Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'INTRODUZIONE DELLA STORIA DELLA MATEMATICA NELLA DIDATTICA ITALIANA NELLA PRIMA META' DEL '900

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
MARIA GIULIA LUGARESI

Presentata da:
CHIARA BANNO'

Anno Accademico 2021-2022

Indice

Introduzione

Con questo lavoro si intendono ripercorrere le tappe storico-politiche che, a partire dalla fine del XIX secolo fino alla prima metà del XX, hanno influenzato la stesura dei programmi di insegnamento della matematica, in particolare della scuola media italiana.
L'analisi si concentra soprattutto sulla ricerca della presenza o meno della storia della matematica nelle indicazioni sull'insegnamento della disciplina. Il nostro intento è quello di rivalutarla o meglio di valorizzarne il ruolo, con il fine di presentarla, non solo come approccio aneddotico, bensì come necessaria perchè utile a favorire l'apprendimento dei concetti.

Il primo capitolo si apre dunque presentando un quadro della suddivisione dei vari livelli di scuola che, dopo l'Unità, andavano stabilendosi in Italia. Si espongono poi le varie riforme messe in atto dalle istituzioni politiche, con particolare attenzione al numero di ore dedicate settimanalmente alla matematica e ai Programmi previsti per quella che da lì in poi verrà chiamata "scuola media" (oggi, più propriamente, "scuola secondaria di primo grado"). Come si evincerà scorrendo il capitolo, non mancarono importanti interventi di matematici e studiosi, come Guido Castelnuovo, Giovanni Vailati e Federigo Enriques, che tentarono, non sempre invano, di orientare la stesura dei Programmi stessi.
Un importante documento che tocca esplicitamente il tema della tesi è rappresentato dalla cosiddetta Carta Bottai del 1940. Qui si trovano importanti riferimenti ad una esigenza di innovazione dell'insegnamento della matematica nelle scuole medie; si propone, infatti, l'adozione di un metodo di tipo intuitivo e, per la prima volta, l'introduzione della storia nella didattica.
Le innovazioni richieste da quest'ultima riforma, portarono alla necessità di rivedere ed aggiornare l'editoria scolastica. Nel secondo capitolo ci si occupa perciò della presentazione di alcuni dei principali testi di geometria elementare destinati ai ragazzi di età compresa tra i 10 e i 14 anni che, uno dopo l'altro, venivano pubblicati. Ci si concentra in particolare sui primi cenni di storia della matematica che iniziano a prendere posto tra le pagine dei

manuali e sulle figure principali che in generale hanno segnato la storia della didattica della matematica in quegli anni.
Per apprezzare maggiormente le caratteristiche di un libro di testo di geometria elementare ed evincerne conclusioni significative per la ricerca, il Capitolo 3 si dedica all'analisi specifica di un manuale pubblicato nel 1945, con sottofondo sempre la Riforma Bottai, da Umberto Forti, studioso di matematica e fisica e sostenitore dell'utilizzo del "metodo storico" nella didattica delle scienze. Il libro *Il Piccolo Euclide, elementi di geometria pratica per le scuole medie inferiori, con esercizi e problemi*, edito dalla casa editrice Paravia di Torino, presenta interessantissimi spunti di integrazione della storia nell'esposizione, spunti che portano a riflettere sul parallelismo tra l'evoluzione storica e lo sviluppo cognitivo. Risulta infatti chiaro l'intento dell'autore di far raggiungere con il suo metodo una comprensione maggiore di nozioni che a prima vista appaiono troppo astratte e lontane dall'interesse dell'allievo.

L'elaborato, attraverso il percorso così esposto, si propone quindi di mostrare in primo luogo come le riforme e gli interventi di matematici ed esperti in didattica abbiano contribuito allo sviluppo di un metodo di insegnamento in grado di mettere sempre più al centro l'allievo, e tutto ciò che caratterizza la sua età, le sue emozioni, le sue sensazioni, i suoi interessi. In secondo luogo si cerca di sottolineare come, con l'adozione di un approccio storico all'insegnamento della matematica, non solo con l'aggiunta di "schede di approfondimento", ma nella struttura stessa della trattazione, si possano affrontare e superare quegli ostacoli che non sempre sono dovuti alla difficoltà di un problema o alla sottigliezza di un ragionamento, ma alla natura epistemologica stessa di un concetto o oggetto. Ci sono infatti dei concetti la cui forza innovativa ha determinato una difficoltà di accettazione da parte della stessa comunità scientifica; questi possono essere considerati veri e propri ostacoli epistemologici e sono la prova di quell'idea di conoscenza come frattura, come cambio radicale di concezione difficile da accogliere. E' importante che un insegnante conosca questo tipo di ostacoli relativi a un ambito disciplinare, in quanto le difficoltà che scienziati e studiosi hanno incontrato nell'approccio a certi concetti sono spesso le stesse che incontrano gli studenti nella comprensione di quegli stessi concetti.

Capitolo 1

Il quadro storico dei primi anni del ’900

Esaminare il susseguirsi di riforme e le relative evoluzioni dei programmi di matematica che hanno scritto la storia della scuola media italiana nella prima metà del Novecento significa occuparsi del tipo di società e del clima culturale, del peso che la disciplina aveva nella società e nella scuola, della formazione e professionalità degli insegnanti, dell’editoria scolastica e soprattutto del tipo di scuola e del numero di allievi frequentanti.
"Scuola secondaria di primo grado" è il nome dato dalla Legge Moratti nel 2003 a quella che in precedenza si chiamava "scuola media". Essa rappresenta oggi la parte conclusiva del primo ciclo di istruzione, dove la parte iniziale è costituita dalla scuola primaria (ex scuola elementare). La scuola secondaria di primo grado è scuola dell’obbligo della durata di tre anni scolastici e si conclude con l’esame di Stato che consente di conseguire la licenza, titolo di studio indispensabile per accedere al successivo grado di scuola (licei, istituti tecnici e professionali).

Le riforme significative che hanno riguardato la storia dell’istruzione, in particolare della scuola media italiana, dopo l’Unità, avvenuta nel 1861, sono di seguito riportate. Ci si soffermerà, in particolare, su quelle risalenti alla prima metà del Novecento.

1.1 Legge Casati 1859

Al momento dell’Unità, l’Italia era un paese ad economia principalmente agricola, con analfabetismo diffuso (secondo i dati ISTAT, nel 1861 l’analfabetismo maschile era del 74% e quello femminile dell’84%, con picchi del

Casati	Legge 13 novembre 1859
Gentile	Atti normativi 1923
Bottai	Legge 1 luglio 1940 n.899
Gui	Legge 31 dicembre 1962 n.1859, D.M. 24 aprile 1963
Pedini	D.M. 9 febbraio 1979
Fioroni	D.M. 31 luglio 2007

95% nell'Italia meridionale), diviso da profonde differenze tra una regione e l'altra. L'unificazione e lo sviluppo economico esigevano l'abbattimento delle barriere doganali, la generalizzazione del mercato nazionale e la creazione di un'organizzazione statale, militare e burocratica, centralizzata e autoritaria. Le esigenze principali, dunque, consistevano nel creare e promuovere un'istruzione "media" adeguata a formare una classe dirigente il più possibile omogenea e nel consolidare ed estendere la coscienza nazionale attraverso la formazione dei ceti medi, la riduzione dell'analfabetismo e la diffusione di una lingua comune.
Queste finalità si concretizzarono nella fisionomia assunta dalla scuola con Giulio Casati (ministro della Pubblica Istruzione dal 19 luglio 1859 al 21 gennaio 1860), che elaborò la Legge omonima per dare innanzitutto un assetto globale alla scuola italiana, dalla primaria all'università. Promulgata dal re Vittorio Emanuele II il 13 novembre 1859 per riorganizzare l'istruzione pubblica in Piemonte e Lombardia, tale legge fu gradualmente estesa alle altre regioni, non senza incontrare resistenze e difficoltà.
Essa prevedeva che l'istruzione elementare, a carico dei comuni, fosse articolata in due cicli: un ciclo inferiore biennale (6-7 anni di età), obbligatorio e gratuito, istituito nei luoghi dove ci fossero almeno cinquanta alunni in età di frequenza, e un ciclo superiore, anch'esso biennale (8-9 anni di età), presente solo nei comuni sede di istituti secondari o con popolazione superiore ai 4000 abitanti.
L'istruzione secondaria era distinta nettamente tra classica e professionale:

- l'struzione secondaria classica, l'unica che consentiva l'accesso a tutte le facoltà universitarie, era presente in ogni capoluogo di provincia e comprendeva 5 anni di Ginnasio (10-14 anni di età) e 3 di Liceo (15-17 anni di età). Essa era riservata alla classe dirigente, con taglio umanistico retorico e convenzionale e possedeva

  > "il fine di ammaestrare i giovani in quegli studi, mediante i quali si acquista una cultura letteraria e filosofica che apre l'adito agli studi superiori che menano al conseguimento dei gradi accademici nelle università di Stato" [art.272, legge 13/11/1859 n.3725];

Figura 1.1: La scuola italiana secondo la Legge Casati.

- l'istruzione professionale, avente

  > "il fine di dare ai giovani che intendono dedicarsi a determinate carriere del pubblico servizio, alle industrie, ai commerci e alla condotta delle cose agrarie, la conveniente cultura generale e speciale",

  era orientata alle necessità produttive del Paese ed era divisa in scuola tecnica, della durata di tre anni, e in istituto tecnico, anch'esso di tre anni. Quest'ultimo era a sua volta suddiviso in sezioni, una delle quali, la sezione fisico-matematica, consentiva l'iscrizione alla facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali. Con alti e bassi, questa sezione rappresentò per un sessantennio il ramo di scuola secondaria in cui la matematica ricopriva il posto di maggiore rilievo ed ebbe il merito, tra l'altro, di formare matematici di alto profilo scientifico, quali Vito Volterra, Corrado Segre e Francesco Severi.[1]

1.1.1 La matematica nei programmi e successivi aggiustamenti degli stessi

Nell'impostazione data dalla Legge Casati, la matematica nei primi tre anni del ginnasio aveva un ruolo marginale e così restò fino agli anni Sessanta.
Una prima svolta relativa all'insegnamento della matematica, si ebbe tuttavia già nel 1867, quando il ministro Michele Coppino emanò il decreto sui programmi. In particolare, ispiratore dei programmi di matematica e delle relative indicazioni metodologiche[2] fu il geometra Luigi Cremona (1830-1903) che ripristinò come libro di testo nei ginnasi e nei Licei gli *Elementi* di Euclide. Cremona riteneva infatti che

[1]Cfr. E.Ulivi, *Sull'insegnamento scientifico nella scuola secondaria dalla legge Casati alla Riforma Gentile: la sezione fisico-matematica,* Archimede, 4, 1978, pp.166-182.

[2]Il testo di questo decreto, insieme ai più importanti provvedimenti legislativi sull'insegnamento della matematica nella scuola secondaria italiana dal 1859 al 1923, si può trovare sul sito www.dm.unito.it

> "La matematica nelle scuole secondarie classiche non è da riguardarsi solo come un complesso di proposizioni o di teorie, utili in sè, delle quali i giovinetti debbano acquistare conoscenza per applicarle poi ai bisogni della vita; ma principalmente come un mezzo di coltura intellettuale, come una ginnastica del pensiero, diretta a svolgere la facoltà del raziocinio".[3]

Di conseguenza:

> "Nella geometria, per dare all'insegnamento la massima efficacia educativa [...], occorre fare ritorno agli *Elementi di Euclide*, che per consenso universale sono il più perfetto modello di rigore geometrico".

Il ritorno ad Euclide fu per Cremona una soluzione di compromesso che aveva lo scopo di risollevare l'insegnamento della matematica in Italia e l'auspicio ad un "insegnamento dinamico".
La qualità e il livello dell'insegnamento secondario, però, erano all'epoca assai scadenti: basti pensare, ad esempio, che non tutti gli insegnanti avevano conseguito la laurea e, in molti casi, la loro preparazione era del tutto inadeguata. Ripristinando l'uso degli *Elementi* come testo scolastico e pubblicandone la versione italiana, *Gli Elementi d'Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei per cura dei professori Enrico Betti e Francesco Brioschi* (1868), Cremona si proponeva pertanto di "sbandire innumerevoli libercoli, compilati per pura speculazione, che infestavano appunto quelle scuole dove è maggiore pei libri di testo il bisogno del rigore scientifico e della bontà del metodo"[4] e di favorire la pubblicazione di buoni manuali italiani.
In conclusione, il compito del ginnasio-liceo, secondo Cremona, non era tanto quello di fornire un gran numero di conoscenze, ma piuttosto quello di dare un metodo e l'attitudine ad affrontare i problemi, qualità indispensabili per gli allievi destinati ad affrontare gli studi universitari e a costituire un giorno la classe dirigente della nazione.

La proposta di Cremona suscitò vivaci reazioni sia da parte degli insegnanti, i quali sottolineavano soprattutto le carenze del testo dal punto di vista didattico (il *Betti-Brioschi*, infatti, riproponeva in traduzione italiana gli *Elementi* senza alcuna opera di mediazione didattica, nè dal punto di vista del

[3]Cfr. *Istruzioni e programmi per l'insegnamento della matematica nei ginnasi e nei licei*, Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia, Firenze, 24 ottobre 1867.

[4]F. Brioschi, L. Cremona, *Al signor Direttore del Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, Napoli,* Giornale di Matematiche, 7, 1869, pp. 51-54, p. 53. Un estratto di questa lettera fu tradotto in francese da J. Hoüel e pubblicato sulle *Nouvelles Annales de Mathématiques*, s. 2, 8, 1869, pp. 278-283.

linguaggio, nè da quello del contenuto), sia da parte dei matematici, che lo percepivano come un ritorno al passato e dunque una chiusura verso le nuove scoperte nel campo della geometria.
In ogni caso, l'"operazione Euclide" e il vivace dibattito che seguì svolsero una funzione catalizzatrice per sbloccare la situazione di ristagno in cui versava l'insegnamento della matematica in Italia. Come scrissero Enrico D'Ovidio e Achille Sannia, "fu come un'operazione chirurgica, fece gridare, ma giovò".[5] Da un lato, infatti, contribuì a focalizzare alcune importanti questioni nell'insegnamento della geometria: l'esigenza di una approfondita analisi dei fondamenti, il ruolo che devono avere i movimenti nello studio dei problemi geometrici, l'indipendenza o meno della trattazione geometrica da una precedente teoria dei numeri reali e, infine, il rapporto tra rigore e intuizione. Dall'altro lato, come auspicava Cremona, diede l'avvio alla pubblicazione di testi di geometria elementare per la scuola secondaria: nel quarantennio successivo infatti apparve un gran numero di manuali di alto livello ad opera di alcuni dei maggiori matematici italiani dell'epoca (Enrico Betti e Francesco Brioschi, Achille Sannia e Enrico D'Ovidio, Aureliano Faifofer, Riccardo De Paolis, Giuseppe Veronese, Michele De Franchis, Federigo Enriques, Ugo Amaldi) che, mettendo a confronto approcci metodologici diversi, stimolarono il dibattito sulla didattica della matematica. Furono soprattutto i manuali di geometria a influenzare il dibattito sul metodo perchè, meglio di ogni altro settore della matematica, la geometria permette di focalizzare i problemi insiti nell'insegnamento di questa disciplina e di chiarire il rapporto tra *formazione* e *informazione.*

Gli anni che vanno dall'Unità d'Italia ai primi del Novecento costituirono sicuramente un periodo di grande fermento politico e sociale a cui si affiancò un importante sviluppo della ricerca scientifica che conquistava posizioni di primo livello con i successi della scuola italiana di geometria algebrica e gli studi di logica matematica di Giuseppe Peano. Il fronte comune fra matematica elementare e ricerca avanzata, che si venne a creare a fine Ottocento attraverso gli studi sui fondamenti, portava in modo naturale alcuni dei matematici più attivi nella ricerca pura ad impegnarsi in prima persona non solo nella preparazione dei manuali per la scuola, ma anche nella politica culturale, nell'elaborazione di una legislazione scolastica più adeguata ai tempi e nella formazione degli insegnanti. Si assistette inoltre a un fecondo interscambio fra università e scuola secondaria: spesso i docenti universitari iniziavano la loro carriera come professori di scuola media (ad esempio, Cre-

[5] A. Sannia, E. D'Ovidio, *Elementi di Geometria*, Napoli, Pellerano, 1895 (IX ed.), p. V.

mona, Betti, D'Ovidio, De Paolis) e, viceversa, i migliori docenti di scuola secondaria svolgevano corsi all'università (come Lazzeri, Faifofer, Bettazzi, Vailati), portando così nel loro lavoro quotidiano di insegnamento l'esperienza acquisita nei due differenti livelli.
Il fiorire di una stampa prettamente italiana dedicata all'insegnamento non è che una delle manifestazioni di questo clima di rinnovamento. Furono inoltre create le Scuole di Magistero (1875) per la formazione del corpo docente e fecero la loro comparsa le prime associazioni di insegnanti. Nel 1895, Rodolfo Bettazzi fondò a Torino l'*Associazione Mathesis fra gli insegnanti di matematica delle scuole medie* con lo scopo preciso di realizzare "il miglioramento della scuola ed il perfezionamento degli insegnanti sotto il punto di vista scientifico e didattico". Attraverso i suoi presidenti, fra cui Bettazzi stesso, Severi, Castelnuovo, Enriques, la *Mathesis* fece più volte sentire la propria voce in merito ai vari provvedimenti legislativi sulla scuola secondaria.
Nel giro di pochi anni sorsero in tutta Italia altre associazioni di insegnanti medi e nel 1901 fu creata la *Federazione Nazionale Insegnanti Scuola Media* allo scopo di tutelare i diritti economici e giuridici degli insegnanti e di promuovere il miglioramento delle scuole secondarie; scopi, dunque, dichiaratamente politici che si orientavano verso un indirizzo democratico.

E' abbastanza singolare, tuttavia, che questo impegno da parte degli insegnanti, e dei matematici in particolare, non corrispondesse, nell'ultimo ventennio del XIX secolo, a un miglioramento significativo della qualità dell'insegnamento. Per quanto concerne la matematica basta considerare la serie di provvedimenti legislativi emanati fra il 1880 e il 1907 per rendersi conto della progressiva svalutazione dell'importanza di questa disciplina, per quanto riguarda i contenuti dei programmi (erano assenti alcuni temi importanti a livello nazionale e internazionale, quali la geometria analitica e il calcolo differenziale), ma anche per il numero di ore ad essa riservate e per l'adozione di un metodo didattico esclusivamente razionale con poco spazio per le applicazioni.
Di seguito vengono descritti altri aggiustamenti dei programmi risalenti a questo periodo.

- Nel 1900, il ministro Gallo emanò un nuovo programma con il fine di colmare il vuoto della geometria nel ginnasio inferiore.

- Nel 1907, la *Raccolta completa dei Programmi d'insegnamento e orari* stabiliva la seguente articolazione degli argomenti di matematica per il ginnasio:

> *Classe prima.* Aritmetica pratica: dalla numerazione fino alle frazioni esclusivamente. Nozioni elementari intuitive intorno al punto, alla retta, ai poligoni, al circolo, ai poliedri più ovvi, al cilindro, al cono e alla sfera.
> *Classe seconda.* Frazioni ordinarie e decimali. Sistema metrico decimale. Numeri complessi. Misure di linee, di angoli, di superficie e di solidi.
> *Classe terza.* Regola per estrarre la radice quadrata. Rapporti e proporzioni. Rudimenti di disegno geometrico ed esercizi intorno alle misure.

- La scuola tecnica, oltre a permettere il proseguimento degli studi negli istituti tecnici, aveva anche lo scopo di essere scuola di cultura generale conclusiva di un ciclo di studi. La legge Coppino mantenne l'insegnamento della matematica nella scuola tecnica e prevedeva che il numero di ore settimanali fosse di 5, 6 e 3 ore rispettive per ciascun anno (classe), da dedicarsi ai seguenti argomenti:

  > *Classe prima.* Aritmetica pratica: riduzione delle antiche misure al sistema metrico decimale.
  > *Classe seconda.* Geometria: congruenza, equivalenza, similitudine nel piano e misura dei corpi solidi.
  > *Classe terza.* Geometria e algebra: fino alla risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado a una incognita.

  Questi programmi vennero modificati nel 1880 ad opera di Francesco De Sanctis, nel cui testo si legge per la prima volta che l'insegnamento della matematica nella scuola tecnica deve conservare il suo doppio scopo, istruttivo ed educativo. Per raggiungere entrambi gli scopi si consigliava, sia per l'aritmetica sia per la geometria, di adottare il metodo intuitivo, sconsigliando espressamente quello deduttivo. In anni successivi, tuttavia, riguardo a quest'alternativa fra presentazione intuitiva e presentazione deduttiva si fu molto altalenanti.

- Nel 1899, le ore di matematica nella scuola tecnica erano rispettivamente 4, 4 e 3, così articolate: geometria in seconda e terza, aritmetica in prima e seconda, algebra in terza.
  E' significativo il riccorrente uso del termine "regole" nella su menzionata *Raccolta completa dei Programmi d'insegnamento e orari*:

  > *Avvertenze*
  > Nell'insegnamento dell'aritmetica si debbono dare definizioni e

regole chiare ed esatte, esempi molti, esercizi svariati e scelti fra quelli che non richiedono troppo lunghe operazioni di calcolo, e che hanno attinenza coi bisogni della vita. In ciascuna lezione si dovranno fare esercizi di calcolo orale.
Nell'insegnamento della geometria sarà bene valersi di procedimenti intuitivi, quando la dimostrazione rigorosa dei teoremi richiede uno sforzo eccessivo delle menti degli alunni o un tempo lungo. Il professore si servirà opportunamente di modelli in grande dimensione, di solidi in rilievo, e di disegni sulla tavola nera.
L'ultimo numero del programma di calcolo letterale è obbligatorio per i soli alunni che si avviano agli istituti nautici. [...]

