

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Teorie di gauge e interazioni fondamentali

Relatore:  
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:  
Lucia Righetti

Anno Accademico 2021/2022

## Sommario

L'obiettivo di questa tesi è studiare le teorie di gauge abeliane e non-abeliane e mostrarne alcune applicazioni per la fisica delle particelle. Con questo scopo, si introducono la teoria dei gruppi, concentrandosi sui gruppi di Lie e sul gruppo di Lorentz e si procede con la descrizione del formalismo lagrangiano e del teorema di Noether. Si analizzano le principali funzioni Lagrangiane utilizzate per descrivere i campi liberi e le loro caratteristiche. Si mostra in che modo è possibile reinterpretare l'elettromagnetismo come una teoria di gauge abeliana grazie alla sostituzione minimale e al concetto di derivata covariante e si costruisce una Lagrangiana di interazione dell'elettrodinamica quantistica (QED). Con la teoria di Yang-Mills si generalizza la procedura ai gruppi di simmetria non-abeliani e si descrive la Lagrangiana di interazione della teoria cromodinamica quantistica (QCD). Per finire, si presenta la teoria di gauge del Modello Standard basata sul gruppo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  che descrive le interazioni fondamentali forte, elettromagnetica e debole e classifica le particelle elementari.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Gruppi e trasformazioni di simmetria</b>	<b>4</b>
1.1 Trasformazioni di Lorentz . . . . .	4
1.2 Gruppi di Lie e algebra di Lie . . . . .	9
1.2.1 Caratteristiche di un gruppo di Lie generico . . . . .	12
1.2.2 Esempi di gruppi . . . . .	13
1.2.3 Il Gruppo di Lorentz . . . . .	18
<b>2 Formalismo Lagrangiano e il teorema di Noether</b>	<b>21</b>
2.1 Lagrangiana e il principio di minima azione . . . . .	21
2.2 Il Teorema di Noether . . . . .	24
<b>3 Equazioni d'onda relativistiche</b>	<b>28</b>
3.1 Equazione di Klein-Gordon . . . . .	28
3.2 Equazione di Dirac . . . . .	33
3.3 Equazioni di Maxwell . . . . .	39
<b>4 Teorie di Gauge abeliane e non-abeliane</b>	<b>41</b>
4.1 Teorie di gauge abeliane e il campo elettromagnetico . . . . .	41
4.1.1 Campo complesso e interazione elettromagnetica . . . . .	43
4.1.2 QED . . . . .	47
4.2 Teorie di gauge non-abeliane e il campo di Yang Mills . . . . .	50
4.2.1 QCD . . . . .	53
4.3 Il Modello Standard . . . . .	54
<b>Conclusioni</b>	<b>57</b>
<b>Bigliografia</b>	<b>59</b>

# Introduzione

Per caratterizzare l'interazione tra particelle è necessario introdurre il concetto di campo di forza. Invece di considerare che una particella agisca direttamente su un'altra, si suppone che la particella crei un campo attorno a sé e che la forza agisca su ogni altra particella situata in quel campo. In meccanica classica il concetto di campo viene introdotto come strumento matematico per descrivere questo fenomeno, mentre per la teoria relativistica esso acquisisce un valore fisico intrinseco, poiché la velocità di propagazione delle interazioni è finita. Ciò significa che uno spostamento di una particella da un punto all'altro non ha un effetto immediato sulle altre particelle del sistema, ma si realizza solo dopo un dato intervallo di tempo. Il campo acquisisce una proprietà fisica: date due particelle, la prima interagisce con il campo e successivamente il campo interagisce con la seconda.

Finora non è stata elaborata una teoria unificata in grado di descrivere le interazioni fondamentali in natura, ma è stato dimostrato che esse sono governate da un unico principio, detto principio di gauge. Sono quattro le forze fondamentali che regolano le interazioni tra le particelle subatomiche: forte, elettromagnetica, debole e gravitazionale. La teoria di gauge ha come caratteristica principale il fatto che tutte le interazioni sono mediate dallo scambio di una particella, rispettivamente: i gluoni, il fotone, i bosoni  $Z^0$  e  $W^\pm$  e il gravitone (ancora non osservato sperimentalmente).

Nel 1918, Hermann Weyl propose di elevare l'invarianza per trasformazioni di gauge o locali da semplici simmetrie ad un principio fisico fondamentale. Egli cercò infatti di derivare la conservazione della carica elettrica a partire da una simmetria di questo tipo. Solo in seguito, grazie al contributo cruciale di Yang e Mills, fu possibile generalizzare queste ipotesi, già valide per l'elettromagnetismo, alle interazioni nucleari.

Le teorie di gauge sono basate sull'idea che un sistema invariante rispetto ad una data trasformazione globale rimane invariante quando si estende la trattazione al gruppo locale, vale a dire il gruppo corrispondente i cui parametri dipendono in modo arbitrario dallo spazio e dal tempo. Ciò accade purché la derivata ordinaria  $\partial_\mu$  sia sostituita con la derivata covariante  $D_\mu$ . Questa nuova derivata si scrive nella forma  $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$  con  $A_\mu$  i campi vettoriali che si trasformano cosicché  $D_\mu$  si trasformi in modo covariante rispetto al gruppo. Di conseguenza la simmetria di gauge consente di introdurre in modo naturale i campi che caratterizzano le interazioni fondamentali, detti campi di gauge.

Per poter sviluppare le teorie di gauge si presentano la teoria dei gruppi, che descrive formalmente i diversi tipi di trasformazioni di simmetria, e il formalismo lagrangiano, che permette di determinare l'evoluzione dinamica dei sistemi analizzati tramite il principio di minima azione. In questa tesi si trattano sia le teorie di gauge abeliane sia quelle non-abeliane. Si presentano in particolare la teoria dell'elettrodinamica quantistica (QED), che si basa sulla simmetria sotto trasformazioni del gruppo abeliano  $U(1)$ , e la teoria di gauge della cromodinamica quantistica, basata sul gruppo  $SU(3)$ . Si evidenzia inoltre l'esistenza della teoria elettrodebole, che unifica le interazioni elettromagnetiche e deboli e per cui l'invarianza per simmetrie di gauge è garantita dalla combinazione di  $SU(2) \times U(1)$ . La teoria di gauge dei gruppi  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  prende il nome di Modello Standard e rappresenta una descrizione completa delle interazioni fondamentali, ad eccezione dell'interazione gravitazionale. La trattazione presentata si basa principalmente sui testi e gli appunti [4], [3], [19], [7], [8], [6]. Per alcuni dettagli sulle teorie di gauge si rimanda a [5], [16].

# Capitolo 1

## Gruppi e trasformazioni di simmetria

In questo primo capitolo si introducono gli strumenti necessari per conoscere e studiare le trasformazioni di simmetria alla base delle teorie di gauge. Le simmetrie sono proprietà di invarianza dei sistemi fisici estremamente utili per lo studio di essi, in quanto permettono di analizzare in modo dettagliato anche dei sistemi molto complessi. Il linguaggio matematico adatto per descrivere le simmetrie è la teoria dei gruppi, di cui verranno presentati i concetti principali. Verrà inoltre descritto, attraverso le trasformazioni di Lorentz, il fondamentale principio di invarianza relativistica.

Per le trasformazioni di Lorentz si rimanda a [15] e [8], per la teoria dei gruppi [8], [6], [9], [21].

### 1.1 Trasformazioni di Lorentz

I fenomeni che avvengono in natura si possono descrivere e studiare scegliendo opportunamente un *sistema di riferimento*. Con questo si intende l'insieme di un sistema di coordinate, per determinare la posizione dei corpi nel sistema, e un orologio per stabilire il tempo legato al sistema stesso. I sistemi di riferimento nei quali il moto di un corpo non soggetto a forze avviene a velocità costante sono detti *sistemi di riferimento inerziali*. Siamo allora interessati a trovare una legge che definisca le trasformazioni da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Date le coordinate di un evento  $(t, x, y, z)$  in un sistema di riferimento inerziale  $K$  ci chiediamo in che modo sia possibile trovare le coordinate  $(t', x', y', z')$  nel sistema di riferimento inerziale  $K'$ . La meccanica newtoniana

è consistente per cambi di sistemi di riferimento tramite le *trasformazioni galileiane*:

$$\begin{aligned}t' &= t \\x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{1.1}$$

Al contrario, le equazioni dell'elettrodinamica non sono invarianti per trasformazioni galileiane, ma lo sono per trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{aligned}t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{1.2}$$

In questo caso il tempo non è assoluto, come invece era per (1.1), ed è necessario ridefinire il concetto di *simultaneità*. Einstein riuscì per primo a trovare una spiegazione in grado di garantire la validità delle equazioni di Maxwell, insieme alla scelta delle trasformazioni di Lorentz come leggi di trasformazione corrette che collegano due sistemi di riferimento. I principi su cui si basa la teoria della meccanica relativistica di Einstein sono due:

- Le leggi fisiche sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- La velocità della luce  $c$  è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Questa scelta non è in contrasto con le leggi della meccanica classica: si osserva infatti che nel limite  $v \ll c$  le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo.

Il passaggio tra un sistema di riferimento inerziale ed un altro per trasformazioni di Lorentz produce interessanti effetti fisici, tra cui la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi.

Considero un oggetto in quiete nel sistema  $K'$  di lunghezza  $L_0 = x'_2 - x'_1$  disposto lungo l'asse  $x$  e un osservatore solidale con questo sistema di riferimento. L'osservatore vede l'oggetto muoversi nel sistema  $K$  con velocità  $v$ . La lunghezza  $L$  in  $K$  si calcola  $L = x_2(t) - x_1(t)$ . Si possono mettere in relazione  $L_0$  e  $L$  tramite le trasformazioni di Lorentz:

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2(t) - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1(t) - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma L\tag{1.3}$$

Per cui nel sistema di riferimento in cui l'oggetto è in moto la sua lunghezza risulta contratta  $L = L_0/\gamma$ .

Supponiamo ora di avere due eventi nel sistema  $K'$  che si verificano nello stesso punto, ma separati da un intervallo temporale  $T_0 = t'_2 - t'_1$ . Lo stesso intervallo si misura nel sistema  $K$ :

$$T = t_2 - t_1 = \gamma t'_2 - \gamma t'_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma T_0 \quad (1.4)$$

quindi  $T = \gamma T_0$  e si definisce il *tempo proprio*  $\tau = T_0$  come l'intervallo di tempo che separa due eventi misurato nel sistema di riferimento in cui gli eventi avvengono nello stesso punto. Si constata da (1.4) che, dato un particolare fenomeno,  $\tau$  è il tempo più breve possibile che si può misurare.

## Spaziotempo di Minkowski e formalismo tensoriale

### Quadrivettori

Per rappresentare un evento nello spaziotempo di Minkowski si possono considerare l'insieme delle sue coordinate  $(ct, x, y, z)$  come le componenti di un quadrivettore (un vettore quadridimensionale) nello spaziotempo relativistico

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{v}) = x^\mu \quad (1.5)$$

con  $x^\mu$  il quadrivettore posizione.

Generalizzando la nozione di distanza tra due punti nello spazio euclideo possiamo definire una grandezza  $s$  che rappresenta la distanza tra due eventi nello spaziotempo minkowskiano. Questa grandezza deve essere uguale in ogni sistema di riferimento inerziale, vale a dire deve essere invariante per trasformazioni di Lorentz.

$$s^2 = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.6)$$

Dati due eventi di coordinate  $x^\mu, y^\mu$ , la distanza invariante risulta

$$s^2 = -(x^0 - y^0)^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 \quad (1.7)$$

Utilizzando questa definizione di distanza si possono classificare gli eventi come:

- $s^2 < 0$  distanze di tipo tempo (timelike)
- $s^2 = 0$  distanze di tipo luce (lightlike o null)
- $s^2 > 0$  distanze di tipo spazio (spacelike)

Consideriamo  $d\tau$  il tempo proprio infinitesimo di un oggetto solidale al sistema di riferimento  $K'$  e mostriamo che è un invariante relativistico. A partire da (1.4) si può scrivere:

$$d\tau \equiv dt' = \gamma^{-1} dt = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{-ds^2}{c^2}} \quad (1.8)$$



dove  $ds^2$  deriva direttamente da (1.6). Allora  $d\tau$  è un invariante relativistico perché dipende soltanto da una quantità invariante  $ds^2$  per trasformazioni di Lorentz e da una costante.

Definiamo ora:

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \\ x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (-ct, x, y, z) \end{aligned} \quad (1.9)$$

ovvero  $x^0 = -x_0$ ,  $x^1 = x_1$ ,  $x^2 = x_2$ ,  $x^3 = x_3$ . Il quadrivettore  $x^\mu$ , con indice in alto, viene detto *controvariante* mentre il quadrivettore  $x_\mu$ , con indice in basso, *covariante*. Al fine di semplificare la notazione si adatterà la convenzione di Einstein secondo cui gli indici ripetuti due volte (uno in alto e uno in basso) si considerano automaticamente sommati su tutti i possibili valori, in questo caso da 0 a 3:

$$\sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu \rightarrow x^\mu x_\mu$$

## Metrica di Minkowski

Si può scrivere una relazione tra i quadrivettori covarianti e controvarianti:

$$x_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.10)$$

dove la matrice  $\eta$  con componenti  $\eta_{\mu\nu}$  viene detta *metrica di Minkowski* e si scrive in forma matriciale nel modo seguente:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Il tensore metrico introdotto contiene tutte le informazioni sulla geometria dello spaziotempo di Minkowski. Attraverso le convenzioni e gli strumenti matematici appena mostrati, il quadrato della distanza minkowskiana risulta:

$$\begin{aligned} s^2 &= -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = (ct \quad x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\ &= x^T \eta x = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\nu x^\nu \end{aligned} \quad (1.12)$$

Questa espressione suggerisce che per costruire una grandezza invariante per trasformazioni di Lorentz è sufficiente calcolare il prodotto scalare tra vettori covarianti e controvarianti.

