`saggezza`: qualità che scaturisce dalla conoscenza della matematica.

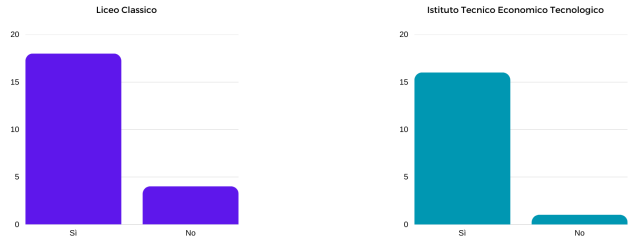
Un altro quesito che è importante affrontare è il seguente:
Che emozioni/sentimenti provi durante le lezioni di matematica?
Abbiamo già visto come le emozioni hanno un notevole impatto sull'apprendimento e condizionano molto l'approcciarsi dello studente alla materia. Vediamo quindi quali sono quelle provate dal nostro campione.
Anche in questo caso, le risposte ottenute dagli studenti del liceo classico, forse perché espresse con maggior proprietà di linguaggio, permettono di avere una più chiara comprensione del loro stato d'animo.
In entrambi gli istituti, riscontriamo che le emozioni più provate sono noia, confusione, ansia, soddisfazione, curiosità e gioia.
L'ansia è spesso associata alla paura di sbagliare, alla richiesta di argomentare e descrivere il ragionamento che li ha portati alla risoluzione di un compito. Inoltre, se accompagnata dalla confusione e dalla non riuscita di un esercizio o dalla non comprensione di quanto svolto in classe, porta spesso ad un senso di scarsa-efficacia che, cito testualmente, *"mi manda in palla la testa e mi blocco"*.
D'altro canto però, la soddisfazione e la gioia sono i sentimenti che provano quando si rendono conto di esser riusciti in quello che veniva loro richiesto o quando capiscono i ragionamenti e meccanismi. Talvolta li porta a parlare addirittura di *"aumento della propria autostima"*.

È molto curioso poi leggere che gli studenti del tecnico provano spesso emozioni che sono totalmente agli antipodi, passano dalla rabbia (per la mancata comprensione o riuscita degli esercizi) alla gioia e soddisfazione (quando invece riescono nelle stesse attività precedenti).
Mi è dispiaciuto molto notare come le sensazioni provate dagli studenti del liceo sono più negative che positive. Infatti, si parla tanto di smarrimento, scoraggiamento, apatia che portano poi alla disperazione, paura, estraniazione, non sentirsi all'altezza e senso di colpa. Sono emozioni molto forti che rappresentano dei campanelli d'allarme sui quali si dovrebbe svolgere un lavoro prima che si cementificano nella persona.
Nel capitolo precedente abbiamo affermato come le ragazze solitamente hanno un rapporto più negativo con la matematica, ritenendola una materia distante da loro; i dati fin qui raccolti concordano con quanto appena detto. Se prendiamo come campione la sola seconda classe del liceo (avendo più omogeneità nel suo complesso), le ragazze hanno praticamente quasi e solo usato termini che descrivono emozioni/sentimenti negativi, per un totale di 23 parole negative contro le 7 di natura positiva.

Nelle due domande successive si richiedeva se con altre materie provavano le stesse emozioni/sentimenti e, se la risposta era positiva, elencare in quali.
Nell'istituto tecnico la maggioranza degli studenti (12 su 17) ha ammesso di provarli soltanto con la matematica, mentre i restanti hanno indicano soprattutto chimica e biologia come le materie in cui avvertono le medesime emozioni.
Nel liceo invece abbiamo quasi i risultati opposti: 13 studenti su 22 provano queste emozioni anche in altre materie, che risultano essere: latino, scienze e greco. Notiamo quindi come, a seconda dell'indirizzo di studio scelto, non è prerogativa esclusiva della matematica suscitare turbamenti. Infatti, anche se in misura minore all'istituto tecnico, tale destino è riservato anche alle altre materie: quelle scientifiche in entrambi gli istituti, e al classico si aggiunge il latino, che sappiamo essere una materia con tante caratteristiche simili alla matematica.

Passiamo ora a visionare le risposte ottenute nelle seguenti domande:
Hai incontrato o incontri delle difficoltà con la matematica? Se sì, quali sono?

Nei grafici possiamo vedere quant'è stata la prevalenza dei del Sì sui No in entrambi gli



istituti. Tali risultati non mi stupiscono e confermano le previsioni. Ai fini della nostra indagine, l'aspetto più rilevante di questa domanda è capire quali sono le maggiori difficoltà che gli studenti si trovano a dover affrontare.

Nell'istituto Tecnico le difficoltà raccontate riguardano: la comprensione degli argomenti e dei procedimenti, lo svolgimento di calcoli e/o esercizi e nel mantenere a lungo la concentrazione.

Avendo lavorato con questi ragazzi posso affermare che molte di queste difficoltà non sono dovute alle capacità individuali di comprensione della materia, ma sono piuttosto dovute ad un loro preconcetto consolidato nei confronti di tale disciplina. Mi spiego meglio: anche quando si introducevano argomenti che loro stessi ammettevano di aver già incontrato alle scuole secondarie di primo grado, si demoralizzavano immediatamente, sicuri che ora quello stesso tema sarebbe stato affrontato in maniera più difficile e tecnica. Nonostante io e la professoressa che affiancavo cercassimo di convincerli ad ascoltarci perché li avremmo accompagnati passo a passo nella comprensione di quei piccoli nuovi aspetti che forse non conoscevano ancora, la sfiducia continuava a dilagare per la classe. Alla luce di questo è facile desumere come da questo atteggiamento, la scarsa comprensione e la difficoltà a rimanere concentrati per tutto il tempo della spiegazione appaiano come le più ovvie conseguenze.

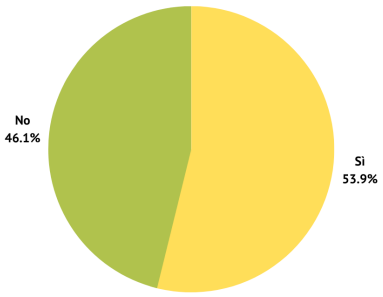
Sfortunatamente, non mi è possibile effettuare la stessa ipotesi per i ragazzi del liceo classico, in quanto non ho avuto la possibilità di lavorarci personalmente. Quel che possiamo fare però è andare a vagliare le loro risposte e provare a trarre qualche interpretazione.

Gli ostacoli maggiormente evidenziati nel liceo classico sono: la comprensione di ragionamenti, meccanismi e argomenti, l'individuare la corretta formula da applicare; la poca libertà e creatività che si avverte, soprattutto se confrontata con le materie umanistiche, la quale

porta a sentirsi vincolati nei riguardi di un *unico risultato*; lo studio di formule e teoremi e il continuo rifarsi al ragionamento necessario per lo svolgimento dei compiti assegnati.
Anche qua ritroviamo la scarsa comprensione dei tipici ragionamenti, meccanismi e argomenti matematici ma con l'aggiunta della difficoltà a studiare formule e teoremi. Penso che questo dipenda molto dalla diversa natura che questi temi hanno se paragonata agli argomenti delle materie umanistiche. Quest'ultime, infatti, sono più discorsive e permettono una più ampia rielaborazione da parte dell'individuo; al contrario, sia le formule sia i teoremi, essendo componenti essenziali di uno specifico linguaggio scientifico, sono meno permissivi in questo.
Mi ha colpito invece la sensazione di scarsa libertà e creatività. Sicuramente essa è generata da un particolare approccio che gli studenti hanno sperimentato sino ad ora con la matematica. Se infatti gli si presentano argomenti matematici sempre e solo come un dogma, un qualcosa che "così è e così sarà", è naturale che poi essi vedranno la disciplina come un qualcosa di rigido, freddo e intoccabile. Se così fosse, significherebbe che i docenti fanno passare un messaggio completamente sbagliato. Infatti, come disse Cantor *"l'essenza della matematica risiede nella sua libertà"*. Abbiamo già detto come la matematica sia una materia fluida e dinamica, ove non esiste sempre e solo un'unica soluzione ma se ne accettano diverse generate da ragionamenti diversi l'uno dall'altro. Sono certa che, se si ponesse maggiore attenzione a questi aspetti la materia diventerebbe meno ostica e antipatica. Per avere una comprensione maggiore di come gli studenti delle due scuole vorrebbero che fosse strutturato l'insegnamento della matematica diamo uno sguardo alle seguenti domande:

Se fosse possibile, modificheresti l'insegnamento della matematica?

Dal grafico sotto, è evidente che non ci siano grosse differenze di pareri. Leggiamo al-



lora le risposte di chi, avendo risposto in maniera affermativa a questa domanda, veniva sollecitato a spiegarne i motivi:

Se sì, compila le frasi seguenti:
La matematica mi piacerebbe di più se:
La matematica mi piacerebbe di meno se:
Per quanto riguarda la prima frase, per gli studenti di ragioneria la matematica sarebbe più gradevole sia se venisse spiegata in maniera più semplice, comprensibile tralasciando poi gli argomenti più difficili; sia se si allargasse la trattazione anche alle sue applicazioni. Mentre al classico, la richiesta maggiore era quella di rendere l'insegnamento della matematica più coinvolgente anche attraverso lo svolgimento di attività interdisciplinari (sia di gruppo che individuali). Affinché riescano ad avere una miglior comprensione della materia, necessitano un approccio più contestualizzato al reale e trasversale: richiedono infatti che si parli del punto di vista filosofico dei vari argomenti, della vita dei vari matematici, di come siano riusciti nelle loro scoperte e dell'impatto di queste sulla cultura del tempo. Richieste che sappiamo poi essere in linea con quanto previsto dalle IN per i licei.

Le motivazioni che invece completano la seconda frase riguardano, per gli studenti di ragioneria, sottolineare più che altro l'aspetto della noia e difficoltà, dato presente anche nel pensiero degli studenti liceali. In quest'ultimi però si considerano anche altri fattori: come la scarsa disposizione del docente ad esser comprensivo ed interattivo con gli studenti, se non potessero far affidamento su un buon materiale scolastico per lo studio della matematica e se le valutazioni non fossero imparziali.

Anche in questo caso salta all'occhio la differenza di atteggiamento che si evince dalle risposte delle due scuole. I ragazzi dell'istituto tecnico si dimostrano sempre più concreti, interessati più all'aspetto tecnico e pratico della disciplina piuttosto che di quello emotivo e culturale, cosa che invece è più presente nei ragazzi del classico.
Leggiamo infine cosa hanno risposto a quest'ultima domanda che analizziamo singolarmente:

In cosa potrebbe servirti la matematica nella tua vita?

Come era ovvio aspettarsi, in entrambe le scuole si parla molto dell'uso della matematica per i calcoli quotidiani: calcolare gli sconti, il resto ottenuto nei negozi, l'uso di proporzioni per le ricette ...

La risposta che va per la maggiore all'istituto Tecnico è: lavoro, risposta coerente con l'indirizzo di studio scelto, infatti, l'istituto in esame è ragioneria. Nessuno di loro mi ha parlato di proseguimento degli studi ma piuttosto di futuri lavori come il ragioniere, il bancario, la gestione dei conti della propria impresa di famiglia, rimanendo ancorati ad una visione operativa della matematica.

Anche al liceo il lavoro è stato dato come risposta ma non avendo loro come protagonisti di tale aspettativa, piuttosto come un probabile elemento necessario per lo svolgimento di un qualche lavoro, probabilmente non svolto da loro stessi in futuro, e rimanendo più vaghi.

Questa è una delle prove: la diversa scelta dell'indirizzo di studio incide molto sulle proprie aspettative future, infatti, gli studenti del tecnico, avendo più facilmente un'idea di un ipotetico lavoro successivo, hanno una visione più pragmatica sul perché gli sarà utile la matematica.

Nel liceo, oltre che per calcoli quotidiani, la matematica si considera necessaria se si vogliono risolvere i problemi. Ammetto che ritrovarla tra le risposte datemi da ragazzini che si sono affacciati da poco all'insegnamento liceale mi ha sorpreso piacevolmente, dato che la risoluzione dei problemi è un pilastro fondamentale della matematica.

Riporto qua di seguito qualche risposta che mostra come, in qualche caso, la vera essenza della matematica sia stata individuata:

"a vedere il mondo con una prospettiva migliore"

"a ragionare di più"

"ovunque serve il ragionamento che la matematica ti insegna e al quale ti allena"

"saper fare la scelta giusta"

"per non farmi ingannare dalle altre persone"

"a essere più responsabile"

È un grosso risultato notare come alcuni studenti siano riusciti a cogliere aspetti qualifi-

canti della matematica, infatti alcuni degli aspetti toccati da queste frasi li abbiamo già incontrati nei capitoli iniziali ed altri saranno i protagonisti dei capitoli successivi.

Per quanto concerne invece le altre domande che non sono state analizzate singolarmente, abbiamo rilevato che il punto di vista delle due classi è più o meno concorde.
I motivi legati al perché venga insegnata a scuola sono legati alla sua utilità nella vita quotidiana e nel mondo del lavoro; alla capacità di sviluppare nella persona un'attitudine al ragionamento che permetterà loro di risolvere problemi anche complicati e nel fatto che spesso viene vista come una materia che attiva e allena il cervello, concordemente con l'idea di Brioschi, Cremona e Betti che la definivano *"ginnastica del pensiero"*.
Il 64.10% degli studenti considerano la matematica diversa dalle altre materie scientifiche e la spiegazione di questo sta nel suo essere più difficile, più impegnativa e più distaccata dal contesto naturale delle altre soprattutto perché vi richiede un'attenzione maggiore e una continua comprensione profonda degli argomenti.
Coerentemente con quanto riportato nel capitolo 1 il suo esser gerarchica la diversifica dalle altre, infatti gli studenti riportano quanto diventi impossibile la comprensione globale se nel frattempo si è perso qualche passaggio e argomento. In aggiunta, anche il suo essere astratta è un carattere particolare della disciplina: a tal proposito richiamo due risposte di due studenti che rendono molto bene questo punto di vista
"la matematica è un'astrazione: si fonda su ipotesi postulate da noi umani che servono a descrivere la realtà anche se essa poi non è necessariamente così"
"la matematica si basa su cose inventate dagli uomini e quindi molte delle sue formule in realtà non sono presenti in natura. Invece, sia la fisica che la biologia studiano proprio i fenomeni naturali"

Sull'argomento "matematica e responsabilità" i dati dimostrano come i ragazzi vedono una maggior correlazione tra questi due concetti e, in generale, considerando la matematica come un antidoto verso l'ignoranza e l'esser truffati dall'odierna società. Motivo, questo, che non mi aspettavo di riscontrare in ragazzi così giovani.
Per coloro che invece erano contrari alla possibilità di divenire più responsabili con la conoscenza matematica, la motivazione si basava principalmente sul fatto che la respon-

sabilità è un qualcosa che si acquisisce solo vivendo e con esperienza diretta col mondo che ci circonda e che quindi lo studio e, non solo della matematica, non apportava nessun contributo a tale crescita personale.

Classi Quarte

Prima di passare alle risposte avute in questo sondaggio, vorrei innanzitutto fare una precisazione: la classe quarta dell'istituto tecnico in questo caso è una classe di indirizzo professionale "operatore legno". Ciò comporta quindi che sia necessario applicare in questo caso le Linee Guida per i professionali, nel capitolo 3 vedremo i dettagli, in cui si precisa che la finalità di questo tipo di studio deve *"rispondere all'esigenza del sistema produttivo ma anche per esser preparati alle scelte future di inserimento nel mondo lavorato o nei diversi indirizzi di istruzione superiore"*, quindi in questo tipo di indirizzo lo studio verterà più su una dimensione operativa della matematica.
Inoltre, qui più che nelle classi seconde, è presente una differenza sostanziale nell'estrazione sociale degli studenti. I ragazzi del professionale sono per la maggior parte studenti immigrati di prima generazione (ciò significa che sono nati all'estero da genitori non italiani): questo comporta talvolta grandi difficoltà con la lingua e un impegno maggiore da parte loro che non riguarda soltanto l'aspetto scolastico, ma anche una certa difficoltà ad integrarsi con gli altri compagni. Si tratta inoltre spesso di ragazzi che hanno la responsabilità del mantenimento della loro famiglia di origine: molti di loro infatti, finito l'orario scolastico, lavorano in fabbriche o aziende, rimanendovi per quasi tutto quanto il pomeriggio. Possiamo quindi capire come questo influenzi molto il loro apprendimento scolastico perché parliamo di studenti ai quali non è permesso dedicare tutto il loro tempo ed energie allo studio, circostanza che invece non riscontriamo nei ragazzi del liceo classico. Anche i programmi futuri sono diametralmente opposti: gli studenti del professionale, una volta finito il loro percorso scolastico, non sono minimamente intenzionati a proseguire gli studi; sono già proiettati nel mondo del lavoro. Al contrario, i ragazzi del liceo classico sanno sin da subito che la scelta di un liceo li porterà ad approfondire e ad allargare le proprie conoscenze all'università.
Sarà quindi interessante notare come questi fattori influenzeranno le diverse visioni della matematica.

In questo caso il campione è formato da un totale di 32 studenti distribuiti in 17 studenti per la classe del liceo e 15 nella classe del professionale. Come per le classi seconde, analizzeremo in primo luogo singolarmente solo qualche domanda. Partiamo allora con il chiedere:

Che cos'è secondo te la matematica?

Nella classe del professionale, così come riscontrato nella classe seconda, molto domande vertono a sottolineare la sua utilità e costante presenza nella vita quotidiana e nel mondo del lavoro.

A titolo esemplificativo per questi ragazzi riporto una loro risposta *"insieme all'italiano, sono le materie base per trovare un lavoro"*.

Oltre a questa prospettiva, ne viene riconosciuta la capacità di sviluppare intelligenza e capacità di ragionamento. Seppure venga descritta come una materia difficile si riconosce un suo punto di forza cioè la possibilità di spiegare quasi tutto con il solo utilizzo di una o due formule.