Aritmetica in prima classe
Nozioni preliminari. Numerazione. Le quattro operazioni fondamentali sui numeri interi e *regole* per eseguirle. Prove delle quattro operazioni.
Divisibilità di un numero per un altro. Criteri per riconoscere se un numero intero è divisibile per una potenza di dieci o per uno dei numeri 2, 4, 8, 5, 25, 3, 9, 11. Prove per 9 e per 11 delle quattro operazioni sui numeri interi.
Regole delle divisioni successive per calcolare il massimo comun divisore di due numeri interi. Caso di tre o più numeri. Numeri primi tra loro.
Numeri primi. *Regola* per formare una tavola di numeri primi, per conoscere se un numero è primo, per decomporre un numero in fattori primi, per trovare tutti i divisori di un numero e per trovare i divisori di due o più numeri. Composizione del massimo comun divisore di più numeri mediante i loro fattori primi.
Regola per calcolare il minimo multiplo comune o più numeri interi e gli altri multipli comuni.
Frazioni ordinarie. *Regola* per trovare la parte intera di un numero frazionario, per ridurre una frazione ai minimi termini, per trasformare una frazione in un'altra equivalente di un dato denominatore, per ridurre le frazioni a denominatore comune o al minimo denominatore comune.
Le quattro operazioni fondamentali su le frazioni; *regole* per eseguirle. Potenze di una frazione.
Numero decimale. Moltiplicazione e divisione di un numero decimale per una potenza di dieci. *Regole* per eseguire le quattro operazioni fondamentali sui numeri decimali.
Riduzione di una frazione ordinaria in decimali. Decimali finiti e periodici. Riduzione di un numero decimale, finito, o periodico, in frazione ordinaria.

Sistema metrico decimale.
Numerosi esercizi e facili problemi.

Dall’esame di questi programmi, risulta che lo studio della geometria passò da un metodo grafico intuitivo ad un metodo razionale, per poi tornare ad un metodo prevalentemente intuitivo.

1.1.2 La Commissione reale per la riforma della scuola secondaria: le proposte di G.Vailati e il contributo di G. Castelnuovo

Questo clima contradditorio e il mutato contesto storico e sociale, che aveva prodotto, fra l’altro, un notevole incremento degli iscritti alla scuola secondaria, indicavano palesemente l’urgenza di una riforma. Sollecitato da questi segnali, nel 1905, l’allora ministro della Pubblica Istruzione, Leonardo Bianchi, nominò una *Commissione reale per la riforma della scuola secondaria*, composta da professori universitari, insegnanti di scuola media e ispettori ministeriali, allo scopo di promuovere un’inchiesta ad ampio spettro sulle scuole di secondo grado e di suggerire le innovazioni più urgenti ed opportune.
Nonostante alcune difficoltà e contrasti anche interni, la Commissione presentò nel febbraio 1908 un disegno di legge che proponeva, da un lato, una scuola tecnica professionale di tre anni con accesso all’istituto tecnico e dall’altro, una scuola media triennale unica, senza latino, con accesso ai tre rami del liceo: classico (con latino e greco), scientifico (con due lingue moderne e potenziamento della sezione scientifica), e moderno (con latino e due lingue straniere).[6]

I programmi di matematica e le relative indicazioni metodologiche furono redatti con originalità e larghezza di vedute da Giovanni Vailati (1863-1909), membro della scuola di Peano e assiduo frequentatore delle adunanze della Mathesis. Le proposte di Vailati si basavano sulla sua convinzione profonda del valore formativo della matematica e nascevano da un lucido esame dei difetti della scuola secondaria italiana, primo fra tutti un insegnamento basato sull’apprendimento passivo che rende la scuola una *"palestra mnemonica"*, dove l’allievo è occupato ad apprendere (*accipere*) e troppo poco a compren-

[6]Cfr. Commissione Reale per l’Ordinamento degli Studi Secondari in Italia, *Schema di disegno di legge per la riforma della scuola media*, in *Relazione*, Ministero della Pubblica Istruzione, Tipografia L. Cecchini, Roma, 1909, pp. 588-672.

dere (*concipere*).[7] Quella che Vailati proponeva è una scuola "laboratorio", non nel senso riduttivo del termine, ma

> "luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addentrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a sperimentare e a risolvere quostioni, a misurare e soprattutto a misurarsi e a mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e difficoltà atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa".[8]

In particolare, l'insegnamento della matematica deve seguire un'impostazione sperimentale e operativa e, poichè il processo dell'apprendimento va dal concreto all'astratto, gli allievi non devono essere costretti a "imparare delle teorie prima di conoscere i fatti a cui esse si riferiscono", ma devono dimostrare di *saper fare*, non solo di *saper dire*. Il tipo di lezione più adeguato a raggiungere questo scopo è la lezione maieutica che meglio consente all'insegnante di guidare l'allievo a scoprire da solo le verità matematiche e che, pertanto, stimola interrogativi e riflessioni. L'utilità di un percorso di questo tipo, che proceda dal concreto all'astratto, si percepisce particolarmente nell'insegnamento della geometria: alla denominazione di *"metodo intuitivo"*, comunemente usata per indicare il metodo da seguire nella prima fase dell'insegnamento, Vailati preferisce quella di "*geometria sperimentale o operativa*" perchè più atta a esprimere la differenza con la geometria razionale che deve essere sviluppata nel ciclo superiore degli studi: il disegno, semplici strumenti matematici, piccoli esperimenti, permettono di scoprire alcune proprietà delle figure geometriche e fanno nascere il desiderio di capire perchè sussistano, rendendo più interessante l'apprendimento.
Tra gli altri aspetti metodologici sottolineati da Vailati vi è l'uso della storia della matematica al triplice fine di favorire il dialogo fra cultura scientifica e cultura umanistica, di "rendere l'insegnamento più proficuo, più efficace e insieme più attraente"[9] e di evitare ogni forma di dogmatismo.

Benchè oggi possiamo affermare quanto visionario e illuminato fosse stato Vailati, la riforma da lui proposta non fu varata. La riorganizzazione della scuola media verrà rimandata agli anni Venti ed attuata in altri termini, con l'avvento della Riforma Gentile.
Chi ebbe, comunque, parole di elogio per le proposte di riforma elaborate

[7] G. Vailati, Recensione di C. Laisant, *La Mathématique: philosophie, enseignement,* (1899), in Giovanni Vailati, *Scritti*, a cura di M. Quaranta, Bologna, Forni, 1987, 3 voll., III, p. 261.

[8] G. Vailati, *Idee pedagogiche di H. G. Wells*, (1906), *Scritti*, III, p. 292.

[9] G. Vailati, *Sull'importanza delle ricerche relative alla Storia delle Scienze*, (1897), *Scritti*, II, p. 10.

dalla "mente vasta e spregiudicata" di Vailati, fu l'illustre geometra Guido Castelnuovo (presidente della Mathesis dal 1911 al 1914), il quale incitò gli insegnanti, "data la lentezza con cui le riforme si compiono in Italia", ad attuarne da subito nelle loro classi le linee generali.[10]
Come per Vailati, le critiche al sistema scolastico furono il punto da cui Castelnuovo partì per elaborare la sua visione dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria. A suo parere, innanzitutto, l'insegnamento era troppo astratto e teorico e disdegnava ogni riferimento alla pratica e alle applicazioni e, oltre a ciò, era caratterizzato da un'eccessiva specializzazione con una esasperata divisione del lavoro:

> "nello stesso interesse della nostra scienza dobbiamo combattere quella tendenza ristretta dello spirito che, col creare barriere troppo rigide fra la matematica e le scienze d'osservazione, finisce per inaridire le fonti dei futuri progressi di quella.[11]
>
> Un insegnamento siffatto non può che dare ai giovani una visione distorta della cultura:
> la cultura generale che esso (l'insegnamento medio) si propone di fornire non deve assomigliare ad un territorio selvaggio e montuoso, le cui vette illuminate dal sole sono separate da abissi profondi e inesplorati. Deve esser piuttosto un dominio già civilizzato, le cui provincie siano collegate da ponti e strade".[12]

Le domande che avrebbe dovuto porsi chi si apprestava a elaborare dei programmi di matematica per la scuola secondaria erano, per Castelnuovo, soprattutto due:

1. A chi deve rivolgersi l'insegnamento medio?
   A suo avviso, erano principalmente i giovani che aspiravano alle libere professioni quelli a cui la scuola doveva guardare:

   > "Di questi soprattutto dobbiamo tener conto, sia perchè costituiscono la grande maggioranza delle nostre scolaresche, sia perchè su di essi principalmente deve fare assegnamento il paese nel suo

[10]G. Castelnuovo, *Sui lavori della Commissione Internazionale pel Congresso di Cambridge*, Atti del II Congresso della "Mathesis" Società italiana di matematica, Padova, 20-23 Settembre 1909, Padova, Premiata Società Cooperativa Tipografica, 1909, Allegato F, pp. 1-4, cit. p. 3.
[11]G. Castelnuovo, *La scuola nei suoi rapporti colla vita e colla Scienza moderna*, Atti III Congresso della Mathesis, Genova, 21-24 ottobre 1912, Roma, Tip. Manuzio, 1913, pp. 19-20.
[12]Ibidem, pp. 16-17.

progressivo sviluppo. [...] Se noi non teniamo conto di queste esigenze, se noi per amore della cultura soffochiamo in questi discepoli il senso pratico e lo spirito di iniziativa, noi manchiamo al maggiore dei nostri doveri."[13]

2. Quali sono le qualità che tale insegnamento deve sviluppare?
   Le qualità che un insegnante doveva sviluppare in modo armonico erano, per Castelnuovo, tre: la fantasia creatrice, lo spirito di osservazione e le facoltà logiche:

   > "la scuola media deve dare non la sapienza, ma il desiderio, il bisogno della sapienza; non la cultura enciclopedica, ma un'idea chiara, per quanto necessariamente molto limitata, delle principali questioni che i vari rami di conoscenza prendono in esame, e di qualcuno dei metodi che furono impiegati per trattarle. [...] Le scuole medie devono dare solo l'attitudine a seguire studi più elevati".[14]

Castelnuovo sosteneva perciò l'importanza dell'osservazione e delle attività sperimentali, l'utilità del continuo confronto con astrazione e realtà e la necessità delle applicazioni "per mettere in luce il valore della scienza". Egli, come tutti i membri della scuola italiana di geometria algebrica, fra cui Corrado Segre, Francesco Severi e Federigo Enriques, era convinto che l'insegnante dovesse evitare "gli acrobatismi intellettuali":

> "Col dimostrare logicamente ciò che è evidente all'intuizione si porta un doppio danno, perchè si scredita insieme il ragionamento, di cui non è quello l'ufficio, e l'intuizione, di cui si disconosce l'immenso valore. Si ha un bel dire che l'intuizione può condurre all'errore; sarà; ma l'intuizione fornisce pure la principale, se non l'unica, guida alla scoperta della verità. Dovremo forse rinunziare alla verità per paura dell'errore?".[15]

Un altro punto su cui Castelnuovo ritornava spesso era l'importanza della storia della scienza per far comprendere ai giovani "il carattere relativo e provvisorio di ogni teoria". [16]
Il suo modo di concepire l'insegnamento della matematica emerge in alcuni slogan che compaiono spesso nei suoi interventi e nei suoi articoli:

---

[13]Ibidem, pp. 18-19.

[14]G. Castelnuovo, *La scuola media e le attitudini che essa deve svegliare nei giovani*, Federazione Nazionale Insegnanti Medi, 1910, pp. 33-47.

[15]G. Castelnuovo, *Il valore didattico della matematica e della fisica*, Rivista di Scienza, 1907, 1, pp. 332.

[16]Ibidem, p. 336.

"Riabilitare i sensi",
"Abbattere il muro che separa la scuola dal mondo esterno",
"Accostare l'insegnamento alla natura e alla vita".

Una parziale attuazione delle proposte di Castelnuovo si ebbe nel 1911, quando il ministro Luigi Credaro istituì un liceo moderno che si differenziava dal classico a partire dalla seconda classe del liceo. Nel nuovo corso di studi, al greco veniva sostituita una lingua moderna (tedesco o inglese), si dava maggiore importanza alle materie scientifiche e si aggiungevano elementi di scienze economiche e giuridiche. Per quanto riguarda la matematica, in particolare, si dava maggior rilievo alle approssimazioni numeriche, si introducevano le nozione di funzione e i concetti di derivata e di integrale.

1.2 Riforma Gentile 1923

Conclusasi la prima guerra mondiale, la discussione sulla riforma della scuola secondaria riprese in modo vivace. Nella tarda primavera del 1922, il Ministero della Pubblica Istruzione aveva ormai pronta una bozza di decreto, ma nell'autunno successivo, in seguito alla marcia su Roma, Mussolini diventava capo del governo e dava l'avvio alla dittatura fascista. Giovanni Gentile, ministro della Pubblica Istruzione, seppe approfittare della legge del 3/12/1922 che concedeva pieni poteri al primo governo Mussolini e attuò in un solo anno una completa e organica riforma del sistema scolastico italiano secondo le linee pedagogiche e filosofiche dai lui elaborate a partire dai primi anni del Novecento, tendenti a rafforzare la cultura umanistica e poco riconoscenti del valore formativo della scienza. L'idea guida della riforma poteva essere riassunta così: *la scuola deve essere una palestra di intelligenza e un luogo dove forgiare le coscienze.* Si riconosceva che la classe dirigente dovesse essere altamente preparata per poter guidare il Paese, ma ancora una volta venne privilegiato l'asse storico-estetico-letterario, trascurando le discipline scientifiche, tra le quali la matematica.
Il decreto relativo alla scuola secondaria fu emanato il 6 maggio 1923. Gentile respingeva l'istanza democratica della scuola media unica e separava l'istruzione secondaria in due percorsi di cui quello classico-umanistico, destinato alla formazione della classe dirigente, era assolutamente preponderante su quello tecnico-scientifico. L'insegnamento del latino fu introdotto in tutti i corsi inferiori della scuola media. Il liceo moderno e la sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico furono soppressi e sostituiti con un liceo scientifico debole, perchè privo di un corso inferiore propedeutico e con sbocchi universitari limitati. In più, l'insegnamento della matematica veniva accorpato con quello della fisica, con un orario talvolta inferiore a quello

Tabella 1.1: Materie e relative ore settimanali per il ginnasio, 1923.

Materie	I	II	III	IV	V
Greco	-	-	-	4	4
Latino	8	7	7	6	6
Italiano	7	7	7	5	5
Storia e Geografia	5	5	4	3	3
Lingua straniera	-	3	4	4	4
Matematica	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**
Totale	**21**	**24**	**24**	**24**	**24**
Ginnastica, esercizi militari	4	4	4	2	2
Religione	1	1	1	1	1

precedentemente destinato alla sola matematica. Ai licei predetti veniva affiancato un "liceo femminile", corso di studi che non offriva un diploma utile dal punto di vista professionale, nè alla possibilità di accedere agli studi universitari ed era totalmente privo degli insegnamenti scientifici.
La riforma prevedeva inoltre un esame di stato al termine di ogni ciclo di studi, mettendo in questo modo sullo stesso piano scuole pubbliche e private. L'esame di maturità classica acquistava carattere di vero e proprio esame di ammissione all'università e doveva attestare il possesso di un'ampia e profonda cultura umanistica. Ai diplomati degli altri licei era invece impedita l'iscrizione all'università.
I programmi emanati a seguito della Riforma Gentile erano essenzialmente programmi d'esame (Regio Decreto 14.10.1923 n. 2345) anche se la distribuzione degli argomenti negli anni del corso veniva affidata all'insegnante. Erano programmi permeati di nozionismo, nei quali quel che contava era la preparazione agli esami finali.
Quanto all'ammissione alla quarta ginnasiale, per ciò che riguarda la matematica è prevista una prova orale, in forma di conversazione della durata di non meno di 10 e non più di 20 minuti, intorno ai seguenti argomenti:

> *Prova orale:*
> Interrogazioni ed esercizi intorno alla seguente materia:
> *Aritmetica:*
> Le quattro operazioni fondamentali sui numeri interi. Potenze di numeri interi e regole di calcolo relative. Nozioni sulla divisibilità dei numeri interi. Numeri primi. Criteri di divisibilità per 2, 5, 3 e 9. Prova per 9 delle quattro operazioni sui numeri interi. Massimo comune divisore e minimo comune multiplo di due o più numeri interi. Le quattro operazioni fondamentali sui numeri frazionari. Potenze di

numeri frazionari. Numeri decimali. Numeri decimali periodici e loro frazioni generatrici. Sistema metrico decimale. Numeri complessi con applicazioni limitate alle misure degli angoli, degli archi e del tempo. Uso di semplici formule letterali per esprimere regole di calcolo o di misura, e per mostrare come da tali regole possano esserne dedotte altre. Uso delle parentesi. Calcolo del valore che un'espressione letterale assume per assegnati valori numerici delle lettere che vi compariscono. Proporzioni numeriche. Proporzionalità diretta ed inversa. Regola per la divisione di un numero in parti proporzionali a più altri. Regole per l'estrazione della radice quadrata con assegnate approssimazioni.
Geometria:
Rette, semirette, segmenti. Piani, semipiani, angoli. Rette perpendicolari, rette parallele. Poligoni: in particolare triangoli, trapezi, parallelogrammi, rettangoli, rombi, quadrati. Poligoni regolari. Circonferenza e cerchio; archi e settori circolari. Retta e piano perpendicolari. Piani perpendicolari. Piani e rette paralleli. Prisma, parallelepipedo, piramide. Cilindro, cono e sfera. Misure di lunghezza, di superficie, di volume, di angoli e di archi.

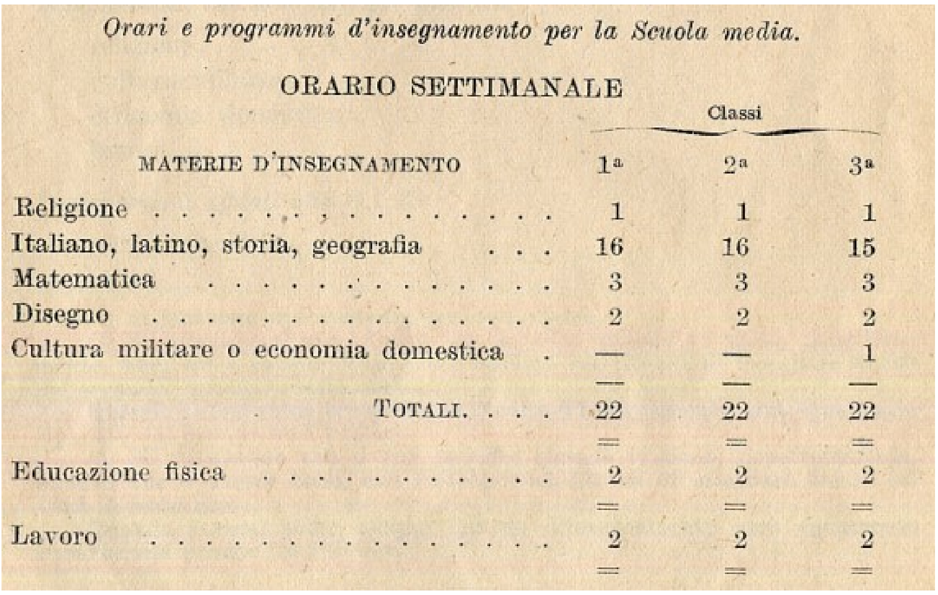
AVVERTENZE:
Per la matematica, l'esaminando sarà tenuto a calcolare espressioni aritmetiche o date direttamente o da ricavare mediante sostituzione di valori numerici da assegnate espressioni letterali; ed a risolvere facili problemi che richiedano la conoscenza delle regole di misura per le lunghezze, le superfici, i volumi, gli angoli, gli archi. Durante lo svolgimento degli esercizi su esposti, non è escluso che l'esaminatore richieda dal candidato definizioni esatte dei termini tecnici, di cui avrà occasione di valersi, ed enunciati precisi delle regole pratiche, cui farà ricorso; ma è assolutamente escluso che l'esame possa procedere per domande e risposte di definizioni ed enunciati e muoversi in un campo di completa astrattezza. Il candidato ha da dimostrare, soprattutto, di saper orientarsi nella risoluzione di un problema ed eseguire con franchezza le operazioni che essa richiede. Quindi, si condonerà piuttosto un qualche impaccio nel definire e nell'enunciare, che la deficienza nel risolvere e nell'operare. Dalle norme stesse, secondo cui deve procedere l'esame, discende - occorre appena avvertirlo – che l'insegnamento dell'aritmetica si presuppone svolto con indirizzo pratico; il che da una parte, ove l'occasione si presti o la chiarezza lo consigli, non impedisce di fare uso discreto di qualche semplice ragionamento deduttivo; e, dall'altra, non impone che nello svolgimento del programma si debba seguire quell'ordine cui bisognerebbe ricorrere se si dovesse impartire un insegnamento di aritmetica razionale. Per es., non è consigliabile di cominciare a parlare di frazioni solo dopo aver svolta tutta la parte

> del programma riguardante i numeri interi; il calcolo con frazioni assai semplici, ove la riduzione ai minimi termini e la riduzione al minimo denominatore comune possono esser fatte mentalmente o per facili tentativi, potrebbe esser premesso con vantaggio all'introduzione delle nozioni generali di massimo comune divisore e di minimo comune multiplo e all'esposizione delle regole che li riguardano. Da queste norme discende inoltre, che l'insegnamento della geometria non deve avere altro scopo che quello di mantenere vivo il ricordo delle nozioni geometriche apprese nelle scuole elementari, fissar bene la nomenclatura, che in alcune sue parti occorre possedere con sicurezza per studiar poi con profitto la geografia astronomica, e fornire con le regole di misura abbondante materia di esercizi e ottime occasioni per l'introduzione di formule letterali, e la deduzione di una di esse, da altre.

La reazione dei matematici membri della Mathesis e dell'Accademia dei Lincei (che, presieduta da Vito Volterra, reagì con la relazione *Sopra i problemi dell'insegnamento superiore e medio a proposito delle attuali riforme*, redatta da Guido Castelnuovo) e di altri brillanti scienziati non si fece attendere. Ciononostante, lo squilibrio fra l'istruzione classica e quella scientifica, instaurato nel lontano 1859 da Casati e consolidato dalla Riforma Gentile, era destinato a perdurare fino alla fine del secolo.