### Formalismo matriciale

Le trasformazioni di Lorentz (1.2) si scrivono in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

dove

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.14)$$

e  $\gamma$  si dice *fattore di Lorentz*. Per i sistemi di riferimento inerziali fisicamente realizzabili vale  $0 \leq \beta < 1$ ,  $1 \leq \gamma < \infty$ .

Le trasformazioni si possono scrivere in modo compatto:

$$x' = \Lambda x \quad (1.15)$$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1.16)$$

dove  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  sono gli elementi della matrice di Lorentz  $\Lambda$  in (1.13). Si ricercano allora le condizioni che deve soddisfare la matrice  $\Lambda$  perché le trasformazioni che rappresenta siano in accordo con i postulati della teoria della relatività, in altre parole perché sia garantita l'invarianza dell'intervallo spaziotemporale  $s$ .

Esprimendo questa condizione  $s'^2 = s^2$  a partire da quanto mostrato in (1.12) si giunge alla relazione seguente:

$$s'^2 = \eta_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} (\Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha}) (\Lambda^{\nu}_{\beta} x^{\beta}) = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = s^2 = \eta_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} \quad (1.17)$$

che implica:

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.18)$$

Introducendo la matrice trasposta  $\Lambda^T$  che si ottiene scambiando righe e colonne si riscrive (1.18) così:

$$(\Lambda^T)_{\alpha}{}^{\mu} \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.19)$$

Allora le trasformazioni di Lorentz che soddisfano la condizione presentata sopra sono quelle definite da matrici tali che:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (1.20)$$

Queste matrici formano un gruppo chiamato gruppo di Lorentz, che riveste un ruolo fondamentale nello studio della teoria quantistica dei campi e della fisica delle particelle. Infatti è possibile costruire una teoria in accordo con la teoria relativistica purché i sistemi fisici in esame siano invarianti sotto trasformazioni di questo gruppo di simmetria. Le proprietà del gruppo di Lorentz verranno discusse in seguito, dopo aver introdotto i concetti di “gruppo” e “gruppo di Lie”.

## 1.2 Gruppi di Lie e algebra di Lie

### Cenni alla teoria dei gruppi

In questa sezione si illustrano le principali definizioni e caratteristiche della teoria dei gruppi. Ci si sofferma brevemente sulle proprietà dei gruppi di Lie e si presentano infine alcuni dei gruppi di simmetria più utilizzati in fisica.

#### Definizione di gruppo

Un insieme  $G$  è un *gruppo* se esiste un'operazione  $\cdot$  che ad ogni coppia (ordinata) di elementi  $a, b \in G$  associa un elemento  $a \cdot b$ , tale che le seguenti proprietà siano soddisfatte:

1. Esiste una legge di composizione: dati  $a, b \in G$  allora  $c = a \cdot b \in G$
2. Esiste l'elemento *identità*:  $\exists e$  tale che  $a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in G$
3. Esiste l'elemento *inverso*: se  $a \in G$  allora  $a^{-1} \in G$  tale che  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$
4. L'operazione  $\cdot$  è *associativa*:  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  con  $a, b, c \in G$

Un gruppo può essere classificato a partire dalle sue caratteristiche principali: i *gruppi di Lie*, che verranno trattati in seguito, hanno elementi che dipendono in modo continuo da un insieme di parametri. I gruppi in cui l'operazione  $\cdot$  è commutativa, ovvero  $a \cdot b = b \cdot a$  sono chiamati *gruppi abeliani*, quelli in cui ciò non accade invece sono *gruppi non-abeliani*. Ogni insieme di matrici invertibili  $N \times N$  dotato di matrice identità e chiuso per la moltiplicazione tra matrici forma un gruppo, si elencano di seguito alcuni esempi:

- il *gruppo unitario*  $U(N)$  è il gruppo delle matrici unitarie  $N \times N$ , i.e. le matrici  $U$  che soddisfano  $UU^\dagger = I$
- il *gruppo delle fasi*  $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$
- il *gruppo speciale unitario*  $SU(N)$  è il gruppo delle matrici unitarie  $N \times N$  con determinante 1
- il *gruppo ortogonale*  $O(N)$  è il gruppo delle matrici reali ortogonali  $N \times N$ , i.e. le matrici  $O$  che soddisfano  $OO^T = I$

- il *gruppo speciale ortogonale*  $SO(N)$  è il gruppo delle matrici reali ortogonali  $N \times N$  con determinante 1

Un gruppo di interesse particolare per la teoria della relatività ristretta è il *gruppo di Lorentz* dato da  $O(3, 1) = \{\Lambda, \text{matrici reali } 4 \times 4 \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}$ .

## Rappresentazioni

La teoria delle rappresentazioni è una teoria matematica che permette di analizzare gli oggetti algebricamente complessi tramite una loro rappresentazione come trasformazioni lineari di spazi vettoriali. Una rappresentazione è quindi una realizzazione degli elementi di un gruppo in termini di operatori lineari su uno spazio vettoriale  $V$  scelto.

Una *rappresentazione* è una mappa da un gruppo  $G$  ad un gruppo di operatori  $R(G)$  su uno spazio vettoriale  $V$

$$g \in G \xrightarrow{R} R(g) \quad (1.21)$$

tale che:

1.  $R(e) = I$ , con  $I$  l'operatore identità.
2.  $R(g_1)R(g_2) = R(g_1g_2)$  i.e. la rappresentazione soddisfa le stesse regole di moltiplicazione degli elementi del gruppo.

Allora  $R(g^{-1})R(g) = R(e)$  quindi  $R(g^{-1}) = [R(g)]^{-1}$ .

La dimensione della rappresentazione è la dimensione dello spazio vettoriale  $V$ , quindi se lo spazio vettoriale ha dimensione  $N$ , la rappresentazione ha dimensione  $N$  e gli operatori sono matrici  $N \times N$ . Queste matrici determinano la *rappresentazione deficiente* e agiscono sui vettori dello spazio vettoriale  $V$  in cui sono definite.

## Rappresentazioni irriducibili

In uno spazio vettoriale si possono scegliere delle rappresentazioni più convenienti tramite delle trasformazioni lineari, purché siano invertibili. Si può allora definire una trasformazione di similitudine di tipo:

$$R(g) \rightarrow \tilde{R}(g) = AR(g)A^{-1} \quad \forall g \in G \quad (1.22)$$

Le rappresentazioni  $R(g)$  e  $\tilde{R}(g)$  si dicono *equivalenti* perché questa trasformazione descrive soltanto un cambio di base nello spazio vettoriale  $V$  e le matrici delle due rappresentazioni identificano lo stesso operatore lineare in due basi diverse.

Se  $\exists$  un sottospazio  $V_1$  di  $V$  tale che l'azione di  $R(g)$  su qualsiasi vettore appartenente a

$V_1$  rimane in  $V_1$  allora questo sottospazio si dice *sottospazio invariante* e la rappresentazione è *riducibile*. Altrimenti la rappresentazione si dice *irriducibile*. Una rappresentazione *riducibile* è una rappresentazione equivalente ad una le cui matrici sono diagonali a blocchi:

$$\tilde{R}(g) = AR(g)A^{-1} = \begin{pmatrix} R_1(g) & 0 & \dots \\ 0 & R_2(g) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \forall g \in G \quad (1.23)$$

dove  $R_j(g)$  è irriducibile  $\forall j$ . Una rappresentazione in questa forma si può scrivere come somma diretta delle rappresentazioni, ovvero  $R(g) = R_1(g) \oplus R_2(g) \oplus \dots$ .

Dato un vettore  $v \in V$  di componenti  $v^a$ , la matrice  $R(g)$  trasforma il vettore:

$$v^a \xrightarrow{g \in G} v'^a = [R(g)]^a_b v^b \quad (1.24)$$

A partire dalla rappresentazione definente  $R(g)$  si possono trovare automaticamente altre tre rappresentazioni:

1. La rappresentazione *complesso coniugata*  $R(g)^*$  che agisce sui vettori dello spazio complesso coniugato  $v^{\dot{a}} \in V^*$

$$v^{\dot{a}} \xrightarrow{g \in G} v'^{\dot{a}} = [R(g)^*]^{\dot{a}}_b v^b$$

2. La rappresentazione *inverso-trasposta*  $R(g)^{-1T}$  che agisce sui vettori dello spazio duale  $v_a \in \tilde{V}$

$$v_a \xrightarrow{g \in G} v'_a = [R(g)^{-1T}]^b_a v_b$$

3. La rappresentazione *inverso-hermitiano coniugata*  $R(g)^{-1\dagger}$  che agisce sui vettori dello spazio duale complesso coniugato  $v_{\dot{a}} \in \tilde{V}^*$

$$v_{\dot{a}} \xrightarrow{g \in G} v'_{\dot{a}} = [R(g)^{-1\dagger}]^{\dot{b}}_{\dot{a}} v_b$$

Alcune di queste rappresentazioni possono essere tra loro equivalenti, per esempio nel caso di rappresentazioni *reali*,  $R(g)^* = R(g)$  quindi  $v_{\dot{a}} \sim v_a$  e  $v^{\dot{a}} \sim v^a$ . Una rappresentazione viene detta *unitaria* se  $R(g)^\dagger = R(g)^{-1}$  ovvero per  $R(g)^{-1\dagger} = R(g)$  che implica  $v_{\dot{a}} \sim v^a$  e  $v^{\dot{a}} \sim v_a$ .

Le grandezze invarianti sotto le trasformazioni operate dalle rappresentazioni di  $G$  si possono ottenere facendo il prodotto scalare tra vettori covarianti e controvarianti, purché siano entrambi puntati o non puntati. Si possono ottenere delle altre rappresentazioni a partire da quelle presentate attraverso il prodotto tensoriale. Queste nuove rappresentazioni agiscono sui “tensori” che sono gli elementi di spazi vettoriali ottenuti dal prodotto tensoriale di  $V, V^*, \tilde{V}, \tilde{V}^*$ .

### 1.2.1 Caratteristiche di un gruppo di Lie generico

Un gruppo di Lie è per definizione un gruppo di trasformazioni che dipendono in modo continuo da alcuni parametri.

Un elemento arbitrario del gruppo  $g(\theta) \in G$  si può parametrizzare in funzione di  $N$  parametri reali  $\theta_a$  cosicché  $g(\theta_a) = e$  per  $\theta_a = 0$ . Data una rappresentazione del gruppo, i suoi operatori lineari si parametrizzano allo stesso modo quindi  $R(\theta_a) = 1$  per  $\theta_a = 0$ . Allora vicino all'identità, ovvero quando  $\theta_a \ll 1$ , possiamo sviluppare in serie di Taylor  $R(\theta_a)$  e tenere solo i termini di ordine più basso

$$R(\theta_a) = I + i\theta_a T^a + \dots \quad (1.25)$$

dove gli operatori  $T^a$  sono i **generatori** del gruppo e  $I$  è l'elemento identità. In particolare, ci si può allontanare dall'identità in una qualsiasi direzione elevando a potenze maggiori un elemento infinitesimo del gruppo (1.25). Si ottiene così che le rappresentazioni degli elementi del gruppo si possono scrivere:

$$R(\theta_a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + i \frac{\theta_a}{n} T^a \right)^n = e^{i\theta_a T^a} \quad (1.26)$$

Per gli elementi del gruppo sufficientemente vicini all'identità emerge da questa parametrizzazione, detta parametrizzazione esponenziale, una dipendenza esplicita dai loro generatori.

L'**algebra di Lie** è uno spazio vettoriale  $L$  in cui è definita l'operazione  $L \times L \rightarrow L$  data da  $(a, b) \rightarrow [a, b]$  con  $[\cdot, \cdot]$  detto *commutatore* di  $a$  e  $b$  tale che:

- L'operazione è bilineare;
- $[a, a] = 0 \forall a \in L$ ;
- $[a, b] = -[b, a]$ ;
- Soddisfa l'identità di Jacobi:  $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$

Se consideriamo il commutatore di due generatori del gruppo  $T^a$  e  $T^b$ :

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}_c T^c \quad (1.27)$$

Questa relazione è detta algebra di Lie e il commutatore si comporta per l'algebra in modo simile alla legge moltiplicativa per un gruppo. Le  $f^{ab}_c$  sono dette *costanti di struttura*, determinano completamente le caratteristiche del gruppo e non cambiano per diverse rappresentazioni. Se  $f^{ab}_c = 0$ , i generatori commutano e il gruppo è abeliano. Se le costanti di struttura sono non nulle il gruppo è non-abeliano.