Nella classe del classico, invece, viene meno l'utilità della matematica, ma si pone maggiormente l'attenzione sul suo essere una *"competenza utile nella vita e materia adattabile in diversi campi"*. Da qualcuno viene anche concepita come *"una filosofia che tenta di ordinare il mondo"*. Le restanti definizioni sono principalmente definizioni formali, come ad esempio *"scienza fatta di numeri, calcoli e deduzioni"*. Elemento già riscontrato nella seconda classe del liceo classico e probabilmente dovuta ad una diversa attitudine all'approcciarsi con le materie.

Sulla scelta delle **"tre parole che ti vengono in mente pensando alla matematica, giustificandone la scelta"** notiamo subito che più o meno sono le stesse in entrambe le classi. Da parte di molti si è ottenuto un dettagliato elenco di quelli che sono elementi o oggetti legati alla matematica: numeri, operazioni, calcoli, esercizi, formule ...

Per le parole riguardanti gli stati d'animo ritroviamo anche nelle quarte: stressante, noia, ansia, delusione, ricordi di traumi passati e stanchezza.

Allo stesso tempo però vi si ritrovano nuovi termini: si parla di problem-solving, strategie, enigmi e memoria reputati come essenziali per sapersi muovere all'interno dei vari argomenti.

È curioso notare come siano meno frequenti le parole difficile ed impegnativa all'interno di queste classi rispetto alle due classi seconde: la parole difficile è presente soltanto 4 (contro le 19 delle classi seconde) e 5 volte per la parola impegnativa.
Vorrei porre l'attenzione sulla giustificazione datami per la scelta della parola intelligenza: *"non è una materia adatta a tutti, si deve essere appassionati ed intelligenti"*. Questo dimostra come ancora oggi sia presente la convinzione di quello che, nel capitolo precedente, abbiamo chiamato l'assioma del talento.

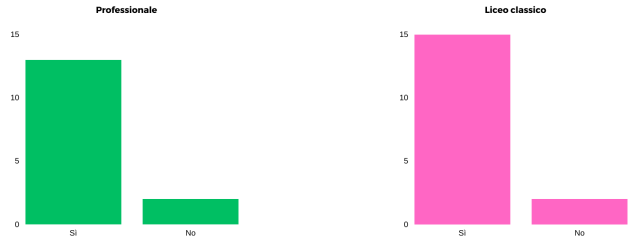
Vediamo ora le **emozioni o i sentimenti provati** da questi studenti:
Nel professionale (purtroppo) sono tutte a carattere negativo: Si parla di tanta paura per il giudizio degli altri e del professore, confusione, stress e ansia per non capire a primo impatto gli argomenti. Come già dedotto, queste sconfinano poi nel panico e nella sfiducia. Soltanto un ragazzo ha espresso piacere, tranquillità e voglia di dar il massimo.
Al classico, invece, non risulta esserci una così sostanziale disomogeneità. Si parla di fascino e stupore, soddisfazione, sicurezza ed entusiasmo per quando la si comprende, divertimento nello svolgere i calcoli, curiosità nel conoscere e scoprire i vari meccanismi usati dalla disciplina; rilassamento e tranquillità dovuti alla linearità dei ragionamenti. Non posso negare che mi rincuora sapere che degli studenti che hanno scelto un indirizzo più umanistico che scientifico abbiamo comunque un tale atteggiamento verso la matematica.
Oltre a questo, però, non mancano gli stati d'animo negativi: noia perché richiede troppa concentrazione, rabbia e confusione quando non tutti gli argomenti risultano intuitivi e in alcuni casi si arriva allo smarrimento, sconcerto, estraniazione e addirittura abbassamento dell'autostima.
Però la bilancia pende più verso la visione positiva della disciplina piuttosto che verso quella negativa. Anche qua ritroviamo la sensazione di rimanere confinati alle regole. In entrambe le classi, però, appare un nuovo stato d'animo finora mai incontrato: l'apatia. Alcuni, infatti, testimoniano come di fronte a questa e ad altre materie rimangano completamente indifferenti e distaccati.

Per capire meglio se si tratta di un fenomeno isolato, occorre analizzare le risposte suc-

cessive:
nella classe di indirizzo professionale soltanto 4 ragazzi su 15 hanno risposto "Sì", specificando che le provano anche nelle materie specifiche del loro indirizzo come Laboratorio e Meccanica;
nel classico invece sono 10 gli studenti che hanno risposto di "Sì", individuando come Fisica e Scienze le altre due materie responsabili di tali stati d'animo.

Esaminiamo ora la domanda:
Hai incontrato o incontri delle difficoltà con la matematica? Se sì, quali sono?

Anche qua un risultato prevedibile, ma cerchiamo di andare



in profondità: nel professionale le maggiori difficoltà riscontrate sono di comprensione delle lezioni, dovute anche, secondo i ragazzi, a scarse basi avute nei precedenti istituti. Un altro problema riguarda la memorizzazione delle formule e degli aspetti chiave dei vari argomenti.
Al classico, oltre alla comprensione e la memorizzazione, gli ostacoli maggiori sono nell'adattarsi alla natura pragmatica della materia, nel costante ricorso all'uso del ragionamento e, di nuovo, nel capire quale formula sia corretto usare nei diversi esercizi. Si ritrova quindi una concezione della matematica come una materia rigorosa, esatta, calcolosa, in cui tutti i problemi sono risolubili e tale soluzione è unica così come il procedimento da fare per trovarla: spesso, infatti, gli studenti parlano di *"confinamento alle regole"*.
Questa difficoltà, da parte degli studenti del classico, a far ripetutamente uso del ragionamento un po' mi stupisce: dovrebbero esser un po' più avvezzi a tale metodica di apprendimento dato che le altre materie da loro studiate, come ad esempio filosofia, latino, greco, non sono per niente estranee al ragionamento.

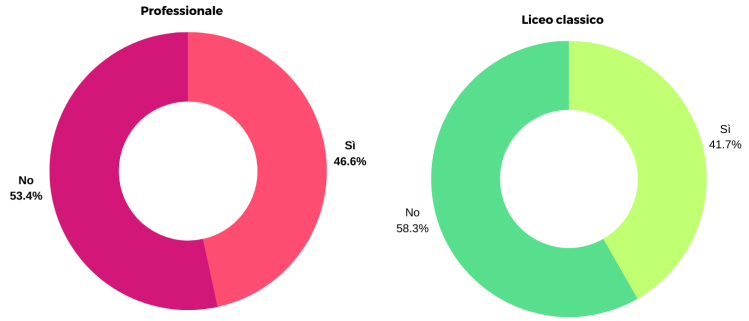
Per quanto concerne la domanda:

Se fosse possibile, modificheresti l'insegnamento della matematica?

Per il 46.6% degli studenti del professionale l'insegnamento risulterebbe migliore se fosse più coinvolgente, anche con qualche attività di laboratorio, e se i professori fossero più competenti e disponibili ad interagire con gli studenti.

Risulterebbe invece peggiore se i docenti non si accertassero della comprensione da parte dei loro alunni, se si studiasse in maniera meno approfondita e, cito testualmente, *"la matematica venisse trattata come una qualsiasi altra materia e non con la giusta attenzione che merita".*

Per il 41.7% degli studenti del classico invece le lezioni dovrebbero essere più discorsive



e meno meccaniche, più collegate, anche attraverso esempi ed esercizi, con il contesto reale così che si espliciti maggiormente il ruolo della matematica nel mondo.

L'insegnamento, invece, risulterebbe ancora più ostico se fosse solo di natura teorica e ancora più astratta. Ritroviamo quindi di nuovo l'ostacolo dell'astrattezza matematica e di come, spesso, la si reputi scollegata alla realtà in cui viviamo.

Infine, analizziamo i dati ottenuti dal quesito:

In cosa potrebbe servirti la matematica nella tua vita?

Nelle risposte ottenute dal sondaggio ai ragazzi del professionale, emerge in maniera evidente la dimensione operativa della matematica, così come riportato nei documenti. Le finalità individuate sono: utilizzo nel lavoro futuro, progettare e misurare i prodotti del loro operato e rappresentare un fondamentale strumento per avere una corretta gestione

delle proprie finanze.
Anche per gli studenti del classico si parla di gestione delle finanze individuali, ma più che altro si pone l'attenzione sulle competenze che la matematica consente di sviluppare: il suo metodo di ragionamento e una diversa visione di ciò che ci circonda.
Oltre a queste sono presenti anche il "far di conto" per tutte le questioni di vita quotidiana e l'ottenimento di titoli di studio superiori.
Soltanto un ragazzo ha espresso l'idea che la finalità della matematica sia quella di *"fare scelte corrette in futuro"*.

Gli studenti di queste due classi individuano, come motivo principale per cui la matematica sia presente nelle nostre scuole, il fatto che questa disciplina sviluppi e potenzi le nostre capacità di ragionamento, permettendoci così di avere una più completa comprensione del mondo e di poterci approcciare con più facilità allo studio di altre materie. Viene addirittura considerata una *"competenza fondamentale nella vita"*.
Si sottolinea anche l'importanza e il ruolo fondamentale che essa ha all'interno del progresso tecnologico presente oggigiorno.
Solo il 5% degli studenti complessivi ritiene la matematica diversa dalle altre materie scientifiche che conoscono: le differenze risiedono soprattutto sul ruolo dato a queste discipline. La matematica, infatti, è considerata la base da cui le altre si sono sviluppate. Altri tratti distintivi sono i caratteri di universalità e astrattezza della matematica che, per quanto non graditi agli studenti, le permettono di esser applicata a diversi campi del sapere.
Sul tema "matematica e responsabilità" ho ottenuto i dati riportati nella tabella sotto. I

	Sì	No
Professionale	9	6
Classico	11	5

motivi dietro a quei 20 "Si" totali riguardano ad esempio il fatto che la conoscenza matematica incrementa il proprio bagaglio culturale, ti rende una persona capace di ragionare e più razionale: questo permette di assumersi responsabilità maggiori e di conseguenza

diventare più responsabile. A tal proposito richiamo alcune risposte:
"insegna a ragionare e a usar la logica, questo ti aiuta a venir fuori da situazioni difficili"
"ti rende più razionale"
"allena la mente e la plasma razionalmente"
"la conoscenza rende sempre una persona erudita, rende quindi più capaci nel capire il mondo e di conseguenza a comportarsi in maniera più responsabile"
Mentre gli argomenti dei sostenitori del "No" si basano sul fatto che ciò che si fa a scuola non si ritrova nel normale contesto quotidiano e che, come già detto per la classe seconda, la responsabilità si ottiene soltanto con l'esperienza.
Inoltre, proprio forse perché viene percepita come distaccata dal concreto, si sostiene che la matematica non ti insegna a vivere all'interno di una società e che non aggiunge nessun valore morale alla persona.

Commento finale

Analizziamo ciò che si è delineato dall'indagine scolastica.
Vorrei per prima cosa parlare dell'idea emersa sulla matematica: abbiamo visto che la maggior parte degli studenti considera la matematica fondamentale per la vita quotidiana. A prima vista, potrebbe sembrare un'abile definizione, per quanto un po' concisa. Ma se vi ragioniamo un po' sopra e vi aggiungiamo che non seguono comportamenti coerenti all'importanza riconosciutasi (scarso impegno e poca fiducia nell'apprenderla) possiamo dedurre che ci sia sotto qualcosa che non attira subito la nostra attenzione.
In letteratura, si parla di **contratto didattico** come di quell'insieme di c omportamenti dal docente che gli studenti si aspettano e viceversa. Per dirlo con altre parole, l'insegnante, in maniera esplicita o implicita, dà delle indicazioni agli studenti, i quali sanno che dovranno seguirle sia per soddisfare le aspettative del professore sia perché così riusciranno a dare la "risposta corretta". È normale che ci sia e per certi versi è anche formativo, ma talvolta può essere dannoso e indurre lo studente a sbagliare.
Tornando ai nostri questionari, ritengo che le risposte che stiamo considerando siano un chiaro esempio di rispetto del contratto didattico. Si dà subito una risposta che sappiamo esser ben accolta da chi sta leggendo il sondaggio e che riveli ben poco di quello che realmente si pensa. Infatti, andando avanti con le domande emerge più facilmente

qual è la vera percezione della matematica e come questa sia incoerente con la prima risposta scritta. Un riscontro di questo l'ho trovato nell'affermazione di una ragazza: *"la matematica rende le persone più autonome nella loro vita quotidiana e ti dispone al ragionamento, per lo meno, così mi è sempre stato detto"*.

Durante lo svolgimento del questionario nelle classi ho sentito diverse proteste da parte degli studenti perché avevano difficoltà a rispondere. In prima battuta pensavo che non riuscissero a trovare le giuste parole per esprimere al meglio e con poche frasi il loro pensiero e, per questo, ho cercato di rasserenare gli animi sostenendo che mi interessava più il contenuto che la forma. Ma la verità era un'altra e mi ha lasciato letteralmente basita: non sapevano qual era il loro pensiero. La difficoltà quindi non risiedeva in una buona argomentazione ma proprio nella non consapevolezza di ciò che era il proprio punto di vista. Per dirlo con parole loro: *"non ho la minima idea di cosa scrivere, cioè... non lo so e basta"*. È alquanto amaro vedere come delle giovani menti non siano consapevoli di ciò che pensano e/o di ciò che vogliono. Avevo già avuto un piccolo sentore durante il tirocinio quando, per cercare di fare qualche collegamento fra la matematica e il loro quotidiano, chiedevamo quali erano i loro interessi, le loro passioni o i loro svaghi. Le risposte erano quasi inesistenti: sembrano quasi una "generazione indifferente" al mondo, alle amicizie; interessati principalmente a guardare il numero di followers, al nuovo video di Tizio piuttosto che di Caio.
Sono certa che se lo stesso questionario fosse stato proposto negli anni passati, la maggior parte di noi non avrebbe fatto fatica ad avere un proprio pensiero anzi quasi non ci sarebbe sembrato vero che per una volta ci venisse chiesto. Con i ragazzi di questa generazione, invece, sembrano quasi che stiano lì in attesa di qualcuno che dica un qualcosa su una determinata tematica e, forse, solo a quel punto decideranno se quel pensiero può rientrare nelle proprie corde o meno.

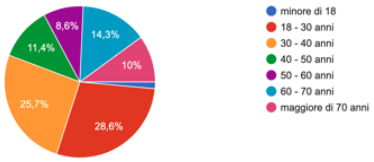
In generale comunque sono contenta che però qualcosa di positivo sia cambiato all'interno della scuola. Mi riferisco al fatto che diversi studenti, soprattutto quelli liceali, richiedono anche un approccio storico e filosofico alla disciplina. Da un lato questo dimostra come qualcuno, probabilmente nelle scuole medie, ha introdotto gli alunni ad un

approccio più interdisciplinare della materia che invece erano completamente inesistenti ai miei tempi e anzi, personalmente parlando, ho scoperto la storia della matematica soltanto con l'inizio di questo corso di laurea. D'altro canto dimostra come poi in verità i ragazzi abbiano voglia di conoscere ed appassionarsi alla matematica e che quindi non tutto è ormai perduto.
Se facessimo un confronto con quanto si è visto nel capitolo 1, possiamo notare che molti pregiudizi si riscontrano anche fra i ragazzi: lezioni noiose, difficili e pesanti; antipatia per le formule e i teoremi; l'eccessiva richiesta di impegno e costanza nello studio e aspettative negative. Siamo quindi d'accordo nell'affermare che la matematica scateni emozioni forti e spesso contrastanti negli individui, basti pensare alla dicotomia `rabbia-soddisfazione`. Ancora permane la visione della matematica come materia fredda, distante e astratta nella quale spesso si cerca di soddisfare il "compromesso della risposta corretta". Fortunatamente sembra abbandonata l'idea che per capire la matematica bisogna esser dei geni, mentre persiste nelle ragazze l'idea che la matematica non sia una materia adatta a loro. A tal proposito mi piace citare la risposta di una ragazza che fa ben comprendere quale sia l'atteggiamento di alcune ragazze nei confronti delle materie scientifiche e soprattutto verso la matematica: *"ascolto con attenzione le materie che parlano di me e la matematica non lo fa, rispetta solo le sue regole"*.
Si sta svolgendo molto lavoro per cercare di eradicare questo preconcetto nella società ma ancora è necessario altro tempo affinché i risultati siano tangibili. Come augurio cito Fabiola Gianotti, direttrice generale del Cern di Ginevra, nel suo appello durante la recente Giornata Mondiale delle donne e delle ragazze nelle scienze: *"alle ragazze ancora indecise se perseguire questa strada dico che è estremamente gratificante contribuire ad aumentare le conoscenze dell'umanità. Se veramente volete studiare la scienza fatelo con coraggio, determinazione e umiltà: solo restando umili si può dare il meglio di sé. E non fatevi abbattere dai pregiudizi, consci o inconsci, che purtroppo persistono [...] Non esistono lavori di genere, ragazze!"*

2.2.2 Il pensiero di un campione eterogeneo

Il campione in questo caso è di 70 persone suddiviso in: 57.1% femmine, 41.4% maschi e 1.5% individui che preferiscono non specificare il genere, di età variabile, dai minori di

18anni ai maggiori di 70, così come riportato nel grafico sottostante.



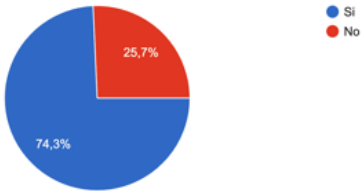
L'eterogeneità del campione è anche confermata dalle varie occupazioni svolte nella loro quotidianità.