1.3 Carta Bottai 1939-40

Il 15 febbraio 1939, il Gran Consiglio del fascismo approvò la cosiddetta "Carta della scuola", o "Carta Bottai" (dal nome del ministro Giuseppe Bottai che se ne occupò), un documento programmatico, una "legge quadro", che avrebbe dovuto contenere tutti i principi pedagogici del regime e costituire la premessa per le future legislazioni. Questa Carta, che insieme alla "Carta del lavoro" e alla "Carta della razza" si inserisce nella tradizione facista delle "carte", venne redatta in tempi molto brevi: le linee generali della riforma vennero tracciate dallo stesso Mussolini il 19 gennaio 1939 e il 25 dello stesso mese si decise di attuarla. Presentata nella Legge 1 luglio 1940 n.899, la Carta della scuola esponeva il principio in base al quale la scuola doveva costituire un elemento decisivo nello Stato fascista ed essere integrata con la famiglia, il partito e le corporazioni e si proponeva dunque di dare vita ad "una scuola popolare, che fosse veramente di tutti e che rispondesse alla necessità di tutti, cioè alle necessità dello Stato", formando l'uomo moderno "ariano" attraverso la preparazione tecnica e l'orientamento professionale segnato, in teoria, dalle attitudini del singolo ma, in pratica, dalla classe sociale di appartenenza. In ciò si possono identificare un passo avanti e uno



Orari e programmi d'insegnamento per la Scuola media.

ORARIO SETTIMANALE

MATERIE D'INSEGNAMENTO	Classi 1ª	2ª	3ª
Religione	1	1	1
Italiano, latino, storia, geografia	16	16	15
Matematica	3	3	3
Disegno	2	2	2
Cultura militare o economia domestica	—	—	1
TOTALI	22	22	22
Educazione fisica	2	2	2
Lavoro	2	2	2

Figura 1.2: Ore settimanali, per disciplina, nella scuola media come indicato dalla Legge Bottai.

indietro rispetto all'impostazione gentiliana: una scuola più vicina alle classi subalterne, ma in funzione del loro asservimento al regime.
Gli eventi successivi, tra i quali, il più devastante, l'avvento della seconda guerra mondiale, impedirono a Mussolini di attuare gran parte delle innovazioni previste, ma non va sottovalutata l'ampia incidenza dell'unica riforma attuata, quella della scuola media, e il significato ideologico delle dichiarazioni.
La novità, infatti, stette nella creazione di una scuola media unica che sostituiva il ginnasio inferiore, l'istituto tecnico inferiore e l'istituto magistrale inferiore; rimaneva presente però la scuola di avviamento professionale istituita nel 1928.

> Art. 1 – La scuola media, con i primi fondamenti della cultura umanistica e con la pratica del lavoro, saggia le attitudini degli alunni, ne educa le capacità e, in collaborazione con le famiglie, li orienta nella scelta degli studi e li prepara a proseguirli.

In base alla Legge dell'1 luglio 1940, nella scuola media il latino continuava ad essere materia selezionatrice:

> Il latino sarà la pietra di paragone dell'intelligenza, perché nulla come il latino, anche nei suoi primi elementi, ha la capacità di colorare le intelligenze e renderle, così, più facilmente valutabili.

Venne invece aumentato il numero delle ore settimanali per la matematica, che passarono da 2 a 3 (Figura 1.3). Nei Programmi (R.D.30 luglio 1940) e, con maggior specificazione, nella circolare del 28 agosto 1940 n.1632, si legge:

MATEMATICA.

Avvertenze.

L'insegnamento della matematica nella Scuola media deve avere carattere essenzialmente intuitivo; il che importa che le proprietà evidenti per i ragazzi siano enunciate di regola, senza alcuna dimostrazione, ma valorizzate attraverso numerosi e convenienti esempi ed esercizi, che possono talvolta anche acquistare carattere dimostrativo per il modo stesso con cui sono impostati e condotti dai professori e dagli alunni. Per le proprietà meno evidenti, la loro enunciazione dovrà essere fatta dopo che l'alunno ne abbia acquistato la conoscenza attraverso considerazioni di carattere sperimentale.

Insomma, nei tre anni di corso, ma specialmente negli ultimi due, l'alunno deve essere condotto attraverso esercitazioni, e quasi inconsapevolmente, a darsi ragione da sè delle più facili proprietà e a trovare la formulazione più adatta delle regole conclusive.

L'insegnamento sia fondato principalmente sulla risoluzione scritta e orale di facili problemi che abbiano attinenza, il più che sia possibile, con la vita reale dei ragazzi e delle loro famiglie. Converrà anche che gli esercizi di calcolo rapido siano scelti in modo che gli scolari ne vedano subito l'utilità; soltanto così essi potranno intendere il valore delle proprietà aritmetiche, che altrimenti resterebbero peso inutile e mortificante.

Sarà necessario corredare le lezioni di aritmetica e di geometria con appropriate piccole informazioni di carattere storico, che, mentre si collegano direttamente o indirettamente alle altre materie di insegnamento, hanno principalmente lo scopo di rendere più attraente la lezione.

Figura 1.3: Tratto dal documento "Ordinamento e Programmi della Scuola media" Legge 1 luglio 1940, n.899, R.D. 30 luglio 1940, n.1174

Per la matematica, in conclusione, negli stessi Programmi e nella successiva Circolare, ci furono due novità.

- Per la prima volta si parlava di un nuovo metodo, che non si fermava alla semplice esposizione delle proprietà evidenti, ma che prendeva le mosse dell'intuizione per procedere verso considerazioni di natura astratta.

- Per la prima volta, inoltre, a livello legislativo, si parlò di introdurre la storia nell'insegnamento della matematica.

Capitolo 2

I libri di testo per l'insegnamento della matematica nella scuola media. L'approccio storico.

Ripercorrendo le tappe che, dalla fine dell'Ottocento alla prima metà del Novecento, hanno caratterizzato la storia della didattica della matematica nella scuola media italiana (analizzate nel capitolo precedente), risulta interessante porre una più profonda attenzione sui manuali di geometria elementare pubblicati in quegli anni, cogliendo in particolare le interazioni con la legislazione scolastica e con le ricerche sui fondamenti sviluppatesi in quegli stessi anni.

2.1 Luigi Cremona e *Gli Elementi d'Euclide con note aggiuntive ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei per cura dei professori Enrico Betti e Francesco Brioschi*

Prima di ottenere nel 1860 la cattedra di Geometria Superiore all'Università di Bologna, Luigi Cremona insegnò per alcuni anni nei ginnasi e nei licei e questa esperienza gli permise di rendersi conto delle carenze e delle lacune nella preparazione dei giovani che accedevano all'università. Fu soprattutto questo dislivello fra scuola secondaria e istruzione superiore che egli desiderò colmare quando il ministro Coppino nel 1867 lo invitò a far parte della commissione per l'elaborazione dei nuovi programmi per la scuola secondaria.

Trascorso un solo anno dalla Riforma Coppino, vide la luce il volume *Gli Elementi d'Euclide con note aggiuntive ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei per cura dei professori Enrico Betti e Francesco Brioschi.*[1]
Per quanto tra i curatori non figuri Cremona, fu lui il vero artefice dell'opera.[2]
Oltre a proporre un manuale elementare prettamente italiano, Cremona e i suoi collaboratori si prefissero come obiettivi quello di fornire agli insegnanti un testo conforme ai nuovi programmi e metodi e quello di combattere l'impostazione metodologica degli *Eléments de géométrie* di Adrien Marie Legendre (1752-1833) e soprattutto l'uso dichiarato che quest'ultimo propose dell'aritmetica e dell'algebra nella trattazione geometrica, tale per cui tutta la teoria euclidea delle proporzioni tra grandezze nel V libro, puramente geometrica, diventava superflua in quanto tutto veniva ricondotto a teoremi di aritmetica e di algebra. Questo però faceva sì, ad esempio, che, quando si doveva estendere la trattazione a grandezze incommensurabili, essa rimaneva priva di un fondamento sicuro, non essendo stata preventivamente definita in modo rigoroso l'uguaglianza di rapporti tra grandezze di tal genere.

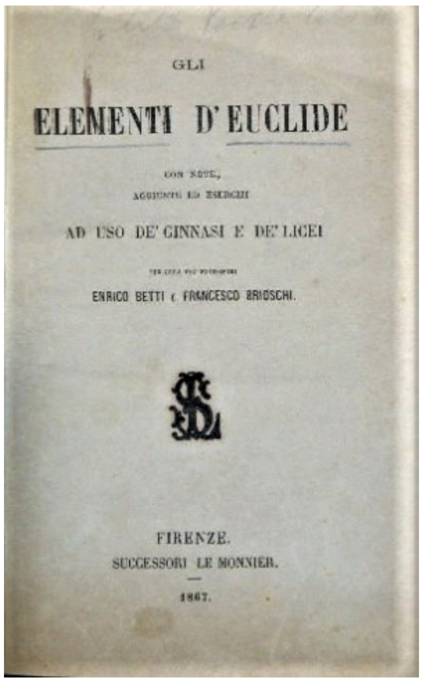


Figura 2.1

Il *Betti-Brioschi* nacque in contrapposizione a questa impostazione metodologica allo scopo di educare i giovani al "gusto delle nozioni nettamente determinate" e "all'abitudine del rigore del raziocinio".
Gli autori si basarono sostanzialmente sull'edizione italiana degli *Elementi* di Euclide di Vincenzo Viviani (1690), pur introducendo modifiche di forma e sostanza ispirate ad altre edizioni, in particolare a quella inglese di Robert

[1] E.Betti-F.Brioschi, *Gli Elementi d'Euclide con note aggiunte ed uso de' ginnasi e de' licei,* Firenze, Successori Le Monnier, 1868.

[2] R.Gatto, *Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti (1860-1890)*, in Menghini (ed.), *La corrispondenza di Luigi Cremona,* in Quaderni Pristem, 9, 1996, pp.7-90.

Simson (1756, riedito nel 1863).

Le critiche all'opera di Cremona, Betti e Brioschi, tuttavia, non mancarono e culminarono quando Giuseppe Battaglini, uno dei principali promotori della diffusione delle geometrie non euclidee in Italia, pubblicò sulla sua rivista, il *Giornale di matematiche*, la traduzione di un articolo dell'inglese J.M.Wilson.[3] Egli criticava aspramente gli *Elementi* di Euclide come libro di testo sia dal punto di vista scientifico, sia da quello didattico e concludeva in modo perentorio che "Euclide è antiquato, artifizioso, illogico e inadatto come libro d'istruzione".
Nei numeri successivi del *Giornale di matematiche*, Battaglini ospitò sia la replica di Cremona e Brioschi, sia altri interventi a favore o contro gli *Elementi* di Euclide come manuale scolastico e la questione continuò a interessare per alcuni anni tanto il mondo accademico, quanto quello degli insegnanti.

2.2 L'introduzione della storia nelle opere di Enrico D'Ovidio, Achille Sannia e Riccardo De Paolis

L'invito a scrivere un manuale in cui Euclide fosse migliorato e semplificato ma non tradito, lanciato da Cremona e Brioschi ed esplicitato in una lettera al direttore del *Giornale di matematiche* nel 1869,[4] venne raccolto dal giovane geometra Enrico D'Ovidio (1843-1933) e dal suo maestro Achille Sannia (1823-1892) che pubblicarono in quello stesso anno gli *Elementi di Geometria*,[5] fortunato manuale che in una trentina d'anni raggiunse 11 edizioni.
La fedeltà al metodo e al rigore euclideo, la separazione della geometria dall'algebra, lo studio della geometria piana nettamente distinto da quello della geometria solida, l'attenzione a enunciare esplicitamente tutti i postulati posti alla base della trattazione sono i caratteri principali dell'opera come sottolinenano gli stessi autori nella *Prefazione*, e lo scopo è quello di "affinare con l'esercizio l'intelligenza del giovinetto, e porlo in grado di proseguire gli studi matematici senza salti dannosi".
La trattazione euclidea fu qui però migliorata nei punti dove risultava più

[3] J.M.Wilson, *Euclid as a text-book of elementary geometry*, Educational Times, 1868, pp.125-128, tradotto da R.Rubini con il titolo *Euclide come testo di geometria elementare*, 6, 1868, pp.361-368.

[4] F.Brioschi-L.Cremona 1869, *Al signor Direttore.*

[5] A.Sannia-E.D'Ovidio, *Elementi di Geometria*, Napoli, Stab. Tip. delle Belle Arti, 1868-69, con successive edizioni nel 1871, 1876, fino alla 9a nel 1895.

debole e arricchita da complementi e da questioni che avevano l'intento di preparare l'allievo a parti più avanzate di geometria. Nell'edizione del 1876 si trovano, ad esempio, quattro metodi per il calcolo del π con un particolare excursus storico (pp. 312-322).
Nell'opera la materia sviluppata è ampliata dunque anche da cenni di carattere storico ed inoltre risulta ricca di esercizi, distinti tra quelli considerati come teoremi, quelli considerati come luoghi e quelli considerati come problemi.

Una delle questioni più dibattute riguardo all'insegnamento della geometria elementare fu il problema della fusione o meno della geometria piana con quella solida e di conseguenza la scelta o il rifiuto dell'adozione del cosiddetto "metodo fusionista" (o "fusionismo"). Questo movimento sorse in Europa negli anni Quaranta dell'Ottocento, ma in Italia si manifetò più tardi, dopo l'Unità nazionale e un primo riordino della pubblica istruzione su nuove basi. Esso fu uno dei temi di discussione proposti durante il primo congresso dell'Associazione Mathesis del 1898 e venne poi trattato a livello internazionale nel 1911 nell'ambito di un dibattito più ampio sulla "fusione delle diverse branche della matematica nell'insegnamento medio", durante il Congresso della Commissione Internazionale dell'Insegnamento Matematico.
Con il termine *fusione* si denota "un metodo didattico secondo il quale fin da principio si studiano simultaneamente gli argomenti affini di geometria piana e solida, e si vengono in seguito applicando le proprietà dell'una o dell'altra per trarne il maggior vantaggio possibile".[6] Non si trattò solo di una moda didattica; il fusionismo traeva infatti le sue giustificazioni nei fondamenti della geometria, tema cruciale della ricerca matematica di quel periodo.
In Francia e in Germania comparvero contemporaneamente due monografie di geometria elementare basate sul metodo fusionista: nel 1844 venivano pubblicate le *Analogies de la Géométrie élémentaire*, di Gabriel Alcippe Mahistre,[7] in cui nella prima parte erano trattate la geometria piana e le sue analogie con quella dello spazio, mentre nella seconda la geometria dello spazio era presentata in modo indipendente.
Lo stesso anno veniva pubblicato il trattato di geometria elementare per i

[6]Cfr. *Verbali del Congresso. Seduta prima, Torino, 9 settembre 1898,* Bollettino Mathesis, 1898-99, n.3, p.6.

[7]*Les Analogies de la géométrie élémentaire, ou la Géométrie dans l'espace ramenée à la géométrie plane, Ouvrage conçu de manière que tout élève, après avoir compris une proposition quelconque de Géométrie plane, pourra, de luimême, s'élever immédiatement, et presque sans efforts, à tous les cas semblables de la Géométrie dans l'espace*, Paris, Hachette.

ginnasi e le scuole secondarie superiori di Anton Bretschneider: *Lehrgebäude der niederen Geometrie für den Unterricht ab Gymnasien und höheren Realschulen*,[8] in cui veniva cancellata ogni linea di demarcazione esistente tra la geometria piana e quella dello spazio. La geometria sintetica era divisa in tre parti: *Geometrie der Lage* (Geometria di posizione); *Geometrie der Gestalt* (Geometria di forma); *Geometrie des Maßes* (Geometria della misura). Vi era sostenuta l'utilità della fusione, in quanto il trattenere a lungo un giovane sulla geometria piana ne riduceva le capacità intuitive e, in base all'esperienza, il metodo tradizionale non dava risultati migliori, tuttavia gli argomenti erano organizzati in modo da poter essere trattati anche secondo una linea separatista.
In seguito, nel 1858, Adolph Steen, seguendo le tracce di Bretschneider, pubblicò il trattato *Oversigt over Hovedformerne i Rummet som Indledning til Geometrien*[9] (panoramica delle principali forme dello spazio come introduzione alla geometria), che venne adottato nelle scuole danesi, in cui già dal 1844 la separazione tra geometria piana e geometria solida era stata soppressa. Successiva in ordine di tempo è l'opera di Charles Méray, i *Nouveaux éléments de géométrie*, pubblicata in Francia nel 1874, in cui la fusione della geometria piana con la solida è completa.[10]

Tale tendenza didattica prese l'avvio in Italia quando Riccardo De Paolis nel 1884 pubblicò i suoi *Elementi di Geometria.*[11] Dopo aver studiato all'Università di Roma con Luigi Cremona, Eugenio Beltrami e Giuseppe Battaglini, Riccardo De Paolis fu docente di geometria superiore all'Università di Pisa e svolse la sua ricerca nel campo delle trasformazioni cremoniane e delle superfici algebriche. Più che di testo scolastico, il suo fu un trattato sul fusionismo e i fondamenti della geometria. Nella prefazione egli affermava che "esiste molta analogia tra certe figure del piano e certe figure dello spazio", per cui "studiandole separatamente rinunziamo a conoscere tutte le cose che questa analogia ci insegna e cadiamo volontariamente in ripetizioni inutili".[12]
Il manuale risulta pregevole anche per le 31 note al testo di carattere storico-critico che De Paolis pose in appendice (esempio in Figura 2.2). Una di queste è dedicata a una rapida introduzione alle geometrie non euclidee, che per la prima volta entrarono in un manuale di geometria elementare (Figura 2.3).

---

[8] Jena, Fr. Frommann.

[9] Kopenhagen, C. A. Reitzels (2a ed. 1868).

[10] C. Méray (1874), *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, F. Savy (2a ed. Dijon 1903), p. xi.

[11] R.De Paolis, *Elementi di Geometria,* Torino, Loescher 1884.

[12] Ibidem, cit., *Prefazione*, p.III.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ldots\ldots$$

Il primo valore approssimato di π è stato dato da ARCHIMEDE (morto 212 anni av. l'êra v.), il quale dimostrò che π era compreso fra $3+\frac{10}{71}$ e $3+\frac{10}{70}$, prendendo il secondo numero, cioè $\frac{22}{7}$, si ha un valore approssimato che coincide con quello di π per le due prime cifre decimali.

MEZIO (1700) ha dato il numero $\frac{355}{113}$, che coincide con π per le prime sei cifre decimali.

LUDOLF VAN CEULEN (1539) ha calcolato 32 cifre decimali di π;

GEORG VEGA (1793) ne ha calcolate 140;

ZACHARIAS DASE (1844) ne ha calcolate 200;

RICHTER (1854) ne ha calcolate 500.

(a)

— 479 —

Si conoscono poi le seguenti altre espressioni di π:

WALLIS $\quad \frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}$

BROUNKER $\quad \frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots\ldots}}}}}$

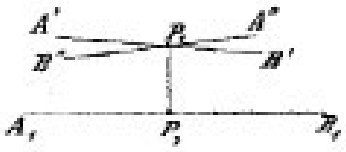
LEIBNITZ $\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots$

BERNOUILLI $\quad \frac{\pi}{2} = \frac{\log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}.$

(b)

Figura 2.2: Excursus storico sul π, R.De Paolis, *Elementi di Geometria,* pp.478-479

— 467 —



Se A'B', A''B'' sono due parallele condotte dal punto P_1 alla retta A_1B_1, facendo rotare il piano $P_1A_1B_1$ intorno a P_1P_2, finchè si scambino le due parti in cui è diviso dall'asse, la A'B' deve necessariamente venire in A''B'', e viceversa, quindi $P_1\widehat{.B'}P_2 = P_1\widehat{.B''}P_2$. Ciascuno di questi due angoli uguali si dice *angolo di parallelismo*.

Riassumendo: per un punto non si possono condurre rette parallele ad una retta data, o se ne può condurre una, ed una sola, o se ne possono condurre due, e due sole; basando tutte le ulteriori ricerche sopra una qualunque di queste ipotesi, possibili perchè non involgono contraddizioni, fondiamo tre Geometrie, logicamente rigorose; si chiama *ellittica* la prima, *parabolica* la seconda, ed *iperbolica* la terza. Come caso particolare della Geometria iperbolica si può dedurre la Geometria parabolica, che è l'ordinaria Geometria euclidea, supponendo retto l'angolo di parallelismo, infatti allora coincidono A'B', A''B'', e da P_1 si può condurre una retta parallela ad A_1B_1, ed una sola.

Quale delle tre Geometrie è quella dello spazio nostro? La questione non è ancora risoluta, però è indiscutibile che, *se la Geometria euclidea non è assolutamente vera, è verificata nei limiti della nostra esperienza.*

I seguenti teoremi sono dimostrati ammettendo tutti i postulati da noi richiesti, eccetto il VII sulle parallele, e sono veri per la Geometria euclidea, cioè parabolica, e per la Geometria iperbolica. A tempo opportuno l'insegnante potrà far distinguere altre tra le principali proposizioni indipendenti dal postulato di Euclide.

Figura 2.3: Introduzione delle geometrie non euclidee, R.De Paolis, *Elementi di Geometria,* p.467.

L'originalità dell'opera venne sottolineata da una recensione di Giovanni Frattini sul primo numero del *Periodico di Matematica* del 1886: «Di questo libro, come di tutte le migliori opere dell'ingegno, si parlerà da molti, per molto tempo e in varie guise».[13]
Il testo di De Paolis era diretto alle scuole medie superiori, ma pur nel rispetto del rigore e della completezza, era di difficile comprensione per gli studenti e troppo innovativo per alcuni insegnanti e, anche se venne adottato in qualche liceo, ebbe scarsa diffusione.
Di ispirazione fusionista uscirono poco dopo di Angelo Andriani, gli *Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo*, in cui però la scelta dei postulati fu giudicata insoddisfacente.[14]
Maggior fortuna ebbero invece gli *Elementi di geometria* di Giulio Lazzeri e Anselmo Bassani, pubblicati per la prima volta nel 1891 e poi nel 1898. Lazzeri era stato allievo di De Paolis ed aveva appreso da quest'ultimo il metodo fusionista. Divenuto professore di matematica alla Regia Accademia Navale di Livorno nel 1886, seguì tale metodo nell'insegnamento della geometria, e successivamente scrisse assieme a Bassani, che era insegnante di matematica nella stessa scuola, un libro che meglio si adattava alle esigenze degli studenti, essendo il risultato di sperimentazioni dirette, e che fu utilizzato come libro di testo in molti licei.