L'*identità di Jacobi* per i generatori si riscrive:

$$[[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0 \quad (1.28)$$

e porta alla definizione della rappresentazione aggiunta  $T_{(A)}^a$  dell'algebra di Lie:

$$(T_{(A)}^a)^b{}_c = -if^{ab}{}_c \quad (1.29)$$

Da (1.27) segue che l'identità deve valere anche per le costanti di struttura:

$$f^{ab}{}_d f^{dc}{}_e + f^{bc}{}_d f^{da}{}_e + f^{ca}{}_d f^{db}{}_e = 0 \quad (1.30)$$

La formula di Baker-Campbell-Hausdorff mostra che per costruire la legge moltiplicativa del gruppo di Lie è sufficiente conoscerne l'algebra di Lie, infatti dati due operatori lineari A e B, si può scrivere:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[[A,[A,B]]-\frac{1}{12}[[B,[A,B]]+\dots]} \quad (1.31)$$

Si vede che nel caso di un gruppo di Lie abeliano il commutatore risulta nullo e la formula si riconduce a quella classica di moltiplicazione tra esponenziali.

## 1.2.2 Esempi di gruppi

### SO(N)

$SO(N)$  è il gruppo speciale ortogonale di matrici  $N \times N$ . Le quattro rappresentazioni illustrate in precedenza sono tutte equivalenti,  $v^a \sim v_a \sim v^{\dot{a}} \sim v_{\dot{a}}$ . Si identifica con  $N$  la rappresentazione definita ( $N$  è la sua dimensione) e con  $N \otimes N$  la rappresentazione tensoriale che agisce su tensori a due indici  $T^{ab}$  ed ha dimensione  $N^2$ .

I tensori  $T^{ab}$  si possono separare nella parte simmetrica  $S^{ab}$  di dimensione  $\frac{N(N+1)}{2}$  e nella parte antisimmetrica  $A^{ab}$  di dimensione  $\frac{N(N-1)}{2}$ . La parte simmetrica si può ridurre ulteriormente separandola nella traccia  $S \equiv \delta_{ab} S^{ab} = S^a{}_a$  che è uno scalare, e in un tensore simmetrico senza traccia  $\hat{S}^{ab}$ :

$$S^{ab} = S^{ab} - \frac{1}{N} \delta^{ab} S + \frac{1}{N} \delta^{ab} S = \hat{S}^{ab} + \frac{1}{N} \delta^{ab} S \quad (1.32)$$

Allora il tensore si separa nelle parti irriducibili come:

$$T^{ab} = \frac{1}{N} \delta^{ab} S + A^{ab} + \hat{S}^{ab} \quad (1.33)$$

di dimensioni:

$$N \otimes N = 1 \oplus \left( \frac{N(N-1)}{2} \right) \oplus \left( \frac{N(N+1)}{2} - 1 \right) \quad (1.34)$$

## SO(3)

Il gruppo delle rotazioni nello spazio euclideo tridimensionale  $SO(3)$  è uno dei gruppi continui non-abeliani più semplici ed è un importante sottogruppo del gruppo di Lorentz. Le rotazioni tridimensionali sono definite come le trasformazioni di un vettore  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ :

$$x'^i = R^i_j x^j \quad (1.35)$$

che lasciano invariato il suo quadrato  $x'^2 = x^2$ . Questa condizione si può scrivere come:

$$x'_i x'^i = (R_i^j x_j)(R^i_k x^k) = R_i^j R^i_k x_j x^k \quad (1.36)$$

dove l'invarianza è garantita se  $RR^T = R^T R = 1$ , caratteristica che definisce i gruppi ortogonali. Le matrici di  $SO(3)$  sono sottoposte alla condizione ulteriore che  $\det R = +1$ . Le matrici con  $\det R = -1$  corrispondono a rotazioni improprie, i.e. rotazioni combinate a trasformazioni di parità  $P$ :

$$P\vec{x} = -\vec{x} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Costruiamo l'algebra di Lie studiando le trasformazioni infinitesime del gruppo. Date tre rappresentazioni di  $SO(3)$  che corrispondono alle rotazioni di un angolo  $\phi$  attorno ai tre assi  $(x^1, x^2, x^3)$  rispettivamente, si ha:

$$R_1(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi \ll 1} 1 + \phi \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{iT^1} + \dots \quad (1.38)$$

$$R_2(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi \ll 1} 1 + \phi \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{iT^2} + \dots \quad (1.39)$$

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi \ll 1} 1 + \phi \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{iT^3} + \dots \quad (1.40)$$

Allora i tre generatori sono:

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$



L'algebra di Lie di  $SO(3)$  risulta:

$$[T^i, T^j] = i\epsilon^{ijk}T^k \quad (1.42)$$

per cui le costanti di struttura del gruppo sono date dal tensore antisimmetrico  $\epsilon^{ijk}$ .  
Le rappresentazioni irriducibili di  $SO(3)$ , indicate con le rispettive dimensioni, sono:

$$3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5 \quad (1.43)$$

## SU(N)

$SU(N)$  è il gruppo speciale unitario di matrici  $N \times N$ . Per la proprietà di unitarietà  $v_a \sim v^a$  cui corrisponde la rappresentazione definita  $N$  e  $v^{\dot{a}} \sim v_a$  cui corrisponde la rappresentazione complesso coniugata  $\bar{N}$ . Separando il tensore  $T^{ab}$  nella sua parte simmetrica e antisimmetrica si ottiene:

$$N \otimes N = \left( \frac{N(N+1)}{2} \right) \oplus \left( \frac{N(N-1)}{2} \right) \quad (1.44)$$

Invece, separando il tensore in una parte di traccia e in una senza traccia, si ottiene:

$$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus (N^2 - 1) \quad (1.45)$$

con  $N^2 - 1$  la rappresentazione aggiunta.

## SU(2)

$SU(2)$  è il gruppo delle matrici  $2 \times 2$  unitarie con  $\det U = 1$  ed è localmente equivalente a  $SO(3)$ , quindi ha la stessa algebra di Lie. Una matrice che differisce infinitesimamente dalla matrice identità si può scrivere:

$$U = I + iT \quad T^i_j \ll 1 \quad (1.46)$$

La condizione di unitarietà implica che  $U^\dagger = I - iT^\dagger$  debba essere uguale a  $U^{-1} = I - iT$  quindi che le matrici  $T$  siano hermitiane  $T^\dagger = T$ . Inoltre  $\det U = I + i\text{tr}T = 1$  per cui le matrici  $T$  devono avere traccia nulla  $\text{tr}T = 0$ .

Una base di matrici  $2 \times 2$  hermitiane a traccia nulla è data dalle matrici di Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

per cui una matrice  $T$  arbitraria si può scrivere come combinazione lineare delle matrici  $\sigma^a$

$$T = \theta_a \frac{\sigma^a}{2} \equiv \theta_a T^a \quad a = 1, 2, 3 \quad (1.48)$$

Con la normalizzazione:

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (1.49)$$

i generatori infinitesimi  $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$  soddisfano l'algebra di Lie:

$$[T^a, T^b] = i \epsilon^{abc} T^c \quad (1.50)$$

che corrisponde all'algebra di Lie di  $SO(3)$ . I due gruppi hanno le stesse costanti di struttura e sono uguali localmente, ma hanno proprietà globali diverse.

Per  $SU(2)$  abbiamo le rappresentazioni irriducibili:

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3, \quad 2 \otimes \bar{2} = 1 \oplus 3 \quad (1.51)$$

Dalla relazione  $v_a \sim \epsilon_{ab} v^b \sim v^a$  con  $\epsilon_{ab}$  invariante per  $SU(2)$  si può affermare che, a meno di un cambio di base, i due vettori si trasformano nello stesso modo. Allora  $2 \sim \bar{2}$  giustifica l'uguaglianza tra le formule sopra.

### SU(3)

Si può studiare il gruppo delle matrici  $3 \times 3$  unitarie con  $\det U = 1$  generalizzando la trattazione per  $SU(2)$ . Un elemento arbitrario del gruppo  $SU(3)$  nella rappresentazione fondamentale è descritto da:

$$U = e^{i\theta_a \frac{\lambda_a}{2}} \quad (1.52)$$

dove  $\lambda_a$  sono matrici  $3 \times 3$  a traccia nulla e  $\theta_a$  gli otto parametri del gruppo. Le matrici che generano il gruppo sono definite in modo convenzionale come:

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad a = 1, 2, \dots, 8 \quad (1.53)$$

e le  $\lambda^a$  che formano la base sono dette matrici di Gell-Mann:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & & \\ \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

sono una generalizzazione delle matrici di Pauli, dal momento che le prime tre  $\lambda^1$ ,  $\lambda^2$  e  $\lambda^3$  contengono le tre matrici di Pauli che agiscono su un sottospazio:

$$\lambda_a = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a = 1, 2, 3 \quad (1.55)$$

Inoltre le  $T_a$  con  $a = 1, 2, 3$  generano il sottogruppo  $SU(2)$  di  $SU(3)$  (1.48). Adoperando la stessa normalizzazione di  $SU(2)$  si può trovare l'algebra di Lie e quindi le costanti di struttura. Il gruppo trova diverse applicazioni nella fisica delle particelle: nel modello statico a quark descrive la simmetria di sapore  $SU(3)_{\text{sapore}}$  degli adroni composti dai tre sapori dei quark leggeri *up*, *down* e *strange*. Esiste un'altra simmetria fondamentale detta simmetria di colore  $SU(3)_{\text{colore}}$  che è associata alle interazioni forti ed è alla base della cromodinamica quantistica. In:

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \quad (1.56)$$

le due rappresentazioni corrispondono a quark up, down, strange e le loro antiparticelle:

$$q^a = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \sim 3 \quad \bar{q}_a = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \sim \bar{3} \quad (1.57)$$

I sapori possono essere ridefiniti tramite trasformazioni di questo gruppo senza che la descrizione dei processi fisici si modifichi. I mesoni sono adroni formati da un quark ed un antiquark. La simmetria implica che possano emergere soltanto singoletti o ottetti di sapore (1.56). Per quanto riguarda la simmetria di colore, se ne identificano convenzionalmente tre: rosso, verde e blu. Un quark generico può possedere tutti e tre i colori e si raggruppa in:

$$u^a = \begin{pmatrix} u^{\text{rosso}} \\ u^{\text{verde}} \\ u^{\text{blu}} \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Tramite trasformazioni di  $SU(3)$  si ridefiniscono i colori senza che il sistema cambi. Le rappresentazioni in (1.56) ci dicono che è possibile combinare i colori di quark e antiquark ed ottenere uno scalare, ossia uno stato senza colore (il fotone), oppure otto combinazioni di colori diversi (il gluone).

## U(1)

$U(1)$  è gruppo delle fasi  $U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$  le cui rappresentazioni irriducibili unitarie sono tutte uno-dimensionali e identificate da un intero detto "carica". La rappresentazione definente rappresenta un elemento che trasforma:

$$v \xrightarrow{g \in U(1)} v' = e^{i\theta} v \quad v \in \mathbb{C} \quad (1.59)$$

quindi è una matrice complessa  $1 \times 1$  in uno spazio vettoriale unidimensionale complesso. La *rappresentazione di carica*  $q$  si scrive:

$$v_{(q)} \xrightarrow{g \in U(1)} v'_{(q)} = e^{iq\theta} v_{(q)} \quad (1.60)$$

Posso considerare trasformazioni infinitesime del tipo:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \dots \quad (1.61)$$

e la matrice  $T = 1$  è il generatore del gruppo. Il gruppo  $U(1)$  è abeliano e la sua algebra di Lie è data da:

$$[T, T] = 0 \quad (1.62)$$

### 1.2.3 Il Gruppo di Lorentz

Le trasformazioni di coordinate delle matrici  $\Lambda$  che soddisfano la condizione (1.20) soddisfano anche le proprietà gruppali in quanto:

1. Il prodotto di due trasformazioni di Lorentz  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  è una trasformazione di Lorentz  $(\Lambda_1\Lambda_2)^T\eta\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2^T(\Lambda_1^T\eta\Lambda_1)\Lambda_2 = \Lambda_2^T\eta\Lambda_2 = \eta$ .
2. Il prodotto è associativo perché lo è il prodotto tra matrici.
3.  $\exists$  elemento neutro del gruppo ed è dato dalla matrice identità  $I = I^T$  e  $I\eta I = \eta$
4.  $\exists$  trasformazione inversa  $\Lambda^{-1}$  tale che  $\Lambda^{-1}\Lambda = I = \Lambda\Lambda^{-1}$

$$\det(\Lambda^T\eta\Lambda) = \det\Lambda^T \det\Lambda \det\eta = (\det\Lambda)^2 \det\eta \equiv \det\eta \quad (1.63)$$

che implica  $\det\Lambda = \pm 1$ .