Figura 2.1: Word cloud che rappresenta le risposte dell'indagine, ottenuta con il software MAXQDA

Da molti la matematica è stata definita una disciplina che è alla base della vita dell'uomo, che permette la risoluzione dei problemi grazie ad un metodo scientifico e ad un approccio razionale. Viene colta la sua natura interdisciplinare e il pregio di essere *"una chiave per interpretare la realtà"*. Talvolta viene addirittura concepita proprio come una filosofia.
Oltre a questa affascinante prospettiva, la matematica viene anche vista come una materia molto misteriosa, quasi oscura fino a paragonarla ad un buco nero, a conferma di quanto si era già detto nel capitolo 1.
Sia in risposta alla prima domanda sia nel seguito, viene ricordato il famoso, e discutibile, proverbio "la matematica non è un'opinione".
L'immagine della matematica che si viene a delineare tramite la scelta di tre parole è piuttosto complessa e presenta diverse sfaccettature: si parla ad esempio di una disciplina libera, geniale, meritocratica, armoniosa, equilibrata e profonda ma al tempo stesso

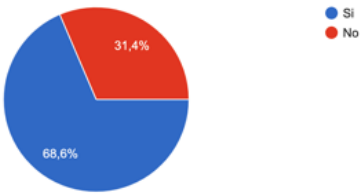
noiosa, difficile, non opinabile, colma di ansia, difficile e selettiva. Vorrei porre per un attimo l'attenzione sul termine "selettiva" perché la giustificazione, che riporto tra poco, si rifà al già citato assioma del talento: *"solo le persone con una spiccata mente logica, in pratica dei geni, riescono nello studio di questa scienza esatta"*.
Un'ulteriore scelta di parole che trovo interessante è: relazioni-modelli-quantificazione, e la motivazione che il soggetto ha riportato è la seguente: *"Tramite la matematica si possono descrivere in maniera universale le relazioni tra cose ed eventi, creando modelli analizzabili da cui estrapolare teorie e deduzioni, sui quali poter basare simulazioni e con i quali poter quantificare la realtà e le ipotesi fatte in partenza"*.
Quasi la totalità del campione concorda nell'individuare come vera ragione del perché venga insegnata nei nostri istituti scolastici la capacità della matematica di sviluppare un pensiero razionale e logico. Molto curioso è osservare come questa ragione viene considerata fondamentale quasi da tutti.
Tra il 64.3% delle persone che la considera diversa dalle altre discipline scientifiche la maggioranza pensa che sia perché è la base da cui tutte le altre scienze si sviluppano, mentre i restanti perché più difficile e astratta.
Come esempio del pensiero prevalente riporto qua una risposta esplicativa: *"Le altre discipline prendono atto degli eventi che accadono, mentre la matematica analizza la logica che li fa accadere"*.
Passando ora ai sentimenti/emozioni provati dagli individui analizzati si nota che sono esattamente gli stessi riferiti dagli studenti dei due istituti. Si parla infatti di frustrazione, noia, ansia, confusione, rabbia, sconforto, paura di sbagliare ma anche di gioia, divertimento, curiosità, soddisfazione, entusiasmo e fierezza.
Siccome le persone che hanno aderito all'indagine presentano età differenti, è interessante osservare come in tanti hanno sottolineato il fatto che, durante il percorso scolastico, non riuscivano a capire l'importanza della matematica e di conseguenza non mostravano gran interesse nel comprenderla, ma poi, grazie all'università e alla presa di coscienza di diverse applicazioni della matematica nel contesto reale, si sono ricreduti suo valore.

Il grafico sottostante riporta i dati di quante persone hanno riconosciuto di provare tali sentimenti/emozioni anche in altre materie, e prevalentemente le scelte ricadevano su fisica e le altre materie di carattere scientifico, a conferma quindi che non solo la



matematica è causa di negatività.
Il 67.1% delle persone ha incontrato difficoltà nell'approcciarsi a tale disciplina e il problema più frequente riguarda anche in questo caso la comprensione dei temi trattati, portando così l'individuo a mettere in atto uno studio pressoché mnemonico. Si parla anche di un atteggiamento di rifiuto di fronte alla matematica perché considerata arida, meccanica e complessa. Un'altra causa emersa nel generare difficoltà riguarda l'aver incontrato, nel proprio percorso, professori poco chiari, che raramente insegnavano con passione e trasporto.
Alla domanda riguardante eventuali modifiche fertili da apportare all'insegnamento, si è riscontrata quasi una parità tra chi era favorevole e chi era contrario: i primi hanno suggerito una maggior integrazione sia con esempi di applicazione, in modo da riuscire a contestualizzare quanto studiato sui banchi di scuola, e sia con argomenti di carattere storico così da riuscire ad avere un quadro storico dell'epoca e dei vari perché si è giunti ad un determinato concetto; gli altri consigliano di accompagnare gli argomenti prettamente teorici all'utilizzo di software di geometria dinamica in modo da fornire un supporto visivo che faciliti la comprensione.
Contrariamente a quanto potessimo aspettarci, soltanto 12 persone hanno ammesso che non avrebbero studiato matematica se fosse stato un corso facoltativo all'interno della scuola.
Per quanto riguarda l'uso della matematica nel contesto reale, ritroviamo anche in queste risposte l'utilizzo per i calcoli quotidiani e per la gestione delle proprie finanze. Ma è molto interessante osservare come medici, chimici, dentisti, infermieri, grafici e metalmeccanici confessano anche di utilizzarla quotidianamente nel loro lavoro, stupendosene loro stessi.
Le possibili finalità della matematica per il loro futuro includono una maggior comprensione delle scoperte scientifiche e tecnologiche, lo sviluppo di una mentalità flessibile e

con maggior senso critico che, citando la risposta di un intervistato, *"mi permette di avere una maggiore consapevolezza personale dei miei diritti/doveri nell'ambito dei rapporti con la società e le istituzioni"*.
Entrando nell'argomento di cittadinanza e responsabilità, i fattori che rendono un cittadino responsabile possiamo riassumerli con tre parole: conoscenza, coscienza e rispetto. Riporto qua un'esaustiva risposta che ho letto: tali fattori vengono identificati con
"Il rispetto per sé stesso e gli altri, l'attenzione a ciò che lo circonda, la capacità di elaborare inconsciamente informazioni ed elementi in modo da poter fare valutazioni più "dettagliate" per le proprie decisioni, assumendosi la responsabilità delle proprie azioni".



Come si vede dal grafico, la gran parte delle persone riconosce una relazione fra conoscenza matematica e responsabilità. Le ragioni alla base di ciò sono diverse: ad esempio, si individuano come fattori comuni alla matematica e alla vita sociale il rispetto delle regole e una determinata elasticità mentale, così come si evince da questa risposta *"Conoscere la matematica richiede un'apertura e elasticità mentale ma al tempo stesso una grande attenzione alle regole e ritengo che questa combinazione gioverebbe fortemente a formare la responsabilità di una persona"*.
Un'altra ragione emersa dalle risposte consiste nella consapevolezza dell'entità delle conseguenze delle nostre azioni, derivante dall'analisi delle varie statistiche. A tal proposito riporto: *"Forse lo sviluppo di un pensiero logico e razionale può spingere l'individuo a riflettere sulle cause e conseguenze delle sue azioni, in contrapposizione con l'agire d'impulso che potrebbe invece causare danni alla società"*.
La matematica viene infine percepita anche come ciò che rende la persona più capace di poter valutare l'operato dei vari enti, istituzioni, organismi nazionali e sovranazionali.
In merito a questo aspetto segnalo questa meravigliosa risposta *"la matematica è uno degli strumenti fondamentali e più equi dell'esercizio della democrazia"*.

Capitolo 3

Matematica a scuola

3.1 Normative

La Costituzione Italiana attribuisce alla scuola il fondamentale compito di provvedere alla formazione della persona e alla crescita sociale e civile del Paese. Per l'art. 34 la scuola assicura un'istruzione obbligatoria per almeno otto anni, ora divenuti dieci. Inoltre, per l'art. 3, coopera alla rimozione di "*tutti gli ostacoli di ordine economico e sociale che, limitando di fatto la libertà e l'uguaglianza dei cittadini, impediscono il pieno sviluppo della persona umana e l'effettiva partecipazione di tutti i lavoratori all'organizzazione politica, economica e sociale del Paese*".
Ma la nostra scuola, e con essa l'insegnamento della matematica, non sono sempre stati come oggi noi ricordiamo.

3.1.1 Storia della scuola italiana

Percorriamo allora alcune tappe della trasformazione del nostro sistema scolastico ponendo, all'occorrenza, il focus sull'insegnamento matematico.
Partiamo dal 1859 quando la **Legge Casati** modificò il secondo ciclo d'istruzione. Si istituirono, al completamento del ciclo primario quadriennale, due differenti percorsi: **ginnasio** di durata 5 anni, che permetteva l'accesso al liceo di 3 anni; **scuola tecnica** di 3 anni complessivi, che apriva l'accesso all'istituto tecnico triennale.
Dopo 8 anni, nel 1867, fu affidato a Cremona, Betti e Brioschi il compito di redigere i pri-

mi programmi ministeriali per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie. Dalla relazione ministeriale si evince il pensiero di questi grandi matematici: per loro la disciplina non doveva essere un insieme di nozioni utili perché applicabili al quotidiano, ma piuttosto una "ginnastica del pensiero" che aiutava a distinguere il vero da quello che ne possiede solo l'apparenza.
I contenuti dovevano quindi avere carattere informativo ed educativo, e forgiare le menti dei giovani era la meta dell'azione didattica. Questi importanti matematici cercarono di veicolare nella scuola secondaria i risultati scientifici ottenuti in quel periodo. Siamo infatti nel periodo della **Crisi dei fondamenti della matematica**, epoca di profonda revisione dei principi cardine della disciplina, caratterizzato dalla ricerca di rigore e purismo. Decisero così di introdurre un corso di geometria razionale negli ultimi due anni di ginnasio, usando gli *Elementi* di Euclide come libro di testo.
Ciò che stupisce è che fino al 1870 l'insegnamento della matematica terminava all'elementari per poi riniziare proprio in questi ultimi due anni di ginnasio. La motivazione di tale organizzazione, da parte di Cremona, Betti e Brioschi, risiedeva nel fatto che secondo loro la purezza e il rigore necessario in quest'insegnamento non era adatto ai bambini di età compresa fra gli $11-14$ anni; al contempo però le conseguenze non erano per niente irrilevanti. Infatti, lo studio della matematica previsto nel ginnasio era permesso soltanto all'élite della società, mentre la gran maggior parte dei bambini, che lasciavano gli studi dopo i quattro anni dell'elementari, dovevano farsi bastare le poche nozioni apprese, le quali riguardavano prettamente il saper far di conto.
Fortunatamente nel 1870 si sentì la necessità di creare un raccordo fra scuola elementare e secondaria per fu introdotto un, seppur scarno, corso di aritmetica pratica in tutte le classi del ginnasio spostando così il corso di geometria al liceo.

Questa suddivisione durò solo pochi anni dato che, per mano dell'allora ministro dell'istruzione Bottai, fu sancita pubblicamente la distinzione fra *materie primarie e secondarie*, e la matematica rientrava nel secondo gruppo. Ciò scatenò la reazione dei docenti di matematica di tutti gli ordini, i quali decisero di creare l'associazione **Mathesis** con l'intento di difendere l'importanza del loro insegnamento.
Ai primi del Novecento, due dinamiche influirono molto sul modo di concepire la matematica a scuola: da una parte, aumentarono contatti fra i diversi paesi europei, avviando

così ad una coscienza internazionale; dall'altra, si avviò un forte movimento interno che portò a una revisione dei programmi scolastici. La corrente internazionale ebbe come conseguenza la formazione della **Commissione Internationale de l'Einsegnement Mathematique**. Modificatasi con il passare degli anni, è ancora oggi attiva in Europa proponendo periodicamente corsi di perfezionamento per il corpo docente. Invece, la revisione dei programmi scolastici fu fortemente voluta dai membri di Mathesis, e i nuovi programmi rimasero prettamente immutati anche con l'approvazione della **Riforma Gentile**, nel 1923.
Anche in questo caso, si sottolineò sempre più il valore delle discipline umanistica-letterarie a scapito di quelle scientifiche. Seppur tutto ciò fece infervorare i membri dell'Accademia dei Lincei, sappiamo tutti come questo spirito anti-scientifico e, in particolare anti-matematico, abbia influenzato e tuttora influenzi il pensiero italiano.
Nel 1938 con la **Riforma Bottai** si creò la scuola media, ove s'introdusse un corso di algebra al fine di fornire più strumenti agli studenti che avrebbero lasciato gli studi dopo il completamento dell'obbligo (intorno ai 14anni).
Con il DPR n.275/1999 (Regolamento dell'autonomia delle istituzioni scolastiche) si riconobbe ad ogni istituto una propria autonomia funzionale, concordemente anche a quanto riportato nell'art. 117 della Costituzione. Questo ha profondamente cambiato l'impostazione metodologica e didattica, processo durato ben 11 anni ma che ha portato ad una svolta epocale: l'eliminazione dei programmi ministeriali introducendo come testi di riferimento le **Indicazioni Nazionali** (abbreviato IN) e le **Linee Guida** (abbreviato LG).

3.2 Quadri di riferimento

Partendo dal presupposto di questa nuova impostazione organizzativa la scuola viene considerata all'interno di un contesto in continua e rapida trasformazione, sia sociale che culturale, e che essa non sia l'unico ambiente educativo per i ragazzi, questi quadri di riferimento sono un orizzonte entro il quale ogni istituto scolastico discute e approva un proprio *curricolo d'istituto*. Infatti, all'interno del collegio docenti, l'elaborazione del curricolo è un processo aperto, espressione appunto della libertà di insegnamento e,

dinamico dato che costituisce una preziosa opportunità per sperimentare e fare ricerca. Una volta stilato, esso s'inserisce all'interno del triennale Piano dell'Offerta Formativa che possiamo definire essere la carta d'identità della scuola specifica.
La struttura delle IN e delle LG è molto simile:

Nota introduttiva;

Finalità generali il profilo dello studente si delinea in base alle competenze:
trasversali: riguardano la crescita personale e la capacità di affrontare situazioni che competono a seconda dell'età;
specifiche: saper analizzare dati e fatti della realtà in modo da formare un pensiero razionale e affrontare problemi.

Organizzazione del curricolo;

Obiettivi di apprendimento individuano i campi del sapere, le conoscenze e abilità indispensabili al raggiungimento dei traguardi. Sono utilizzati dalle scuole e dal corpo docente durante la progettazione didattica, mirando ad un insegnamento mirato ed efficace.

Traguardi per lo sviluppo delle competenze rappresentano i termini da raggiungere, altresì indicano i percorsi didattici e culturali da seguire al fine da garantire lo sviluppo integrale dello studente. Ogni istituto ha poi libertà di scelta nel prediligerne uno più consono al relativo contesto in cui si trova.

Allegati riportanti i diversi istituti con i relativi indirizzi, materie e obiettivi di tali.

Le finalità matematiche di questi documenti sono di tre tipi:

1. **strumentali**: la matematica è concepita come strumento per leggere, interpretare il mondo e per intervenire in esso;

2. **formative**: matematica utile per perfezionare la capacità di pensiero razionale e comunicativa;

3. **culturali**: matematica è uno strumento per leggere la storia e l'azione dell'uomo.

3.2.1 Indicazioni Nazionali

3.2.2 Indicazioni Nazionali

Attraverso il DPR n.89/2010 si ebbe il riordino dei licei con l'introduzione delle IN. L'art. 2 comma 2 riporta "*I percorsi liceali forniscono allo studente gli strumenti culturali e metodologici per una comprensione approfondita della realtà, affinché si ponga con atteggiamento razionale, creativo, progettuale e critico, di fronte a situazioni, ai fenomeni e ai problemi, ed acquisisca conoscenze, abilità e competenze coerenti con le capacità e le scelte personali e adeguate al proseguimento degli studi di ordine superiore, all'inserimento nella vita sociale e nel mondo del lavoro*".
Nel successivo comma 3 viene descritta l'organizzazione del percorso liceale con riferimento al *Profilo educativo, culturale e professionale dello studente liceale*. All'interno di questo troviamo i risultati di apprendimento comuni a tutti i licei:

Area metodologica : prevede un metodo di studio flessibile e consapevole della diversità dei vari ambiti;

Area Logico-Argomentativa : saper argomentare, ascoltare cogliendo i vari punti di vista e sostenere la propria tesi. Acquisire abitudine nel ragionare, leggere, interpretare e identificare problemi e possibili soluzioni;

Area Linguistica-Comunicativa : padroneggiare la lingua italiana e acquisire conoscenze in una lingua straniera;

Area Storico-Umanistica : fra cui il saper collocare il pensiero scientifico;

Area Scientifica-Matematica e Tecnologica : ove per quanto riguarda la matematica si ha: comprendere il linguaggio formale specifico della matematica, saper utilizzare le procedure tipiche di tale tipo di pensiero, conoscere i contenuti fondamentali delle varie teorie che sono alla base della descrizione matematica della realtà.

Se anche noi togliessimo, da questo piccolo elenco di risultati, l'ultima area, quella specificatamente relativa alla matematica, saremmo comunque in grado di notare quanto

sia importante che tale disciplina venga spiegata a scuola. Infatti, ritroviamo qui tante capacità che abbiamo trattato nel precedente capitolo (1.2) e, di conseguenza, la scuola come potrebbe garantire un'integrale sviluppo dello studente privandolo di una disciplina essenziale al raggiungimento di tali competenze? A mio parere, già questo può essere una sufficiente risposta alla domanda "Perché la si insegna a scuola", ma se invece non è sufficientemente convincente per voi, vi prego di portare pazienza e continuare la lettura dei seguenti capitoli. Tornando alle IN, dopo una parte introduttiva, sono suddivise per tipo e indirizzo di liceo. All'interno di ogni sezione si riportano le varie discipline con i relativi obiettivi specifici di appredimento (*in itinere*) e le competenze attese al termine del percorso.

Nella sezione matematica, sotto *"Linee genereali e competenze"* si legge che lo studente, al completamento dei cinque anni di liceo, dovrà conoscere i concetti e i metodi fondamentali, sia interni ad essa che quelli utili per descrivere e prevedere fenomeni. Saprà inquadrare storicamente le varie teorie, avrà una visione storico-critica dei rapporti fra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico con particolare riferimento a tre momenti: matematica nella civiltà greca; calcolo infinitesimale e sue conseguenze; matematica moderna e i nuovi campi di applicazione. Inoltre, dovrà saper maneggiare con i procedimenti matematici, coi metodi elementari per la costruzione di modelli semplici e con strumenti informatici di rappresentazione geometrica e calcolo. Vengono poi riportati i concetti e i metodi che l'alunno dovrà dominare ricordando sempre che questi sono delle indicazioni per il docente, non degli obblighi ministeriali.