2.3 L'approccio storico nella didattica della matematica proposto da Felix Klein, Giovanni Vailati e Gino Loria

La storia della matematica entrò con forza nell'insegnamento soprattutto a partire dagli anni Novanta dell'Ottocento, quando il matematico tedesco Felix Klein (1849-1925), oltre che a fornire importanti contributi alla ricerca avanzata sui fondamenti della geometria, dedicò energie straordinarie alla riforma dell'organizzazione scolastica e al programma di rinnovamento dell'insegnamento matematico secondario e superiore. Egli cominciò in quegli anni ad elaborare il celebre programma di riforme dell'insegnamento della matematica che ridefiniva i rapporti fra insegnamento secondario e superiore e che trovò la sua prima espressione pubblica in un congresso tenutosi a

[13] *Periodico di Matematica*, I (1886), pp. 20-31.
[14] A. Andriani, *Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo* Napoli, Pellerano, 1887 (2 a ed.1894).

Merano nel 1905.[15] Il suo programma "Meraner Lehrplan" non riguardava solo l'insegnamento della matematica, ma anche quello della fisica e delle altre scienze naturali. L'innovazione principale proposta da Klein era l'introduzione di un "pensiero funzionale" nell'insegnamento secondario, ma si sottolineavano anche altri aspetti quali l'importanza delle applicazioni, l'uso dei modelli geometrici per l'insegnamento della geometria, il collegamento con problemi reali, e la necessità di "accennare al punto di vista storico e filosofico"[16] della disciplina e di catturare l'interesse dell'allievo presentandogli la materia in modo intuitivo.
Fra gli assunti metodologici di Klein, infatti, vi era quello di considerare nell'insegnamento il percorso storico della matematica adottando il cosiddetto "metodo genetico", consistente nel presentare una teoria seguendo il modo con cui essa si è sviluppata nella storia e non nella sua formulazione finale.

Ritornando in Italia e approfondendo il punto di vista del matematico, filosofo e pensatore Giovanni Vailati (1863-1909), membro della Commissione Reale per la riforma della scuola secondaria, anticipato nel primo capitolo, si osserva come l'importanza dell'utilizzo della storia venne sempre di più accentuato.
Laureatosi a Torino nel 1884 in Ingegneria e nel 1888 in Matematica, Vailati fu assistente di Giuseppe Peano, il quale gli trasmise l'esigenza del rigore e del linguaggio e l'interesse per la didattica. In seguito, assistette Vito Volterra, tenendo principalmente corsi liberi di storia della meccanica, da cui nacquero riflessioni profonde sulla dimensione storica della ricerca scientifica. E' proprio a questi anni, infatti, precisamente nel 1897, che risale il suo articolo *Sull'importanza delle ricerche relative alla Storia delle scienze,* in cui espose molteplici considerazioni sull'importanza della storia della scienza. In primis, riteneva necessario e costruttivo il dialogo fra cultura umanistica e scientifica, in secondo luogo sottolineava una potente funzione didattica, volta a "spedantizzare l'esposizione" e a rendere l'insegnamento più proficuo, attraente e gradevole. Egli scriveva, infatti:

> "A nessuno che abbia avuto occasione di trattare in iscuola, davanti a dei giovani, qualunque soggetto che si riferisca alle parti astratte e teoriche della matematica, può essere sfuggito il rapido cambiamento di tono che subisce l'attenzione e l'interessamento degli studenti ogni qualvolta l'esposizione lascia luogo a delle considerazioni d'indole storica. [. . .] Di questo appetito sano e caratteristico delle menti giovani è

[15] Cfr. Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht,* 36, 1905, pp. 543-553.
[16] Cfr.Meraner Lehrplan, p.550.

> certamente desiderabile trarre il maggior partito possibile. Utilizzarlo intelligentemente vuol dire rendere l'insegnamento più proficuo e nello stesso tempo più gradevole, più efficace e insieme più attraente"[17]

e, rafforzando la sua tesi, aggiungeva:

> "La storia delle scienze matematiche ci presenta un esempio unico ed ammirabile d'un processo continuo di elaborazione e di svolgimento nel quale ogni avanzamento ha sempre presupposto come condizione indispensabile gli avanzamenti anteriori e in cui ogni nuovo acquisto si appoggia e si sovrappone agli acquisti antecedenti e tende ad accrescerne piuttosto che a sminuirne e ad attenuarne l'importanza. [...]
> L'esame diligente dei documenti storici ci dice anzi qualche cosa di più e cioè che, tra le difficoltà contro le quali le scienze matematiche nel corso del loro svolgimento hanno dovuto lottare e tra gli ostacoli che esse hanno dovuto superare nel loro cammino, figurano per non piccola parte quelli provenienti appunto dall'influenza che questo carattere speciale che presentano le fasi del suo sviluppo, ha esercitato sulla mente dei suoi cultori."[18]

L'ulteriore ruolo educativo e formativo dell'introduzione della storia, venne ben esplicitato da Vailati in un suo scritto precedente:

> "La storia delle scienze ci mostra come quelli che noi chiamiamo preconcetti non sono che le teorie scientifiche corrispondenti ad uno stadio anteriore di sviluppo delle conoscenze umane, ci pone in guardia contro il pericolo inerente al credere che, perché un'ipotesi o una teoria è stata utile e feconda in passato deve per ciò solo continuare a rimaner tale anche per l'avvenire".[19]

Nel 1899 Vailati iniziò l'attività di insegnante negli istituti medi superiori in diverse città italiane (Pinerolo, Siracusa, Bari, Como, Firenze) e in questo contesto mostrò in prima persona come l'insegnante possa aiutare gli allievi ad accostarsi alla storia della scienza attraverso letture commentate di passi dei classici; egli stesso infatti leggeva ai suoi studenti passi tratti dagli *Elementi* di Euclide.

---

[17]G.Vailati, *Sull'importanza delle ricerche relative alla Storia delle Scienze*, 1897, *Scritti*, II, pp.12-13.

[18]G.Vailati, *Sull'importanza delle ricerche relative alla Storia delle Scienze*, 1897, *Scritti*, II, pp.13-15.

[19]G.Vailati, 1896, *Scritti I,* p.147.

Un altro rilevante contributo in questo ambito provenne dagli studi e dall'operato di Gino Loria (1862-1954), storico della matematica, professore di Geometria superiore all'Università di Genova dal 1886 e membro dell'Associazione Mathesis. Loria attribuì importanza alla storia delle matematiche elementari soprattutto nella formazione degli insegnanti, poichè riteneva essere utile a stabilire un collegamento tra l'insegnamento secondario e quello superiore.[20] Spinto da un desiderio di rinnovamento, nel 1906, Loria promosse l'istituzione della Scuola di magistero per la formazione degli insegnanti e ne assunse la direzione e nei due congressi della Mathesis del 1908 e del 1909, tenutisi rispettivamente a Firenze e a Padova, propose di creare cattedre universitarie pensate appositamente per la formazione stessa dei docenti dove, accanto a temi tradizionali, fosse presente la storia della matematica, venissero affrontati l'esame dei metodi didattici e l'analisi dei libri di testo.

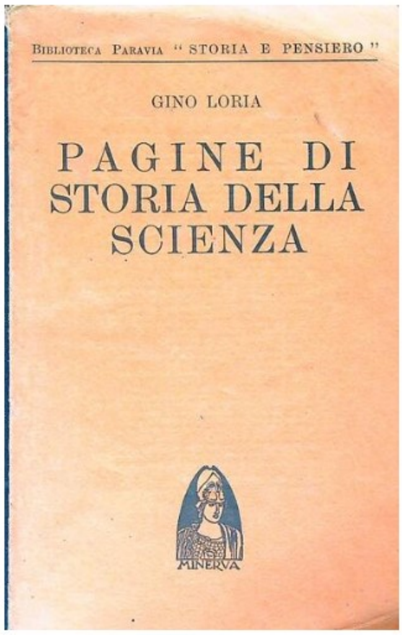


Figura 2.4

> "Il nuovo corso universitario da noi suggerito servirebbe, a parer nostro, a colmare il deplorevole abisso che oggi separa l'insegnamento universitario dall'insegnamento secondario, che F. Klein ha recentemente designato come 'sistema del duplice oblio': oblio da parte dello studente universitario di quanto studiò nelle scuole secondarie, oblio dell'insegnante secondario di tutto quello che lo occupò mentre trovavasi all'università."[21]

Dopo la Riforma Gentile, che, come detto in precedenza, trascurò nettamente ed esplicitamente le discipline scientifiche, il professore pubblicò il volumetto *Pagine di storia della scienza* (Torino, Paravia, 1925), rivolto agli studenti di scuola secondaria (Figura 2.4). La storia della matematica, inserita insieme alla storia della fisica, della chimica, dell'astronomia, della biologia e delle scienze naturali, è qui narrata con largo spazio alle biografie, non sot-

[20]G.Loria, *La storia della matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario,* Atti I Congresso, Periodico di matematica, 1899, pp.19-33.

[21]G.Loria, Padova, 1909, A, pp.3-4.

tovalutando il rispetto degli argomenti previsti dai programmi delle scuole secondarie.

2.4 Federigo Enriques e l'opera *Elementi di Geometria* (F.Enriques, U.Amaldi)

La figura di Federigo Enriques (1871-1946), illustre rappresentante della scuola italiana di geometria algebrica e pensatore di acuta intelligenza e di profondi interessi storici, filosofici e interdisciplinari, è così complessa e ricca che è impossibile delinare in pochi tratti la visione epistemologica che sta alla base della sua produzione scientifica. Occorre perciò, in questo contesto, limitarsi a sottolineare alcuni aspetti che ispirarono e mossero il suo impegno nella scuola e nella storia della matematica allo stesso tempo, quali emergono dall'articolo *Insegnamento dinamico* che comparve nel 1921 in apertura alla quarta serie del *Periodico di matematiche*, di cui Enriques era diventato direttore.
I punti principali attorno ai quali ruotava il suo programma erano i seguenti:

- l'insegnamento deve essere attivo ed educare alla scoperta;
- gettare un ponte fra la matematica e altre branche del sapere, quali la fisica, la biologia, la psicologia, la fisiologia, la filosofia e la storia. Ciò favorisce una visione unitaria della cultura;
- logica e intuizione sono due aspetti inscindibili di un medesimo processo, pertanto nell'insegnamento occorre trovare un giusto equilibrio fra le due procedendo per gradi dal concreto all'astratto;
- le matematiche superiori, considerate nel loro sviluppo storico, consentono di comprendere meglio certi aspetti delle matematiche elementari e pertanto rivestono un ruolo importante nella formazione dell'insegnante.

> "L'insegnamento - egli scriveva - non può essere un regalo che il maestro faccia a qualcuno che viene ad ascoltare le sue ben tornite lezioni [...] ma è piuttosto un aiuto a chi voglia imparare da sé e però sia disposto, anziché a ricevere passivamente, a conquistare il sapere, come una scoperta o come un prodotto del suo spirito".
> "Non vi è iato o scissura fra matematiche elementari e matematiche superiori, perché queste si sviluppano da quelle, al pari dell'albero dalla tenera pianticina. E come riguardando l'albero, potremo scoprire nella pianticina nuovi aspetti o comprendere caratteri di cui ci era sfuggito il

> significato, così anche lo sviluppo dei problemi matematici recherà luce sulle dottrine elementari in cui essi profondano le loro radici. Ad una condizione però: che di ogni dottrina si studi le origini, le connessioni, il divenire non un qualsiasi assetto statico [...] Quale modo più largo di comprensione didattica, che l'annodarsi dei problemi e l'urtarsi delle difficoltà entro lo spirito di tutti gli studenti che hanno faticato prima di noi, nella scuola del mondo?"[22]

Enriques, oltre a essere un grande matematico, fu anche filosofo, storico e riformatore della cultura. La storia, dunque, fu un elemento chiave dei suoi studi ed entrò con preponderanza anche nel suo impegno nella didattica. Tra i tanti contributi, si sottolinea infatti la fondazione da parte del matematico dell'Istituto nazionale per la storia delle scienze nel 1923 e, nello stesso anno, della Scuola universitaria per la Storia delle scienze, che si occupava anche della formazione degli insegnanti.

> "La formazione di docenti di matematiche - egli scriveva - che siano all'altezza dei loro compiti didattici, richiede, in genere che la scienza sia da loro appresa non soltanto nell'aspetto statico, ma anche nel suo divenire. E quindi che lo studioso apprenda dalla storia a riflettere sulla genesi delle idee, e d'altro lato partecipi all'interesse per la ricerca."[23]

Gli sviluppi scientifici, secondo Enriques, acquistano pieno significato solo nella loro concatenazione storica:

> "Una visione dinamica della scienza porta naturalmente sul terreno della storia, [...] dunque la storia diviene parte integrante della scienza"[24]

e un bravo insegnante dovrebbe presentare ai suoi allievi "le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico"[25] di ogni teoria studiata prestando attenzione a:

- errori che hanno fatto progredire la scienza,
- questioni aperte,
- diversi metodi.

[22] F. Enriques, *Insegnamento dinamico,* Periodico di matematiche, s. IV, I, 1921, pp. 6-16, a p. 6 e p. 16.

[23] F.Enriques 1938, p.190.

[24] Enriques e Chisini 1915, XI.

[25] F. Enriques 1921, p.16.

L'operato di Enriques, che tra l'altro proveniva da una famiglia di religione ebraica, avvenne nel contesto storico-politico della Riforma Gentile del 1923, la quale dedicò assai poca importanza alle discipline scientifiche. Le poche ore dedicate all'insegnamento della matematica costringevano gli insegnanti a dare all'insegnamento un carattere sostanzialmente dogmatico e non discorsivo. Così venne ad assumere grande valore il libro di testo.

Su ogni ordine e grado di scuola si confrontavano in quegli anni due linee editoriali differenti. La prima faceva riferimento ad Enriques e alla casa editrice Zanichelli di Bologna, che aveva stampato nei decenni precedenti il fortunato manuale di geometria di Federigo Enriques e Ugo Amaldi, gli *Elementi di Geometria* (copertina in Figura 2.5), gli *Elementi di Aritmetica* di Salvatore Pincherle, l'*Aritmetica razionale* di Cesare Arzelà e G. Ingrami, i manuali per le scuole tecniche e normali di Alberto Conti. Ad essa si contrappose la casa editrice Vallecchi di Firenze che stampò i manuali di Francesco Severi e dei suoi collaboratori.

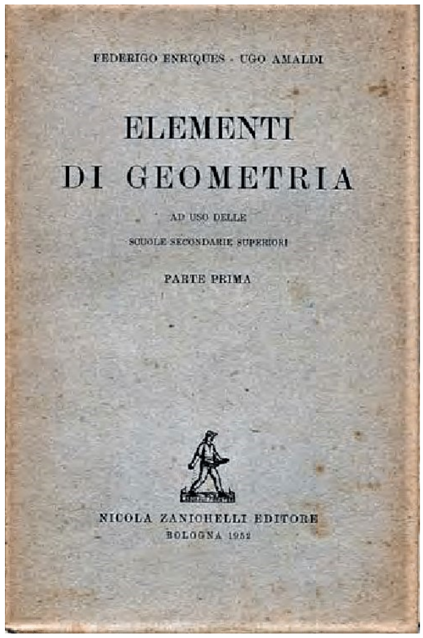


Figura 2.5

Il manuale *Elementi di Geometria*,[26] pubblicato per la prima volta nel 1903 e nato dalla collaborazione tra Enriques e Amaldi, fu uno dei testi di geometria destinati a fare storia; esso infatti fu perfezionato nelle numerose edizioni (l'ultima nel 1992[27]) e adattato a vari tipi di scuola. In questo testo, Enriques espresse la sua visione di metodo didattico tale per cui esso "non deve mirare alla illustrazione di un campo chiuso di conoscenze, ma aprire la via alla comprensione di sviluppi più larghi che balzano fuori dalla sua progressiva estensione"; alla trattazione puramente deduttiva di Euclide, dunque, preferì "un insegnamento razionale che non trascuri l'aspetto induttivo delle teorie. Il sistema che proponiamo - egli scriveva - non si oppone a quello euclideo, ma piuttosto si affaccia come un'integrazione di esso".[28] Se nel primo grado d'insegnamento è opportuno attenersi al metodo sperimentale che prevede di "far lavorare" gli allievi e

[26]F.Enriques-U.Amaldi, *Elementi di Geometria, ad uso delle scuole superiori*, Bologna, Zanichelli, 1903; F.Enriques-U.Amaldi, *Elementi di Geometria elementare ad uso dei ginnasi superiori*, 1904, manuali più volte rieditati e stampati.

[27]F.Enriques-U.Amaldi, *Elementi di Geometria*, Pordenone, Studio Tesi 1992.

[28]F.Enriques, *Sull'insegnamento della geometria razionale*, cit., pp.26-27.

limita l'uso delle definizioni e delle dimostrazioni sostituendole con verifiche su casi particolari, negli anni successivi l'insegnante deve condurre gradualmente l'allievo a una visione razionale della disciplina avendo come obiettivo quello di mostrare la formazione delle idee geometriche.
Il libro di testo, secondo Enriques, inoltre, non può e non deve ripetere la lezione orale e, viceversa, "mentre conviene allargare nella lezione orale la trattazione induttiva, giova invece che il libro di testo prosegua più diffusamente e completamente gli sviluppi deduttivi".[29] Le parti più difficili tralasciate dall'insegnante possono dar modo agli allievi più interessati di approfondire la loro cultura matematica:

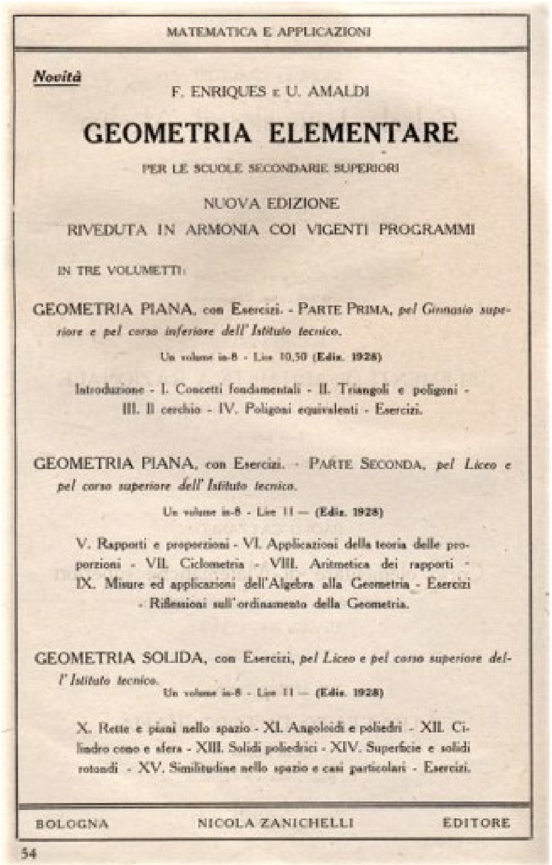
> "Chi non ha nei propri ricordi di adolescenza qualche forte impressione di una cosa intraveduta attraverso poche parole del maestro, divenute così il principio di tutto un corso di pensieri?"[30]

Inoltre, tale principio può nascere anche dalle varie digressioni e complementi storici che Enriques non mancava mai di inserire nei suoi libri di testo. Tuttavia egli era consapevole che è possibile, anzi utile, fare un uso non marginale della storia della matematica nella pratica di insegnamento e, a questo proposito, affermava:

> "Se l'allievo deve partecipare in modo attivo a questo studio, non si può dargli definizioni e regole senza spiegazione, come doni piovuti dal cielo, di cui poi quegli che riceve il dono non saprebbe servirsi. [...] La storia della scienza viene qui in soccorso, mostrandoci come le verità aritmetiche siano state riconosciute dai Pitagorici mediante modelli geometrici dei numeri, quali sono i numeri figurati: numeri quadrati e rettangolari, numeri triangolari, ecc."[31]

> "La scuola non è un campo in cui la fantasia individuale abbia a sbizzarrirsi tentando esperimenti arbitrarii, anzi tanto più è atta ad accogliere gli spiriti e le voci della società circostante, quanto più si alimenti della tradizione in cui anche questa prolunga le sue radici: non già serbando viete forme e ripetendone la morta parola, ma riattaccando il passato al presente della cultura, in uno sforzo verso l'avvenire.
> E come la scuola la scienza. Anche per questa non vi ha un vero progresso, dove le nuove generazioni non attingano alla continuità del pensiero scientifico la visione dei problemi, facendosi valenti nello studio dei grandi modelli."[32]

[29]Ibidem, p.29.
[30]Ibidem, p.34.
[31]F.Enriques 1934, trovato in "Prefazione" in A.Enriques, *Aritmetica ad uso delle scuole medie inferiori*, pp.IX-XI.
[32]F.Enriques, 1925, p.8.



MATEMATICA E APPLICAZIONI

Novità

F. ENRIQUES E U. AMALDI

GEOMETRIA ELEMENTARE

PER LE SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI

NUOVA EDIZIONE

RIVEDUTA IN ARMONIA COI VIGENTI PROGRAMMI

IN TRE VOLUMETTI:

GEOMETRIA PIANA, con Esercizi. - PARTE PRIMA, *pel Ginnasio superiore e pel corso inferiore dell'Istituto tecnico.*

Un volume in-8 - Lire 10,50 **(Ediz. 1928)**

Introduzione - I. Concetti fondamentali - II. Triangoli e poligoni - III. Il cerchio - IV. Poligoni equivalenti - Esercizi.

GEOMETRIA PIANA, con Esercizi. - PARTE SECONDA, *pel Liceo e pel corso superiore dell'Istituto tecnico.*

Un volume in-8 - Lire 11 — **(Ediz. 1928)**

V. Rapporti e proporzioni - VI. Applicazioni della teoria delle proporzioni - VII. Ciclometria - VIII. Aritmetica dei rapporti - IX. Misure ed applicazioni dell'Algebra alla Geometria - Esercizi - Riflessioni sull'ordinamento della Geometria.

GEOMETRIA SOLIDA, con Esercizi, *pel Liceo e pel corso superiore dell'Istituto tecnico.*

Un volume in-8 - Lire 11 — **(Ediz. 1928)**

X. Rette e piani nello spazio - XI. Angoloidi e poliedri - XII. Cilindro cono e sfera - XIII. Solidi poliedrici - XIV. Superficie e solidi rotondi - XV. Similitudine nello spazio e casi particolari - Esercizi.