Quindi le trasformazioni  $\Lambda$  formano un gruppo detto *Gruppo di Lorentz*:

$$O(3, 1) = \{\Lambda, \text{matrici reali } 4 \times 4 \mid \Lambda^T\eta\Lambda = \eta\} \quad (1.64)$$

Considerando le componenti  $\alpha = \beta = 0$  di (1.1) si ottiene che:

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0 = -(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{i=1}^3(\Lambda^i{}_0)^2 \equiv -1 \\ \Rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 &\geq 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \text{oppure} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1 \end{aligned} \quad (1.65)$$

Le trasformazioni del gruppo si possono classificare a partire dal segno del determinante e del segno di  $\Lambda^0{}_0$ . Ne segue che il gruppo di Lorentz non è connesso ed è costituito da quattro insiemi disgiunti chiamati componenti. Il gruppo di trasformazioni di  $\det\Lambda = +1$  e  $\Lambda^0{}_0 \geq 1$  viene detto *gruppo di Lorentz proprio e ortocrono* o *gruppo di Lorentz ristretto*  $SO^\uparrow(3, 1)$ . In generale quando si parla di invarianza sotto trasformazioni di Lorentz si intende sotto le trasformazioni di questo sottogruppo. Esistono poi tre trasformazioni discrete che non sono connesse all'identità ma appartengono al gruppo  $O(3, 1)$ :

- L'inversione spaziale o parità:  $x'^\mu = P^\mu{}_\nu x^\nu = -\eta_{\mu\nu}x^\nu$

- L'inversione temporale:  $x'^{\mu} = T^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu}$
- La combinazione delle due trasformazioni  $x'^{\mu} = P^{\mu}_{\nu} T^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = -x^{\mu}$

Insieme all'identità 1 queste trasformazioni formano un sottogruppo abeliano discreto  $\{1, P, T, PT\}$ . Ogni elemento di  $O(3, 1)$  si può scrivere componendo una trasformazione propria e ortocrona con le trasformazioni del gruppo discreto appena presentato.

Il gruppo di Lorentz è un gruppo di Lie di dimensione  $N = 6$ . Infatti le matrici  $\Lambda$  dipendono da 16 parametri reali, ma devono soddisfare Eq. (1.20) i.e. 10 condizioni indipendenti cosicché vi sono solo 6 parametri reali indipendenti, che rappresentano i 3 angoli di rotazione degli assi e le 3 componenti della velocità relativa tra i due sistemi di riferimento inerziali.

## Rappresentazioni e algebra di Lie del gruppo di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz infinitesime si possono definire tramite l'espressione seguente:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} \quad (1.66)$$

dove si verifica che  $\omega^{\mu}_{\nu}$ , per soddisfare le condizioni che caratterizzano questo tipo di trasformazioni, devono essere antisimmetrici<sup>1</sup>  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ . I 6 parametri indipendenti del gruppo sono proprio le  $\omega_{\mu\nu}$  con indici fissati  $\mu < \nu$ . In forma matriciale si riscrive la (1.66):

$$\Lambda = I + \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \quad (1.70)$$

Le matrici  $M^{\alpha\beta}$  con  $\alpha < \beta$  sono i generatori del gruppo di Lorentz. Nella loro rappresentazione defnente e in forma esplicita si possono scrivere:

$$(M^{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} = -i(\eta^{\alpha\mu} \delta^{\beta}_{\nu} - \eta^{\beta\mu} \delta^{\alpha}_{\nu}) \quad (1.71)$$

A questo punto si può definire l'algebra di Lie del gruppo di Lorentz:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] = -i\eta^{\nu\alpha} M^{\mu\beta} + i\eta^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} + i\eta^{\nu\beta} M^{\mu\alpha} - i\eta^{\mu\beta} M^{\nu\alpha} \quad (1.72)$$

---

<sup>1</sup>Si dimostra semplicemente a partire da una trasformazione di Lorentz infinitesima (1.66). Si considera:

$$\eta_{\rho\lambda} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\lambda} \quad (1.67)$$

allora

$$\eta_{\rho\lambda} = (\delta^{\mu}_{\rho} + \omega^{\mu}_{\rho}) \eta_{\mu\nu} (\delta^{\nu}_{\lambda} + \omega^{\nu}_{\lambda}) \quad (1.68)$$

e sviluppando l'equazione appena presentata:

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\lambda} &= \eta_{\rho\lambda} + \omega_{\rho\lambda} + \omega_{\lambda\rho} \\ \implies \omega_{\rho\lambda} &= -\omega_{\lambda\rho} \end{aligned} \quad (1.69)$$

Il gruppo  $SO(3,1)$  non è compatto, quindi le sue rappresentazioni finito-dimensionali non sono unitarie<sup>2</sup>, ma risultano ad ogni modo molto interessanti per la teoria dei campi relativistica. Le matrici  $M^{\mu\nu}$  si possono separare in  $M^{0i}$ , che generano i boost di Lorentz, e  $M^{ij}$  che generano le rotazioni. Separando gli indici  $\mu = (0, i)$  si definisce una nuova base per i generatori:

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{jk} \quad K^i = M^{i0} \quad (1.73)$$

da cui segue l'algebra di Lie:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k \quad [J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk}K^k \quad [K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk}J^k \quad (1.74)$$

Si introducono le combinazioni lineari di  $J^i$  e  $K^i$  e si ridefinisce nuovamente l'algebra:

$$\begin{aligned} N^i &= \frac{1}{2}(J^i - iK^i) & \bar{N}^i &= \frac{1}{2}(J^i + iK^i) \\ \implies [N^i, N^j] &= i\epsilon^{ijk}N^k & [\bar{N}^i, \bar{N}^j] &= i\epsilon^{ijk}\bar{N}^k & [N^i, \bar{N}^j] &= 0 \end{aligned} \quad (1.75)$$

L'algebra del gruppo di Lorentz si riduce a quella di  $SU(2) \times SU(2)$ , come si verifica confrontando i risultati di (1.75) con l'algebra di Lie di  $SU(2)$  in (1.50). Le rappresentazioni finito dimensionali di  $SO(3,1)$  sono classificate da due numeri interi o seminteri  $(j_1, j_2)$  che corrispondono alla rappresentazione dei due sottogruppi  $SU(2)$  generati da (1.75).

---

<sup>2</sup>Una volta definiti i generatori  $J^i$  e  $K^i$  si vedrà che siccome  $K^i$  sono matrici antihermitiane, le matrici  $\Lambda$ , in generale, non sono unitarie.

# Capitolo 2

## Formalismo Lagrangiano e il teorema di Noether

La dinamica dei sistemi si può descrivere attraverso una sola funzione detta funzione Lagrangiana. Le equazioni del moto che governano l'evoluzione del sistema si trovano con un principio variazionale detto *principio di minima azione*. Questa formulazione risulta molto adatta per lo studio delle simmetrie perchè consente di definire una quantità, l'azione, che deve essere invariante per tutte le trasformazioni del sistema in analisi. Sono stati consultati i testi [19], [7], [18], [14], [11], [6].

### 2.1 Lagrangiana e il principio di minima azione

Prima di introdurre il formalismo lagrangiano per i campi si analizza il caso di un sistema di  $N$  particelle con massa uguale  $m$ . Il moto di queste particelle si può descrivere utilizzando le coordinate generalizzate  $q_i(t)$  con  $i = 1, \dots, 3N$  in funzione del tempo. A partire da queste coordinate si trovano le velocità  $\dot{q}_i(t) = dq_i(t)/dt$  e le accelerazioni  $\ddot{q}_i(t) = d^2q_i(t)/dt^2$ . Se consideriamo le particelle in moto in una regione dove esistono solo forze conservative:

$$F_i = -\frac{d}{dq_i}V \quad (2.1)$$

con  $V(q_i)$  è l'energia potenziale, allora la seconda legge di Newton si scrive:

$$m\ddot{q}_i = F_i(t) \quad (2.2)$$

La Lagrangiana del sistema è definita come:

$$L = T - V \quad (2.3)$$

con  $T$  l'energia cinetica e  $V$  l'energia potenziale.

Dato il valore delle coordinate  $q_i(t)$  ai tempi  $t_1$  e  $t_2$  si può determinare in che modo evolve

il sistema tra le infinite traiettorie percorribili. Per fare ciò, si definisce un funzionale detto *azione*  $S$ :

$$S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt \quad (2.4)$$

Le equazioni del moto che descrivono il sistema meccanico seguono da un principio detto *principio di minima azione* o *principio di Hamilton* secondo cui la traiettoria percorsa dal sistema è quella per cui  $S[q_i(t)]$  ha un estremo (tipicamente un minimo), ovvero:

$$\delta S[q_i(t)] = 0 \quad (2.5)$$

per tutte le traiettorie  $q_i(t)$  con  $t = t_1$  e  $t = t_2$ .

Si può dimostrare che le soluzioni del principio di minima azione soddisfano le *equazioni di Eulero-Lagrange* o *equazioni del moto*:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.6)$$

Si consideri infatti la traiettoria  $q_i(t)$  e una traiettoria “vicina” che differisce infinitesimalmente da quella scelta e che si può scrivere:

$$\begin{aligned} q_i(t) &\rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t) \\ \dot{q}_i(t) &\rightarrow \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Questa variazione corrisponde ad un cambiamento dell'azione:

$$\begin{aligned} \delta S[q_i(t)] &= S[q_i(t) + \delta q_i(t)] - S[q_i(t)] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t) + \delta q_i(t), \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sviluppando in serie  $\delta S[q_i(t)]$  secondo le potenze di  $\delta q_i$  e  $\delta \dot{q}_i$  e osservando che

$$\delta \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt} \delta q_i(t) \quad (2.9)$$

si scrive:

$$\delta S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \frac{d}{dt} \delta q_i(t) \right\} dt \quad (2.10)$$

e integrando per parti l'ultimo termine:

$$\delta S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right\} \delta q_i(t) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (2.11)$$



Le condizioni ai bordi impongono che  $q_{i1} = q_i(t_1)$  e  $q_{i2} = q_i(t_2)$ , dunque:

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad (2.12)$$

e l'ultimo termine di (2.11) sparisce. Il principio di azione impone che l'integrale debba essere uguale a zero per valori arbitrari di  $\delta q$ . Questa richiesta si realizza soltanto nel caso in cui la funzione integranda si annulli. Si riottengono così le equazioni di Eulero-Lagrange in (2.6).

### Teoria classica dei campi

A questo punto si è interessati allo studio della dinamica dei campi in una regione dello spaziotempo  $R$ . Al posto delle coordinate generalizzate  $q(t)$  si scrivono i campi  $\phi_i(x^\mu)$  dove  $x^\mu = (ct, x, y, z)$  è il quadrivettore posizione. La Lagrangiana diventa una funzione di  $\phi_i(x^\mu)$  e  $\partial_\mu \phi_i(x^\mu)$ <sup>1</sup> e l'operatore di derivazione si definisce come:

$$\partial_\mu \equiv \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (2.13)$$

quindi

$$L = \int_R \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) d^3x \quad (2.14)$$

dove  $\mathcal{L}$  è la *densità Lagrangiana*. Come precedentemente illustrato per i sistemi con un numero finito di gradi di libertà si cercano, a partire dal principio di azione, le equazioni di Eulero-Lagrange che devono essere soddisfatte dai campi. Il funzionale d'azione si scrive:

$$S[\phi] = \int_R \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) d^4x \quad (2.15)$$

Siccome i campi  $\phi_i$  occupano lo spazio  $R$ , se consideriamo una variazione infinitesima  $\delta \phi_i$  che si annulla sul bordo  $\partial R$ , l'azione cambia come:

$$\delta S[\phi] = \int_R \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta (\partial_\mu \phi_i) \right\} d^4x \quad (2.16)$$

il secondo membro si può integrare per parti sapendo che  $\delta (\partial_\mu \phi_i) = \partial_\mu \delta \phi_i$  tenendo presente che vale la condizione  $\delta \phi_i = 0$  su  $\partial R$ :

$$\delta S[\phi] = \int_R \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right\} \delta \phi_i d^4x \quad (2.17)$$

Imponendo il principio di minima azione si ricavano le equazioni di Eulero-Lagrange per i campi  $\phi_i$ :

$$\delta S[\phi] = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = 0 \quad (2.18)$$

---

<sup>1</sup>D'ora in avanti si considera implicita la dipendenza dei campi dal quadrivettore  $x^\mu$

## 2.2 Il Teorema di Noether

Il teorema di Noether mette in luce la relazione tra simmetrie e leggi di conservazione. Ad esempio, l'invarianza delle leggi fisiche per trasformazioni spaziali porta alla conservazione della quantità di moto, mentre l'invarianza rispetto a trasformazioni temporali porta alla conservazione dell'energia. Nei sistemi in cui si ha invarianza per rotazione del sistema di coordinate, si conserva invece il momento angolare. Si può definire una *simmetria* come una trasformazione delle variabili dinamiche che lascia invarianti in forma le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow t' = f(t) \\ q(t) &\longrightarrow q'(t') = F(q(t), t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

dove  $t$  è un parametro che induce la trasformazione. Ciò significa che le equazioni del moto che caratterizzano i due sistemi di riferimento ammettono le stesse soluzioni e non esiste un sistema di riferimento privilegiato.

Le simmetrie che dipendono in modo continuo da alcuni parametri sono chiamate simmetrie di Lie si distinguono in:

- Simmetrie *rigide* o *globali*, associate a gruppi di Lie finito dimensionali, i parametri che le descrivono sono costanti.
- Simmetrie *locali* o *di gauge*, associate a gruppi di Lie infinito dimensionali, dipendono da parametri che sono funzioni arbitrarie dello spazio e del tempo.