Ai fini di assicurare una corretta contestualizzazione della matematica, per ogni liceo si porrà attenzione su aspetti diversi ma particolari di ogni indirizzo: ad esempio, al liceo artistico si sottolineeranno i concetti e le tecniche matematiche con rilevanza nelle arti, mentre al liceo musicale e coreutico si metterà in evidenza il ruolo delle strutture matematiche nel linguaggio musicale.

L'indicazione principale valida per tutti i licei, ma soprattutto per il liceo scientifico vista la gran quantità di contenuti affrontati, è di trattare pochi concetti e metodi ma di farlo andando in profondità, preferendo così un apprendimento di qualità che ne di quantità.

3.2.3 Linee Guida

Le LG sono invece il quadro di riferimento per quanto riguarda gli istituti professionali e i tecnici. Sono state introdotte con il DPR n. 88/2010 per i tecnici e con il DPR n. 87/2010 per i professionali. Come per il decreto delle IN, anche qua l'articolo 2 descrive l'identità degli istituti:

tecnici *"l'identità di tali istituti si caratterizza per una solida base culturale di carattere scientifico e tecnologico in linea con le Indicazioni dell'UE, costituita attraverso diverse attività, approfondimento, apprendimento dei linguaggi e delle metodologie sia di carattere generale che scientifico. La specificità si evince dai diversi indirizzi di studio [...]"*

professionali *"l'identità degli istituti professionali si caratterizza per una solida base d'istruzione generale e tecnico professionale che contente agli studenti di sviluppare una dimensione operativa di saperi e competenze che sono necessari per rispondere all'esigenza del sistema produttivo ma anche per esser preparati alle scelte future di inserimento nel mondo lavorato o nei diversi indirizzi di istruzione superiore [...]".*

Anche in questo documento, si descrive la suddivisione del percorso e si fa riferimento ai relativi *Profili educativi, culturali e professionali* degli istituti tecnici e professionali. All'interno di tali profili sono elencati i risultati di approfondimento comuni a tutti. Contrariamente a quelli dei licei che vengono riportati divisi per macro aree, qua sono un lungo elenco. Vista la lunghezza della lista, riporto soltanto quelli che, a mio parere, si rifanno in qualche modo ad abilità potenziabili con le conoscenze matematiche.
Per entrambi i tipi di istituti si ha:

- agire in rispetto della Costituzione, valutando e ispirando i propri comportamenti;
- porsi con atteggiamento razionale, critico e responsabile di fronte ai fenomeni, ai problemi con strumenti culturali e metodologici;
- padroneggiare la lingua;

- riconoscere le basi della storia della cultura e con riferimento particolare a tematiche scientifiche, tecnologiche ed economiche;
- stabilire collegamenti tra tradizioni locali, nazionali ed internazionali.

In aggiunta, per gli istituti tecnici, abbiamo poi obiettivi di carattere prettamente matematico (conoscenze di probabilità e statistica, utilizzo di appropriati modelli . . .), mentre per i professionali si sottolineano le capacità di risoluzione attinenti al proprio ambito, di adattamento a situazioni nuove o diverse cooperando con altri, utilizzo di strategie volte al raggiungimento di un risultato . . .
All'interno delle LG troviamo innanzitutto le materie di carattere generale tra cui la matematica. In questi istituti, lo studente dovrà padroneggiare il suo linguaggio formale e i suoi procedimenti dimostrativi; possedere gli strumenti di probabilità e statistica per comprendere le discipline scientifiche e operare nelle scienze applicate. Inoltre, si richiede la capacità di individuare il pensiero matematico-scientifico nello sviluppo della storia della cultura e delle scoperte scientifiche e tecnologiche. Le competenze matematiche, che la scuola s'impegna a far acquisire, contribuiscono alla comprensione critica della dimensione teorica e culturale dei saperi e stimolano ad individuare interconnessioni tra essi.

3.2.4 Sguardo generale su IN e LG

Le Indicazioni Nazionale e le Linee Guida presentano delle differenze: le prime riportano gli obiettivi in maniera discorsiva, senza distinzione fra abilità, traguardi e conoscenze; invece le seconde, riportano lunghi elenchi di tali, il tutto in maniera più schematica e, permettetemi di dire, più fredda. Però, all'interno delle LG, ritroviamo un sapere matematico più situato vista la gran importanza data al laboratorio.
In questi quadri di riferimento si noti come sia presente la ricerca di una **continuità verticale**, che produce un sapere di base comune a tutte le scuole, senza però tralasciare anche una **continuità orizzontale** che garantisce specificità del sapere conformemente all'indirizzo intrapreso. Di fatti, si può notare come le competenze matematiche presenti in entrambi i documenti siano in larga parte le stesse, proprio a ragion del fatto che la conoscenza matematica è posta all'interno di quel sapere di base comune.

Un altro aspetto importante che si può desumere da tali normative, è l'importanza data alla **centralità della persona** con la sua singolarità e complessità e, in rispetto di ciò, la scuola si impegna a guidare gli studenti nel dar senso alle varie esperienze e a raggiungere il successo formativo.
Si parla di una nuova concezione di cittadinanza, non più soltanto locale ma anche europea e mondiale. In questo contesto in costante elaborazione e confronto con i sistemi scolastici degli altri paesi europei, le LG e le IN consolidano gli approfondimenti di base, fissano dei traguardi così da poter sviluppare le otto competenze chiave a livello europeo, durante tutto il corso della vita.

3.3 Competenza: sguardo introduttivo

A livello internazionale, e negli ultimi 15 anni anche all'interno del nostro paese, si è fatto strada all'interno del sistema scolastico il concetto di competenza. Tale concetto ha spinto ad un cambiamento epocale nella struttura dell'insegnamento che ha intaccato le radici stesse dell'idea di sapere e apprendimento. Infatti, viene a modificarsi l'organizzazione stessa dell'insegnamento in tutte le sue sfaccettature. Cerchiamo quindi di comprendere innanzitutto il concetto stesso di competenza. Per il professore di psicologia Pietro Boscolo, si può definire la competenza come *"l'insieme delle conoscenze, abilità e atteggiamenti che consentono a un individuo di ottenere risultati utili al proprio adattamento negli ambienti per lui significativi e che si manifesta come capacità di affrontare e padroneggiare i problemi della vita attraverso l'uso di abilità cognitive e sociali"*.
Possiamo allora identificare tre elementi fondamentali propri della competenza:

- **La capacità di affrontare e padroneggiare i problemi della vita.** Questa racchiude l'abilità di utilizzare il proprio sapere per affrontare compiti concreti e autentici, che possono tranquillamente racchiudere qualsiasi problema della vita quotidiana. In definitiva si parla di "saper essere in situazione" sottolineando così l'inscindibile legame con l'azione;

- **Il metter in moto le proprie conoscenze, abilità e atteggiamenti.** Si richiamano in questo caso le proprie risorse interne, non intendendo soltanto la dimensione cognitiva ma, al contrario, comprendendo all'interno di questo gruppo anche

tutte quelle componenti motivazionali, socio-emotive e metacognitive. Infatti, il comportarsi in maniera competente richiede che la persona impieghi ogni risorsa di cui dispone;

- **L'utilizzo di risorse esterne** in funzione al problema da affrontare. Con il termine "esterne" non intendiamo soltanto ulteriori abilità e conoscenze, ma implica altri soggetti, gli strumenti e i mezzi che sono a nostra disposizione, l'ambiente fisico e culturale circostante. In aggiunta dobbiamo considerare anche la disponibilità del soggetto ad agire interagendo sia con gli altri soggetti, con sé stesso che con le potenzialità (o i vincoli) del contesto in cui si trova. Si evidenzia così il carattere situato della competenza. Ovviamente a nulla servirebbero le risorse esterne se queste non venissero continuamente integrate con le risorse interne del soggetto.

In conclusione, la competenza si manifesta su tre diversi livelli: il sapere, il saper fare e il saper essere. A questi, possiamo associare delle parole chiave che caratterizzano esaustivamente il concetto di competenza:
realizzazione: riferendoci così al problema da affrontare e risolvere;
integrazione:per sottolineare la continua mobilitazione di risorse interne ed esterne;
contesto: rifacendosi sia alla natura situata della competenza sia alla capacità di padroneggiare le risorse e i vincoli presenti nell'ambiente circostante;
responsabilità: evidenziando così il ruolo attivo che la persona ha nella messa in atto della competenza. Sempre per quanto concerne alla relazione competenza - responsabilità, all'interno della Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio sul Quadro europeo delle qualifiche e dei titoli per l'apprendimento permanente del 2008, troviamo infatti che le competenze vengono descritte come "capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o studio e sviluppo professionale/personale. Le competenze sono descritte in termini di *responsabilità e autonomia*".

Storicamente parlando, i primi cenni del concetto di competenza li ritroviamo all'interno della dottrina comportamentista. In questa prospettiva, la competenza veniva unicamente identificata con una prestazione da parte del soggetto tale che dovesse essere osservabile e misurabile. Si cercava infatti di scomporre la competenza in un insieme

di prestazioni osservabili empiricamente e, la somma di tali, permetteva di valutare il livello di padronanza del soggetto. Difatti, pietra fondante del comportamentismo era l'analisi del compito. Solitamente esso era un'attività complessa e per l'appunto veniva scomposto in sotto-compiti o attività elementari che il soggetto riusciva più facilmente a gestire. Una volta che queste minime entità del comportamento, si determinavano le conoscenze e abilità ad esse associate. Per cui, a seconda di come il soggetto in esame riusciva a risolvere l'attività, si ottenevano dei risultati, la cui somma dimostrava appunto il quantitativo di abilità e conoscenze acquisite, in altri termini la sua competenza.
Con il passare degli anni, il concetto di competenza si è evoluto passando dal "saper fare" al "saper agire". Infatti, la prospettiva comportamentista è stata man a mano sostituita da una visione socio-costruttivista caratterizzata da tre diverse tendenze:

a) *Dal semplice al complesso.* L'idea della competenza come un insieme di prestazioni separate viene completamente sostituita dalla concezione di competenza vista come una continua integrazione delle risorse proprie dell'individuo. Queste risorse si rifanno sia al piano cognitivo, sia al piano socio-emotivo che a quello volitivo. La sua manifestazione necessita che la persona si metta completamente in gioco, anima et corpus.

b) *Dall'esterno all'interno.* Analizzare una competenza non può ridursi solamente allo studio del comportamento osservabile e misurabile ma, al contrario, è giusto porre molta attenzione anche all'intuizioni del soggetto e all'atteggiamento con cui si approccia alla risoluzione del compito. In questa maniera si scardina quindi la concezione di competenza come un qualcosa da studiare empiricamente. In vista di ciò, all'interno di questa corrente si viene a delineare anche la distinzione fra "competenza", vista come caratterista del soggetto, e "prestazione", intesa come il comportamento osservabile.

c) *Dall'astratto al situato.* In questo caso la competenza allude alla capacità di affrontare compiti in specifici contesti, i quali possono essere di varia natura: dal sociale all'operativo. Si rafforza quindi la dimensione contestualizzata della competenza, smantellando così la concezione di competenza solo come concetto astratto e generale.

3.3.1 Didattica per competenze

Torniamo ora al contesto scolastico e alla didattica in particolare. Sono anni ormai che tra i corridoi delle scuole si sente parlare di **didattica per competenze**. È questo il nome che è stato dato al moderno punto di vista che ha come obiettivo l'applicazione specifica delle proprie risorse interne, insieme a quelle esterne, per far fronte a compiti concreti e situati. Questo ha portato a dei cambiamenti nell'ambito della Didattica. Innanzitutto, la competenza si considera composta da:

- *Componente esplicita*: la prestazione osservabile dettata da tutte le conoscenze e abilità del soggetto. Quindi, il "cosa si apprende".

- *Componente implicita*:di cui fanno parte le strategie metacognitive, l'impegno, la consapevolezza di sé, la sensibilità al contesto, i valori e le motivazioni. In poche parole, la dimensione interiore detta anche "come si apprende".

Le più recenti ricerche psico-pedagogiche riguardanti il processo di apprendimento concordano con il concetto di competenza introdotto poco sopra. Tali ricerche evidenziano come l'evoluzione di questo concetto trova le sue basi nell'approccio cognitivista, il quale sposta il focus dai processi esterni a quelli interni al soggetto. Infatti, è possibile descrivere questo nuovo approccio all'insegnamento con qualità che sono tipiche della corrente cognitivista. L'apprendimento sarà:

- costruttivo, nel senso che è una continua ricostruzione di quanto il soggetto già conosce. Si dimentica il dualismo soggetto – oggetto e si abbraccia una visione dinamica e relazionale fra i modelli mentali del soggetto che si accinge a conoscere e l'oggetto della conoscenza. Per cui, l'apprendimento è un dare un significato al mondo integrando le nuove esperienze a quelle pregresse.

- socio-culturale. Il ruolo del contesto non è solo la cornice entro cui il soggetto opera ma costituisce l'ambiente in cui far nascere la propria conoscenza.

- situato, ossia strettamente collegato al contesto entro cui si genera e relativo ad uno specifico contenuto. Questo è una conseguenza diretta del suo essere socio-culturale.

Quindi, l'apprendimento che inizia a diventar protagonista all'interno del nostro sistema didattico riconosce al soggetto che deve apprendere un ruolo attivo, consapevole e responsabile. Tale soggetto dovrà dimostrarsi riflessivo in quanto deve esistere un circolo tra conoscenza, esperienza e introspezione, ma allo stesso tempo dovrà ricercare una collaborazione anche con altri oggetti, in sintonia con la natura sociale e contestualizzata della competenza. Così facendo si dovranno considerare anche le intenzioni dei soggetti, analizzare il compito fondamentale che ha il linguaggio nello strutturare i vari confronti. È chiaro quindi che questo nuova concezione dell'apprendimento intacchi le fondamenta stesse delle pratiche didattiche e valutative scolastiche. Un orientamento verso una scuola per competenze richiede una revisione complessiva della scuola, che cerchi di agganciare la scuola alla vita riuscendo così a connettere l'apprendimento scolastico con le situazioni reali quotidiane. Non si vuole assolutamente appiattire l'insegnamento ai modi e alle forme di apprendimento reale, dato che risulterebbe pericoloso e dannoso eliminare il ruolo di un'educazione formale. Al contrario, la sfida sta proprio nel plasmare questi due mondi in modo da permettere uno sviluppo più integrale e duraturo del soggetto. A questo riguardo è giusto porre a confronto le differenze strutturali che caratterizzano i due diversi approcci didattici: quello della scuola-ordine logico e quello di realtà-ordine pratico. La scuola-ordine logico è caratterizzata dalle prestazioni individuali le quali si affidano soltanto ad un apprendimento puramente mentale ove ogni tipo di strumento (come la calcolatrice o il dizionario) vengono visti come un accessorio se non anzi come un'interferenza. Il sapere, trasmesso attraverso simboli e codici, è solitamente astratto, decontestualizzato e generale. Questo perché aspira ad avere una valenza generale, evidenziando così il ruolo datogli da questo tipo di approccio, quello di finalità ultima dell'insegnamento. All'interno di una scuola di questo genere possiamo quindi parlare di insegnamento muro. Tale si fonda sulla classica sequenza: sapere $\rightarrow$ insegnante $\rightarrow$ conoscenza $\rightarrow$ studente $\rightarrow$ apprendimento. La centralità nel processo di insegnamento – apprendimento è assunta dal docente, il quale funge da tramite tra il sapere da insegnare e gli studenti. Infatti, in questo caso il contesto classe viene considerato quasi un disturbo. L'alunno è quindi un ricettore passivo al quale viene richiesto di riprodurre un insieme di saperi trasmessi dall'insegnante secondo un approccio di tipo analitico. Lo studente caratteristico di questa modalità di insegnamento è quello diligen-

te, il quale possiede abilità e conoscenze atte a risolvere specifiche questioni strutturate ad hoc. In pratica quindi, gli si richiede soltanto di riproporre in maniera più o meno coerente le nozioni che ha assimilato durante le lezioni. Al contrario, in una realtà-ordine pratico si cerca di costruire collegamenti continui fra saperi teorici e pratici. Basandosi appunto su un apprendimento per competenze, viene completamente ribaltato il ruolo delle discipline e dei saperi annessi: non sono più i fini ma piuttosto sono strumenti culturali per comprendere e affrontare il mondo. Di conseguenza, apprendere in questo contesto significa saper rielaborare il proprio sapere in funzione di ciò che ci troviamo dinanzi. La rielaborazione dei saperi non può quindi astenersi dall'uso di strumenti presenti nella realtà e dalla condivisione della situazione problematica e della sua gestione con altri soggetti che condividono la medesima questione. Tale tipo di approccio viene denominato **insegnamento ponte**, richiamando con questo nome proprio la continua ricerca di creare ponti fra la teoria e il concreto. Qua, il ruolo centrale nel processo di insegnamento-apprendimento è spartito fra docente e alunno, dando la possibilità a quest'ultimo di formare un collegamento diretto con il sapere. La conoscenza parte da contesti reali, per poi passare al sapere teorico e tornando infine al concreto, permettendo così la contestualizzazione. L'insegnamento diventa in questa maniera un evento più complesso dato che non viene più suddiviso in tanti piccoli argomenti ma al contrario ha carattere globale e mutevole. Però, invece che esser un insegnamento rigido e dogmatico, si plasma sulla persona che dovrà apprendere. In questa maniera la scuola viene vissuta, sia dagli studenti che dai docenti, in maniera più positiva e tranquilla, incrementando nei suoi protagonisti atteggiamenti propositivi. Il docente dovrà ristrutturare completamente il proprio modo di insegnare, avvicinandosi sempre più ad una progettazione a ritroso. Come prima cosa, infatti, dovrà decidere quale sarà la competenza che costituirà il traguardo formativo di una determinata unità didattica. A ritroso poi dovrà strutturare l'intero percorso in modo tale da riuscire a mobilitare e/o sviluppare nei suoi studenti le risorse chiave che permetteranno l'acquisizione della competenza stessa. inoltre, riconoscerà nel contesto classe una risorsa, come se fosse un amplificatore delle potenzialità individuali, dando la possibilità di instaurarsi dei dialoghi fra gli studenti, dei laboratori di gruppo. Così facendo quindi lo studente non sarà più passivo ma avrà un ruolo attivo nella costruzione della propria conoscenza, consapevole di poter contare sul sostegno del

docente, dei materiali didattici e sulla collaborazione con i suoi compagni. Si viene così a creare uno studente competente, il quale di fronte a situazioni inedite si rimbocca le maniche ed escogita strategie, fiducioso delle proprie capacità. Ovviamente queste due diverse modalità di apprendimento portano con sé anche due diversi tipi di valutazione. Quello relativo alla scuola-ordine logico ha come strumenti di valutazione le verifiche, interrogazioni facendo riferimento a schemi rigidi e prefissati. Ci si basa quindi solo su un apprendimento individuale, riguardante il modo con cui gli alunni riportano quanto svolto durante le lezioni. Invece il secondo approccio genera una valutazione più ampia e autentica. Non si tiene conto soltanto dell'effettivo impegno dello studente, ma si considerano anche tutte le competenze che lo stesso è riuscito a sviluppare a conclusione del percorso didattico e soprattutto si tiene conto della persona nella sua totalità. Si parla quindi di una valutazione triangolare che si basa su una visione trifocale della persona; vengono difatti considerate le dimensioni:

- soggettiva: implica che si soggetto si autovaluti;
- oggettiva: indagine empirica che attesta la prestazione del soggetto e i risultati ottenuti in relazione ai compiti a lui dati;
- intersoggettiva – sociale: comprende l'insieme di aspettative sociale in rapporto alla capacità del soggetto di affrontare le situazioni che gli vengono proposte. Ha come strumenti le osservazioni in itinere, questionari a docenti e genitori, colloqui, interazioni fra pari.