BOLOGNA NICOLA ZANICHELLI EDITORE

54

MATEMATICA E APPLICAZIONI

F. ENRIQUES E U. AMALDI

ELEMENTI DI GEOMETRIA

Sesta edizione ridotta

Un volume in-8 . . . . L. 13,50

ELEMENTI DI GEOMETRIA

ad uso delle Scuole Complementari

Un volume in-16 . . . . L. 11,25

NOZIONI DI GEOMETRIA

ad uso dei Ginnasi Inferiori

Un volume in-16 . . . . L. 7,65

NOZIONI INTUITIVE DI GEOMETRIA

ad uso degli Istituti Magistrali Inferiori

In-16 - L. 7,65

UGO AMALDI E FEDERIGO ENRIQUES

NOZIONI DI MATEMATICA

ad uso dei Licei

VOLUME I. - In-8. Con moltissime figure . . . . L. 10,80

VOLUME II. - In-8. Con moltissime figure . . . . L. 16,20

BOLOGNA NICOLA ZANICHELLI EDITORE

55

Figura 2.6

L'Enriques Amaldi nelle sue edizioni "complete" degli anni trenta arrivò a superare le seicento pagine con numerosi esercizi.
Nel 1937 Enriques e Amaldi pubblicarono anche i *Complementi di algebra ad uso del II biennio dei licei scientifici*, così da completare la loro manualistica che comprendeva la *Geometria elementare per le scuole secondarie superiori*, gli *Elementi di geometria* (edizione ridotta), le *Nozioni di geometria, per le scuole di avviamento professionale*, le *Nozioni di geometria per i ginnasi inferiori*, le *Nozioni intuitive di geometria per gli istituti magistrali inferiori*, l'*Algebra elementare in due volumi per i ginnasi, i licei classici e il corso inferiore degli Istituti Tecnici* e l'*Algebra elementare per il primo biennio dei licei scientifici.* Queste opere erano tutte edite dalla Zanichelli; esse continuarono ad essere ristampate dopo le leggi razziali (applicate in Italia a partire dal 1938) con in copertina il solo nome di Amaldi.

2.5 La personalità di Francesco Severi e il suo contributo nella didattica della matematica

Francesco Severi (1879–1961) fu una delle figure più rilevanti dell'ambiente matematico italiano e internazionale nella prima metà del XX secolo. Ebbe una personalità molto complessa con una presenza importante nella vita politica e culturale italiana. La produzione scientifica di Severi comprende più di 400 pubblicazioni di ricerca matematica, numerosi trattati e scritti vari. I suoi contributi, multiformi e di notevole levatura, spaziano in vari settori della geometria algebrica: varietà abeliane e quasi abeliane, studio e classificazione delle superficie e varietà algebriche a meno di trasformazioni birazionali, geometria proiettiva delle varietà algebriche, geometria enumerativa; notevoli sono anche alcuni articoli di teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse. Vanno ricordati però, soprattutto in questo contesto, i suoi libri di testo, scritti per ogni ordine di scuola, in cui cercò di coniugare l'aspetto intuitivo con un notevole rigore metodologico.
Dal 1926 Severi diventò direttore della *Collezione di testi di matematica per le scuole medie*, per la casa editrice Vallecchi di Firenze. Nei suoi manuali emergeva un rilevante utilizzo della storia delle matematiche:

> "[...] non dimenticare i maestri, perché un'idea geniale vale in potenza creatrice più di tutte le sue conseguenze"[33]

e la convinzione che per facilitare la comprensione di certi concetti matematici, da parte degli studenti di scuola secondaria, fosse utile prendere le mosse dalla loro origine storica.

> "Occorre ispirarsi al principio che nell'apprendimento di nozioni nuove l'intelletto tende a seguire un processo analogo a quello con cui si è storicamente sviluppata la scienza."[34]

Nella sua opera *Didattica della matematica*[35] emerge la sintesi del suo pensiero didattico, ben descritta, ad esempio, nella sua proposta sull'introduzione dei numeri reali a scuola:

> "La teoria dei numeri reali, che, come ho detto, costituisce una delle maggiori difficoltà, si deve costruire dal punto di vista geometrico. Il numero reale è storicamente nato come rapporto di due grandezze e

[33] F.Severi 1955, p.38.
[34] F.Severi 1933, IX.
[35] F.Severi, *Didattica della matematica*, Enciclopedia delle Enciclopedie: Pedagogia, Formiggini, Roma, 1931, pp.362-370.

> da siffatto concetto convien prendere le mosse, perché la genesi storica delle idee è quella che, nella maggior parte dei casi, risponde alle necessità pedagogiche".[36]

La manualistica di Severi si venne anch'essa estendendo e diffondendo, come quella di Enriques e Amaldi, per adattarsi ai vari ordini di scuole ed iniziò nel 1926 con un testo di geometria. Esso si presentava in chiara contrapposizione con l'Enriques Amaldi, sia come opera snella e pedagogicamente accattivante, sia per le scelte riguardanti i principali capitoli della geometria.

L'opera che però meglio mostra, a partire dallo stesso titolo, l'intento di Severi di utilizzare il più possibile l'approccio storico nella didattica della matematica è sicuramente il manuale di *Geometria elementare. Con cenni storici. Per il triennio della scuola media.*[37]
Ben chiaramente nella *Prefazione* del testo si evince inoltre il pensiero dell'autore circa i programmi e le pratiche di insegnamento della matematica da seguire nella scuola media, di cui per altro si stavano occupando le istituzioni.

> Il testo che ora presento aderisce davvicino ai programmi per la scuola media: nei quali vedo riflessi in massima i principi didattici, che ho sempre stimato più utili. Meno felici trovo alcuni dettagli e la distribuzione della materia fra i vari anni di corso: il primo dei quali, in particolare, apparisce troppo gravato. E penso che si dovrà perciò addivenir presto a qualche ritocco.
> La maggior disponibilità dell'orario (rispetto a quello del tutto insufficiente, che vigeva nel ginnasio inferiore) e l'ordinamento della scuola media rispetto a quello delle scuole superiori, mi hanno indotto a ripensare ed a riscrivere il libro, conservandolo vicino alla mia "Geometria intuitiva" soltanto nella linea generale.
> Qui si tratta invero, com'è prescritto, di condurre quasi inconsciamente gli scolari ad enunciazioni sempre più precise e a dimostrazioni, delle quali si faccia nascere il bisogno o il desiderio e che i ragazzi non possan mai giudicare ingombranti superfluità. E dimostrare vuol dire in questo caso non già ridursi ai postulati colle operazioni della logica formale, ma raggiungere una proprietà non evidente come verità universale, mediante una successione d'argomentazioni ognuna delle quali s'appoggia all'evidenza o a proprietà precedentemente acquisite.
> **Il libro è corredato di cenni storici, che, come voglion le istruzioni dei programmi, devon rendere più attraente la lezione.**

[36]Ibidem, p.366.
[37]F.Severi, *Nozioni di Geometria elementare con cenni storici per il triennio della scuola media*, Vallecchi Editore, Firenze, 1946.

> **Ma essi serviranno pure a richiamar al rispetto della tradizione, che offre quasi sempre le più sicure norme pedagogiche, se è vero che il pensiero individuale si sviluppa con processo analogo a quello con cui si sviluppa il pensiero umano nella sua ascensione storica.**[38]

Di seguito si riporta l'estratto del primo dei tanti cenni storici dell'opera, posto a conclusione del primo capitolo, dedicato alla definizione e trattazione di punto, retta, piano, segmento e angolo.

> Le origini della geometria si perdon nella più remota antichità. Bisogna risalir nella preistoria cinque o seimila anni indietro, per trovarne qualche traccia presso i sumeri e i babilonesi. Ma sembra sicuro che la geometria, come dottrina, sia nata in Egitto. Certo è che i più antichi documenti geometrici, che oggi si conoscono, son due papiri egizi, risalenti a circa 4000 e 3800 anni or sono! Presso gli egizi, secondo Erodoto, la geometria sorse per trovare e correggere le misure dei terreni. Queste misure dovevano rinnovarsi spesso, perchè le inondazioni del Nilo spostavano i confini delle proprietà e rendevano necessarie rettifiche nella distribuzione delle imposte. Il nome stesso di geometria significa misurazione della terra e ne attesta l'origine. Dall'Egitto, intensificandosi le relazioni con la Grecia, le tradizioni geometriche passarono ivi, sembra con Talete di Mileto, verso il 600 a.C. Però la geometria e l'aritmetica divennero scienze, con veri procedimenti dimostrativi, soltanto attraverso l'opera di Pitagora (circa 500 a.C.) e della Scuola Italica, da lui fondata a Crotone, in Calabria. Là nacquero insieme i nomi d'Italia e di Matematica, auspicio dell'inclinazione che gli italiani hanno sempre avuto per gli studi matematici, e che deve costituire un motivo di legittimo orgoglio nazionale per gli scolari ed un forte sprone nei loro studi. Il sommo filosofo greco Platone (428-348 a.C.) cooperò ad accrescere il prestigio delle matematiche. Secondo la tradizione, sopra la porta della sua Accademia egli aveva scritto: "Nessuno entri qui che non sappia la geometria"; e soleva dire, per attestar l'elevatezza del pensiero geometrico: "Dio geometrizza". Euclide d'Alessandria (intorno al 300 a.C.) riunì sistematicamente le conoscenze geometriche nei suoi *Elementi*, i quali hanno dominato l'insegnamento per tanti secoli.
> La scoperta dei segmenti non commensurabili e incommensurabili appartiene alla Scuola italica. I seguaci di questa Scuola sembra fossero obbligati al segreto delle maggiori scoperte. La scoperta degli incommensurabili fu per molto tempo tenuta celata, anche perchè, non comprendendosene bene il valore, si temeva, diffondendola, di screditare

[38]Ibidem, *Prefazione*.

la geometria. Ippaso, traditore del segreto, secondo la leggenda, fu punito dagli Dei, che lo fecero perire in un naufragio! E' dalla stessa scoperta degli incommensurabili che nel V secolo a.C. Parmenide e Zenone ricavarono i concetti di punto, linea, superficie come oggi li possediamo.
I greci concepiron sempre l'angolo come mutua inclinazione di due rette. L'angolo, come parte di piano, fu considerato soltanto intorno al 1000 d.C. da Gerberto, che fu poi Papa Silvestro II. Il teorema degli angoli opposti al vertice era già noto a Talete.

Per quanto rilevante sia stata la diffusione dei manuali di Enriques e Severi essa non esaurisce l'ampia manualistica della prima metà del Novecento. Molti sono stati i professori universitari che si sono cimentati nella pubblicazione di manuali; tra di essi Roberto Marcolongo compì lo sforzo più prolungato e coerente per introdurre nell'insegnamento della geometria i vettori (secondo la notazione italiana). Altri autori di libri di testo furono Carlo Rosati, Giulio Vivanti, Giuseppe Bagnera, Giovanni Sansone. Accanto ad essi troviamo i nomi di matematici meno importanti per i loro contributi scientifici e libri di testo a diffusione prevalentemente regionale. Una certa regionalizzazione delle adozioni dei libri di testo è anzi una caratteristica di questo periodo e corrisponde ad una maggiore diffusione dell'istruzione media e all'aumento della popolazione rispetto al cinquantennio 1870-1920 dell'Italia liberale.
Di seguito vi è un elenco sommario di alcuni libri di testo largamente diffusi in quegli anni per le scuole superiori di primo e secondo grado. Si possono rilevare, come detto, due concentrazioni, la Zanichelli di Bologna intorno ad Enriques e la Vallecchi di Firenze intorno a Severi. Notevole fu anche l'attività editoriale a Napoli e a Torino.

F. Enriques, U.Amaldi, *Elementi di geometria*, Bologna, 1903 (I ed.);
S. Pincherle, *Lezioni di algebra elementare*, 1912;
O. Nicoletti; *G. Sansone, Aritmetica e algebra*, Napoli, 1920-1925;
Duilio Gigli, *Lezioni di aritmetica e di algebra elementare*, 1,2,3, Bologna, 1921-1931;
O. Nicoletti, A. Maroni, *Aritmetica razionale per l'Istituto magistrale*, Napoli, 1925;
G. Bagnera, *Elementi di algebra, 1*, Firenze, 1926;
C. Rosati, P. Benedetti, *Geometria*, Milano, 1926 (I ed.);
F. Severi, *Elementi di geometria*, Firenze, 1926-1927;
C. Burali Forti, R. Marcolongo, *Elementi di trigonometria*, Città di Castello, 1928;
G. Vivanti, *Algebra ad uso degli istituti tecnici superiori*, Torino, 1928;

G. Vivanti, *Aritmetica razionale ed algebra per il corso magistrale superiore*, Torino, 1928;
G. Bagnera, A. La Barbera, *Elementi di algebra, 2*, Firenze, 1929;
R. Marcolongo, *Complementi di algebra e i analisi per i licei scientifici*, 3a ed., Città di Castello, 1930 (la prima edizione 1920 per la sez. fisico-matematica degli Istituti tecnici);
G. Vivanti, *Algebra ad uso dei licei classici e scientifici*, Torino, 1930;
U. Bini, *Lezioni di analisi matematica per i Licei scientifici*, Firenze, 1931;
F. Severi, U. Bini, *Aritmetica razionale*, Firenze, 1936;
F. Severi, U. Bini, *Algebra*, Firenze, 1937;
L. Tonelli, E. Lindner, *Corso di matematica per la scuola media*, Firenze, 1941.

Capitolo 3

Il Piccolo Euclide di Umberto Forti

3.1 Breve biografia dell'autore e struttura dell'opera

Per meglio evidenziare le caratteristiche dei libri di testo che passavano tra le mani degli alunni della scuola media italiana alla fine della prima metà del Novecento, e apprezzare in essi l'influenza delle indicazioni suscitate in particolare dalla Riforma Bottai del 1940, conviene ora addentrarsi in uno specifico manuale scolastico di geometria elementare. La ricerca si concentra perciò qui in un testo oggi poco conosciuto, ma che rappresenta molto bene nella sua completezza e nel suo linguaggio le tendenze in didattica della matematica sviluppatesi in quegli anni: *Il piccolo Euclide - elementi di geometria pratica per le scuole medie inferiori.*

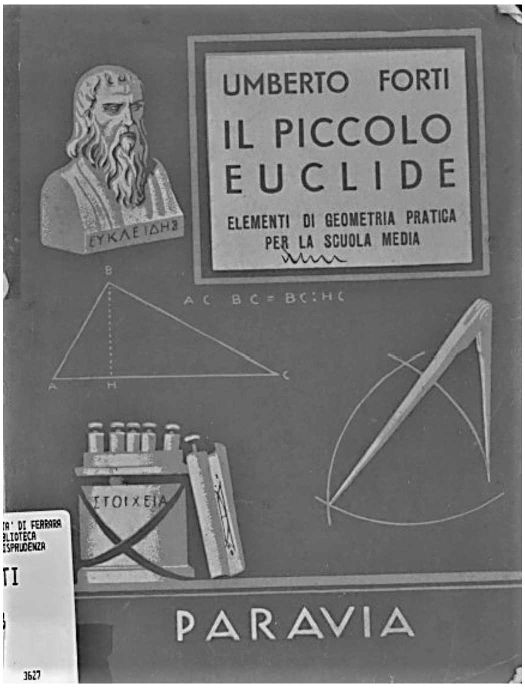


Figura 3.1

Dell'autore dell'opera, Umberto Forti, nato a Roma nel 1901 e deceduto a Milano nel 1987, si hanno assai po-

che informazioni; tuttavia ciò che risulta interessante ed importante ai fini della trattazione è lo stretto rapporto di collaborazione che egli ebbe con Federigo Enriques. Direttore della rivista *Periodico di matematiche* dal 1921 al 1938 e nel 1946[1], quest'ultimo si occupò di rinnovarla radicalmente, dedicando maggior spazio alle questioni metodologiche, alle matematiche elementari ed in generale a tutte quelle tematiche che tendono "ad una più vasta comprensione dello spirito matematico". Fra le principali novità che caratterizzavano la nuova serie del *Periodico*, spicca la moltitudine di articoli di storia della matematica e di fisica, assai rari nelle serie precedenti, e le numerose e accurate recensioni di volumi di storia della scienza. Per questi, Enriques si avvalse della collaborazione di figure come Ettore Bortolotti (1866-1947), Gino Loria, Amedeo Agostini (1892-1958), Oscar Chisini (1889-1967), Enrico Persico (1900-1969), Enrico Fermi (1901-1954), che diede il suo contributo pubblicando tre articoli, e lo stesso Umberto Forti.
Laureatosi in matematica e fisica, Forti si occupò soprattutto di storia della scienza e delle sue possibili applicazioni didattiche. Come si vedrà in seguito, in particolare, sostenne un ritorno ai valori dell'umanesimo, contribuendo attraverso le sue opere a sostenere la metodologia didattica di insegnamento della scienza fondata sul cosiddetto "metodo storico".
La sua produzione scritta non fu per nulla ridotta: egli curò, ad esempio, insieme ad Enriques *I principi della filosofia naturale di Newton*[2], nel 1928 pubblicò a Roma il saggio *Il metodo storico nell'insegnamento della fisica*, dopo la Seconda Guerra Mondiale fondò e diresse il periodico *Il solco*, organo della "Federazione nazionale insegnanti medi". Collaborò inoltre con altre riviste culturali, fra le quali *La nuova antologia*, la *Rivista critica di storia della filosofia*, la *Rassegna di cultura*, l'*Italia letteraria* e *Lo Stato moderno*, pubblicando diversi articoli e saggi e si dedicò al commento di vari classici del pensiero scientifico, fra cui: *Il metodo* di Archimede, *L'Algebra* di Rafael Bombelli, *Machine nove* di Fausto Veranzio, la *Storia del calcolo infinitesimale nell'era moderna* di Guido Castelnuovo.
Molto apprezzati, a livello scolastico, furono i suoi diversi libri di testo per la matematica e la fisica, rivolti alle scuole medie e superiori.

La versione de *Il Piccolo Euclide*, pubblicata dalla Casa Editrice Paravia

[1]Dal 1921 al 1934 Enriques condivide la direzione del Periodico con Giulio Lazzeri; dal settembre del 1938, a causa delle leggi razziali, non compare né come direttore, né come autore; nel 1946 ricompare come direttore accanto a Oscar Chisini.

[2]F.Enriques, U.Forti, *I principi della filosofia naturale di Newton*, Alberto Stock Editore, Roma, 1925.

nel 1945[3] e qui analizzata, è la quinta edizione dell'opera e nella *Prefazione* l'autore specifica che nel corso delle edizioni non ha apportato importanti modifiche al testo ma che "nuove cure sono state dedicate alla parte artistica" e, seguendo il consiglio dei colleghi, ha notevolmente accresciuto il numero degli esercizi, poichè afferma:

> "E' bene che gli esercizi a disposizione del Professore siano numerosi, per poterli scegliere e variare di anno in anno, e perchè ciascuno possa approfondire, attraverso opportune variazioni, questo o quel capitolo".

Riproponendo nel titolo l'intento di Castelnuovo, Betti e Brioschi di ispirarsi all'opera di Euclide nella trattazione della geometria elementare, con delicatezza e sensibilità Umberto Forti si accosta ai giovani, "i piccoli Euclide", e parla rivolgendosi direttamente a loro, con un linguaggio semplice e chiaro, allontanandosi drasticamente dalla sterile esposizione di cui erano stati criticati i suoi predecessori. Egli in particolare rispetta con coerenza e precisione i vari livelli di esposizione del testo scientifico, che in quanto tale si propone inanzitutto di informare e esporre e in secondo luogo di descrivere, narrare e argomentare: a livello stilistico, ad esempio, viene rispettato il contesto comunicativo in cui il testo è inserito (in questo caso geometria elementare) e soprattutto il pubblico al quale il testo è destinato, il linguaggio infatti risulta molto colloquiale; non mancano comunque il rispetto del livello linguistico tale per cui l'utilizzo di un vocabolario specifico risuona e il rispetto del livello logico per cui le relazioni tra i contenuti esposti e tra le parti stesse del testo risultano organicamente e correttamente presentate.
Per quanto riguarda il livello tematico, il testo è suddiviso in tre parti, ciascuna delle quali è suddivisa in capitoli:

- *PARTE PRIMA*
  - *CAPITOLO I*: Nozioni fondamentali, Segmenti, Rette, Semirette;
  - *CAPITOLO II*: Rette perpendicolari e rette parallele;
  - *CAPITOLO III*: Nozione di poligono; Il triangolo;
  - *CAPITOLO IV*: Circonferenza, Cerchio;
  - *CAPITOLO V*: Costruzioni Geometriche;
- *PARTE SECONDA*
  - *CAPITOLO VI*: Quadrilateri e poligoni regolari;

[3]U.Forti, *Il Piccolo Euclide, elementi di geometria pratica per le scuole medie inferiori, con esercizi e problemi*, G.B.Paravia, Torino, 1945.

  - *CAPITOLO VII*: Equivalenza delle figure piane; Aree dei poligoni fin qui considerati e del cerchio; Teorema di Pitagora e sue applicazioni;

- *PARTE TERZA*
  - *CAPITOLO VIII*: Perpendicolarità e parallelismo di rette e piani nello spazio; Diedri;
  - *CAPITOLO IX*: Prisma, Parallelepipedo, Piramide;
  - *CAPITOLO X*: Cilindro, Cono, Sfera.

Ogni capitolo presenta una struttura ben definita, in cui le spiegazioni teoriche, per lo più discorsive, sono arricchite da molteplici riferimenti alla vita quotidiana, episodi antichi che hanno portato a questa o quella osservazione e da suggerimenti espliciti con cui l'autore coinvolge il lettore e lo invita a provare lui stesso quanto affermato attraverso semplici costruzioni con la carta, o con altri metodi a portata di mano. Il capitolo procede poi con una lista accurata e precisa di esercizi, mirati non solo alla comprensione delle nozioni appena esposte, bensì all'approfondimento e alla cura delle competenze da parte dell'allievo, cioè della sua capacità di rendere attive le conoscenze orchestrandole con le abilità cognitive, affettive e volitive. Infine, esso si conclude sempre con *Letture* che introducono l'allievo all'approccio critico, artistico e soprattutto storico tanto caro a Umberto Forti.
Si legge infatti nella *Prefazione*:

> "Specialmente nelle *Letture* il giovinetto incontrerà numerose notizie di storia che, vogliamo sperarlo, lo interesseranno, e costituiranno un efficace richiamo all'umanità della scienza.
> Altre *Letture* invece mirano a mettere in evidenza qualche interessante applicazione pratica della geometria, e rispondono in parte all'interrogativo che i giovani tanto spesso pongono circa l'utilità del sapere".