Il **teorema di Noether** afferma che:

*Per ogni parametro continuo del gruppo di simmetria, esiste una quantità conservata detta carica. Per le teorie di campo esiste una conservazione locale espressa tramite un'equazione di continuità.*

### Teorema di Noether per la teoria dei campi

Considero una trasformazione delle coordinate spaziotemporali  $x^\mu$  e dei campi dinamici  $\phi$ , dipendente da un parametro  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x'^\mu = f^\mu(x, \alpha) \\ \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x') = F(\phi(x), \delta_\mu \phi(x), x, \alpha) \end{aligned} \quad (2.20)$$

La trasformazione identità si ha per definizione quando  $\alpha = 0$ . La trasformazione infinitesima con  $\alpha \ll 1$  si può parametrizzare attraverso una funzione  $G$  appropriata (che si ottiene dalla funzione  $F$ ):

$$\delta_\alpha \phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi = \alpha G(\phi(x), \delta_\mu \phi(x), x) \quad (2.21)$$

Per ipotesi si ha una trasformazione di simmetria, e questa condizione si può esprimere scrivendo che l'azione  $S$  è invariante:

$$\delta_\alpha S[\phi] = 0 \quad (2.22)$$

Per dimostrare l'esistenza di una quantità conservata, consideriamo un'estensione della trasformazione infinitesima dove il parametro  $\alpha$  non è più costante ma è una funzione arbitraria che dipende dal tempo e dallo spazio  $\alpha(x)$ , per cui l'azione subisce una variazione del tipo:

$$\delta_{\alpha(x)} S[\phi] = \int \partial_\mu \alpha(x) J^\mu d^n x \quad (2.23)$$

Si noti che nel caso di  $\alpha$  costante si ritrova l'ipotesi (2.22) per cui la trasformazione è una simmetria.  $J^\mu$  sono le correnti conservate (correnti di Noether) e soddisfano un'equazione di continuità che si può ottenere imponendo il principio di minima azione, ovvero valutando la variazione dell'azione nel punto di minimo  $\phi_0$ :

$$0 = \delta_{\alpha(x)} S[\phi] \Big|_{\phi_0} = \int \partial_\mu \alpha(x) J^\mu d^n x \Big|_{\phi_0} = - \int \alpha(x) \partial_\mu J^\mu d^n x \Big|_{\phi_0} \quad (2.24)$$

$$\implies \partial_\mu J^\mu(\phi_0) = 0$$

dove si è sfruttato il fatto che  $\alpha(x)$  è una funzione arbitraria, quindi può essere scelta in modo che si annulli sul bordo.

Come detto in precedenza queste simmetrie di Lie si dicono *simmetrie globali*. Per il teorema di Noether esiste un numero di correnti pari al numero di parametri del gruppo. Per ogni parametro esiste quindi una quantità conservata  $Q$  detta carica<sup>2</sup>:

$$Q = \int_R J^0 d^3 x \quad (2.25)$$

infatti integrando su tutto il volume  $R$  l'equazione di continuità e utilizzando il teorema di Gauss per convertire l'integrale di volume in uno di superficie

$$\int_R \partial_\mu J^\mu d^3 x = \int_R \partial_0 J^0 d^3 x + \int_R \partial_i J^i d^3 x = \frac{d}{dt} \int_R J^0 d^3 x + \oint_{\partial R} J^i \hat{n}_i dS \quad (2.26)$$

Se si assume l'equazione di continuità (2.24) e che le  $J^i$  vadano a zero in modo sufficientemente veloce da annullare il termine di bordo:

$$\frac{d}{dt} Q = 0 \quad (2.27)$$

Esistono anche teorie che sono invarianti per trasformazioni di *simmetria locale* o *di gauge*. In tal caso non emergono altre quantità conservate oltre a quelle già trovate per simmetrie globali.

---

<sup>2</sup>Purché siano soddisfatte le condizioni al contorno.

## Azione di una particella relativistica e forza di Lorentz

Il moto di un oggetto puntiforme nello spaziotempo descrive una traiettoria  $x^\mu$  detta *linea di mondo*. Il suo tempo proprio infinitesimo si può scrivere come:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} \quad (2.28)$$

dove  $\vec{v}$  è la velocità dell'oggetto. La seconda uguaglianza mostra più esplicitamente il fatto che  $\tau$  sia un invariante relativistico. Utilizzando le variabili dinamiche si può scrivere il tempo proprio infinitesimo della particella che percorre una distanza  $dx^\mu$  come:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-dx^\mu dx_\mu} \quad (2.29)$$

L'invarianza relativistica è quindi garantita se l'azione della particella è proporzionale al suo tempo proprio, e si scrive:

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc \int \sqrt{-dx^\mu dx_\mu} = -mc \int d\lambda \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} \quad (2.30)$$

con  $\lambda$  il parametro che descrive la linea di mondo. Si può parametrizzare la traiettoria con il tempo proprio  $\lambda = \tau$ ,  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  si ha  $\frac{d}{d\tau} x^\mu = \dot{x}^\mu$  e l'azione assume la forma:

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \quad (2.31)$$

Le equazioni del moto sono:

$$\delta S [x^\mu] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{mc \dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}} \right) = 0 \quad (2.32)$$

Se invece si vuole trattare il caso di un moto relativistico non libero, si considera una particella puntiforme  $m$  di carica  $e$  sottoposta ad un campo elettromagnetico esterno. L'accoppiamento a questo campo si ottiene aggiungendo un termine di interazione alla Lagrangiana che descriva l'interazione tra il quadripotenziale  $A^\mu$  e la corrente elettromagnetica  $J^\mu$  associata alla carica che soddisfa l'equazione di continuità. La lagrangiana totale si scrive:

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_{int} = -mc \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} + \frac{e}{c} A_\mu(x) \dot{x}^\mu \quad (2.33)$$

Si vede che il termine di interazione è uno scalare, quindi l'invarianza relativistica è garantita. Inoltre si può scrivere il quadripotenziale  $A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (\Phi, \vec{A})$ . Per trovare le equazioni del moto si scrive l'azione e si impone  $\delta S = 0$ :

$$S [x^\mu] = \int \left[ -mc \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} + \frac{e}{c} A_\mu(x) \dot{x}^\mu \right] d\tau \quad (2.34)$$

e il quadrimpulso:

$$p^\mu = \frac{mc}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \dot{x}^\mu + \frac{e}{c} A_\mu = m\dot{x}^\mu + \frac{e}{c} A_\mu \quad (2.35)$$

dove la seconda uguaglianza segue dal fatto che dato  $\tau$  tempo proprio  $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -c^2$ .

Le equazioni di Eulero Lagrange si scrivono:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \quad (2.36)$$

Dal momento che  $A_\mu = A_\mu(x(\tau))$  la derivata temporale a sinistra diventa:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{d\dot{x}^\mu}{d\tau} + \frac{e}{c} \dot{x}^\nu \partial_\nu A_\mu \quad (2.37)$$

La derivata parziale a destra si scrive invece:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \left( \frac{e}{c} A_\nu \dot{x}^\nu \right) = \frac{e}{c} \dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu \quad (2.38)$$

Eguagliando i due risultati come in (2.36) si trova:

$$\begin{aligned} m \frac{d\dot{x}^\mu}{d\tau} + \frac{e}{c} \dot{x}^\nu \partial_\nu A_\mu &= \frac{e}{c} \dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu \\ \implies m \frac{d\dot{x}^\mu}{d\tau} &= \frac{e}{c} \dot{x}^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \end{aligned} \quad (2.39)$$

per la definizione di quadrimpulso  $p^\mu = m\dot{x}^\mu$  e per la relazione che lega il tensore campo elettromagnetico e il quadripotenziale  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , si ottiene l'equazione seguente:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu \quad (2.40)$$

Questa equazione descrive il moto relativistico di una particella carica sottoposta alla forza di Lorentz del campo elettromagnetico. La forza emerge utilizzando il parametro tempo  $t$  al posto del tempo proprio  $\tau$  e dividendo l'equazione in parte spaziale e temporale:

$$\begin{aligned} \frac{dp^i}{dt} &= \frac{e}{c} F^{i\nu} \frac{dx_\nu}{dt} = \frac{e}{c} F^{i0} \frac{dx_0}{dt} + \frac{e}{c} F^{ij} \frac{dx_j}{dt} = \\ &= eE^i + \frac{e}{c} \epsilon^{ijk} B^k \frac{dx_j}{dt} = eE^i + \frac{e}{c} \epsilon^{ijk} \frac{dx_j}{dt} B^k \end{aligned} \quad (2.41)$$

che in forma vettoriale si scrive:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.42)$$

# Capitolo 3

## Equazioni d'onda relativistiche

In questo capitolo si ripercorrono le equazioni d'onda che sono state formulate nel tentativo di generalizzare l'equazione di Schrödinger per le particelle relativistiche. Le equazioni proposte garantiscano l'invarianza relativistica, ma presentano dei problemi concettuali che si risolvono soltanto reinterpretandole come equazioni per i campi quantizzati. Le equazioni relativistiche che descrivono la dinamica dei campi dipendono dalla massa  $m$  e dallo spin  $s$  delle particelle descritte. I principali testi consultati sono [8], [7], [19], [11], [1]

### 3.1 Equazione di Klein-Gordon

L'obiettivo iniziale è quello di cercare di conciliare i principi della meccanica quantistica con l'invarianza relativistica e costruire quindi una funzione d'onda Lorentz covariante. Si definisce allora un'equazione d'onda detta *Equazione di Klein-Gordon* che soddisfa questi requisiti per particelle con spin 0. Una particella libera di massa  $m$  ha un quadrimpulso  $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$  tale che la condizione di mass-shell sia soddisfatta:

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 \quad (3.1)$$

e quindi:

$$p_\mu p^\mu = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2 c^2 \implies E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (3.2)$$

Con questa equazione quadratica si può, attraverso il formalismo della meccanica quantistica, associare all'energia  $E$  e l'impulso  $\vec{p}$  i rispettivi operatori differenziali:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (3.3)$$

ed ottenere l'equazione seguente a partire da (3.2), con  $\phi = \phi(\vec{x}, t)$  la funzione d'onda:

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0 \quad (3.4)$$

Dato l'operatore di D'Alembert

$$\square \equiv \eta^\mu \nu \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu = -(\partial_0)^2 + \nabla^2 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \quad (3.5)$$

e  $\mu \equiv \frac{mc}{\hbar}$ , l'equazione di Klein-Gordon si riscrive:

$$(\square - \mu^2)\phi(x) = 0 \quad (3.6)$$

D'ora in avanti si useranno le unità  $\hbar = c = 1$  per cui  $\mu = m$ .

### Limite non relativistico ed equazione di Schrödinger

Si noti che nell'approssimazione non relativistica (quando  $E = p^2/2m$ ) si può operare la stessa sostituzione di (3.3) per ottenere l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (3.7)$$

che è quindi l'approssimazione non relativistica dell'equazione di Klein-Gordon. La densità di probabilità di trovare la particella nel punto  $\vec{x}$  al tempo  $t$  per l'equazione di Schrödinger è:

$$\rho = \psi^* \psi \quad (3.8)$$

e la corrente:

$$\vec{J} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (3.9)$$

che obbediscono all'equazione di continuità:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} &= \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) - \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = \\ &= \psi^* \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \psi \right) + \psi \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 \psi^* \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

dove  $\psi$  e  $\psi^*$  sono l'equazione di Schrödinger e la sua complessa coniugata.

### Equazione di continuità

Anche nel caso dell'equazione di Klein-Gordon si può trovare un'equazione di continuità, procedendo analogamente a ciò che è stato fatto per l'equazione di Schrödinger. Usando il formalismo dei quadrivettori si moltiplica a sinistra (3.6) per  $\phi^*$  e la complessa coniugata di (3.6) per  $\phi$  e poi si sottraggono:

$$0 = \phi^* (\square - m^2) \phi - \phi (\square - m^2) \phi^* = \partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (3.11)$$

per cui vale l'equazione di continuità:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (3.12)$$

con

$$J^\mu \equiv (\rho, \vec{J}) = \frac{1}{2im} (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (3.13)$$

La componente spaziale  $\vec{J}$  ha la stessa forma della corrente di Schrödinger, mentre  $\rho$  non è definita positiva. Infatti l'equazione di Klein-Gordon è un'equazione differenziale del secondo ordine in  $\partial/\partial t$  quindi  $\phi$  e  $\partial_0$  possono essere fissati arbitrariamente e  $\rho$  può essere negativa. Sebbene  $\rho$  si possa considerare come la densità di una quantità conservata, l'interpretazione probabilistica viene esclusa.

## Soluzioni

Data l'equazione (3.6) si possono trovare delle soluzioni in forma di onda piana:

$$\phi(\vec{x}, t) = N e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (3.14)$$

cosicché (3.2) sia soddisfatta. Allora esistono sia soluzioni positive con  $E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  che soluzioni negative  $E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Per una particella libera, la cui energia è costante, si può evitare il problema scegliendo che le particelle abbiano energia positiva. Se consideriamo invece particelle che interagiscono, non si possono trascurare gli stati ad energia negativa e il modello non ha un limite inferiore per l'energia, per cui sembra possibile estrarre dal sistema una quantità di energia infinita. Le soluzioni ad energia negativa verranno interpretate in teoria quantistica dei campi come antiparticelle con energia positiva, l'intuizione teorica proposta da Dirac verrà esposta in seguito.