Al centro di queste tre dimensioni si pone l'idea di competenza in rapporto si pone la Rubrica valutativa attraverso la quale si esplicita il significato dato alla competenza in esame e il livello di padronanza atteso dal soggetto valutato. Le sfide che questo nuovo approccio per competenze deve affrontare non riguardano soltanto le resistenze del corpo docente che si trova a dover modificare le proprie abitudini, bensì sono soprattutto culturali. Affinché venga smantellata l'idea di scuola come noi tutti conosciamo lasciando il posto ad una sua innovazione si richiede l'impegno anche da parte degli studenti, delle loro famiglie e dell'intera società. Tutti quanti dovremo rimetterci in gioco, abbandonare stereotipi, pregiudizi e certezze in merito ai modi e ai fini dell'insegnamento. È evidente ormai che in una società moderna e in continua evoluzione, come quella che

stiamo vivendo, le pratiche didattiche secolari ed inflessibili sono totalmente inadeguate. In conclusione, quindi, le competenze sono una "combinazione di conoscenze, abilità e atteggiamenti" in cui: la conoscenza è composta da fatti, cifre, idee e teorie che forniscono le basi per conoscere nuovi argomenti; le abilità riguardano la capacità di eseguire compiti integrandovi il sapere al fine di ottenere dei risultati; atteggiamenti relativi alla disposizione ad agire o reagire a idee, persone o situazioni.

Verso le competenze chiave

Come già detto anticipatamente, questa rivoluzione, sia nazionale che internazionale, nel ridefinire il compito formativo scolastico, spostando il focus sul costrutto di competenza, è riscontrabile nel nuovo interesse per la formazione di una cittadinanza attiva. Si avverte sempre più la necessità di identificare le competenze chiave che permetteranno all'individuo di inserirsi in maniera autonoma e responsabile nei vari contesti in cui vive. Fra i vari ambiti incaricati di tal compito, la scuola risponde a tale bisogno. Grazie al recente conseguimento di una maggior autonomia, gli istituti scolastici riesco a garantire, soprattutto durante il periodo dell'obbligo, l'acquisizione di tali competenze ponendole come il fulcro dei suoi traguardi formativi.
Cerchiamo allora di comprendere cosa sono queste competenze chiave per un apprendimento permanente.
Nel 1995 l'OMS scrisse il "Life Skills education in school" col quale si invitavano le scuole a fornire ai giovani vari strumenti utili per affrontare le possibili difficoltà in vista di una cittadinanza globale.
Nello stesso periodo anche in Europa si cercava di ottenere una formazione dell'individuo che non terminasse con l'istruzione scolastica ma che fosse presente durante tutto l'arco di vita, nella letteratura tale apprendimento viene chiamato "lifelong learning". È proprio in questo momento, di fronte alle nuove situazioni economico-sociali, che inizia a farsi strada il concetto di competenza. Inoltre, in un'ottica di libera circolazione, nel 1997 grazie al progetto Definition and Selection of Competencies (DeSeCo), l'OCSE fornì una base su cui compiere indagini internazionali di accertamento degli apprendimenti e competenze chiave. Si cercava in pratica di definire un quadro unitario di competenze fra i diversi sistemi scolastici europei; a tal fine si concordarono dei criteri utili per identificare

le competenze chiave. Una competenza per esser definita chiave dovrà:

- fornire aiuto al raggiungimento di traguardi importanti sia per l'individuo che per la società;
- essere un fondamentale strumento per il superamento di sfide di vario genere;
- avere carattere generale.

In definitiva, le competenze chiave sono *"quelle di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personali, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'occupazione"*.
All'interno del contesto nato grazie al DeSeCo, il 18 dicembre 2006 il Consiglio e il Parlamento europeo hanno redatto una Raccomandazione relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente.
Con essa, gli stati membri venivano sollecitati a sviluppare *"l'offerta di competenze chiave per tutti nell'ambito delle loro strategie di apprendimento permanente, tra cui quelle per l'alfabetizzazione universale [...]"*, utilizzando il quadro di riferimento, in allegato al documento.
Ciascuna di queste otto competenze chiave è descritta riportando le conoscenze, abilità e attitudini che la contraddistinguono e ne manifestano l'acquisizione. Fin dalla sua adozione, tale raccomandazione è stato un riferimento cardine per lo sviluppo di istruzione, formazione e apprendimento volti alle competenze. Per quanto riguarda il nostro Paese, questa questione divenne di primaria importanza soltanto dopo aver visto i deludenti risultati ottenuti dal confronto con gli altri stati membri. È per questo motivo che con il DM 22 agosto 2007, riguardante il regolamento sull'obbligo di istruzione, si traccia un insieme di saperi e competenze da conseguire che assicurano un'equivalenza formativa dei vari percorsi.
Nel documento, questi saperi sono articolati in:

conoscenze : teoriche e/o pratiche che indicano il risultato dell'acquisizione di informazioni derivanti dall'apprendimento;

abilità : distinte in cognitive (pensiero logico, intuitivo e creativo) e pratiche. Sono le capacità di applicare le conoscenze per la risoluzione di problemi;

competenze : capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche in diverse situazioni. Sono descritte in termini di autonomia e responsabilità.

Per l'assolvimento dell'obbligo, i saperi si riferiscono ai quattro assi culturali: dei linguaggi, matematico, scientifico-tecnologico, storico-sociale. La definizione dei risultati di apprendimento scolastico, denominati appunto "traguardi di sviluppo delle competenze", si basa proprio su questi saperi. Tali costituiscono la base per la costruzione del Profilo dello studente, introdotto nel capitolo 3, il quale verte all'acquisizione delle competenze chiave viste come *"il risultato che si può conseguire all'interno di un unico processo di insegnamento-apprendimento, attraverso la reciproca integrazione e interdipendenza tra i saperi e le competenze contenuti negli assi culturali".*

3.4 Competenze chiave europee

In risposta ai cambiamenti rapidi e profondi cambiamenti intervenuti nella società e nell'economia, in un periodo storico in cui il progresso tecnologico fa da padrone e rende difficoltoso lo star al passo con esso, le competenze richieste sono cambiate anch'esse. È sempre più necessario che le persone posseggano un ampio spettro di competenze in modo tale da promuovere la coesione sociale e potenziare il proprio ruolo di cittadino attivo e responsabile all'interno delle varie decisioni sociali.
Per cui, essendo cambiata la società e con essa i suoi bisogni, il 22 maggio 2018 il Consiglio ha approvato una nuova Raccomandazione per rinnovare le competenze chiave. Riporto qui di seguito quindi l'elenco aggiornato delle otto competenze europee ancora vigenti:

1. **competenza alfabetica funzionale**;
2. **competenza multilinguistica**;
3. **competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria**;
4. **competenza digitale**;
5. **competenza personale, sociale e capacità di imparare a imparare**;

6. **competenza in materia di cittadinanza**;
7. **competenza imprenditoriale**;
8. **competenza in materia di consapevolezza ed espressione culturali**.

All'interno del quadro di rifermento europeo presente nella raccomandazione, tali competenze chiave vengono descritte come *"le basi per creare società più uguali e più democratiche [...]"*. A mio avviso, quest'ultima affermazione è più che sufficiente per comprendere le potenzialità e la risonanza che un apprendimento basate sulle competenze può risvegliare in ognuno di noi.

3.4.1 Competenze matematiche

Riporto qua di seguito il paragrafo della raccomandazione del 2018 inerente alla competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria:

A *La competenza matematica è la capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematici per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza della competenza aritmetico- matematica, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che sulla conoscenza. La competenza matematica comporta, a differenti livelli, la capacità di usare modelli matematici di pensiero e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, diagrammi) e la disponibilità a farlo.*

B *La competenza in scienze si riferisce alla capacità di spiegare il mondo che ci circonda usando l'insieme delle conoscenze e delle metodologie, comprese l'osservazione e la sperimentazione, per identificare le problematiche e trarre conclusioni che siano basate su fatti empirici, e alla disponibilità a farlo. Le competenze in tecnologie e ingegneria sono applicazioni di tali conoscenze e metodologie per dare risposta ai desideri o ai bisogni avvertiti dagli esseri umani. La competenza in scienze, tecnologie e ingegneria implica la comprensione dei cambiamenti determinati dall'attività umana e della responsabilità individuale del cittadino.*

Conoscenze, abilità e atteggiamenti essenziali legati a tale competenza:

A *La conoscenza necessaria in campo matematico comprende una solida conoscenza dei numeri, delle misure e delle strutture, delle operazioni fondamentali e delle presentazioni matematiche di base, la comprensione dei termini e dei concetti matematici e la consapevolezza dei quesiti cui la matematica può fornire una risposta.*

Le persone dovrebbero saper applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano nella sfera domestica e lavorativa (ad esempio in ambito finanziario) nonché seguire e vagliare concatenazioni di argomenti. Le persone dovrebbero essere in grado di svolgere un ragionamento matematico, di comprendere le prove matematiche e di comunicare in linguaggio matematico, oltre a saper usare i sussidi appropriati, tra i quali i dati statistici e i grafici, nonché di comprendere gli aspetti matematici della digitalizzazione.
Un atteggiamento positivo in relazione alla matematica si basa sul rispetto della verità e sulla disponibilità a cercare le cause e a valutarne la validità.

B *Per quanto concerne scienze, tecnologie e ingegneria, la conoscenza essenziale comprende i principi di base del mondo naturale, i concetti, le teorie, i principi e i metodi scientifici fondamentali, le tecnologie e i prodotti e processi tecnologici, nonché la comprensione dell'impatto delle scienze, delle tecnologie e dell'ingegneria, così come dell'attività umana in genere, sull'ambiente naturale. Queste competenze dovrebbero consentire alle persone di comprendere meglio i progressi, i limiti e i rischi delle teorie, applicazioni e tecnologie scientifiche nella società in senso lato (in relazione alla presa di decisione, ai valori, alle questioni morali, alla cultura ecc.).*
Tra le abilità rientra la comprensione della scienza in quanto processo di investigazione mediante metodologie specifiche, tra cui osservazioni ed esperimenti controllati, la capacità di utilizzare il pensiero logico e razionale per verificare un'ipotesi, nonché la disponibilità a rinunciare alle proprie convinzioni se esse sono smentite da nuovi risultati empirici. Le abilità comprendono inoltre la capacità di utilizzare e maneggiare strumenti e macchinari tecnologici nonché dati scientifici per raggiungere un obiettivo o per formulare una decisione o conclusione sulla base di dati probanti. Le persone dovrebbero essere anche in grado di riconoscere gli aspetti essenziali dell'indagine scientifica ed essere capaci di comunicare le conclusioni e i

ragionamenti afferenti.
Questa competenza comprende un atteggiamento di valutazione critica e curiosità, l'interesse per le questioni etiche e l'attenzione sia alla sicurezza sia alla sostenibilità ambientale, in particolare per quanto concerne il progresso scientifico e tecnologico in relazione all'individuo, alla famiglia, alla comunità e alle questioni di dimensione globale"

Per cui quello che si evince da questo documento è che la matematica è un mezzo per indagare e spiegare i vari fenomeni presenti nel mondo; sviluppa un pensiero razionale col quale approcciarsi ai vari problemi della vita quotidiana. Tutti parametri necessari per la formazione di un cittadino responsabile e consapevole. Inoltre, all'interno delle Indicazioni Nazionali si evidenzia come questa disciplina consente di sviluppare competenze trasversali rilevanti *"In particolare, la matematica [...] contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri".*
Sin da subito è facile accorgersi come anche queste competenze appena riportate siano essenziali per una cittadinanza attiva globale. Tale obiettivo andrebbe in fumo se non si baserebbe sull'ascolto attento e critico dell'altro, sulla disponibilità a trasmettere e a confrontare le proprie conoscenze. A tal proposito si parla soprattutto di educazione all'argomentazione che ha il compito di allertare sulla proliferazione di false informazioni, problema assai diffuso oggigiorno.
Un modo con cui il docente di matematica può stimolare queste competenze all'interno della classe è attraverso la didattica laboratoriale del learning by doing. Essa rappresenta il contesto più idoneo per agevolare la cooperazione, l'ascolto e il confronto fra pari ma soprattutto per rendere gli studenti autori del proprio apprendimento. Con il laboratorio, gli alunni fanno esperienza diretta dell'attività di ricerca: infatti, raccolgono dati, discutono idee, argomentano le scelte, sperimentano e verificano se le ipotesi fatte risultano corrette ai fini della soluzione, attuano stratagemmi nati dalla cooperazione per approcciare problemi autentici. In questa maniera gli alunni non hanno più paura di sbagliare perché errare è parte integrante dell'opera di un bravo ricercatore.
Pur essendo situazioni che richiedono un addestramento opportuno da parte del docente e grandi capacità di gestione, la didattica laboratoriale è un importante strumento

che permette non soltanto di sviluppare varie competenze trasversali e di costituire una "palestra" per imparare a fare scelte consapevoli, valutando le conseguenze delle proprie scelte e quindi in pratica ad assumersene la responsabilità. In aggiunta, ha soprattutto anche un grosso potere nel trasformare le emozioni negative, collegate alla matematica, in positive suscitando così curiosità, interesse e senso di autoefficacia, fattori che sappiamo facilitare l'apprendimento.
Questo però non significa che è necessario affrontare tutti gli argomenti nuovi attraverso la costruzione di situazioni a-didattiche (come ad esempio il laboratorio), ma, al fine di un apprendimento significativo e permanente, è bene, individuare a priori quali argomenti chiave si vogliono far costruire agli allievi grazie all'uso di approcci a-didattici. In generale, comunque, una delle più grandi sfide che il docente si trova ad affrontare durante il processo di insegnamento-apprendimento è quella di convincere lo studente che quel che si apprende, lo si apprende per la vita e non è finalizzato ad una verifica o ad una qualche altra forma di valutazione.
Mi sembra importante ricordare qua la differenza che Fandiño Pinilla fa in merito alle competenze in matematica:

- *competenza in matematica*: si centra nella disciplina, riconosciuta come scienza, come oggetto specifico e di conoscenza. L'allievo entra in contatto con saperi specifici che la società ha inglobato nelle conoscenze riconosciute come base per un consapevole ingresso all'interno di essa. La competenza di cui si parla quindi è individuale che però grazie alla didattica laboratoriale può diventare anche a livello del contesto classe.

- *competenza matematica*: è quella che permette ad un individuo di vedere, interpretare e comportarsi nel mondo in un senso matematico. Comprende anche l'elaborazione di giudizi ben fondati ed impegno nell'usar la matematica al fine di soddisfare i bisogni di una cittadinanza impegnata, riflessiva e costruttiva. Prendiamo come esempio l'atteggiamento analitico o sintetico, con il quale alcune persone affrontano situazioni problematiche. Non sempre la competenza matematica va di pari passo con la competenza in matematica: ci sono buoni risolutori di problemi che però possono presentare difficoltà con, ad esempio, la gestione di algoritmi.