3.2 L'introduzione della storia nella trattazione

L'interesse che l'autore dell'opera aveva per la storia della scienza e la convinzione che questa potesse, e possa tuttora, essere la chiave per una didattica efficiente, è evidente in ogni passo del testo, non solo nelle *Letture* a fine capitolo. Chiari riferimenti a notizie storiche emergono fin dalle prime nozioni di teoria e accompagnano quelli che per l'autore sono i punti più delicati di comprensione di concetti matematici, che spesso sono lontani dalla prima

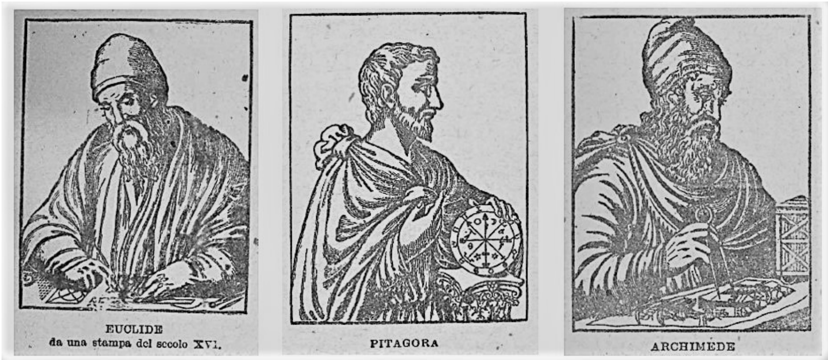


Figura 3.2

immagine o idea che suggeriscono.
Il primo capitolo, ad esempio, si apre con la nozione di punto, precisamente di punto geometrico, che viene così introdotto:

> Ciascuno di voi, dopo avere studiato nelle scuole elementari, ha già l'idea di *punto.* Un granellino di sabbia, un piccolo segno tracciato sulla carta con una matita, con una penna o un ago (*puntura!*), la debole luce di una stella che brilla sulla volta notturna, ci forniscono una grossolana immagine materiale del **punto geometrico**.
> E diciamo a bella posta una *immagine materiale*, e nulla più; poichè quando, ad esempio, con la penna tracciamo un segno sia pur minuscolo sulla carta, in realtà noi depositiamo sulla carta una goccia di inchiostro, e non un... punto geometrico; il *microscopio*, ingrandendo la goccia stessa qualche migliaio di volte, ce la potrebbe far apparire di dimensioni rispettabilissime!
> Chi volesse dare un'idea esatta del punto mediante siffatte immagini, rassomiglierebbe ad un suonatore che volesse definire il silenzio, producendo un suono leggerissimo: il quale, per debole che sia, sarà sempre un suono, e cioè appunto il contrario del silenzio!
> Il granellino di sabbia nella vastità del deserto, la luce debolissima di una stella nell'immensità di una volta notturna, un segno quasi impercettibile sull'ampio piano del foglio o della lavagna, richiamano in noi l'idea del punto proprio per la loro estrema piccolezza, in rapporto alle cose con cui vengono inconsciamente raffrontati. Ma bisognerebbe pensare granellino o segno più piccoli di qualunque cosa immaginabile, anzi nulli del tutto, per giungere all'idea del punto geometrico che, **come dice l'antico geometra Euclide (II sec.a.C.)**, *non ha estensione.*
>
> **Lo stesso grande matematico Pitagora (VI sec.a.C.) errava**

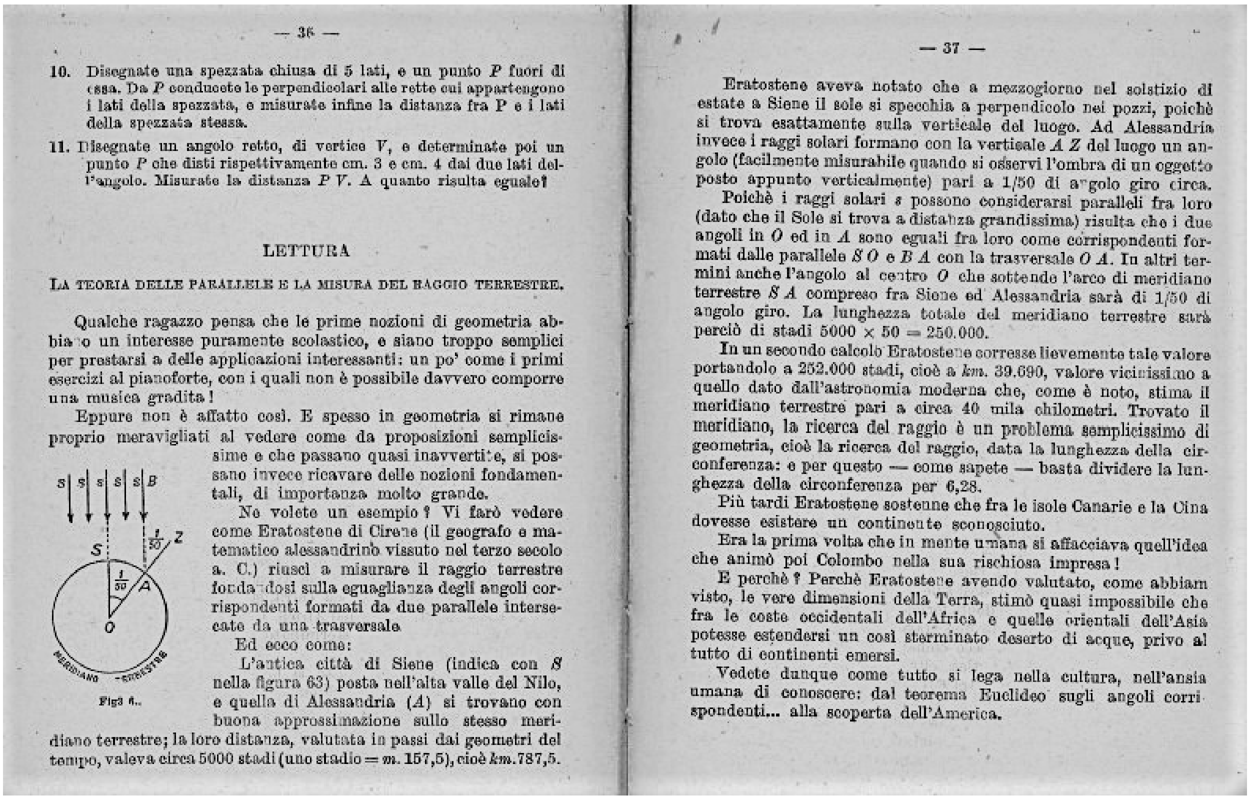
> **pensando il punto troppo materialmente come un granellino di sabbia, o meglio come uno speciale granellino di sabbia, piccolissimo e invisibile, ma pur sempre esteso.**
> **Il concetto di punto, che tutti noi abbiamo attualmente, fu chiarito per la prima volta (V sec.a.C.) dall'antico filosofo greco Zenone, e forse dal suo maestro Parmenide nativo di Elea, la latina Velia, posta sulla spiaggia tirrenica della Lucania, presso la baia ove sbocca il fiume Alento.**
> **La lingua greca registrò questa importante conquista del pensiero, e mentre prima del V secolo a.C. il punto designava con una parola che significava *puntura*, dal V secolo in poi si indicò con una nuova parola il cui significato letterale era *segno*, quasi ad indicare che il punto era il segno tangibile di una idea non materiale.**

Da questa esposizione si evince come Umberto Forti cerchi di raggiungere il suo obiettivo di indirizzare lo studente verso la noetica, l'acquisizione, del concetto di *punto geometrico*, oggetto matematico che essendo tale non è ostensivo, cercando di trasmettergli la consapevolezza che la sua idea di punto non rappresenta l'oggetto in sè, ma lo avvicina ad esso mediante un percorso epistemologico che non solo lui, ma anche e soprattutto la storia ha intrapreso nei secoli.
Questo metodo viene subito riproposto per la trattazione dei concetti di *segmento*, *retta*, e *piano*, dove viene inoltre ribadito che questi oggetti matematici non sono tangibili e tantomeno concreti.

> Tutti voi sapete già che cosa s'intende per *superficie piana* o *piano*. Il pavimento, la superficie del banco su cui appoggiate questo libro, le pagine stesse del libro (purchè non sgualcite nè arrotolate) ve ne danno un'idea. **Dico ve ne danno un'idea: non che i fogli del libro, anche se ben tesi, siano superfici piane.** Perchè i geometri pensano la superficie piana (e così le altre superfici, ma di esse ne parleremo in seguito) come *non avente spessore*, mentre un foglio, per quanto sottile, ha sempre uno spessore notevole. **In realtà quello di superficie piana è un *puro concetto*, come sono concetti quelli di punto, retta, segmento e via dicendo. E perciò può idearsi solo nella nostra mente, e non trovarsi negli oggetti materiali fuori di essa. Questi oggetti valgono solo a suscitare nella mente stessa il concetto voluto.**

Sfogliando le 239 pagine del libro, si scopre quanto questo possa essere considerato una fonte notevole di informazioni in storia della matematica.

Alle pagine 36, 37, a conclusione del capitolo su "Rette perpendicolari e rette parallele", si trova la Lettura su "La teoria delle parallele e la misura del raggio terrestre" (Figura 3.3).



— 36 —

10. Disegnate una spezzata chiusa di 5 lati, e un punto *P* fuori di essa. Da *P* conducete le perpendicolari alle rette cui appartengono i lati della spezzata, e misurate infine la distanza fra P e i lati della spezzata stessa.

11. Disegnate un angolo retto, di vertice *V*, e determinate poi un punto *P* che disti rispettivamente cm. 3 e cm. 4 dai due lati dell'angolo. Misurate la distanza *P V*. A quanto risulta eguale?

LETTURA

LA TEORIA DELLE PARALLELE E LA MISURA DEL RAGGIO TERRESTRE.

Qualche ragazzo pensa che le prime nozioni di geometria abbiano un interesse puramente scolastico, e siano troppo semplici per prestarsi a delle applicazioni interessanti: un po' come i primi esercizi al pianoforte, con i quali non è possibile davvero comporre una musica gradita!

Eppure non è affatto così. E spesso in geometria si rimane proprio meravigliati al vedere come da proposizioni semplicissime e che passano quasi inavvertite, si possano invece ricavare delle nozioni fondamentali, di importanza molto grande.

Ne volete un esempio? Vi farò vedere come Eratostene di Cirene (il geografo e matematico alessandrino vissuto nel terzo secolo a. C.) riuscì a misurare il raggio terrestre fondandosi sulla eguaglianza degli angoli corrispondenti formati da due parallele intersecate da una trasversale.

Ed ecco come:

L'antica città di Siene (indica con *S* nella figura 63) posta nell'alta valle del Nilo, e quella di Alessandria (*A*) si trovano con buona approssimazione sullo stesso meridiano terrestre; la loro distanza, valutata in passi dai geometri del tempo, valeva circa 5000 stadi (uno stadio = *m.* 157,5), cioè *km.* 787,5.

— 37 —

Eratostene aveva notato che a mezzogiorno nel solstizio di estate a Siene il sole si specchia a perpendicolo nei pozzi, poichè si trova esattamente sulla verticale del luogo. Ad Alessandria invece i raggi solari formano con la verticale *A Z* del luogo un angolo (facilmente misurabile quando si osservi l'ombra di un oggetto posto appunto verticalmente) pari a 1/50 di angolo giro circa.

Poichè i raggi solari *s* possono considerarsi paralleli fra loro (dato che il Sole si trova a distanza grandissima) risulta che i due angoli in *O* ed in *A* sono eguali fra loro come corrispondenti formati dalle parallele *S O* e *B A* con la trasversale *O A*. In altri termini anche l'angolo al centro *O* che sottende l'arco di meridiano terrestre *S A* compreso fra Siene ed Alessandria sarà di 1/50 di angolo giro. La lunghezza totale del meridiano terrestre sarà perciò di stadi 5000 × 50 = 250.000.

In un secondo calcolo Eratostene corresse lievemente tale valore portandolo a 252.000 stadi, cioè a *km.* 39.690, valore vicinissimo a quello dato dall'astronomia moderna che, come è noto, stima il meridiano terrestre pari a circa 40 mila chilometri. Trovato il meridiano, la ricerca del raggio è un problema semplicissimo di geometria, cioè la ricerca del raggio, data la lunghezza della circonferenza: e per questo — come sapete — basta dividere la lunghezza della circonferenza per 6,28.

Più tardi Eratostene sostenne che fra le isole Canarie e la Cina dovesse esistere un continente sconosciuto.

Era la prima volta che in mente umana si affacciava quell'idea che animò poi Colombo nella sua rischiosa impresa!

E perchè? Perchè Eratostene avendo valutato, come abbiam visto, le vere dimensioni della Terra, stimò quasi impossibile che fra le coste occidentali dell'Africa e quelle orientali dell'Asia potesse estendersi un così sterminato deserto di acque, privo al tutto di continenti emersi.

Vedete dunque come tutto si lega nella cultura, nell'ansia umana di conoscere: dal teorema Euclideo sugli angoli corrispondenti... alla scoperta dell'America.

Figura 3.3

Inserito nella trattazione dei criteri di congruenza dei trangoli e successivamente riportato nel dettaglio nella *Lettura* a fine capitolo insieme ad altre "celebri misurazioni", vi è il metodo di Talete per calcolare la distanza di una nave dalla riva:

> "Nelle letture il giovane vedrà un esempio molto interessante di applicazione pratica di un criterio di eguaglianza (il secondo). Grazie ad esso l'antico filosofo Talete fondò un metodo per stabilire quanto dista dalla riva una nave veleggiante nel mare. In quel secolo lontano (VI a.C.), agli albori della cultura, giustamente quella scoperta parve meravigliosa, e la memoria ne è stata tramandata fino a noi, lontanissimi nepoti di quella civiltà. Aggiungiamo che gli agrimensori Romani usarono costantemente il metodo di Talete per le misure più svariate".[4]

[4]U.Forti, *Il Piccolo Euclide, elementi di geometria pratica per le scuole medie inferiori, con esercizi e problemi*, G.B.Paravia, Torino, 1945, p.43.

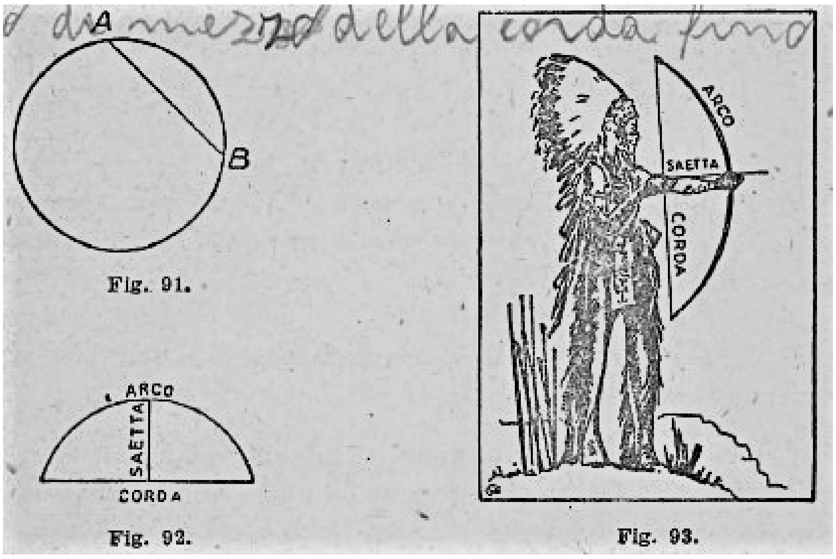


Figura 3.4

Interessanti risultano anche le molteplici precisazioni di come la storia abbia lasciato ai posteri il lessico geometrico che nel tempo si è mantenuto e di come questo sia nato anticamente. Esponendo la terminologia degli elementi che costituiscono la circonferenza, ad esempio, Forti aggiunge:

> "Come avete notato, le nominazioni geometriche di arco e corda sono derivate da consimili denominazioni di un primitivo strumento usato per la guerra o la caccia. Anche la denominazione di *freccia* o *saetta* è stata adottata in geometria, come indicato in figura 92, 93 (qui in Figura 3.4). La parola *corda* (ignota ai geometri greci fu usata prima da scrittori indiani, poi da autori arabi. In Europa la parola *chorda* appare per la prima volta nella già citata traduzione del *De motu stellarum* di Albattani, opera del nostro Platone da Tivoli (principio del XII sec.)".[5]

Anche per l'origine della stessa parola "geometria" vi è un particolare excursus storico che procede descrivendo i processi che hanno permesso la nascita e lo sviluppo della geometria dalle antiche civiltà Egiziana, Babilonese, Indiana, Cinese ai tempi più moderni. Di seguito si riporta solo l'incipit della *Lettura* intitolata "Antichissima geometria".[6]

---

[5]U.Forti, *Il Piccolo Euclide, elementi di geometria pratica per le scuole medie inferiori, con esercizi e problemi*, G.B.Paravia, Torino, 1945, p.61.

[6]U.Forti, *Il Piccolo Euclide, elementi di geometria pratica per le scuole medie inferiori, con esercizi e problemi*, G.B.Paravia, Torino, 1945, pp.103-109.

> Avete mai visto un *geometrida*? Non lo confondete, per carità, con un geometra!
> E' un piccolo bruco di un color grigio indefinibile. Poichè manca delle zampette ventrali, non può procedere sul terreno o sui rami con il lento ma piuttosto dignitoso *moto vermicolare* proprio di tutti i suoi simili: quel moto a fisarmonica che tutti ben conoscete. E allora, poichè anche lui ha il diritto di muoversi, fa quello che può, e non senza una certa qual bizzarra eleganza che ha colpito la fantasia di Walt Disney: tanto che, ne sono sicuro, se voi non avete mai visto il geometrida nel prato vicino a casa vostra, lo avete certamente visto sullo schermo cinematografico mentre procede ad una delle sue marce petulanti e fantastiche: cammina a compasso, quasi volesse misurare la terra o i rami, inarcandosi tutto, su alto alto, in una curva perfetta: e così riesce a portare innanzi alternativamente ora la testa, ora l'ultimo segmento del suo lungo corpicciolo.
> Quel suo nome gli sta a pennello, deriva dal greco, e significa *misuratore della terra*.
> La stessa è l'origine della parola *geometria*, derivante dal greco *ge* (terra) e *metron* (misura).
> Mentre oggi la geometria è una scienza complessa ed elevata che quasi sempre nulla ha a che fare con il terreno, l'etimologia della parola ci richiama alle sue lontanissime origini, allorchè l'uomo da cacciatore a pescatore che era, cominciò a farsi agricoltore, e allevatore di bestiame.

Per concludere, non si può trascurare l'osservazione di come la storia entri nella trattazione de *Il Piccolo Euclide* anche attraverso tante fonti di natura artistica comprendenti a volte pagine di manoscritti antichi, altre volte pitture, disegni e affreschi (si vedano le figure poste a fine capitolo e le relative approfondite didascalie).

3.3 La geometria intuitiva proposta da Umberto Forti

Cercando di rispettare nel migliore dei modi le indicazioni peresenti nel documento "Ordinamento e Programmi della Scuola media" pubblicato nel 1940 nel clima di riforma suscitato dalla Carta Bottai, inserito nel primo capitolo di questo elaborato e riportato nuovamente qui sotto:

> *"L'insegnamento della matematica nella Scuola media deve avere carattere essenzialmente intuitivo; il che importa che le proprietà evidenti per i ragazzi siano enunciate di regola, senza alcuna dimostrazione, ma valorizzate attraverso numerosi e convenienti esempi ed esercizi, che*

> *possono talvolta anche acquistare carattere dimostrativo per il modo stesso con cui sono impostati e condotti dai professori e dagli alunni. Per le prorpietà meno evidenti, la loro enunciazione dovà essere fatta dopo che l'alunno ne abbia acquistato la conoscenza attraverso considerazioni di carattere sperimentale",*

Umberto Forti fa del suo testo un manuale di didattica di geometria intuitiva. L'allievo è infatti qui considerato parte attiva: a lui viene richiesto spesso di pensare a situazioni quotidiane in cui un dato oggetto si presenta, di costruire con il cartoncino figure geometriche per poi maneggiarle in modo da far emergere delle proprietà nelle trasformazioni, o di disegnare più semplicemente figure adoperando strumenti come squadra, riga, compasso e goniometro.

- Per far comprendere all'alunno il concetto di angolo, ad esempio, Forti utilizza le immagini concrete dei *ventagli cinesi*, delle lancette di un orologio, delle gambe di un compagno disteso a terra, il cui busto forma con esse un angolo convesso.