## Azione e simmetrie

L'equazione di Klein-Gordon (3.6) per un campo scalare complesso si ottiene partendo dall'azione:

$$S[\phi, \phi^*] = \int \mathcal{L} d^4x \quad \mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (3.15)$$

Variando indipendentemente  $\phi$  e  $\phi^*$  e imponendo il principio di minima azione:

$$\delta S[\phi, \phi^*] = \int \left( \frac{\delta S[\phi, \phi^*]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x) + \frac{\delta S[\phi, \phi^*]}{\delta \phi^*(x)} \delta \phi^*(x) \right) d^4x = 0 \quad (3.16)$$

si ottengono le due equazioni del moto per il campo e il suo complesso coniugato:

$$\frac{\delta S[\phi, \phi^*]}{\delta \phi^*(x)} = (\square - m^2)\phi(x) = 0 \quad \frac{\delta S[\phi, \phi^*]}{\delta \phi(x)} = (\square - m^2)\phi^*(x) = 0 \quad (3.17)$$



Per un campo reale  $\phi = \phi^*$  l'azione si normalizza e si ricava nuovamente l'equazione di Klein-Gordon:

$$S[\phi] = \int \left( -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right) d^4x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} = (\square - m^2)\phi(x) = 0 \quad (3.18)$$

### Campo Complesso

Un campo scalare complesso si può vedere come la combinazione di due campi reali  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \quad \text{e} \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \quad (3.19)$$

Quindi la Lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi = -\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 - \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_2 \partial_\mu \varphi_2 - \frac{m^2}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \quad (3.20)$$

ed è possibile analizzare le simmetrie che possiede il campo complesso di Klein-Gordon libero. L'azione è invariante per simmetrie rigide del gruppo  $U(1)$  e per simmetrie generate dal gruppo di Poincaré.

Le trasformazioni di fase di  $U(1)$  sono date da:

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha} \phi(x) \quad \phi^*(x) \longrightarrow e^{-i\alpha} \phi^*(x) \quad (3.21)$$

con  $\alpha$  parametro continuo e costante. Allora:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &\longrightarrow e^{i\alpha} \partial_\mu \phi \\ \partial_\mu \phi^* &\longrightarrow e^{-i\alpha} \partial_\mu \phi^* \end{aligned} \quad (3.22)$$

L'azione è invariante per questo tipo di trasformazioni ed è possibile ritrovare, con la procedura in (2.23), una corrente di Noether:

$$J^\mu = i\phi^* \partial^\mu \phi - i\phi \partial^\mu \phi^* \equiv i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \quad (3.23)$$

che soddisfa l'equazione di continuità:  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Esiste una carica conservata:

$$Q \equiv \int J^0 d^3x = -i \int \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi d^3x \quad (3.24)$$

Siccome  $\phi$  e  $\phi^*$  hanno esponenziali opposti si dice che i due campi abbiano "cariche" opposte, per indicare che il loro contributo alla quantità conservata avrà segno opposto. I gradi di libertà associati ai due campi sono spesso chiamati *particelle* e *antiparticelle* che differiscono soltanto dalla carica che possiedono.

Le trasformazioni di fase (3.21) corrispondono a rotazioni della parte reale e immaginaria

del campo  $\phi$ . La teoria è invariante per simmetrie del gruppo  $SO(2)$  che è localmente equivalente a  $U(1)$ . Ogni elemento del gruppo  $SO(2)$  è identificato da un angolo  $\theta$ , quindi lo spazio in cui il gruppo è definito è quello dei valori  $\theta$ . Sapendo che per  $\theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \dots$  corrisponde la stessa rotazione si può concludere che lo spazio è un cerchio.  $U(1)$  ha elementi nella forma  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  e siccome  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  anche lo spazio di questi elementi è un cerchio. L'invarianza risulta esplicita se si scrive la Lagrangiana in termini di  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , come in (3.20).

Questa Lagrangiana è invariante anche per simmetrie generate dal gruppo di Poincaré:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (3.25)$$

Per una traslazione infinitesima si ha:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) - a^\mu \partial_\mu \phi(x) \\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi'^*(x) = \phi^*(x) - a^\mu \partial_\mu \phi^*(x) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Se consideriamo  $\alpha \rightarrow \alpha(x)$  una funzione arbitraria, si possono trovare le correnti di Noether associate alle traslazioni infinitesime osservando come varia l'azione:

$$\delta_{\alpha(x)} S[\phi, \phi^*] = \int (\partial_\mu \alpha_\nu(x)) (\partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \partial^\mu \phi + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}) d^4x \quad (3.27)$$

dove  $\mathcal{L}$  è la densità di Lagrangiana in (3.20) e le correnti di Noether sono definite da  $T^{\mu\nu}$  chiamato *tensore energia-impulso* che per il teorema di Noether è conservato, ovvero soddisfa l'equazione di continuità  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \partial^\mu \phi + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.28)$$

$T^{\mu\nu}$  è simmetrico in  $\nu$  e  $\mu$ , ma i due indici hanno origini diverse infatti uno corrisponde all'indice del quadrivettore corrente  $J^\mu$  mentre l'altro indicizza le quattro correnti associate alle quattro traslazioni indipendenti nello spazio e nel tempo  $a^\mu$ . Il tensore energia-impulso si chiama così perché le quantità conservate ad esso associate sono proprio l'energia e l'impulso. L'invarianza sotto traslazioni temporali, ossia l'assenza di forze dipendenti dal tempo, implica che l'energia debba essere necessariamente una quantità costante. Dall'invarianza per traslazioni spaziali segue invece che le tre componenti dell'impulso siano costanti:

$$\begin{aligned} P^0 &\equiv E = \int T^{00} d^3x \\ P^i &= \int T^{i0} d^3x \end{aligned} \quad (3.29)$$

## 3.2 Equazione di Dirac

I problemi presentati dall'equazione di Klein-Gordon spinsero Paul Dirac nel 1928 a formulare una nuova equazione d'onda che ammettesse un'interpretazione probabilistica. La funzione d'onda proposta da Dirac si può scrivere:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + mc^2 \beta) \psi \equiv H \psi \quad (3.30)$$

dove  $\vec{\alpha}$  e  $\beta$  sono matrici hermitiane, per garantire che anche l'hamiltoniana di Dirac  $H$  lo sia. È necessario trovare delle condizioni su  $\vec{\alpha}$  e  $\beta$  perché la funzione d'onda presentata da Dirac sia consistente con la teoria, si riassumono di seguito le richieste da soddisfare:

- La relazione corretta tra energia e impulso:  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ .
- L'esistenza di un quadrivettore densità di corrente che è conservato e la cui prima componente è definita positiva  $\rho \geq 0$ , così da poterla interpretare come una densità di probabilità.
- La covarianza dell'equazione per trasformazioni di Lorentz.

Per poter analizzare la prima richiesta riscriviamo la relazione  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$  operando la sostituzione in (3.3):

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi = (-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4) \psi \quad (3.31)$$

Elevando al quadrato gli operatori da entrambi i lati di (3.30):

$$\begin{aligned} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi &= (-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + mc^2 \beta) (-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + mc^2 \beta) \psi = \\ &= -\hbar^2 c^2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \frac{\partial^2 \psi}{(\partial x^i)^2} - \hbar^2 c^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^3 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} \\ &\quad - i\hbar m c^3 \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + m^2 c^4 \beta^2 \psi \end{aligned} \quad (3.32)$$

che è consistente con (3.31) se le due matrici soddisfano le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij} \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Le relazioni appena presentate si possono riscrivere sapendo che, dati due operatori  $A$  e  $B$ , l'operatore  $AB + BA$  si chiama anticommutatore e si indica con il simbolo  $\{A, B\} = AB + BA$ :

$$\begin{aligned}\{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0 & \text{per } i \neq j \\ \{\alpha_i, \beta\} &= 0 \\ \alpha_i^2 &= \beta^2 = 1\end{aligned}\tag{3.34}$$

dove nella parte destra delle equazioni in (3.33) e (3.34) è sottointesa la matrice identità  $I$ . Dirac dimostrò che le matrici di minore dimensione che possono soddisfare queste condizioni sono matrici  $4 \times 4$ . Una scelta convenzionale è data dalle matrici a blocchi  $2 \times 2$  seguenti:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\tag{3.35}$$

con  $\sigma^i$  le matrici di Pauli, scritte in forma esplicita in (1.47). Le matrici  $\vec{\alpha}$  e  $\beta$  sono matrici senza traccia e questa soluzione viene detta rappresentazione di Dirac.

Si può introdurre un'altra notazione con le matrici gamma  $\gamma^\mu$ :

$$\gamma^0 \equiv -i\beta \quad \gamma^i \equiv -i\beta\alpha^i\tag{3.36}$$

In questo modo, moltiplicando (3.30) per  $\frac{1}{\hbar c}\beta$  e ricordando che  $\beta^2 = 1$  e  $\mu = \frac{mc}{\hbar}$  si può riscrivere l'equazione di Dirac in forma covariante<sup>1</sup>:

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + \mu)\psi = 0\tag{3.37}$$

utilizzando le unità di misura  $\hbar = c = 1$  e la notazione slash di Feynman  $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ :

$$(\not{\partial} + m)\psi = 0\tag{3.38}$$

La relazione che lega le matrici  $\gamma^\mu$  si trova tenendo in considerazione le relazioni in (3.34):

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\tag{3.39}$$

Si può dimostrare che  $\gamma^0$  è antihermitiana e le  $\gamma^i$  sono hermitiana:

$$(\gamma^0)^\dagger = -\gamma^0 \quad (\gamma^i)^\dagger = \gamma^i\tag{3.40}$$

## Soluzioni

Siccome le  $\gamma^\mu$  sono matrici  $4 \times 4$  è necessario interpretare la funzione d'onda  $\psi(x)$  come un vettore colonna a quattro componenti detto *spinore di Dirac*. Le quattro componenti

---

<sup>1</sup> $\mu$  è l'inverso della lunghezza d'onda Compton associata alla massa  $m$

del campo di Dirac sono di natura spinoriale e si comportano in modo differente sotto trasformazioni di Lorentz<sup>2</sup>.

Per l'equazione libera si possono cercare delle soluzioni in forma di onda piana del tipo:

$$\psi(x) \sim \omega(p)e^{ip_\mu x^\mu} \quad (3.42)$$

dove  $e^{ip_\mu x^\mu}$  è la fase dell'onda che si propaga e  $\omega(p)$  è uno spinore a quattro componenti che rappresenta la polarizzazione collegata allo spin. Inserendo (3.42) nell'equazione di Dirac (3.30) si osserva che  $\omega(p)$  deve soddisfare l'equazione:

$$(i\gamma^\mu p_\mu + m)\omega(p) = 0 \quad (3.43)$$

Sviluppando questa equazione tramite (3.36) e  $p^\mu = (E, \vec{p})$ :

$$0 = (i\gamma^0 p_0 + i\gamma^i p_i + m)\omega(p) = (-\beta E + \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m)\omega(p) = (-E + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\omega(p) \quad (3.44)$$

Siccome è conveniente utilizzare le matrici a blocchi  $2 \times 2$ , si divide lo spinore  $\omega(p)$  in due spinori a due componenti  $\varphi$  e  $\chi$ :

$$\omega(p) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

ed utilizzando le matrici  $\vec{\alpha}$  e  $\beta$  nella rappresentazione di Dirac si scrive esplicitamente (3.44):

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mI & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -mI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

per cui:

$$(E - m)\varphi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi \quad (3.47)$$

$$(E + m)\chi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\varphi \quad (3.48)$$

Per ogni valore di  $\vec{p}$  ci sono quattro soluzioni: due soluzioni indipendenti a energia positiva, che corrispondono agli stati di una particella di spin  $\frac{1}{2}$ , e due soluzioni indipendenti ad energia negativa. Infatti se si estrae  $\chi$  da (3.48) e si sostituisce in (3.47) sapendo:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2 I \quad (3.49)$$

si trova che:

$$(E - m)(E + m)\varphi = \vec{p}^2 \varphi \quad (3.50)$$

che corrisponde al risultato trovato per l'equazione di Klein-Gordon:

$$E = \pm (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2} \quad (3.51)$$

L'interpretazione delle soluzioni a energia negativa verrà trattata in seguito.