In entrambe però sono presenti l'aspetto della conoscenza della disciplina, la disposizione e il desiderio a rispondere ad uno stimolo esterno o interno e la tendenza ad agire con persistenza e continuità. L'apprendimento della matematica, infatti, si presenta come un fattore multiplo, ricco di diversi aspetti e che necessita per favorire competenza di un'ottimale combinazione di apprendimenti specifici e distinti. Non basta aver costruito un concetto, ma occorre saperlo usare combinarlo con altri e con strategie opportune per risolvere problemi, occorre saper spiegare a sé stessi ed agli altri il concetto costruito e la strategia seguita, e saper passare sapientemente da una rappresentazione ad un'altra. Per questo motivo l'insegnamento e la conoscenza della matematica sono molto importanti per l'acquisizione di **competenze trasversali**. Esse non sono collegate ad una specifica disciplina ma rappresentano l'insieme di conoscenze, capacità e qualità personali che caratterizzano il modo di agire della persona in vari contesti della sua vita. Entrano in gioco continuamente, anche ad esempio quando dobbiamo fare delle scelte prendendo una decisione, ed è per questo che vanno assolutamente prese in considerazione anche negli istituti scolastici. Sono quindi un valore aggiunto per migliorare la propria condizione personale. Tra queste mi preme evidenziare il **problem solving**.
Anche le competenze chiave indicano la matematica come la capacità a risolvere problemi. Innanzitutto, è giusto sottolineare che vi è una differenza tra problema ed esercizio: nel secondo si sappiamo come arrivare alla soluzione mentre nel problema si deve avere un atteggiamento strategico perché non conosciamo la risposta né sappiamo se essa esiste e in aggiunta non sappiamo come arrivarci nell'immediato. Soltanto agli inizi del Novecento si inizia a parlare di Problem Solving considerandolo un processo produttivo. Nonostante l'importanza data a questa competenza, a scuola non si fa quasi mai problem solving. Spesso i problemi proposti agli studenti sono risolvibili con schemi o strategie già interiorizzati, nei quali sono presenti soltanto dati necessari per raggiungere il risultato, sono suddivisi per argomento e nei quali si sa di per certe che esiste una soluzione. Questo comporta un grosso rischio di adito all'idea che la matematica si concentra più sui prodotti che sui processi portando spesso a risvolti negativi come uno scarso senso di auto-efficacia e di assunzione di responsabilità. Al contrario, nei problemi reali sta a colui che lo risolve individuare e capire quali possono essere le informazioni utili, avendo a che fare con l'incertezza che poi non esista neppure una soluzione a tale difficoltà. Sta

al docente promuovere tale attività agli studenti dimostrando come tale capacità sarà preziosa poi per affinare le loro capacità di ragionamento. Ovviamente per attuarla si necessitano di giuste scelte didattiche che prevedono, ad esempio, la scelta di problemi che ammettano più soluzioni, con dati di varia natura e rilevanza, con applicazione di conoscenze non solo prettamente matematiche e di difficoltà adeguata allo scopo dove, infatti, l'obiettivo sarà quello di costruzione autonoma di competenza. È corretto che si riservi il giusto tempo per un'attività di problem solving, difatti non si può venire a capo di un problema con comportamenti random ma il solutore deve effettuare diversi passaggi:

◇ capire il problema;

◇ ideare un piano per trovare una soluzione, se esiste;

◇ eseguire il piano;

◇ ritornare indietro per verificare il procedimento e controllare il risultato.

Innanzitutto infatti si cercherà di applicare regole o procedimenti precedentemente applicati. Però, se il problema scelto è un "buon problema", tali potrebbero non esser idonei alla particolare situazione in esame e quindi si passerà ad escogitare un nuovo approccio al problema arricchendo così il campo di esperienze.
Abbiamo già visto come il problema abbia un carattere soggettivo e questo è condivisa anche dall'attività di problem solving, infatti, non tutti gli individui hanno gli stessi tempi di risposta di fronte ai problemi, questo è dovuto a caratteristiche intrinseche nella persona come, per l'appunto, la facilità nel richiamare dalla memoria informazioni che possono risultare utili o la fluidità nel formulare ipotesi. Il problem solving per giunta non esula dalla capacità argomentativa, infatti, non è possibile generare un risultato se il solutore non è in grado di trasmettere, sia verbalmente che con l'aiuto di immagini o gradi, chiaramente le proprie idee e di argomentarle.
Ciò dimostra come una competenza che nella visione di tutti è puramente matematica, il problem solving, in realtà si leghi alle altre discipline dimostrandone così il suo carattere trasversale.

3.4.2 Cosa significa esser "cittadino responsabile"

Alla luce di tutto quello che abbiamo illustrato è corretto affermare che oggi giorno si pone gran importanza all'apprendimento per competenze. Data la sua natura flessibile, strategica e adattiva, quest'opportunità permette ad ogni conoscenza di delinearsi in termini di competenza, trasversale e no, capace di permettere all'individuo di "imparare ad imparare" per tutto l'arco della sua vita.
La scuola certamente cerca di guidare i propri studenti nel dar senso a tutta la serie di esperienze che possono incontrare in modo da garantire il più completo successo personale formativo. D'altra parte, però tale incarico non è dovuto soltanto alla scuola, semplicemente perché da sempre considerata il luogo specifico per l'apprendimento.
Infatti, abbiamo già detto ripetutamente come l'apprendimento avviene in differenti contesti (formali, informali e non-formali) e come anzi la gran varietà di possibili esperienze sia una ricchezza per la crescita della persona. Si sta venendo a crearsi una nuova forma di cittadinanza che, partendo dal contesto di appartenenza, si amplia al territorio nazionale, europee e mondiale. Proprio in funzione di questa cittadinanza attiva diventa sempre più importante riuscire a concepire l'apprendimento secondo un punto di vista più complesso e ampio.
Una società della conoscenza è composta da cittadini competenti e responsabili i quali partecipano attivamente alle attività della comunità, le quali vengono vissute come un importante modo per cambiare e apprendere nuove conoscenze. Quindi, soprattutto per quanto riguarda l'apprendimento, esser dei soggetti responsabili significa riconoscere, potenziare e arricchire le proprie conoscenze, modellando anche i nostri soliti metodi di ragionamento o comportamentali. Si fa riferimento quindi a cittadini che affermano e riconoscono i propri pensieri e azioni, disponibili a reinterpretare il proprio rapporto con il mondo e pronti ad intervenire in prima linea nella risoluzione di problemi, senza delegare a parti terze.
Socialmente parlando, un cittadino responsabile è colui che ha capacità di collaborazione e partecipazione, il tutto sempre nel rispetto sia degli altri (anche per le diverse culture e tradizioni) sia dell'ambiente. Sarà una persona disponibile al confronto, al dialogo, alla trasmissione del sapere autentico e, se necessario, a guidare gli altri verso un obiettivo per il benessere sociale. Così facendo il soggetto è propenso anche ad auto-imparare

divenendo il primo principale artefice della sua crescita personale.

Capitolo 4

Introduzione alla Teoria delle decisioni

Dai risultati emersi dal questionario nel capitolo 2 abbiamo visto come sia gli studenti che vari componenti della società riconoscono alla matematica, come conseguenza dello sviluppo di un pensiero razionale, la capacità di indirizzare le persone a compiere scelte più responsabili. Andiamo allora a conoscere la branca della matematica che se ne occupa e il contributo che ci fornisce.

Diamo innanzitutto una definizione di ciò che per noi è una decisione razionale: per **decisione** si intende un atto conscio di allocazione di risorse finalizzato al raggiungimento di determinati obiettivi; mentre **razionale** sottintende che tale scelta venga effettuata basandosi su dati, informazioni e procedimenti logici.
Le nostre azioni sono caratterizzate da queste decisioni di tipo razionale. Spesso però di fronte ad un problema decisionale il genere umano non prende la decisione migliore da un punto di vista razionale. Supponendo infatti che il livello ottimale del ragionamento dovrebbe esser dettato dal modello classico di razionalità basato su principi formali della logica deduttiva e della teoria di probabilità, è facile capire che in realtà le persone compiono sistematicamente errori di ragionamento facendosi spesso influenzare dai contenuti delle premesse giungendo in questo modo a deduzioni sbagliate che gravano molto sul nostro comportamento. Frequentemente queste sono dovute sia ad una errata valutazione della probabilità sia dal fatto che siamo incoerenti di fronte a scelte fatte in condizioni analoghe. Questo perché siamo guidati da fattori psico-sociali, inconsci o

consci, totalmente irrazionali. Per cercare di arginare questo problema, infatti, si deve soddisfare l'assioma di coerenza: le probabilità associate ai vari eventi non devono essere modificate di volta in volta se le informazioni in possesso non mutano.
L'esistenza stessa della logica e della matematica ci mostrano come il genere umano sia in realtà interessato a comprendere cosa significhi agire in modo razionale.
La Teoria delle Decisioni è una branca della matematica che studia il processo decisionale analizzando il comportamento del singolo individuo (o di un gruppo) coinvolto ed esaminando come compie o dovrebbe compiere una scelta fra più alternative possibili, che daranno luogo a conseguenze certe o incerte. Tale teoria ha come compito quello di indicare al decisore razionale, il modo più corretto o conforme alla sua situazione, in relazione a scopi e sulla base delle sue opinioni. Si cercherà quindi di massimizzare il proprio benessere. Per questi motivi la si denomina: teoria normativa delle decisioni.
Possiamo desumere quindi quale sia l'importanza di tale branca dato che quotidianamente ognuno di noi deve assumersi la responsabilità delle conseguenze delle sue decisioni, conseguenze che non necessariamente sono di carattere individuale ma, al contrario, possono riguardare anche la comunità stessa. Sottolineo il fatto che le decisioni a cui stiamo facendo riferimento possono essere di qualsiasi tipo: da che abito indossare ad una serata, alla scelta di un particolare investimento finanziario.
Il campo di applicazione della teoria delle decisioni è infatti immenso andando dalla moralità e sociologia alla medicina e tecnologia.
Nel dover compiere una decisione che comporta una gestione e organizzazione di attività e risorse limitate al fine di massimizzare/minimizzare una funzione obiettivo, la Teoria delle decisioni ci sarà d'aiuto fornendoci un insieme di strumenti matematici a sostegno di tali scelte. In genere, il processo decisionale richiede che il decisore:

1. Sia in grado di individuare l'insieme delle possibili azioni tra cui scegliere in vista delle conseguenze. Si cercherà quindi di creare un insieme D di decisioni possibili.

2. Connetta ad ogni azione una o più conseguenze, le quali fanno parte di un insieme C. Fra i due insiemi D e C potrà costruirsi una corrispondenza biunivoca soltanto se si suppone che se due decisioni hanno la stessa conseguenza, allora le si fanno coincidere. A seconda della complessità dei due insiemi ne deriva la difficoltà del problema.

3. Definisca un criterio di preferenza tra le possibili conseguenze dell'insieme C. Tale criterio, indicato con $<$, è una relazione d'ordine stretto tra gli elementi di C, chiamati quindi $c_1, c_2 \dots c_n$. Allora si ha che la relazione deve soddisfare queste proprietà:

   Antiriflessiva : ogni conseguenza non può risultare preferibile a sé stessa;

   Antisimmetrica : presi due elementi qualsiasi $c_1, c_2 \in C$ se:
   $c_1 < c_2$ e $c_1 > c_2$ allora si avrà che $c_1 = c_2$.
   Ciò comporta che, per qualsiasi coppia di elementi di C sussisterà solo una di queste situazioni:

   i) $c_1 > c_2$;

   ii) $c_1 < c_2$.

   Transitiva : $(c_1 > c_2) \wedge (c_2 > c_3) \Rightarrow (c_1 > c_3) \forall c_1, c_2 c_3 \in C$ in modo tale da rispettare la naturale condizione di coerenza.

   Può capitare anche che due scelte appaiano indifferenti al decisore; per questa condizione il simbolo utilizzato sarà $\sim$. Ora ad ogni conseguenza si può associare un valore numerico $w(c_i)$ rispettando un determinata regola. Non resta quindi che decidere sulla base di questi valori.

Un aspetto fondamentale della Teoria delle decisioni consiste nel definire la funzione w che indica la preferenza tra le varie scelte. A seconda che le conseguenze siano certe o incerte si va incontro a diversi tipi di decisioni:

a) Decisioni in condizioni di certezza;

b) Decisioni in condizioni di incertezza;

c) Decisioni in condizioni di rischio.

Noi ci concentreremo sul secondo caso: le decisioni prese in condizioni di incertezza.

4.1 Decisioni in condizioni di incertezza

Rappresentano il cuore della Teoria delle decisioni. La maggior parte delle volte le persone elaborano informazioni in condizioni di incertezza, basti pensare infatti che i dati che ci giungono dai nostri sensi ci danno una visione parziale e mutevole dell'ambiente circostante. Quasi inconsciamente la nostra mente usa la probabilità per valutare la plausibilità delle affermazioni in situazioni di incertezza. Di conseguenza conoscere i vari metodi probabilistici per analizzare dati e informazioni ed elaborare le relative incertezze è una condizione necessaria per chi debba compiere valutazioni razionali.
Citando Laplace: *"la teoria della probabilità non è che buon senso ridotto a calcolo"*. Il concetto di probabilità a cui faremo riferimento successivamente, è di tipo soggettivista. Diamo quindi una definizione soggettivista di probabilità:

Definizione 4.1.1. La probabilità di un evento E è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di tale evento.

Tale concezione di probabilità dipende dal quantitativo di informazioni che il soggetto possiede nel momento in cui effettua la valutazione ed è fortemente connessa all'incertezza. Inoltre, come suggerito da D'agostini *"la conoscenza che altri valutano diversamente la probabilità dello stesso evento è un'informazione che andrebbe utilizzata. Non è per mediare ma quanto per capir meglio il problema e comportarsi alla fine nel modo più coerente possibile"*.
Utilizzare questa visione soggettivista della probabilità recupera il concetto naturale e intuitivo di probabilità che noi tutti possediamo. Inoltre, punto di forza di questa concezione, è la possibilità di fare affermazioni probabilistiche su qualsiasi evento. Il relativismo che emerge da questa definizione soggettivista non è estraneo al contesto razionale ma, al contrario, ci rende propensi a valutare le opinioni di altri al pari delle nostre liberandoci da presunzione e arroganza intellettuali. Per cui deliberare in condizioni di incertezza significa quindi decidere fra diverse alternative possibili senza però avere sufficienti informazioni sulle loro conseguenze, rendendoci così incerti sul da farsi. In questi casi, infatti, non tutte le conseguenze sono valori scalari ma anzi, spesso e volentieri, saranno variabili aleatorie che dipenderanno da una distribuzione di probabilità.

Ciò significa che la decisione migliore non dipenderà soltanto dal decisore, ma anche dallo stato di natura che si verificherà e che esula dal controllo dell'individuo razionale. Siccome alcune conseguenze potranno essere dei valori certi mentre altre invece potranno esser aleatori, per poter confrontare tali diversi tipi di variabile sarà utile assegnare a ciascuna di esse un valore equivalente certo secondo una regola. Solitamente la scelta di questo valore certo tende ad essere per il valore intermedio tra quelli che la variabile osservata può assumere. Tale valore è detto **media** o **speranza matematica**.
Essa, a seconda del tipo di variabile X osservata si definisce in questa maniera:

- $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k$ nel caso in cui la variabile aleatoria sia discreta e finita;
- $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k$ se la variabile aleatoria è discreta e numerabile;
- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$ se la variabile aleatoria è assolutamente continua con densità f.

Negli ultimi due casi bisogna sempre supporre che l'integrale o la somma della serie esistano; mentre i termini p_k indicano le probabilità assegnate alle variabili aleatorie x_k. Una volta che si è riusciti a descrivere tutti i possibili stati di natura ed ad individuare tutte le decisioni e conseguenze si può passare alla costruzione di una tabella detta **schema in forma normale** che riportiamo nella tabella 1.

	Decisioni				
Eventi	d_1	d_2	$\cdots$	d_n	**Probabilità**
E_1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\cdots$	$x_{1,n}$	p_1
E_2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\cdots$	$x_{2,n}$	p_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
E_m	$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	$\cdots$	$x_{m,n}$	p_m
Medie	$E(X_1) = \sum_{i=1}^{m} x_{i,1} \cdot p_i$	$E(X_2)$	$\ldots$	$E(X_n) = \sum_{i=1}^{m} x_{i,n} \cdot p_i$	

Tabella 1: Schema in forma normale

Nell'ultima riga ritroviamo i valori certi che abbiamo associato alle variabili aleatorie relative a ciascuna decisione.

A seconda della situazione e della natura del problema decisionale, ci si potrà basare su diversi criteri di scelta. Quelli che noi andremo ad analizzare sono: del massimo valore atteso e dell'utilità attesa.

Criterio del massimo guadagno atteso

Solitamente il comportamento umano è finalizzato a raggiungere degli scopi diversi che in comune hanno la volontà di migliorare la propria situazione attuale.
Se, ad esempio, consideriamo casi in cui le conseguenze aleatorie siano in termini monetari, il criterio che andremmo ad applicare potrebbe esser quello di *massimizzare il valore atteso*; nel caso in cui le conseguenze rappresentino il guadagno monetario aleatorio, oppure di *minimizzare il valore atteso*, nel caso in cui le conseguenze invece siano in termini di costi da sostenere da parte del decisore. A seconda quindi della particolare situazione, il decisore deciderà il giusto criterio da applicare in accordo al proprio interesse personale. Facciamo subito un esempio in cui il criterio scelto è quello del *massimo guadagno atteso*

Esempio 4.1.2. Un imprenditore intende investire 1 milione di euro. Le scelte a sua disposizione sono due: d_1 investire in un prodotto finanziario tale che tra due anni riotterrà la cifra investita, più un interesse del 10%; d_2 acquistare un terreno per costruirvi sopra un centro commerciale. In quest'ultimo caso vi è una probabilità pari al 60% che, una volta iniziati i lavori, vengano alla luce dei reperti archeologi. Questo comporterebbe che lo svolgimento dei lavori dovrà esser riorganizzato e permetterà all'imprenditore di guadagnare 0.7 milioni rivendendo il terreno fra due anni. Se invece sotto il terreno non dovessero trovarti reperti, il ricavo sarebbe di 2 milioni. Cerchiamo quindi di stabilire quale sarà la scelta migliore utilizzando come criterio quello della massima speranza attesa.

	d_1	d_2	prob.
E	0.1	-0.3	0.6
non E	0.1	1	0.4
medie	0.1	0.22	

In questo caso lo schema in forma normale assume questa forma dove E indica l'evento per cui si trovino reperti archeologici, di conseguenza $non\, E$ rappresenta il caso con-

trario. I valori che troviamo all'interno della tabella sono i possibili guadagni netti, o perdite nel caso in cui siano negativi. Assumendo in questo caso il criterio della massima speranza matematica, dobbiamo confrontare i valori riportati nella riga delle medie e scegliere quello più alto. Notiamo che allora la decisione del nostro imprenditore ricadrà sull'acquisto dell'appezzamento di terreno nonostante la probabilità di andare incontro ad una perdita non è assolutamente piccola.