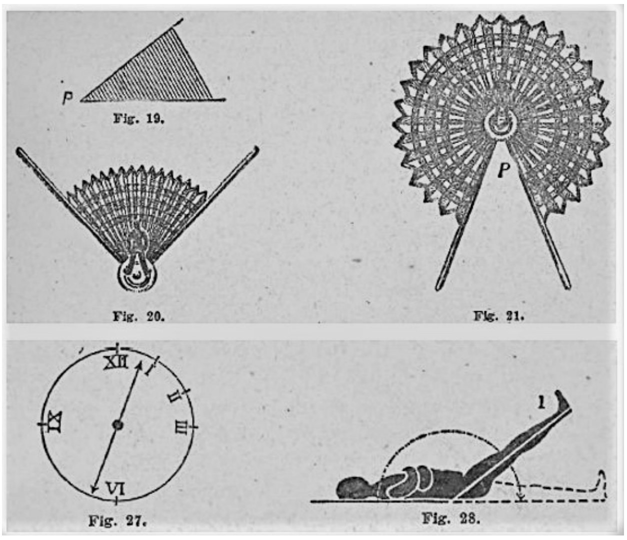


Figura 3.5

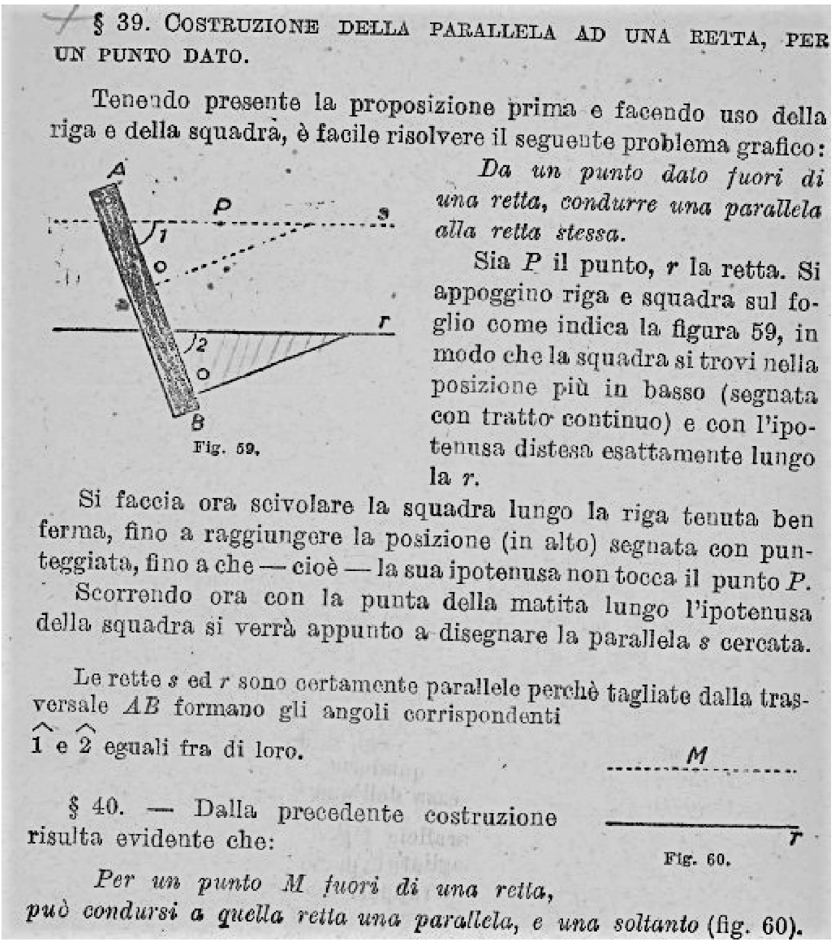
- Dopo aver enunciato la proposizione

  > *Se due rette tagliate du una trasversale formano una coppia di angoli coniugati supplementari, esse sono parallele,*

  l'autore invita il giovane a convincersi da sè che

> *per un punto M fuori di una retta, può condursi a quella retta una parallela, e una soltanto,*

aiutandolo e accompagnandolo nel disegno:



§ 39. COSTRUZIONE DELLA PARALLELA AD UNA RETTA, PER UN PUNTO DATO.

Tenendo presente la proposizione prima e facendo uso della riga e della squadra, è facile risolvere il seguente problema grafico:

Da un punto dato fuori di una retta, condurre una parallela alla retta stessa.

Sia P il punto, r la retta. Si appoggino riga e squadra sul foglio come indica la figura 59, in modo che la squadra si trovi nella posizione più in basso (segnata con tratto continuo) e con l'ipotenusa distesa esattamente lungo la r.

Fig. 59.

Si faccia ora scivolare la squadra lungo la riga tenuta ben ferma, fino a raggiungere la posizione (in alto) segnata con punteggiata, fino a che — cioè — la sua ipotenusa non tocca il punto P.

Scorrendo ora con la punta della matita lungo l'ipotenusa della squadra si verrà appunto a disegnare la parallela s cercata.

Le rette s ed r sono certamente parallele perchè tagliate dalla trasversale AB formano gli angoli corrispondenti $\widehat{1}$ e $\widehat{2}$ eguali fra di loro.

§ 40. — Dalla precedente costruzione risulta evidente che:

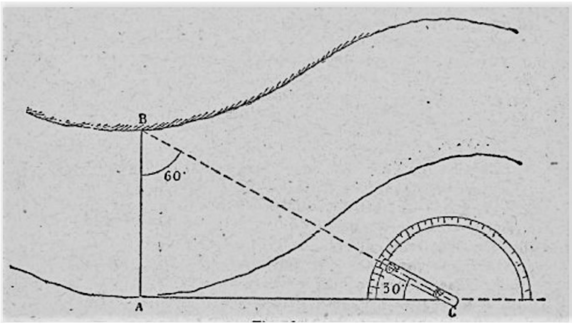
Per un punto M fuori di una retta, può condursi a quella retta una parallela, e una soltanto (fig. 60).

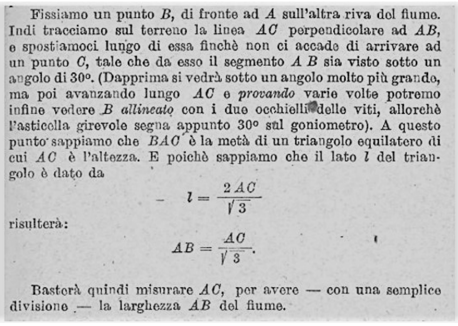
Fig. 60.

Figura 3.6

- Applicazioni nella vita di tutti i giorni, in grado di suscitare interesse e curiosità nell'allievo sono molteplici. Per "misurare la larghezza AB di un fiume anche senza avere una barca o un ponte che ci permettano di passare all'altra riva", non serve altro che un goniometro, un'asticella girevole attorno al suo centro C e la conoscenza delle proprietà del triangolo equilatero (Figura 3.7).

- Anche negli esercizi si richiede spesso di disegnare e costruire:




Fissiamo un punto *B*, di fronte ad *A* sull'altra riva del fiume. Indi tracciamo sul terreno la linea *AC* perpendicolare ad *AB*, e spostiamoci lungo di essa finchè non ci accade di arrivare ad un punto *C*, tale che da esso il segmento *A B* sia visto sotto un angolo di 30°. (Dapprima si vedrà sotto un angolo molto più grande, ma poi avanzando lungo *AC* e *provando* varie volte potremo infine vedere *B allineato* con i due occhielli delle viti, allorchè l'asticella girevole segna appunto 30° sul goniometro). A questo punto sappiamo che *BAC* è la metà di un triangolo equilatero di cui *AC* è l'altezza. E poichè sappiamo che il lato *l* del triangolo è dato da

$$l = \frac{2\,AC}{\sqrt{3}}$$

risulterà:

$$AB = \frac{AC}{\sqrt{3}}.$$

Basterà quindi misurare *AC*, per avere — con una semplice divisione — la larghezza *AB* del fiume.

Figura 3.7

- "Mediante ritaglio e piegatura determinare la bisettrice di un dato angolo."
- "Piegando il modello così come si fece per mostrare il teorema sulla somma degli angoli di un triangolo, si dimostri che il segmento MN che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo ABC, è parallelo alla base AB ed uguale alla metà di essa."
- "Ritagliate un triangolo in modo da formare con esso un parallelogrammo avente la stessa altezza, e per base la metà della base. (*Modello in cartoncino*)"
- "Considerate un esagono regolare e tracciatene una diagonale che unisca due vertici opposti. L'esagono rimane così diviso in due trapezi. Disponete ora in altra guisa i due trapezi, in modo da trasformare l'esagono in un parallelogrammo. Che relazione vi è tra la base di questo parallelogrammo e il perimetro dell'esagono? (*Modello in cartoncino*)"
- "Tre dischi eguali di cartone del raggio di 3 cm sono ravvicinati fra loro in modo che ciascuno è tangente agli altri due. Che triangolo si ottiene unendo i loro centri? E unendo invece i loro punti di contatto? Qual è l'area del piccolo triangolo a lati curvilinei compreso fra i tre dischi? (*Effettuate un modellino della figura ravvicinando tre monete di diametro piuttosto grande*)"

L'intento dell'autore di preparare gradualmente i giovani alla geometria razionale, facendo sempre richiamo alla loro intuizione e osservazione e tralasciando quando possibile dimostrazioni, è chiaramente esplicitato in vari punti del testo, anche se non viene omessa l'importanza del rigore che essi, una volta cresciuti, potranno apprezzare dell'uso della dimostrazione in quanto tale.

> La *dimostrazione* ha molti vantaggi sulla semplice intuizione o sulla misura. In primo luogo dà *assoluta certezza*, che non può essere sempre data nè dall'intuizione (ingannevole talvolta!), nè dalla misura (non sempre esatta). In secondo luogo ha un valore più *universale*: ad esempio, nel nostro caso la dimostrazione vale qualunque sia la figura, qualunque sia cioè l'ampiezza degli angoli considerati. Infine la dimostrazione lascia più *convinti* poichè essa non solo prova la verità della proposizione da dimostrare, ma va più a fondo, e fa capire *perchè* quella proposizione è vera.
> **Voi avete già capito che la *dimostrazione* è una forma di attività mentale ben più elevata e profonda che non la semplice intuizione o la misura. E infatti la Geometria divenne veramente una *scienza* (per opera dei Greci e specialmente di Pitagora) solo quando non si limitò più alla intuizione e alla misura, ma volle *dimostrare* le proprietà delle figure. Voi siete però ancora troppo giovani per studiare questa *geometria razionale* che procede per dimostrazioni. La studierete in seguito. Per ora accontentiamoci di imparare tante cose servendoci solo dell'intuizione e della misura. Tuttavia (come nel caso degli angoli opposti al vertice) talvolta dimostreremo qualche facile teorema, anche per prepararci gradualmente a studi più elevati.**

In un altro punto viene aggiunto che

> un altro vantaggio della dimostrazione (oltre a quelli precededentemente accennati) può essere, sovente, quello di farci scoprire delle proprietà che non sono rivelate immediatamente dall'intuizione, e che talvolta anzi differiscono di molto da quanto si potrebbe supporre a primo esame.

Il richiamo frequente ad un approccio intuitivo è sottolineato da espressioni come: "è evidente che", "è intuitivo che", "per persuadervene ancora meglio, misurateli con un goniometro", "la medesima osservazione può ripetersi per tutte le coppie di angoli corrispondenti", "basta guardare la figura per esserne convinti", "basterebbe ritagliare la figura e piegarla lungo la punteggiata MN per provare questa proprietà", "ve ne accorgete solo osservando la figura, meglio ancora potete provarlo ritagliando il trapezio, e piegandolo in due parti esattamente sovrapponibili".

3.4 Emma Castelnuovo e il suo "Metodo attivo nell'insegnamento della Geometria intuitiva"

Inserendosi nello stesso clima di riforma in cui hanno dato i loro contributi Enriques, Severi e Forti, Emma Castelnuovo (Roma, 12 dicembre 1913 - Roma, 13 aprile 2014), figlia di Guido Castelnuovo, si fece strada, divenendo nel tempo un'icona, ben nota anche a livello internazionale, per le innovative ricerche e relative proposte in didattica della matematica, consistenti principalmente in un metodo costruttivo mirante al coinvolgimento diretto degli allievi nelle esplorazioni.
Ella si occupò principalmente di studi sull'insegnamento della geometria euclidea nella scuola media, con la sensibilità di osservare che è possibile rendere attivo ogni programma, ogni argomento solo se questo si adegua allo stato psicologico che il ragazzo attraversa in quel periodo e se ha in uno dei suoi tanti aspetti una rispondenza con gli interessi che il ragazzo possiede; solo in questo caso, egli infatti potrà farsi partecipe dell'argomento, dare qualcosa di se stesso al programma:

> "A mio parere è fattore fondamentale per lo sviluppo della mente e della personalità di allievi dai 10 ai 14 anni un insegnamento delle proprietà geometriche delle figure condotto in modo da saper suscitare l'entusiasmo del ragazzo, un insegnamento che - secondo le parole di Enriques[7] - si proponga di "svegliare l'intelligenza dell'alunno, facendola partecipare al lavoro creativo per cui le regole e i concetti hanno una loro ragion d'essere, e si scoprono, quasi naturalmente, al pensiero di coloro che vi riflettono".[8]

> "La corda dell'interesse dell'allievo deve essere messa in vibrazione, deve addirittura entrare in risonanza con l'argomento."[9]

Ciò che contraddistingue la proposta di Emma Castelnuovo e si discosta per certi versi anche dall'esposizione scelta da Forti nell'opera *Il Piccolo Euclide*

---

[7]F.Enriques, *Sull'insegnamento dell'aritmetica,* Scuola e cultura, Annali dell'istruzione media, 1933.

[8]E.Castelnuovo, *Un metodo attivo nell'insegnamento della Geometria intuitiva*, articolo estratto dal *Periodico di Matematiche*, Dicembre 1946, Serie IV, vol. XXIV, n.3, pp.129-140.

[9]E.Castelnuovo, *L'insegnamento della matematica della scuola media*, articolo estratto da Il Centro, Bollettino bimestrale del Centro Didattico Nazionale, Firenze, Anno I, n.5, Gennaio-Febbraio, 1953.

è l'impostazione che ella propone dell'insegnamento della geometria attraverso il suo sviluppo storico. Mentre solitamente alle scuole medie il corso di geometria intuitiva prevedeva la trattazione degli argomenti fondamentali di geometria piana e solida, argomenti che, già affrontati alle scuole elementari, poi venivano ripresi da un punto di vista razionale con lo stesso ordine negli anni successivi, Emma Castelnuovo suggerisce di sostituire a questo metodo descrittivo un metodo costruttivo, incentrato sul passaggio dal concreto all'astratto, dal particolare al generale, per far sì che la materia venga creata e studiata direttamente dall'allievo secondo le leggi naturali dello sviluppo psicologico. Le stesse leggi si sono sempre trovate alla base della storia dello sforzo dell'umanità alla scoperta della soluzione di questo o quel problema, alla ricerca della verità. E' una storia, affermava la Castelnuovo,[10] di cui al fanciullo sembra di far parte, ne fa effettivamente parte, ne è anche lui un attore.
L'idea di Emma Castelnuovo sull'insegnamento della geometria intuitiva nasce perciò dalla seguente sua considerazione.

> "Si dice: "è impossibile che il ragazzo intenda che cosa è un quadrato o un triangolo senza aver prima parlato dei concetti geometrici primitivi ed aver inoltre definito almeno il segmento e l'angolo".
> L'osservazione, molto frequente è giustificatissima, e, a prima vista, si risponde approvandola.
> Esaminando però meglio la questione vengono dei dubbi; ci si chiede: gli Egiziani, cui si deve la regola per la determinazione delle aree dei poligoni più semplici e la costruzione di poderosi monumenti nella vallata del Nilo, avevano mai sentito la necessità di chiarire le loro idee sui primi elementi geometrici? e Talete e Pitagora, che ci hanno lasciato i risultati più notevoli nel campo della geometria piana, avevano forse pensato a costruire logicamente i fondamenti della geometria?
> Questi interrogativi conducono ancora più lontano: l'uomo primitivo, che a cenni e con poche parole si faceva intendere dal compagno, aveva idee chiare sulle leggi che regolano la formazione della frase? e il bambino che comincia ad esprimersi nella lingua materna ha il senso esatto delle parole che adopera? Evidentemente no. Ma a nessuno, nemmeno al grammatico più ortodosso, verrebbe in mente di rinchiudere il bambino entro quattro pareti e d'istruirlo nella primissima fanciullezza sull'arte del parlare.
> Non è tanto strano così che a metà del '700 un matematico francese, A.C.Clairaut,[11] abbia pensato di togliere il bambino dalle quattro pa-

[10] E.Castelnuovo, *L'insegnamento della matematica della scuola media*, articolo estratto da Il Centro, Bollettino bimestrale del Centro Didattico Nazionale, Firenze, Anno I, n.5, Gennaio-Febbraio, 1953.
[11] A.C.Clairaut, *Eléments de géométrie*, 1741.

> reti della geometria euclidea, per continuare l'analogia, e di immergerlo nel mondo reale, facendogli ripercorrere le tappe attraversate dall'umanità, facendogli seguire cioè lo sviluppo storico. La geometria che costruisce il ragazzo è una geometria che ha anch'essa una logica: è la geometria di Talete e di Pitagora. Come Euclide è stato condotto a riordinare in un tutto organico i vari capitoli e le varie scoperte, così il ragazzo troverà estremamente naturale che nel seguito degli studi le proprietà ch'egli aveva trovato vengano riordinate secondo un'altra logica, la logica euclidea".[12]

Fu Emma Castelnuovo, dunque, ad elogiare al massimo nella pratica dell'insegnamento l'utilizzo della storia della matematica, non più utile solo per alleggerire la trattazione rendendola più piacevole, bensì utile per la sua stessa struttura. Ripercorrere nel programma scolastico le stesse fasi che la matematica ha vissuto lungo le varie epoche, infatti, significa affrontare uno per volta con precisione i nodi epistemologici che l'umanità, nei secoli, e l'allievo, negli anni di scuola, allo stesso modo hanno incontrato o stanno incontrando, e scioglierli nella maniera più naturale possibile.

[12]E.Castelnuovo, *L'insegnamento della matematica della scuola media*, articolo estratto da Il Centro, Bollettino bimestrale del Centro Didattico Nazionale, Firenze, Anno I, n.5, Gennaio-Febbraio, 1953.

Tornando all'opera di Umberto Forti, si conclude il capitolo riproponendo la lode sulla magnificenza della Geometria, che l'autore desiderò trasmettere agli allievi che avrebbero stretto fra le mani il suo testo, ma anche a tutti i lettori che lo hanno ritrovato dopo qualche decina di anni fra gli scaffali di una biblioteca o riproposto semplicemente in una tesi di Storia della Matematica.

> Narra l'antico scrittore latino Vitruvio, nella prefazione della sua opera *Architettura*, come Aristippo, un alunno di Socrate, assieme ad alcuni compagni venne gettato dalla tempesta sui lidi dell'isola di Rodi. Poichè la nave era stata inghiottita dalle onde, egli ed i suoi compagni stavano in grande ansietà, allorchè lo stesso Aristippo vide, tracciate sulla sabbia, presso il mare, delle figure geometriche. "Stiamo di buon animo!", egli esclamò allora rivolto ai compagni, "vedo delle vestigia di uomo".
> Un lungo panegirico non potrebbe tessere una lode della geometria più grande di quella contenuta in tale esclamazione: le figure geometriche evocano immediatamente l'opera del pensiero umano che le ha disegnate; la geometria appare quale il segno distintivo dell'intelligenza, e, perciò, dell'umanità stessa.
> E non è infatti l'intelligenza geometrica quella che guida la mano dell'uomo a mille opere utili, dalle modeste fatiche di un falegname o di un lattoniere, su su, fino alle più mirabili realizzazioni dell'ingegneria moderna?
> E' la geometria che descrive le ardite curve dei ponti che traversano sicuri ampi fiumi, e larghi bracci di mare. Essa traccia sicura la linea che dovranno seguire canali e viadotti, trafori monumentali, e lunghissime vie destinate ad allacciare paesi lontani, anche attraverso le regioni più impervie.
> Il pittore non può farne senza, se vuol far discendere in un mondo reale le immagini e le creature del suo genio; il generale deve ricorrere ad essa se vuol rendere formidabile una fortificazione. Costruzioni, officine ferroviarie, navi, aerei, macchine, dalla motrice più potente al più delicato congegno di orologio, dalla grande stazione radioemittente alla piccola macchina fotografica che portate comodamente nella vostra tasca, tutto ciò che rappresenta la più elevata espressione della capacità creativa dell'uomo, posa su leggi geometriche. E quando l'uomo si accorge che una legge geometrica rifulge nella struttura dei cristalli, o segna la via degli astri negli spazi celesti, allora egli, ripetendo quasi l'esclamazione di Aristippo, assicura di aver visto nel creato l'impronta di una Intelligenza divina.[13]

[13]U.Forti, *Il Piccolo Euclide, elementi di geometria pratica per le scuole medie inferiori, con esercizi e problemi*, G.B.Paravia, Torino, 1945, pp.85,86.

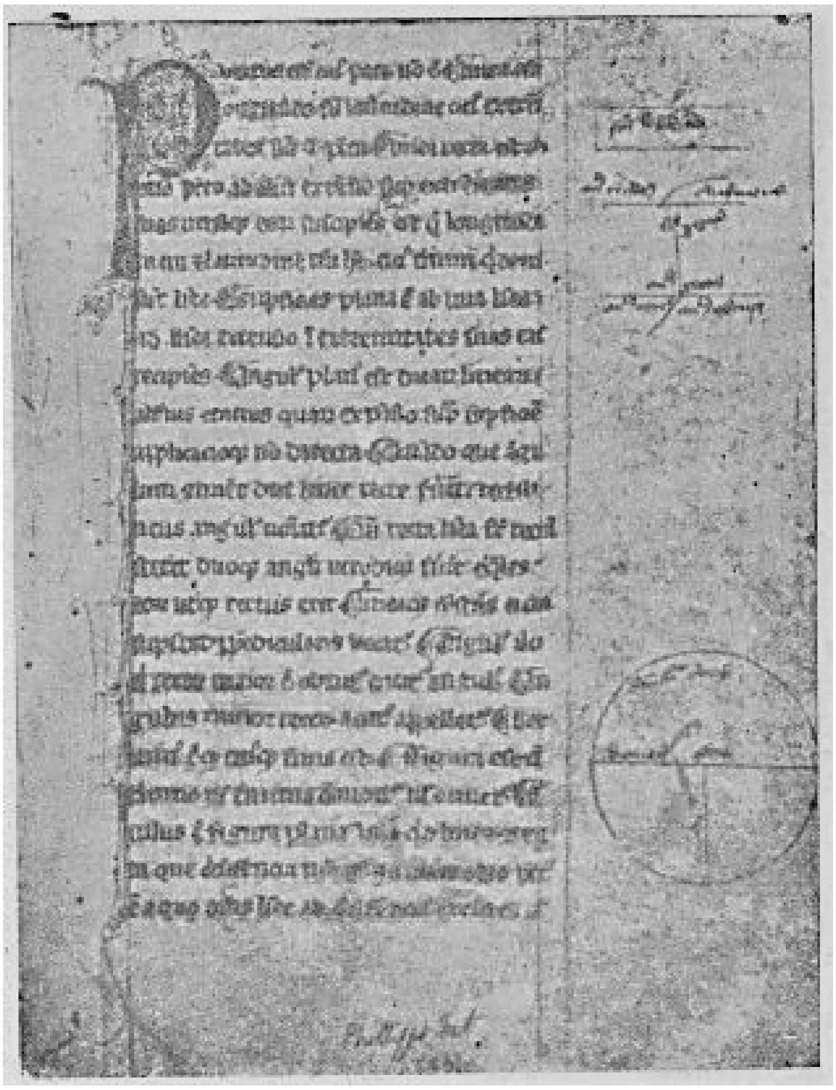


Figura 3.8: La didascalia presente nel libro è la seguente.
Un manoscritto di grande valore: si tratta degli *Elementi* di Euclide tradotti da Abelardo di Bath (1120), commentati da Campano da Novara, alla cui mano (1260, circa) si deve probabilmente il manoscritto. Son dunque qui riuniti tre nomi illustri: Campano da Novara fu infatti il più grande fra i traduttori che in quel torno di tempo volsero dall'arabo in latino molte importanti opere scientifiche dell'antichità classica, conservateci appunto dagli Arabi nelle loro traduzioni. E non occorre dire quanto la prima cultura europea di quei lontani secoli beneficiò dell'opera di traduttori come Campano! Studiò e commentò l'opera di Leonardo da Pisa, assieme al quale egli fu certo il più grande matematico dell'Occidente, in quel secolo. Discusse (già al suo tempo!) le prove pro e contro la mobilità della Terra (*De Sphera*, cap.13) e intravide una possibile azione del Sole sul moto dei pianeti. Fondò l'aritmetica dei postulati originali, indipendentemente dalla geometria, e sulla base di questi postulati iniziò la dimostrazione dei più difficili teoremi dell'aritmetica, seguito in questo da matematici grandissimi dei tempi moderni, quali Fermat e Eulero. Abelardo fu un celebre filosofo. Quanto all'opera di Euclide, essa è nota a tutti i lettori nostri.