---

<sup>2</sup>L'equazione di Dirac si può scrivere in modo esplicito indicando con gli indici  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$  le componenti di un quadrivettore e con gli indici  $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$  le componenti dello spinore di Dirac come:

$$((\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu + m \delta_{\alpha\beta})\psi_\beta(x) = 0 \quad (3.41)$$

## Equazione di continuità

Una delle ragioni principali che spinse Dirac a cercare una nuova equazione fu quella di ottenere una densità di carica definita positiva che si potesse interpretare come una densità di probabilità  $\rho = J^0$  con un'equazione di continuità  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Siccome  $\psi$  è uno spinore complesso,  $\rho$  deve essere del tipo  $\psi^\dagger \mathcal{R} \psi$  per essere reale e positivo. Si cerca in un primo momento l'equazione di Dirac per  $\psi^\dagger$  a partire da (3.30) sapendo che  $\vec{\alpha}$  e  $\beta$  sono matrici hermitiane<sup>3</sup>:

$$-i\hbar\partial_t\psi^\dagger = i\hbar c\vec{\nabla}\psi^\dagger \cdot \vec{\alpha} + \psi^\dagger mc^2\beta \quad (3.52)$$

Moltiplicando per  $\psi^\dagger$  la (3.30) a sinistra e per  $\psi$  la (3.52) a destra e sottraendo l'una all'altra, si ottiene:

$$\psi^\dagger \left( i\hbar\partial_t\psi - (-i\hbar c\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + mc^2\beta)\psi \right) - \left( -i\hbar\partial_t\psi^\dagger - i\hbar c\vec{\nabla}\psi^\dagger \cdot \vec{\alpha} - \psi^\dagger mc^2\beta \right) \psi = 0 \quad (3.53)$$

siccome i termini di massa  $\psi^\dagger mc^2\beta\psi$  si semplificano, segue l'equazione di continuità:

$$\partial_t(\psi^\dagger\psi) + \vec{\nabla} \cdot (c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi) = 0 \quad (3.54)$$

Per utilizzare una scrittura più compatta si definisce il campo coniugato di Dirac  $\bar{\psi}$  come:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\beta = \psi^\dagger i\gamma^0 \quad (3.55)$$

per cui il quadrivettore  $J^\mu$  si può definire come:

$$J^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \begin{cases} J^0 = \rho = i\bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \\ J^i = i\bar{\psi}\gamma^i\psi = \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi \end{cases} \quad (3.56)$$

che corrisponde al risultato trovato in (3.54). Risulta quindi valida la scrittura più compatta per l'equazione di continuità  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Lo stesso risultato si può ottenere analizzando le simmetrie interne generate dalle trasformazioni di fase del gruppo  $U(1)$ . Come per l'equazione di Klein-Gordon, si considerano trasformazioni infinitesime del tipo:

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= i\alpha\psi(x) \\ \delta\bar{\psi}(x) &= -i\alpha\bar{\psi}(x) \end{aligned} \quad (3.57)$$

e generalizzando il parametro  $\alpha$  ad una funzione arbitraria  $\alpha(x)$  si ottiene una variazione dell'azione:

$$\delta S[\psi, \bar{\psi}] = \int \partial_\mu\alpha(x)(-i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) d^4x \quad (3.58)$$

da cui segue che per  $\alpha$  costante si verifica nuovamente la simmetria e si ottiene la corrispondente corrente di Noether  $J^\mu$  definita come sopra.

---

<sup>3</sup>quindi  $\vec{\alpha}^\dagger = \vec{\alpha}$  e  $\beta^\dagger = \beta$

## Rappresentazione spinoriale del gruppo di Lorentz e covarianza relativistica

In questa trattazione l'equazione di Dirac è stata ricavata da considerazioni di natura relativistica pertanto soddisfa direttamente la condizione di invarianza relativistica. Tuttavia, si può verificare esplicitamente che sia invariante in forma per trasformazioni di Lorentz proprie e ortocrone, cioè per trasformazioni del gruppo  $SO^\uparrow(3,1)$ . Si consideri una trasformazione di Lorentz  $\Lambda$ . Sia  $\psi$  la funzione d'onda descrivente il sistema nel sistema di riferimento iniziale e  $\psi'$  la funzione d'onda nel sistema di riferimento trasformato. Entrambe devono soddisfare l'equazione di Dirac (3.37):

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) &= 0 \\(\gamma^\mu \partial'_\mu + m)\psi'(x') &= 0\end{aligned}\tag{3.59}$$

con  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  e  $\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu$ . Di conseguenza deve esistere una relazione locale tra  $\psi$  e  $\psi'$  e si assume che questa relazione sia lineare:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)\tag{3.60}$$

La seconda equazione di (3.59) si può riscrivere sostituendo le quantità trasformate:

$$(\gamma^\mu \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu S(\Lambda) + mS(\Lambda))\psi(x) = 0\tag{3.61}$$

si moltiplica per  $S^{-1}(\Lambda)$  e si confronta con la prima equazione in (3.59) per ottenere la condizione:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu\tag{3.62}$$

Una trasformazione infinitesima propria<sup>4</sup> si può scrivere:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad \text{e in forma matriciale} \quad \Lambda = I + \omega\tag{3.63}$$

allora

$$S(\Lambda) = I + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\tag{3.64}$$

con le 6 matrici  $4 \times 4$  antisimmetriche  $\Sigma^{\mu\nu} = -\Sigma^{\nu\mu}$  sono i generatori delle trasformazioni di Lorentz sugli spinori. Se si sostituisce (3.64) in (3.62) si trova:

$$[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\eta^{\mu\rho}\gamma^\nu - \eta^{\nu\rho}\gamma^\mu)\tag{3.65}$$

che si risolve con

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\tag{3.66}$$

che prova l'invarianza sotto trasformazioni di Lorentz dell'equazione di Dirac. L'espressione in (3.66) identifica una rappresentazione spinoriale dei generatori  $M^{\mu\nu}$  del gruppo

---

<sup>4</sup>La considerazioni che vengono fatte di seguito sono analoghe a quelle trattate nell'ultima sezione del primo capitolo, ma si considerano ora le rappresentazioni spinoriali.

di Lorentz (1.72) su uno spinore complesso a quattro componenti. Per trasformazioni finite si possono ridefinire  $\Lambda$  e  $S(\Lambda)$  come:

$$\begin{aligned}\Lambda(\omega) &= e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \\ S(\Lambda(\omega)) &= e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}\end{aligned}\tag{3.67}$$

### Interpretazione delle soluzioni a energia negativa

Come per l'equazione di Klein-Gordon, una particella libera di Dirac (e.g. un elettrone) in uno stato ad energia positiva potrebbe transitare in uno stato di energia negativa e poi continuare a saltare verso stati di energia sempre minore senza limite, emettendo nel processo una quantità infinita di energia. Non esisterebbero quindi stati di energia positiva stabili.

La soluzione proposta da Dirac si basa sul fatto che gli elettroni sono fermioni con spin  $\frac{1}{2}$  ed obbediscono al *principio di esclusione di Pauli*. Egli propose di identificare lo stato ad energia minore, detto *vuoto*, come una configurazione in cui tutti gli stati ad energia negativa sono completamente occupati e il principio di esclusione impedisce ad altri elettroni di “cadere” in questi livelli energetici. Il vuoto viene interpretato come un mare di particelle di carica ed energia negative. Invece, lo stato che possiede un solo elettrone consiste in un livello di energia positiva occupata sopra al mare di Dirac  $E_{elettrone} = E_p > 0$  e  $Q_e = e$  dove  $e < 0$  per convenzione.

Quando nel mare di Dirac manca un elettrone, si forma una buca di energia. La configurazione risultante è data da una particella con energia  $E$  e carica  $-e$  sul vuoto. Infatti si riottiene il vuoto aggiungendo una particella con energia  $-E$  e carica  $e$  che riempie la buca, per cui si trova che la buca ha effettivamente energia positiva e carica opposta a quella dell'elettrone:

$$\begin{aligned}E_{buca} + E_{elettrone} = E_{vuoto} = 0 &\implies E_{buca} = E_p > 0 \\ Q_{buca} + e = 0 &\implies Q_{buca} = -e\end{aligned}\tag{3.68}$$

Quindi l'assenza di un elettrone in uno stato di energia negativa equivale alla presenza di una particella di carica positiva in uno stato di energia positiva, detta *positrone*, che è l'antiparticella dell'elettrone. Questa teoria permise a Dirac di prevedere l'esistenza delle antiparticelle ( $e^+$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{\nu}$ , ...) che fu poi confermata dalle osservazioni sperimentali. Sebbene l'interpretazione delle soluzioni dell'equazione di Dirac in termini di antiparticelle fu un grande successo, essa non può essere impiegata per le particelle con spin 0 (i bosoni), perché non sono soggette al principio di esclusione. Ne consegue inoltre che l'equazione di Dirac non si può più considerare come un'equazione per la particella singola, dal momento che descrive sia particelle che antiparticelle. Un modo per ridefinirla è interpretare lo spinore  $\psi$  come un campo quantistico. L'estensione di questa teoria per i fermioni ad una teoria più generale valida anche per i bosoni, conduce direttamente alla QFT.



### 3.3 Equazioni di Maxwell

Le particelle con spin 1 sono descritte da due diverse equazioni: le *equazioni di Maxwell* per le particelle senza massa (e.g. i fotoni) e le *equazioni di Proca* per quelle massive (e.g. i mediatori delle interazioni deboli, detti bosoni  $W^\pm$ ). Ci proponiamo di studiare soltanto le equazioni di Maxwell, che sono note in forma vettoriale e con le unità di misura di Heaviside-Lorentz  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$  e  $c = 1$ :

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho & (2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} &= \vec{J} \\ (3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} - \partial_t \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

dove (1) è la legge di Gauss, (2) la legge di Ampère, (3) dice che non esistono monopoli magnetici, (4) la legge di Faraday. Le equazioni (3) e (4) sono equazioni senza sorgenti, mentre le altre due sono con sorgenti.  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono vettori dello spazio euclideo ed hanno in tutto 6 componenti. Si può definire un tensore di rango 2 antisimmetrico<sup>5</sup>  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  detto *tensore del campo elettromagnetico* e definito:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

e  $J^\mu = (J^0, \vec{J}) = (\rho, \vec{J})$ . Si abbassano gli indici con la metrica di Minkowski:

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma}F^{\lambda\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

ovvero  $F_{0i} = -F^{0i}$ ,  $F_{ij} = F^{ij}$ . Le quattro equazioni di Maxwell con sorgenti si scrivono quindi in forma covariante<sup>6</sup> come:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \quad (3.74)$$

<sup>5</sup>Il fatto che sia antisimmetrico impone che le componenti diagonali siano tutte nulle e quelle sopra la diagonale  $\mu > \nu$  siano uguali e di segno opposto alle componenti  $\mu < \nu$ . Rimangono  $(16 - 4)/2$  componenti indipendenti.

<sup>6</sup>A titolo esemplificativo si può mostrare che se consideriamo l'indice libero  $\nu = 1$ :

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_0 F^{01} + \partial_i F^{i1} = \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} \quad (3.72)$$

dove per (3.70):  $F^{01} = E_1$ ,  $F^{11} = 0$ ,  $F^{21} = -B_3$  e  $F^{31} = B_2$  quindi:

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_t E_1 - \partial_2 E_3 + \partial_3 B_2 = (\partial_t \vec{E} - \vec{\nabla} \times \vec{B})_1 \quad (3.73)$$

e si ritrova così la prima componente dell'equazione (2) di (3.69).

Mentre le equazioni di Maxwell senza sorgenti si scrivono in forma covariante come<sup>7</sup>:

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (3.75)$$

Si introduce quindi il quadripotenziale:

$$A^\mu = (\Phi, \vec{A}) \quad (3.76)$$

dove  $\Phi$  è il potenziale scalare e  $\vec{A}$  il potenziale vettore e  $A_\mu = (-\Phi, \vec{A})$ . Si ridefiniscono i vettori  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \Phi \quad (3.77)$$

Osservando la parte a destra delle equazioni introdotte, si può riscrivere il tensore campo elettromagnetico come:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.78)$$

e si verifica che, in accordo con (3.71):

$$\begin{aligned} F_{0i} &= E_i \\ F_{ij} &= \epsilon_{ijk} B_k \end{aligned} \quad (3.79)$$

---

<sup>7</sup>Questa equazione viene anche detta *Identità di Bianchi*

# Capitolo 4

## Teorie di Gauge abeliane e non-abeliane

In questo capitolo si utilizzeranno le nozioni introdotte in precedenza al fine di descrivere nel dettaglio le teorie di gauge e le procedure che vi conducono. A partire dalla teoria dell'elettromagnetismo si mostrerà in che modo è possibile costruire una Lagrangiana invariante per trasformazioni di gauge in grado di descrivere l'interazione elettromagnetica. L'invarianza sotto trasformazioni di gauge richiede l'introduzione di campi di gauge, che verranno interpretati come i quanti che mediano le interazioni tra i fermioni. Verrà dunque presentato il caso della teoria elettrodinamica quantistica QED, una teoria di gauge basata sul gruppo abeliano  $U(1)_Q$  che possiede un solo mediatore, il fotone. La trattazione verrà poi estesa a gruppi non-abeliani. Questa generalizzazione costituisce il modello per la descrizione delle interazioni fondamentali, in quanto getta le basi per la cromodinamica quantistica e per la teoria elettrodebole. La QCD è una teoria di gauge basata sul gruppo  $SU(3)_c$  con  $c$  il colore, e descrive l'interazione forte, mediata da otto gluoni che corrispondono agli otto generatori del gruppo. L'interazione elettrodebole è il risultato dell'unificazione dell'interazione elettromagnetica e dell'interazione debole e si basa sul gruppo di gauge  $SU(2) \times U(1)$ . La trattazione presentata si fonda sullo studio dei testi [6], [19], [1], [2], [17] e [20].

### 4.1 Teorie di gauge abeliane e il campo elettromagnetico

Nel capitolo precedente sono state analizzate le equazioni di Klein-Gordon, di Dirac e di Maxwell che descrivono la propagazione dei campi liberi. A partire da questa formulazione ci si propone di studiare il modo in cui i campi interagiscono tra loro. Le interazioni tra i campi fondamentali sono dettate da un principio di gauge, che emerge dalla neces-

sità che le quantità conservate da queste interazioni siano conservate localmente e non solo globalmente.