Il criterio del massimo guadagno atteso è stato il primo criterio adottato per processi decisionali in condizioni di incertezza. Però questo criterio si basa soltanto sulla valutazione degli importi certi finali, non tenendo conto di determinati fattori. Ciò comporta che non sempre questo criterio determini la decisione ottimale e questo lo si nota maggiormente nel caso in cui le cifre in gioco sono elevate.
Infatti, tornando al nostro esempio, notiamo che il guadagno derivante dall'investimento finanziario sia di 100 000 € mentre l'acquisto del terreno potrà recare una perdita di denaro di 300 000 € con un'alta probabilità (del 60%). Nonostante questo, il criterio del massimo guadagno scelto indirizzerà la scelta verso quest'ultima possibilità in vista del possibile guadagno di 1 milione di euro con una probabilità del 40%. Viene giustamente da chiedersi chi di noi propenderebbe per questa scelta vista l'elevata probabilità di andare incontro ad una perdita.
Analizziamo quindi quali sono i due difetti rilevanti del criterio del massimo guadagno atteso:

- **non tiene conto dell'ordine di grandezza delle cifre in gioco**.
  Pensiamo di partecipare ad un gioco nel quale dobbiamo estrarre una pallina da una scatola scura contente due palline, una bianca e una nera, quindi entrambe hanno probabilità di estrazione pari a $\frac{1}{2}$. Il gioco è il medesimo: se si estrae la pallina bianca si vincono 5€, se invece si estrae la nera dobbiamo pagare 2€. Procediamo a calcolare la speranza matematica nei due seguenti casi:

  - in caso di vincita è $E(X) = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-2) = 3.5$;
  - in caso di rinuncia è $E(X) = 0$.

  Ciò significa che la scelta di partecipare al gioco è migliore rispetto a quella di non accettare, dato che la possibilità di perdere 2€ è compensata dalla probabilità di

vincerne 5. Ma se invece di 5 e 2€ stessimo parlando di centinaia, se non migliaia, di euro in pochi accetterebbero di partecipare al gioco. Nonostante il criterio della massima speranza attesa ci continui a dire che è preferibile giocare, di fronte alla possibilità di perdere 200 o 2 000€, con una probabilità del 50%, molte persone si tirerebbero indietro.

- **Non tiene conto della propensione o avversione al rischio**
  La **propensione al rischio** è una caratteristica dell'individuo, influenzata all'entità del suo patrimonio e da un suo particolare atteggiamento psicologico che porta a preferire una quantità aleatoria rispetto all' ottenere un valore atteso con sicurezza.
  L'atteggiamento opposto viene detto **avversione al rischio**. Il criterio del massimo guadagno non considera affatto quest'ultimo fattore. Ciò fa sì che non sia possibile adeguare la nostra decisione considerando in aggiunta sia la propria disponibilità di denaro sia la propria propensione/avversione al rischio. Per dirlo con le parole di Cramer, un importantissimo matematico, *"I matematici stimano il denaro in proporzione alla sua quantità, mentre un uomo di buon senso lo stima in proporzione all'uso che può farne"*.

Criterio dell'utilità attesa

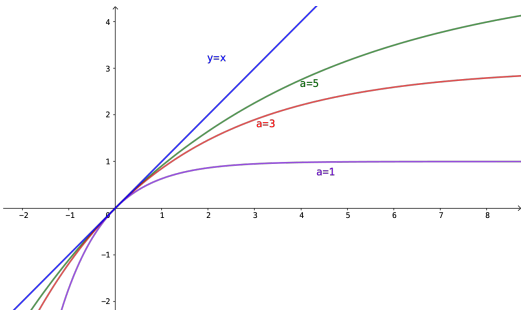
Si pone quindi la questione di risolvere tale problema trovando così un nuovo criterio che tenga conto di questi fattori.
Nel 1738, Daniel Bernoulli affrontò l'argomento con la pubblicazione di un problema, chiamato il *paradosso di San Pietroburgo*, proponendovi poi una sua soluzione.
Il metodo proposto da Bernoulli fu quello di utilizzare, al posto del valore atteso, una funzione u che misuri, in maniera non lineare, il beneficio che un individuo riesce ad ottenere dal possesso di una determinata cosa. Nel caso in cui come prima si stiano trattando somme di denaro, si parla di **utilità** di un patrimonio.
Dato che, come abbiamo detto all'inizio del capitolo, la Teoria delle decisioni ha diversi campi di applicazione, l'utilità di cui si sta parlando non sempre è identificabile in termini monetari; in linea di principio quindi possiamo racchiudervi tutto ciò che porta ad aumentare la nostra felicità/benessere.

La funzione scelta da Bernoulli fu $u(x) = \ln x$; anch'essa però non si rivelò risolutiva in certe situazioni. Con il passare degli anni si è riusciti ad individuare una classe di funzioni che ben si applicano a determinate soluzioni e che soddisfano determinate condizioni. Tali classi di funzioni sono: $u(x) = 1 - e^{-x/a}$ oppure $u(x) = a * (1 - e^{-x/a})$ dove il fattore $a > 0$ indica la propensione al rischio adottata dal decisore. I requisiti che tali funzioni debbono soddisfare sono i seguenti:

1. la funzione utilità deve essere una funzione crescente rispetto all'importo a cui si applica. Ciò significa che "più denaro" dovrà esser sempre preferibile a "meno denaro".

2. la funzione utilità dovrà essere concava. Questo si traduce nel fatto che un medesimo guadagno reca maggior benessere ad un povero che ad un ricco.

3. l'ultima condizione è che la funzione utilità deve essere superiormente limitata. Ciò significa che a una persona straordinariamente ricca anche un notevole incremento del suo patrimonio non comporta un aumento rilevante del proprio benessere.



La bisettrice $y = x$ indica il valore esatto dell'importo monetario.
Osserviamo come il grafico di un individuo avverso al rischio, quindi con a piccolo, si distacchi velocemente da quello della bisettrice. Ciò significa che tale individuo darà gran importanza a non subire perdite consistente, mentre sarà poco interessato a particolari guadagni elevati.
Dopo queste premesse, il modello di funzione di utilità maggiormente impiegato nelle applicazioni è $u(x) = x - \frac{x^2}{2a}$, con $x \leq a$. Questa è detta **utilità quadratica**.
Per poter poi effettuare una decisione, sarà necessario confrontare i diversi valori ottenuti. Si utilizzerà sempre la speranza matematica applicandola, però, in questo casi

ai diversi valori ottenuti con la funzione utilità, quindi $u(x_i)$, ottenendo così un valore detto **utilità attesa**. Vediamo allora come si operi utilizzando come criterio decisionale quello dell'utilità attesa, riprendendo l'esempio precedentemente trattato del nostro imprenditore:

Esempio 4.1.3. La situazione è analoga alla precedente per cui l'imprenditore, che dispone di 1milione di euro da investire potrà scegliere tra: d_1 investire in un prodotto finanziario che gli permetterà di ricavare la somma investita maggiorata di un interesse del 10%, oppure scegliere d_2 e quindi acquistare un terreno che, con probabilità del 60%, gli potrà comportare una perdita di 300 000 euro. Nel caso in cui non si ritrovassero reperti sottostanti, guadagnerà da questo investimento 2 milioni di euro. Cerchiamo quindi di scoprire qual è la scelta migliore che il nostro imprenditore dovrà compiere utilizzando il criterio della massima utilità attesa. Utilizzeremo come funzione utilità $u(x) = a\,(1 - e^{-x/a})$ prendendo come valori di $a = 1$ e 4.

	d_1	d_2	prob.
E	0.1	-0.3	0.6
non E	0.1	1	0.4
medie	0.1	0.22	
utilità attese se a vale:			
1	0.09516	0.04293	
4	0.09876	0.16700	

All'interno dello schema abbiamo riportato anche i valori
$E(X_i)$, $i = 1, 2$ che avevamo ottenuto con il criterio della massima speranza attesa, in modo tale da poter effettuare poi dei confronti. Nell'ultime righe, invece, ritroviamo i valori ottenuti dalle medie dei valori $E(u(X_i))$, $i = 1, 2$.
Notiamo come i valori calcolati in questo caso sottolineino il peso della possibile perdita, ridimensionando così il prestigio dell'ingente guadagno. Con $a = 1$, quindi forte avversione al rischio, l'utilità attesa con la decisione d_1 è chiaramente superiore rispetto al valore della decisione d_2. Questo perché i prodotti di tale criterio di scelta sono più evidenti per un valore di a piccolo. Infatti, aumentando a e ponendolo uguale e 4 la decisione ottimale continuerà ad essere d_1 ma con uno scarto molto minore rispetto a

prima. Dal confronto con i risultati ottenuti con il criterio di massima speranza attesa osserviamo come i valori sono molti diversi tra loro e questo comporta ad una diversa decisione da parte del decisore, in questo caso l'imprenditore.

Con quanto appena detto non si vuol far passare il messaggio che il criterio della speranza attesa sia inappropriato ed inutile, si deve però applicarlo nelle situazioni più consone a tale tipo di canone.

4.1.1 Decisioni condizionate da informazioni

Al fine di rendere tale trattazione più completa, riportiamo brevemente anche altri due tipi di decisioni relative a situazioni che si possono riscontrare nella realtà. Sono sempre decisioni svolte in condizioni di incertezza ma questa volta sono **condizionate da informazioni**.
Abbiamo detto che quando si effettuano decisioni in condizioni di incertezza, al verificarsi degli eventi $E_1, \ldots, E_n$, si assegnano delle probabilità $P(E_i), i = 1, \ldots, n$ sulla base dello stato di informazione del decisore. Adottando, ad esempio, come criterio di scelta quello del massimo guadagno atteso, si avrà che la decisione propenderà per quella il cui guadagno atteso sia massimo. Indichiamo adesso tale valore con $\bar{x} = maxE(X_i), i = 1, \ldots, n$. È certo che chi dovrà prendere una decisione farà di tutto per cercare di ridurre al minimo l'incertezza; per farlo dovrà cercare di arricchire il proprio stato di informazione grazie al conseguimento di nuove conoscenze prima di fare la sua scelta. Le nuove informazioni possibilmente disponibili per il nostro decisore potranno essere di due tipi:

perfetta informazione permette di sapere *con certezza* quale evento accadrà.

Ciò comporta che il decisore deciderà in maniera più consapevole dato che, a questo punto, si baserà sulla valutazione conseguenze *certe*. La decisione ricadrà ovviamente su quella che garantirà, ad esempio, il massimo guadagno.
Utilizzeremo la notazione $\bar{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \cdot p_i$ per indicare il **massimo guadagno con perfetta informazione**, ove $\bar{x_j}$ rappresenta il valore massimo nella riga $i-esima$ dell'evento E_i che accadrà. Tale guadagno sarà maggiore rispetto a quello prospettato senza l'acquisizione dell'informazione, infatti in questa circostanza, si sta

calcolando il guadagno di una variabile aleatoria che vale $\bar{x}_i$ se l'evento che si verificherà sarà E_i con una probabilità p_i.

informazione parziale non sempre la perfetta informazione è facile da ottenere. Per questo motivo talvolta ci si affida ad una informazione parziale, indicata con H, la quale non assicura con certezza il verificarsi di un determinato evento, ma la sua conoscenza cambierà l'assegnazione di probabilità degli eventi.
In questo caso, oltre le probabilità degli eventi, avremo:

- le probabilità di ottenere determinate risposte H_k dall'acquisizione dell'informazione parziale $\rho_k = P(H_k), k = 1, \ldots, r$
- le probabilità condizionate degli eventi $p_i^{(k)} = P(E_i|H_k), i = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, r$ data la risposta H_k.

Per far comprendere meglio il concetto di probabilità condizionata, faccio un piccolo excursus: consideriamo ad esempio un medico il quale conosce diverse malattie $B_1, \ldots, B_n$ e i loro sintomi. Riteniamo che egli, per ogni malattia B_k conosca la probabilità che quella malattia abbia A come sintomo: ciò significa che egli conosce $P(A|B_k)$. Quando gli si presenta un paziente che gli comunica di avere un sintomo A, il problema del medico sta nel capire di quale malattia lui soffra: in pratica deve calcolare la probabilità che quel sintomo A sia determinato dalla malattia B_k, e quindi, $P(B_k|A), \forall k$. Per farlo, il dottore dovrà raccogliere informazioni aggiuntive al fine di aggiornare le probabilità delle diverse ipotesi diagnostiche (cioè le malattie), permettendogli di fare una diagnosi più accurata.
Ora facendo un parallelismo con quanto stavamo dicendo sull'informazione parziale, abbiamo che le probabilità condizionate degli eventi $p_i^{(k)} = P(E_i|H_k)$ sono, nell'esempio del medico, le probabilità aggiornate $P(B_k|A)$ sulle quali ci si baserà per scegliere una diagnosi.
Chiarito questo, per calcolare il guadagno atteso, in caso di parziale informazione, si utilizzeranno le proprietà condizionate $p_i^{(k)}$ e non più le probabilità "a priori" p_i degli eventi E_i. Indichiamo allora con $\bar{x}^{(H)} = \sum_{k=1}^{r} \bar{x}^{(k)} \cdot \rho_k$ il guadagno atteso con l'acquisizione di un'informazione H.
All'interno di questa formula troviamo il termine $\bar{x}^{(k)}$ che rappresenta il massimo

delle medie condizionate $E(X_j|H_k), j = 1, \ldots, m$ e cioè $\bar{x}^k = \max \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \cdot p_j^{(k)},\ 1 \leq j \leq m$. Anche in questo caso il valore del guadagno atteso con informazione parziale risulterà essere maggiore rispetto a quello prospettato in mancanza di informazioni. Per cui possiamo introdurre il teorema:

Teorema 4.1.4. *$\bar{x} \leq \bar{x}^{(H)} \leq \bar{\bar{x}}$ cioè il guadagno atteso in assenza di informazioni ulteriori è minore o uguale al guadagno atteso con informazione parziale; tale è minore o uguale al guadagno atteso con l'acquisizione della perfetta informazione.*

Sappiamo che chiedere un'informazione comporta sempre un costo e tale potrebbe rendere inutile lo scarto di valori tra i guadagni attesi o addirittura potrebbe gravare troppo sulle tasche del richiedente a tal punto da svantaggiarlo. Innanzitutto, allora, il decisore dovrà valutare se è conveniente farsi carico di una tale spesa: per farlo dovrà calcolare il **valore dell'informazione** che è il massimo importo che è giusto spendere per l'acquisizione dell'informazione.
Il valore dell'informazione è dato dalla differenza tra il valore del guadagno atteso con l'informazione e quello senza informazione. Quindi, nel caso di informazione perfetta, il valore di quest'ultima è $v = \bar{\bar{x}} - \bar{x}$; mentre, nel caso di informazione parziale H, il valore è $v^{(H)} = \bar{x}^{(H)} - \bar{x}$.
Ovviamente tutto ciò può essere applicato anche adottando una funzione utilità, ma non ci addentreremo nella trattazione di tale argomento dato che sarebbero necessarie diverse modifiche e si rischierebbe di allontanarsi dal tema di questa tesi.
Riprendiamo l'esempio del nostro imprenditore mostrando come i guadagni variano in presenza di informazioni ulteriori:

Esempio 4.1.5. Un imprenditore vuole investire 1 milione di euro e può scegliere fra un prodotto finanziario (d_1) che tra due anni gli restituirà la cifra investita con un interesse del 10%; oppure acquista un terreno per costruirvi sopra un centro commerciale (d_2). La concessione edilizia per costruire è derogata dal sindaco della città, dove a breve vi saranno le elezioni con due candidati. Il candidato A è un ecologista per cui, in caso di sua elezione a cui si attribuisce una probabilità del 60%, obbligherà il nostro imprenditore a ridimensionare il proprio progetto, portandolo così a subire una perdita di 0.3 milioni. Il secondo candidato, B, gli concederebbe l'esecuzione totale del progetto, garantendogli

così un guadagno di 1 milione di euro, a fronte del ricavo di 2. L'imprenditore ora ha due possibilità:

1. conoscere l'esito delle elezioni prima di compiere la sua scelta pagando una "tangente" ad un funzionario elettorale che gli comunicherà il nome del vincitore prima che la notizia diventi di dominio pubblico.

2. assumere un'agenzia specializzata in sondaggi, in modo da ottenere una previsione di quelli che saranno gli esiti delle elezioni. L'imprenditore sa che l'Agenzia in passato ha pronosticato con esattezza l'esito del voto nel 90% dei casi in cui il candidato eletto partiva favorito, e nel 70% dei casi in cui l'eletto partiva non favorito.