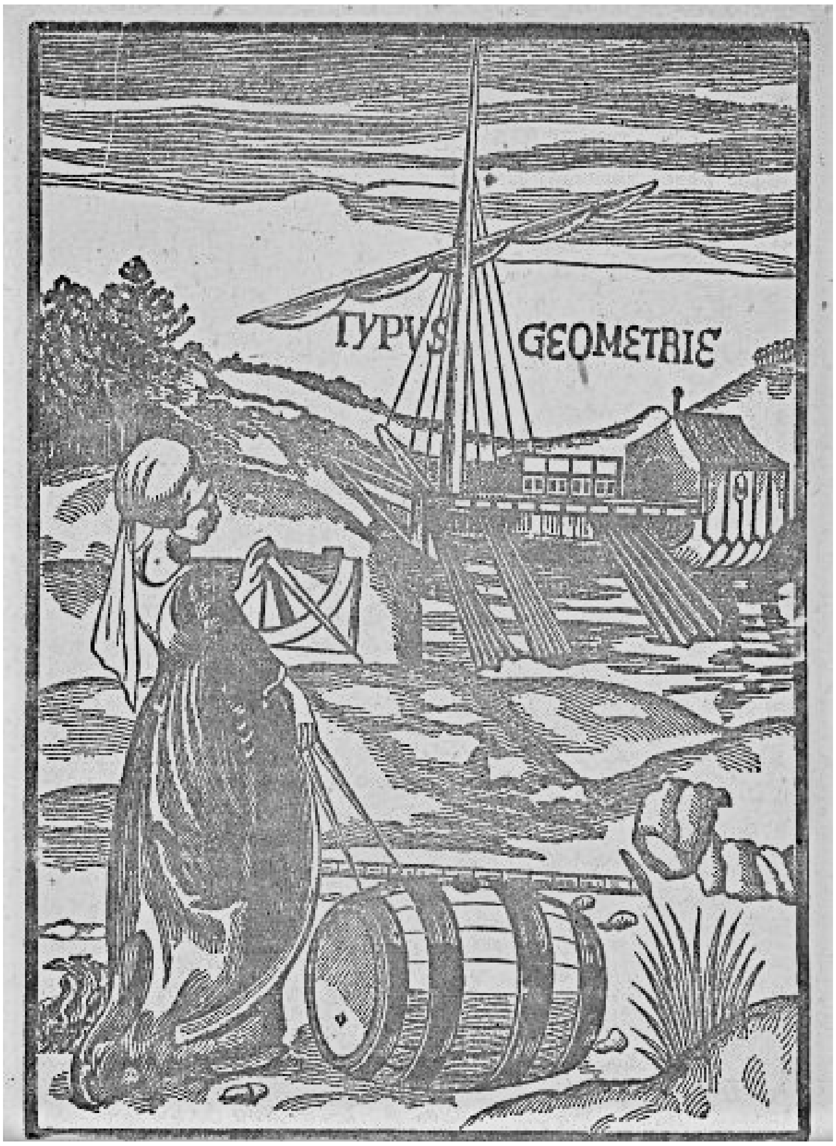


Figura 3.9: La didascalia presente nel libro è la seguente.
"La Geometria, misuratrice di mercanzie in partenza per lidi lontani, e di cieli". Ecco una illustrazione che simboleggia la nuova Musa, al sorgere di quel mondo moderno così profondamente inspirato da lei.
Il disegno è tolto dalla *Gemma Filosofica* di Gregorio Reisch priore di Friburgo. Opera notevole anche perchè fu la prima enciclopedia di scienze e lettere apparsa per le stampe (Strasburgo 1504).

Ein New vnd Wol-
gegründt Rechenbuch/auff den Linien vñ Ziffern/
sampt der Welschen Practic vnd allerley vortheilen/ neben der
extraction Radicum, vñ von den Proportionen/ mit vilen lustigen Fragen vñ
Auffgaben rc. Deßgleichen ein volkomner Bericht der Regel Falsi/ mit newen Inventionibus/ Demonstrationibus/ vnd vortheilen/ so biß anher für vnmüglich geschetzt/ gebessert/ dergleichen noch nie an tag kommen. Vnd dann von der Geometria/ wie man mancherley Felder vnd ebnen/ auch allerley Corpora/ Regularia vnd Irregularia messen/ Aream finden vñ rechnen sol. Alles durch Simon Jacob von Coburg/ Bürger vnd Rechenmeister zu Franckfurt am Main/ mit fleiß zusammen getragen/ vnd jetzt erstmals getruckt.

Mit Röm. Keyser. Mt. Gnad vnd Freiheit nicht nachzutrucken.
Getruckt zu Franckfurt am Mayn/ 1565.

Figura 3.10: La didascalia presente nel libro è la seguente.
Bello il frontespizio di questa Aritmetica di Simone Jacob, in cui appaiono illustrati tanti strumenti matematici di quei tempi, per le misure terrestri e astronomiche. Il libro però è destinato principalmente ai mercanti. I numerosi dati sul commercio disseminati qua e là nei problemi, sono altrettanti preziosi documenti, utilizzati da coloro che indagano la storia di quel periodo.

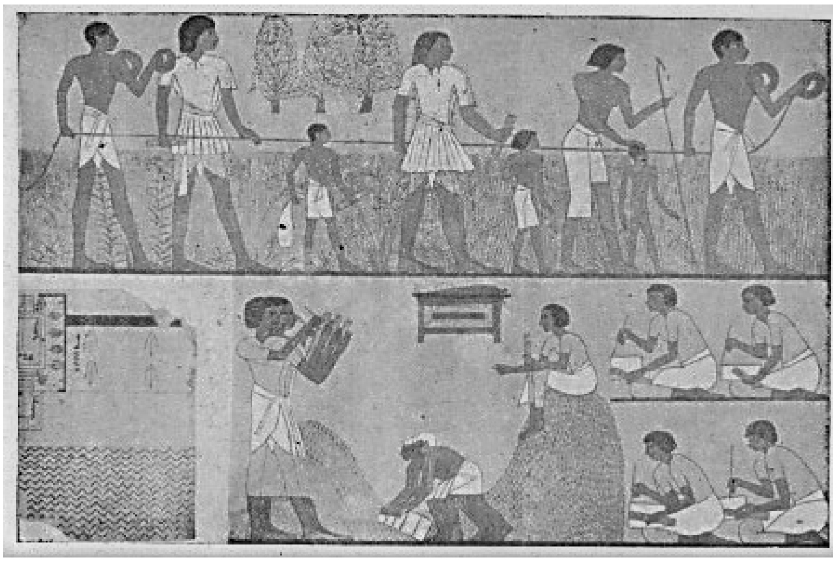


Figura 3.11: La didascalia presente nel libro è la seguente.
LA GEOMETRIA E L'ARITMETICA PRESSO GLI ANTICHI EGIZIANI.
La parte superiore di questa pittura murale rinvenuta nella tomba di Menna, Ministro di un Faraone della XVIII dinastia, presenta una squadra di geometri che misurano un campo sotto la direzione di un intendente. In generale la pratica delle misurazioni era in Egitto tenuta in gran conto pochè le terre migliori, che erano per l'appunto quelle periodicamente inondate dal Nilo, dovevano ogni stagione essere misurate per ricostituire nei giusti limiti gli appezzamenti per il catasto.
Nella parte inferiore ammiriamo la scena della valutazione di un raccolto di frumento. Gli egiziani sono sempre stati dei minuziosi amministratori, e gli scribi o contabili sono sovente rappresentati sulle pitture murali, nelle più svariate scene della vita pubblica. Nell'angolo inferiore sinistro osserviamo infine la pianta di una casa, con relativo terreno in riva al Nilo, incisa su un pezzo di calcare del tempo della XVIII dinastia.

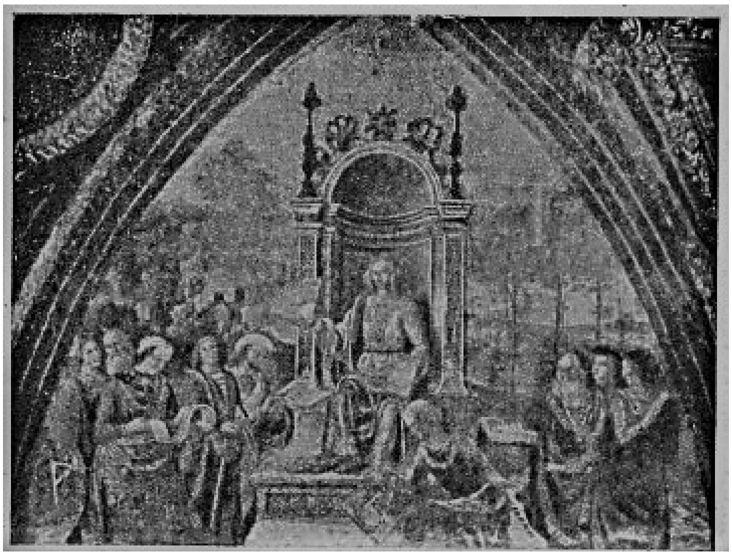


Figura 3.12: La didascalia presente nel libro è la seguente.
LA GEOMETRIA. Affresco del Pinturicchio nelle Sale Borgia del Palazzo Vaticano.

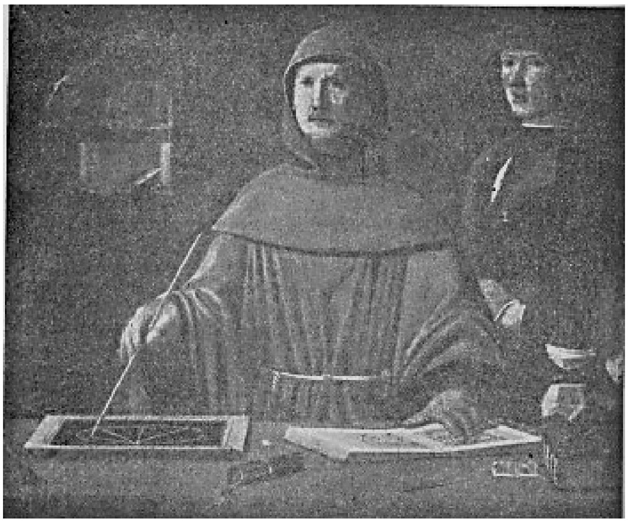


Figura 3.13: La didascalia presente nel libro è la seguente.
Il francescano Luca Pacioli, uno dei più famosi matematici del secolo decimoquinto, autore della prima grande enciclopedia matematica intitolata *Summa di Arithmetica, Geometria, Proportioni, e Proportionalità* (Venezia, 1494). L'opera, scritta in italiano, a differenza di molti altri trattati congeneri, ebbe diffusione grandissima.
Da una pittura di Jacopo de' Barbari, conservata nel museo Nazionale di Napoli.

Conclusione

Dall'analisi sull'uso della storia della matematica in classe nella prima metà del Novecento in Italia, sorgono diversi spunti di riflessione e precise domande: *Si deve conoscere la storia della matematica? Come si deve conoscere la storia della matematica?* Si riconosce che la risposta a queste domande è diversa per studenti e insegnanti, ma si sottolinea che per entrambi i soggetti la storia diventa strumento di conoscenza, se usata opportunamente. Perchè accada questo occorre che l'uso della storia faccia riferimento, come è emerso nell'elaborato, a teorie dell'educazione matematica. Per esempio, si è riflettuto sull'importanza delle metafore nell'apprendimento e si è visto come esse siano state usate nella storia sia nella comunicazione sia nella costruzione dei concetti.

Nella particolare opera scelta per l'analisi dettagliata al fine della ricerca, *Il Piccolo Euclide*, di Umberto Forti, è possibile trarre uno schema in cui si distingue:

- l'utilizzo della storia per riflettere sulla natura della matematica, in particolare della geometria, come processo socioculturale,
- l'utilizzo della storia per costruire oggetti geometrici.

E' importante osservare che in entrambi i casi, la storia, nel testo considerato, non è solamente *aggiunta* al corso di geometria elementare, come invece risultava in alcune opere esposte nel secondo capitolo, ma è *integrata* ad esso. Cercando ora di ripondere alle domande sorte, attraverso una rilettura generale dell'elaborato, è possibile giungere alle seguenti conclusioni.

- **Si deve conoscere la storia della matematica? Perchè?**
  La storia della matematica rende l'insegnamento della matematica più piacevole e stimolante; essa inoltre conferisce alla disciplina la sua dimensione culturale e interculturale e permette di far comprendere agli allievi che la matematica è una disciplina viva. La storia favorisce ancora la riflessione sia sugli oggetti matematici e sulla loro evoluzione, sia sul modo di introdurli in classe:

> *"il modo in cui un'antica idea è stata forgiata può aiutarci a ritrovare quegli antichi significati che, con un'opportuna opera di adattamento didattico, possono probabilmente essere ridisegnati e resi compatibili con i moderni programmi scolastici"* [Radford,1997].

- **Come si deve conoscere la storia della matematica?**
  Premettendo che, se si vuole utilizzare la storia della matematica in aula, occorre conoscerla, e quindi prevedere a priori di inserirla nella formazione specifica degli insegnanti, di preparare materiali accurati o laboratori in classe in collaborazione con eventuali esperti, è possibile presentarla in diversi modi:
  - attraverso "illuminazioni", ossia condendo l'insegnamento ordinario con qualche informazione storica;
  - presentando interi moduli storici: unità didattiche dedicate alla storia su temi specifici;
  - attuando un approccio all'insegnamento basato sulla storia della matematica, ossia seguire la sequenza di argomenti e di metodi che la storia suggerisce.

E' da questo ultimo punto che ci si collega all'approccio innovativo che propose Emma Castelnuovo, esposto alla fine del terzo capitolo. Questo approccio ha permesso, negli ultimi trent'anni, ai ricercatori in didattica della matematica di tracciare una panoramica che mostra tutta la complessità della gestione della storia ad uso didattico, basata essenzialmente sulla trasposizione didattica dello sviluppo storico-epistemologico dei concetti matematici. Un concetto, si ha infatti riflettuto, è una costruzione personale che si trasforma in un rapporto storico di condivisione. In questa concezione il sapere matematico abbandona il suo stato di verità sicura, eterna, non modificabile dall'esperienza umana e dominio di poche menti elette, per divenire opera stessa dell'allievo.

In conclusione,

> *"La didattica della matematica senza relazioni con l'epistemologia e la storia è come uno strumento agile e potente che nessuno sa usare a pieno; la epistemologia e la storia sono mezzi culturali forti, astratti e profondi che la didattica della matematica rende concreti ed utili al progresso dell'umanità, alla costruzione di competenze, alla consapevolezza del proprio sapere"*.[14]

[14] B.D'Amore, M.Fandino Pinilla, 2009, pag.153.

Bibliografia

A. Andriani, *Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo* Napoli, Pellerano, 1887.

F.Arzarello, M.G.Bartolini Bussi, L.Bazzini, *Emma Castelnuovo e la ricerca in didattica della matematica in Italia: alcune riflessioni*, in La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol.VI, Aprile 2013;

E.Betti-F.Brioschi, *Gli Elementi d'Euclide con note aggiunte ed uso de' ginnasi e de' licei,* Firenze, Successori Le Monnier, 1868;

M.T.Borgato *Il fusionismo: moda didattica o riflessione sui fondamenti della geometria?*, Periodico di Matematiche, n.2, 2016;

F. Brioschi, L. Cremona, *Al signor Direttore del Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, Napoli,* Giornale di Matematiche, 7, 1869;

E.Castelnuovo, *Un metodo attivo nell'insegnamento della Geometria intuitiva*, Periodico di Matematiche, Dicembre 1946, Nicola Zanichelli Editore, Bologna;

E.Castelnuovo, *L'insegnamento della matematica nella scuola media*, Il Centro, Firenze, Anno I, n.5, gennaio-febbraio, 1953;

G. Castelnuovo, *Il valore didattico della matematica e della fisica*, Rivista di Scienza, 1907;

G. Castelnuovo, *Sui lavori della Commissione Internazionale pel Congresso di Cambridge*, in Atti del II Congresso della "Mathesis" Società italiana di matematica, Padova, 20-23 Settembre 1909, Premiata Società Cooperativa

Tipografica, Padova, 1909;

G. Castelnuovo, *La scuola media e le attitudini che essa deve svegliare nei giovani*, in Atti Federazione Nazionale Insegnanti Medi, 1910;

G. Castelnuovo, *La scuola nei suoi rapporti colla vita e colla Scienza moderna*, in Atti III Congresso della Mathesis, Genova, 21-24 ottobre 1912, Roma, Tip. Manuzio, 1913;

L.Ciarrapico, *L'insegnamento della matematica dal passato recente all'attualità*, in Atti Congresso Associazione per la Didattica con la Tecnologia, 2001;

M.D'Onofrio, *La storia dei programmi di matematica nella scuola media*, Pianeta Galileo, 2011;

F.Enriques-U.Amaldi, *Elementi di Geometria, ad uso delle scuole superiori*, Bologna, Zanichelli, 1903;

F.Enriques-U.Amaldi, *Elementi di Geometria elementare ad uso dei ginnasi superiori*, 1904;

F. Enriques, *Insegnamento dinamico,* Periodico di matematiche, s. IV, I, 1921;

F.Enriques, *Sull'insegnamento dell'aritmetica,* in Scuola e cultura, Annali dell'istruzione media, 1933;

U.Forti, *Il Piccolo Euclide, elementi di geometria pratica per le scuole medie inferiori, con esercizi e problemi*, G.B.Paravia, Torino, 1945;

R.Gatto, *Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti (1860-1890)*, in Menghini (ed.), *La corrispondenza di Luigi Cremona,* in Quaderni Pristem, 9, 1996;

L.Giacardi, *I manuali per l'insegnamento della geometria elementare in Italia fra Otto e Novecento*, Teseo, Editrice Bibliografica, 2004;

L. Giacardi, *L'insegnamento della matematica in Italia dal 1895 al 1923. Il ruolo della Mathesis*, in Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Anzio-Nettuno, Roma, 2005;

L.Giacardi, *L'emergere dell'idea di laboratorio di matematica agli inizi del*

Novecento, DI.FI.MA., 2011;

L.Giacardi, *Da Casati a Gentile, momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Agorà Publishing, 2022;

G.Loria, *La storia della matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario,* in Atti I Congresso, Periodico di matematica, 1899;

E.Luciano, A.Tealdi, *Federigo Enriques e l'impegno nella scuola*, in Conferenze e seminari, Università di Torino, 2011-2012;

A.Sannia-E.D'Ovidio, *Elementi di Geometria*, Napoli, Stab. Tip. delle Belle Arti, 1868-69;

F.Severi, *Nozioni di geometria elementare, con cenni storici*, Vallecchi Editore Firenze, 1948;

G.Vailati, *Sull'importanza delle ricerche relative alla storia delle scienze*, Roux Frassati and Co., Torino, 1897;

G. Vailati, Recensione di C. Laisant, *La Mathématique: philosophie, enseignement,* (1899), in Giovanni Vailati, *Scritti*, a cura di M.Quaranta, Bologna, Forni, 1987;

G. Vailati, *Idee pedagogiche di H. G. Wells*, *Scritti*, III, 1906;

J.M.Wilson, *Euclid as a text-book of elementary geometry*, Educational Times, 1868, pp.125-128, tradotto da R.Rubini con il titolo *Euclide come testo di geometria elementare*, 1868;

Istruzioni e programmi per l'insegnamento della matematica nei ginnasi e nei licei, Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia, Firenze, 24 ottobre 1867.

Sitografia

www.bussolascuola.blogspot.com/2019/05/la-geometria-intuitiva-di-emma.html

www.cislscuola.it/uploads/media/1859-311213.pdf

www.dm.unife.it/matematicainsieme/riforma-gentile/index.html

www.matematica.unibocconi.it/articoli/le-principali-riforme-dei-programmi-di-matematica-le-scuole-italiane-tra-il-1950-e-il-2000

www.matematica.unibocconi.it/articoli/la-nascita-della-scuola-media-unica

www.mat.uniroma3.it/users/primaria/geom-intuitiva.pdf

www.mce-fimem.it/pubblicazioni/la-biblioteca-di-emma-castelnuovo

www.php.math.unifi.it/convegnostoria/convegno.php?id=14

www.piazzadellecompetenze.net/primoCicloIstruzione/CurricoloPrimoCicloIndicazioni2012.pdf