Calcoliamo quindi il prezzo massimo che l'imprenditore è disposto a pagare queste informazioni, utilizzando il criterio del valore atteso di guadagno. Nel caso (1) consideriamo come evento E: il candidato A vince le elezioni e quindi con $nonE$: il candidato A perde le elezioni. Riportiamo allora lo schema in forma normale dei valori senza informazione:

	d_1	d_2	prob.
E	0.1	-0.3	0.6
non E	0.1	1	0.4
medie	0.1	0.22	

Sappiamo però che l'imprenditore verrà informato in anticipo dell'esito dell'estrazione, per cui andrà a considerare i valori massimi delle conseguenze relativi all'avverarsi degli eventi, in relazione alle corrispondenti decisioni.
Per cui, nel caso in cui, con una probabilità di 0.6, si avverasse l'evento E la decisione ricadrebbe su d_1 dato che il valore massimo è: $\bar{x_1} = 0.1$; mentre se si dovesse Avverare l'evento opposto, la scelta ricadrebbe su d_2 dato il valore più alto della conseguenza, quindi $\bar{x_2} = 1$.
Di conseguenza, il valore del massimo guadagno con perfetta informazione sarà:

$$\bar{\bar{x}} = 0.6 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 1 = 0.46.$$

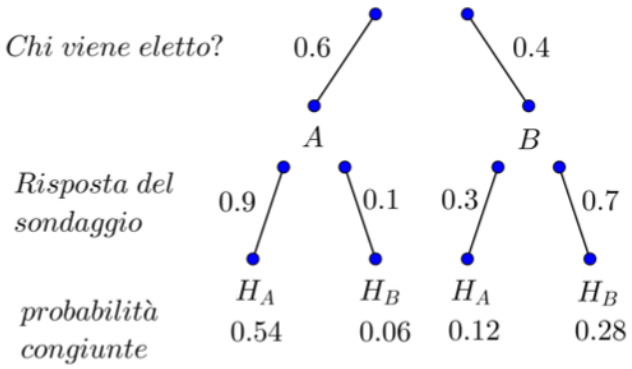
Quindi il valore della perfetta informazione, cioè l'importo massimo della "tangente", è dato da:

$$v = 0.46 - 0.22 = 0.24$$

Dove 0.22 era il guadagno massimo atteso in mancanza di informazione.
Passiamo ora al caso (2). Tale situazione richiede una trattazione un po' più complicata. Il sondaggio dell'Agenzia darà due risposte: H_A= previsione sull'elezione di A; H_B= previsione sull'elezione di B. Le informazioni sull'efficienza dell'Agenzia si traducono in probabilità condizionate: $P(H_A|A) = 0.9$ e $P(H_B|B) = 0.7$.
Sappiamo che, per calcolare il guadagno massimo dovuto all'informazione parziale, necessitiamo delle probabilità delle risposte $P(H_A) = \rho_1, P(H_B) = \rho_2$ e quelle condizionate ai risultati dell'indagine

$$p_1^{(1)} = P(A|H_A), \quad p_2^{(1)} = P(B|H_A), \quad p_1^{(2)} = P(A|H_B), \quad p_2^{(2)} = P(B|H_B)$$

In questo caso grazie all'utilizzo di un diagramma ad albero calcoliamo i valori delle



probabilità appena elencate:

- $P(H_A) = \rho_1 = 0.66; \quad P(H_B) = \rho_2 = 0.34;$
- $p_1^{(1)} = P(A|H_A) = \frac{P(A)\cdot P(H_A|A)}{P(H_A)} = 0.818$ E quindi $p_2^{(1)} = P(B|H_A) = 1 - p_1^{(1)} = 0.182;$
- $p_1^{(2)} = P(A|H_B) = 0.176$ per cui $p_2^{(2)} = P(B|H_B) = 1 - p_1^{(2)} = 0.824.$

Per calcolare ora i guadagni attesi $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}$ condizionati alle risposte del sondaggio, si completa lo schema in forma normale come se fossimo in mancanza di informazioni, utilizzando però come probabilità una volta quelle condizionate alla risposta H_A e un'altra alla risposta H_B, come ho riportato qua sotto:

	d_1	d_2	prob$\|H_A$
E	0.1	-0.3	0.818
non E	0.1	1	0.182
medie	0.1	-0.0634	

	d_1	d_2	prob$\|H_B$
E	0.1	-0.3	0.176
non E	0.1	1	0.824
medie	0.1	0.7712	

Si ricava così che $\bar{x}^{(1)} = 0.1$ e $\bar{x}^{(2)} = 0.7712$, quindi il guadagno atteso con informazione parziale è

$$\bar{x}^{(H)} = 0.1 \cdot 0.66 + 0.7712 \cdot 0.34 = 0.3282$$

Non ci resta anche qui che calcolare il giusto compenso da pagare all'Agenzia

$$v^{(H)} = \bar{x}^{(H)} - \bar{x} = 0.1082.$$

Notiamo che a conferma del teorema precedente i tre valori dei guadagni sono:

$$\bar{x} = 0.22 \leq \bar{x}^{(H)} = 0.3282 \leq \bar{\bar{x}} = 0.46$$

Abbiamo così terminato la nostra spiegazione del supporto che la matematica ci fornisce durante i nostri processi decisionali.
Come spesso accade, il progresso tecnologico ci viene in aiuto. Il **Decision Support System** (DSS) è un software di supporto al processo decisionale che permette di aumentare l'efficacia dell'analisi, infatti, in poco tempo riesce ad estrarre un gran quantitativo di informazioni utili per la decisione, proveniente da un data base di dimensioni notevoli. L'utilizzo di questo software è adattabile al commercio, alla sanità, ai servizi finanziari, alle telecomunicazioni, ai trasporti, alla mappatura di crimini, gestione delle risorse idriche ...
L'obiettivo, quindi, non è quello di sostituirsi al decisore ma di aiutarlo dandogli tutte le informazioni necessarie per comprendere il problema, ispezionarlo da diversi punti di vista, valutare le conseguenze delle varie scelte e dare una valutazione riguardo alla scelta fatta sia in termini di efficienza che di efficacia. Per utilizzarlo non è necessario esser dei matematici dato che infatti il software ci guida nell'analisi del problema decisionale. Quest'ultimo viene suddiviso in tre principali fasi:

Intelligence è la fase in cui si raccolgono le informazioni sia dal contesto in cui il decisore si trovi sia all'interno del database, cercando così di circoscrivere il problema da affrontare;

Design passaggio in cui si comprende il problema, si generano possibili soluzioni e le si analizzano. In questa fase il decisore integra il DSS anche con le sue esperienze e la sua creatività nel generare alternative.

Choice si passa alla valutazione/scelta della varie alternative formulate. Verranno definiti dei parametri secondo i quali si confronteranno i diversi piani di azione e le conseguenze delle scelte.

Successivamente si procede all'implementazione della decisione e al controllo e monitoraggio dei risultati.
Esiste poi un filone di ricerca chiamato Individual Assest Liability management che studia le strategie ottimali a livello individuale nella gestione dell'attività e delle passività individuali. A tal proposito, Giorgio Consigli, professore associato alla Khalifa University, insieme ad altri due suoi collaboratori, ha lavorato alla realizzazione di un prototipo per la gestione finanziaria individuale. Questo permette all'utente di scegliere, nel modo più razionale possibile, l'allocazione delle risorse avendo stabilito degli obiettivi con le relative tempistiche; ad esempio, l'acquisto di una casa dopo 5 anni e andare in pensione dopo 25 anni con un certo reddito. Per cui l'utente pone dei suoi obiettivi con delle condizioni e viene aiutato nella formulazione delle strategie ottimali per raggiungerli grazie all'applicazione di tecniche di ottimizzazione stocastica, cioè dinamica, in cui le variabili del problema hanno natura stocastica: non sono sicure ma variano nel tempo. A tal fine si genereranno dei possibili scenari futuri che permetteranno all'utente di scegliere la miglior strategia di consumo/risparmio e di investimento. Si lega quindi il profilo di rischio individuale, dato attraverso l'uso di una funzione obiettivo, alle risorse finanziarie personali a possibili scenari futuri in cui agli obiettivi viene associata una probabilità di riuscita. Inoltre, l'utente viene anche informato sul fatto che, sotto determinate condizioni, tipo le tempistiche da lui indicate, il probabile raggiungimento di un tale obiettivo possa in realtà compromettere il raggiungimento di quello successivo.
Questo filone di ricerca è diventato oggi molto popolare in ambito finanziario perché molte banche e assicurazioni vendono pacchetti di pianificazione/risparmio ad alto costo basandosi su questo modello Goal Based. Il problema però è che non applicano le adeguate tecniche al prodotto che offrono nel senso che i risultati che si otterranno non saranno nel pieno interesse del consumatore dato che le banche (o le assicurazioni) de-

vono comunque cercare di vendere i propri prodotti finanziari al cliente. Abbiamo detto all'inizio di questo capitolo che la Teoria delle decisioni si può applicare in diversi ambiti. Vediamo allora brevemente qualche esempio a testimonianza di ciò.

Esempio 4.1.6. Quanto latte comprare.
Luciana possiede un piccolo alimentari e deve rifornirsi di latte fresco dal suo fornitore. Il costo all'ingrosso è di 40€ mentre il prezzo di vendita dell'intera confezione è di 90€. Luciana dovrà quindi decidere, prima di sapere quanto ne venderà, il numero di confezioni da comprare considerando vari fattori:

- la merce invenduta rappresenta una perdita di 65€;

- potrebbe perdere potenziali vendite, e ciò si traduce in perdita di potenziali clienti futuri, se ne acquista in quantità non sufficiente.

Luciana sceglierà ovviamente come criterio quello del massimo guadagno atteso. Allora in questo caso le possibili decisioni riguardano il numero di confezioni da comprare e i possibili eventi sono il numero di confezioni richieste. Dato che Luciana svolge da diverso tempo questo lavoro, riesce ad assegnare una probabilità ai possibili eventi (P_i) quindi è la probabilità che la domanda sia di i confezioni):

$$P_0 = 0.1; \quad P_1 = 0.2; \quad P_2 = 0.4; \quad P_3 = 0.2; \quad P_4 = 0.1$$

Dalle informazioni che abbiamo possiamo scrivere il nostro schema in forma normale

confezioni richieste ↓	0	1	2	3	4	prob.
0	0	-65	-130	-195	-260	0.1
1	-40	50	-15	-80	-145	0.2
2	-80	10	100	35	-30	0.4
3	-120	-30	60	150	85	0.2
4	-160	-70	20	110	200	0.1
medie	-130	-30	38	44.5	20	

Dal confronto dei guadagni vediamo che la scelta ottimale ricade sull'acquisto di tre confezioni di latte dato che è la decisione che assicura il guadagno maggiore.

Ho voluto presentare questo esempio per dimostrare come la conoscenza della matematica, come appunto per la Teoria delle decisioni, permetta all'individuo di essere più competente e quindi responsabile. Infatti, basti guardare a come l'esempio appena proposto ci permetta di arginare il problema degli sprechi. Proviamo a pensare a quali importanti risultati per ridurre l'impatto ambientale potremmo raggiungere se sempre più industrie, supermercati,aziende ... compissero scelte razionali di questo tipo. È per questo che tale branca della matematica viene utilizzata anche all'interno di politiche di salvaguardia ambientale, problema molto sentito ai giorni d'oggi.

Lo studio del comportamento razionale è un argomento che è stato trattato molto anche in filosofia. La moderna scienza delle decisioni ha considerato l'etica, ricerca sul comportamento pratico umano di fronte a concetti di bene e male, come parte integrante della teoria generale del comportamento razionale. In questo senso, il comportamento razionale diventa il fulcro della teoria delle decisioni e della moralità, individuando nell'etica quella parte della teoria finalizzata agli interessi comuni della società.
Questa prospettiva la ritroviamo nella **dottrina utilitarista**, con J. Bentham suo massimo esponente.
Questo filone vede l'utilità sociale come la somma degli interessi delle persone che la compongono, e fa della massimizzazione dell'utilità sociale il criterio base della moralità. Per cui: ogni comportamento risulta buono o cattivo a seconda che promuova o meno la felicità, e le azioni sono legittime se producono felicità per il massimo numero possibile di persone. Ad ogni cittadino non si richiede di promuovere la felicità degli altri (è auspicabile ma non rientra in nessun obbligo morale) dato che questo è il compito dello Stato. Quest'ultimo, determinando una serie di principi e politiche, assolverà tale compito garantendo giustizia, il cui fine è proprio la massimizzazione del benessere sociale. Secondo tale approccio quindi, le regole dell'etica dovranno essere concepite per le persone e non prevede che la vita di queste debba adeguarsi a dogmi etici, su base ideologica o religiosa. È interessante notare come il nostro cervello in mancanza di emozioni si comporta come un utilitarista estremo.

Conclusioni

Questo studio si è proposto di rispondere alla domanda

"perché si studia matematica".

A tal fine, è stata condotta un'indagine attraverso l'uso di un questionario, utilizzato al fine di capire quali fossero le diverse opinioni delle persone a riguardo. Il questionario è stato distribuito sia in due istituti scolastici che a diversi componenti della società, in modo da ottenere un campione più eterogeneo.
Dal confronto con i dati presenti in letteratura e riportati nel primo capitolo, le risposte ai questionari li hanno confermati solo parzialmente, mostrando come le diverse modifiche apportate alle modalità di tale insegnamento da parte del Governo Italiano, stiano contribuendo a migliorare l'approccio degli studenti verso la materia.
Dagli esiti della ricerca emerge inoltre che è presente una modesta consapevolezza delle abilità che la conoscenza matematica induce negli individui.
Solo poche persone colgono una relazione tra matematica e responsabilità e di come conoscere la matematica possa in realtà portare sostegno in tanti aspetti della nostra vita quotidiana, sia come individui sia come cittadini.

In generale, traspare comunque che vi è ancora tanto lavoro da fare per superare i preconcetti legati alla matematica pertanto cercare di comunicarla ai non specialisti è imprescindibile.
Anche tramite la riorganizzazione del processo di insegnamento-apprendimento da parte del docente si riesce a raggiungere grandi risultati, in particolare grazie all'uso di attività interdisciplinari e di laboratorio, o integrando esempi di applicazione della matematica, come è stato compiuto in questo lavoro con l'introduzione di Teoria della decisioni e i

suoi vari esempi.

Per concludere, quindi, non si vuole far passare il pericoloso messaggio che in matematica sia tutto semplice, ma quello che alcune cose è giusto saperle e si è totalmente in grado di farlo. Si deve aver sempre fiducia in ciò che si sta studiando perché, in qualche modo, questa conoscenza troverà sempre il modo per esserci d'aiuto.

"Se la conoscenza può creare problemi, non è tramite l'ignoranza che possiamo risolverli"
(Isaac Asimov)

Bibliografia

[1] *"A cosa serve la matematica? L'irragionevole efficacia di una disciplina"*, Ian Stewart, Einaudi, 2022.

[2] *"A cosa serve la matematica"*, D. Gouthier, 2007

[3] *"Attitude toward mathematics: emotions, exprectations and values"*, M.S.Hannula

[4] *"Che cos'è la matematica? Introduzione elementare ai suoi concetti e metodi"* , R.Courant, H. Robbins, Bollati e Boringhieri, 1991.

[5] *"Competenze di base, competenze chiave e standard formativi"*, M. Pellerey

[6] *"Comunicare la matematica"*, S. Benvenuti, R. Natalini, Rivista dell'Unione Matematica Italiana, 2017

[7] *"Didattica della matematica"*, E. Castelnuovo, UTET, 2020

[8] *"Didattica generale"*, M. Castoldi, Mondadori, 2021

[9] DM 139/2007

[10] DM 87/2010

[11] DPR 89/2010

[12] *"Il Problem Solving. Breve cenno e appunti sparsi su alcune ricerche classiche a carattere psicologico relative alla risoluzione dei problemi di matematica a scuola"*, B. D'Amore, M.I.Fandiño Pinilla, 2002

[13] *"Il ruolo dell'immagine della matematica nella scelta degli studi e delle professioni scientifiche"*, D. Gouthier, 2009

[14] *"Indicazioni nazionali per i licei"*, 2010

[15] *"Insegnare le competenze"*, M.G. Accorsi, Maggioli Editore, 2013

[16] *"Indicazioni nazionali e nuovi scenari"*, MIUR, 2017

[17] *"La matematica della vita"*, I. Stewart, Piccola Biblioteca Einaudi, 2020

[18] *"La matematica delle civiltà arcaiche: Egitto, Mesopotamia, Grecia"*, L. Giacardi, C.S. Roero, Associazione Università Popolare Editore, 2010

[19] *"La matematica nella società di oggi"*, E. Bombieri, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 2001

[20] *"Le competenze nell'ambito della matematica"*, S. Sbaragli, 2011

[21] *"Linee Guida per la certificazione delle competenze nel primo ciclo di istruzione"*, MIUR, 2017

[22] *" Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento, istituti tecnici"*, MIUR, 2010-2012

[23] *" Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento, istituti professionali"*, MIUR, 2010-2012

[24] *"Matematica. saperne un minimo"*, D. Gouthier, Rivista Archimede n.4-2017

[25] *"Probabilità e scelte razionali"*, P.Agnoli, F.Piccolo, Armando Editore, 2014

[26] *"Problem Solving strategico da tasca"*, G. Nardone, Adriano Salani Editore, 2009

[27] *"Profilo culturale, educativo e professionale dei Licei"*, MIUR, 2010

[28] *"Profilo educativo, culturale e professionale dello studente a conclusione del secondo ciclo del sistema educativo di istruzione e formazione per gli Istituti Tecnici"*, MIUR, 2010

[29] www.lastampa.it/scienza/2018/08/02/news/quanti-matematici-ci-sono-in-italia-1.34036188/

[30] www.invalsiopen.it/risorse/indicazioni-nazionali-e-linee-guida

[31] eur-lex.europa.eu/search.html?lang=en\&text=keys+competition\&qid=1674053965699\&type=quick\&scope=EURLEX\&DD_YEAR=2018\&page=2

[32] www.mathisintheair.org/wp/2020/09/cose-la-matematica/

[33] www.ilpost.it/2014/12/03/utilita-matematica/

[34] www.revistauniversidad.uson.mx/revistas/25-5.pdf

[35] www.stateofmind.it/2019/04/comportamentismo/

[36] eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)

[37] forperlav.unibg.it/index.php/fpl/article/view/387/359

[38] www.rivistaaic.it/old_site/sito_rivistaAIC_2010-2018/download/u3k448wgWH4yXxcY0vOyMt_16tDAiuj32DVQrbH-ixc/1_2015_Marsocci.pdf

[39] books.google.it/books?hl=it\&lr=\&id=bOrznoknK1wC\&oi=fnd\&pg=PA5\&dq=cittadinanza+responsabile\&ots=-P7OuhPao7\&sig=7HchpagAyt25Yn6nMhb_APP069o\&redir_esc=y$#$v=onepage\&q=cittadinanza\%20responsabile\&f=false

[40] www.orientamentoirreer.it/sites/default/files/materiali/2019031205RicercaTrentoRapportointermedio.pdf

[41] ojs.pensamultimedia.it/index.php/sird/article/view/3228

[42] https://books.google.it/books?hl=it\&lr=\&id=RR5hWA_NoagC\&oi=fnd\&pg=PA5\&dq=insegnamento+matematico+competenze+europee\&ots=GURKFn8bZK\&sig=REd6EoftYp0QG3CkxJuTdvj8Il4#v=onepage\&q=insegnamento\%20matematico\%20competenze\%20europee\&f=false

[43] trib.al/r0hladF

[44] www.treccani.it/enciclopedia/bentham-e-l-utilitarismo_\%28Storia-della-civilt\%C3\%A0-europea-a-cura-di-Umberto-Eco\%29/#:~:text=Il\%20sistema\%20utilitarista\%20benthamiano\%20si,e\%20la\%20fuga\%20dai\%20dolori.

[45] www.difesa.it/SMD_/CASD/IM/CeMISS/Documents/Ricerche/2012/Stepi/dss_20120319_1440.pdf

[46] www.youtube.com/watch?v=xmhqbf3tjkE

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare la Prof.ssa Benvenuti per la disponibilità, il sostegno e per avermi permesso di approfondire ed elaborare questa mia idea.

In aggiunta, vorrei ringraziare anche la Prof.ssa Fabbri per avermi aiutato ad approfondire alcuni argomenti di questo mio lavoro.