### Simmetria di gauge

Vogliamo innanzitutto mostrare da dove nasce la possibilità di interpretare l'elettromagnetismo come una teoria di gauge invariante per simmetrie locali del gruppo delle fasi  $U(1)$ . L'origine di questa invarianza risiede nel fatto che il quadripotenziale  $A_\mu$  non sia definito univocamente per  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Infatti si può introdurre una trasformazione del quadripotenziale del tipo:

$$\begin{aligned}\vec{A}(x) &\longrightarrow \vec{A}'(x) = \vec{A}(x) - \vec{\nabla}\chi(x) \\ \Phi(x) &\longrightarrow \Phi'(x) = \Phi(x) - \partial_t\chi(x)\end{aligned}\quad (4.1)$$

o equivalentemente in forma covariante:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x) \quad (4.2)$$

dove  $\chi(x)$  è una funzione arbitraria dello spaziotempo. Per verificare che  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  non cambino operando questa trasformazione è conveniente osservare il comportamento del tensore campo elettromagnetico  $F_{\mu\nu}$ , come definito in (3.78):

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &\longrightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu(A_\nu - \partial_\nu\chi) - \partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu\chi) = \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu\partial_\nu\chi - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu\partial_\mu\chi = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (4.3)$$

dove termini  $\partial_\mu\partial_\nu\chi$  e  $\partial_\nu\partial_\mu\chi$  si cancellano a vicenda perché le derivate parziali commutano. La trasformazione (4.2) viene detta *simmetria di gauge* e l'invarianza del campo  $F_{\mu\nu}$ , quindi delle equazioni di Maxwell rispetto a questa trasformazione, si dice *invarianza di gauge*. Questa simmetria è locale<sup>1</sup>, infatti le funzioni  $\chi(x)$  dipendono in modo arbitrario dal punto dello spaziotempo. Ci si può ricondurre al gruppo  $U(1)$  e scrivere la trasformazione:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - ie^{-i\chi(x)}\partial_\mu e^{i\chi(x)} \quad (4.4)$$

da cui segue che l'elettromagnetismo è una teoria di gauge del gruppo  $U(1)$ .

### Soluzioni

A causa della simmetrie di gauge, le equazioni del moto non hanno una soluzione unica. L'invarianza di gauge si può utilizzare per fissare delle condizioni che permettono

---

<sup>1</sup>Si rimanda alla sezione 2.2.

di eliminare (anche solo parzialmente) le configurazioni equivalenti generate da tale simmetria. Se si sostituisce (3.78) in (3.74) per trovare l'equazione di Maxwell in funzione del potenziale:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = -J^\nu \quad (4.5)$$

Si può imporre la condizione detta *condizione di Lorenz* o *gauge di Lorenz*:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (4.6)$$

e le equazioni del moto si semplificano a:

$$\square A^\nu = -J^\nu \quad (4.7)$$

Se il potenziale scelto non soddisfa questa condizione si può sempre sostituire con un altro potenziale  $\tilde{A}_\mu$  tramite una trasformazione di gauge. Considerando  $\chi$  tale che:

$$\square \chi = -\partial^\mu A_\mu \quad (4.8)$$

si ottiene:

$$\partial^\mu \tilde{A}_\mu = \partial^\mu(A_\mu + \partial_\mu \chi) = \partial^\mu A_\mu + \square \chi \equiv 0 \quad (4.9)$$

perciò risulta possibile passare da un potenziale all'altro con trasformazioni di gauge generate da  $\chi$  tale che  $\square \chi = 0$ . Nel vuoto, il quadripotenziale soddisfa le condizioni:

$$\square A_\mu = 0 \quad \partial^\mu A_\mu = 0 \quad (4.10)$$

e le soluzioni sono:

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu(p) e^{ip \cdot x} \quad p_\mu p^\mu = 0 \quad p_\mu \epsilon^\mu(p) = 0 \quad (4.11)$$

che contengono 3 polarizzazioni indipendenti. La polarizzazione longitudinale si può rimuovere effettuando una trasformazione di gauge che preservi la condizione (4.6). Le onde elettromagnetiche nel vuoto sono caratterizzate soltanto da 2 polarizzazioni linearmente indipendenti che corrispondono ai due valori possibili dell'elicità  $\pm 1$  per i quanti del campo elettromagnetico - i fotoni.

### 4.1.1 Campo complesso e interazione elettromagnetica

Abbiamo visto nel capitolo precedente (sezione (3.1)) che un campo scalare complesso è invariante per trasformazioni  $U(1)$  globali, ossia trasformazioni in cui il parametro  $\alpha$  è costante. Il fatto che sia costante implica che se viene eseguita una rotazione di un angolo  $\theta$  nello spazio interno di  $\phi$  in un dato punto, simultaneamente si compia la stessa rotazione in tutti gli altri punti dello spazio. Si abbandona allora la richiesta

che il parametro  $\alpha$  sia costante e si promuove la trasformazione ad una trasformazione locale dove  $\alpha(x)$  è una funzione arbitraria dello spaziotempo. Per una trasformazione infinitesima  $\alpha(x) \ll 1$  si scrive<sup>2</sup>:

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi \qquad \phi^* \longrightarrow \phi'^* = e^{-i\alpha} \phi^* \quad (4.12)$$

quindi:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &\longrightarrow \partial_\mu \phi' = e^{i\alpha} \partial_\mu \phi + i(\partial_\mu \alpha) e^{i\alpha} \phi \\ \partial_\mu \phi^* &\longrightarrow \partial_\mu \phi'^* = e^{-i\alpha} \partial_\mu \phi^* - i(\partial_\mu \alpha) e^{-i\alpha} \phi^* \end{aligned} \quad (4.13)$$

Confrontando queste trasformazioni (4.13) con quelle a parametri costanti (3.22) si nota che è presente un termine aggiuntivo  $(\partial_\mu \alpha)$  per cui  $\partial_\mu \phi$  non si trasforma in modo covariante. Anche la Lagrangiana non è più invariante infatti (3.15) si trasforma come:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{KG}(\phi', \phi'^*) &= -\partial^\mu \phi'^* \partial_\mu \phi' - m^2 \phi'^* \phi' = \\ &= -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + (\partial_\mu \alpha)(i\phi^* \partial^\mu \phi - i\phi \partial^\mu \phi^*) - (\partial_\mu \alpha)(\partial^\mu \alpha) \phi^* \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (4.14) \\ &= \mathcal{L}_{KG}(\phi, \phi^*) + (\partial_\mu \alpha) J^\mu - (\partial_\mu \alpha)(\partial^\mu \alpha) \phi^* \phi \end{aligned}$$

dove  $J^\mu$  è dato da (3.23). Per ristabilire l'invarianza per trasformazioni di gauge si introduce allora un quadrivettore  $A_\mu$  e si aggiunge un termine alla Lagrangiana nella forma:

$$\mathcal{L}_1 = -e J^\mu A_\mu \quad (4.15)$$

a patto che per trasformazioni di gauge  $A_\mu$  diventi:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \quad (4.16)$$

Una volta operata la trasformazione su  $\mathcal{L}_1$ , si trova:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_1 &= -e J'^\mu A'_\mu = -e(i\phi^* \partial^\mu \phi - i\phi \partial^\mu \phi^* - 2(\partial^\mu \alpha) \phi^* \phi)(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha) = \\ &= -e(J^\mu - 2(\partial^\mu \alpha) \phi^* \phi)(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha) = \\ &= \mathcal{L}_1 - (\partial_\mu \alpha) J^\mu + 2e(\partial^\mu \alpha) \phi^* \phi A_\mu + 2(\partial_\mu \alpha)(\partial^\mu \alpha) \phi^* \phi \end{aligned} \quad (4.17)$$

Allora:

$$\mathcal{L}'_{KG} + \mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_1 + (\partial_\mu \alpha)(\partial^\mu \alpha) \phi^* \phi + 2e(\partial^\mu \alpha) A_\mu \phi^* \phi \quad (4.18)$$

dove si elidono i termini nella forma  $\partial_\mu \alpha$  ma è necessario aggiungere un'altro termine quadratico:

$$\mathcal{L}_2 = -e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \quad (4.19)$$

---

<sup>2</sup>Si omette per semplicità di scrittura la dipendenza (fondamentale) del campo  $\phi$  e dei parametri  $\alpha$  da  $x$ .

da cui:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_2 &= -e^2 A'_\mu A'^\mu \phi'^* \phi' = -e^2 \left( A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \right) \left( A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \alpha \right) e^{-i\alpha} \phi^* e^{i\alpha} \phi = \\
&= -e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi + 2e (\partial^\mu \alpha) A_\mu \phi^* \phi - (\partial_\mu \alpha) (\partial^\mu \alpha) \phi^* \phi = \\
&= \mathcal{L}_2 - 2e (\partial^\mu \alpha) A_\mu \phi^* \phi - (\partial_\mu \alpha) (\partial^\mu \alpha) \phi^* \phi
\end{aligned} \tag{4.20}$$

E finalmente la Lagrangiana totale risulta invariante:

$$\mathcal{L}'_{KG} + \mathcal{L}'_1 + \mathcal{L}'_2 = \mathcal{L}_{KG} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \tag{4.21}$$

Questo risultato è stato trovato introducendo il quadrivettore  $A_\mu$  e il suo accoppiamento con la corrente di Noether  $J^\mu$ . Si suppone però che  $A_\mu$  stesso contribuisca alla Lagrangiana, purché questo termine d'interazione del campo elettromagnetico libero sia invariante per trasformazioni di gauge. Definiamo allora il rotore di  $A_\mu$  come:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.22}$$

Il tensore  $F_{\mu\nu}$  deve essere a sua volta invariante. Si può quindi aggiungere un termine che descriva la propagazione libera del campo  $A_\mu$ , ossia dei fotoni, nella forma:

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{4.23}$$

Unendo tutte le formule introdotte si scrive la Lagrangiana totale:

$$\mathcal{L}_{tot} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) A_\mu - e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{4.24}$$

Si può osservare che l'interazione con il campo elettromagnetico deriva naturalmente dalla condizione che l'azione sia invariante sotto trasformazioni locali. Inoltre  $F_{\mu\nu}$  definito in (4.22) non è altro che il tensore campo elettromagnetico (3.78) e questo garantisce che il quadrivettore  $A_\mu$  introdotto in (4.16) rappresenti effettivamente il quadripotenziale elettromagnetico. Il campo elettromagnetico si reinterpreta come il campo di gauge che si deve introdurre per garantire l'invarianza per trasformazioni locali di gauge  $U(1)$ .

### Sostituzione minimale e derivata covariante

La sostituzione minimale è un metodo che permette di costruire teorie invarianti sotto simmetrie di gauge a partire da teorie che non lo sono. Nel caso non relativistico si può costruire l'Hamiltoniana di una particella carica in un campo elettromagnetico a partire da quella di una particella libera facendo la sostituzione:

$$p_i \longrightarrow \pi_i = p_i - \frac{e}{c} A_i(x) \tag{4.25}$$

dove  $\pi_i$  viene chiamato *momento covariante*. Allora l'Hamiltoniana si scrive:

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} \quad (4.26)$$

assumendo che la particella abbia carica  $e$ . Per ulteriori dettagli si rimanda a [13] e [12]. Questa sostituzione si può generalizzare in notazione relativistica:

$$p_\mu \quad \longrightarrow \quad p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu(x) \quad (4.27)$$

Con il formalismo della meccanica quantistica (3.3) e utilizzando le unità di misura naturali  $c = \hbar = 1$  si nota che dalla sostituzione minimale compare direttamente una nuova quantità  $D_\mu$ :

$$p_\mu \quad \rightarrow \quad -i\partial_\mu \qquad p_\mu - eA_\mu \quad \rightarrow \quad -i(\partial_\mu - ieA_\mu) = -iD_\mu \quad (4.28)$$

chiamata *derivata covariante*  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ .

Infatti se si confrontano la Lagrangiana di Klein-Gordon (3.15) con la Lagrangiana totale (4.24) si osserva che quest'ultima si può ottenere direttamente sostituendo  $D_\mu$  a  $\partial_\mu$ . La derivata covariante prende il nome dal fatto che, a differenza di  $\partial_\mu$ , si trasforma in modo covariante sotto trasformazioni di gauge. Per mostrarlo esplicitamente, si considerino nuovamente le trasformazioni locali infinitesime in (4.12) e si osservi che:

$$\begin{aligned} D'_\mu \phi' &= (\partial_\mu - ieA'_\mu)\phi' = (\partial_\mu - ie(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha))e^{i\alpha}\phi = \\ &= \partial_\mu(e^{i\alpha}\phi) - ieA_\mu e^{i\alpha}\phi - i(\partial_\mu\alpha)e^{i\alpha}\phi = e^{i\alpha}(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi = e^{i\alpha}D_\mu\phi \end{aligned} \quad (4.29)$$

che è il risultato che ci aspettiamo. Le derivate covarianti non commutano e il tensore campo elettromagnetico  $F_{\mu\nu}$  emerge da questa proprietà:

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -ieF_{\mu\nu} \quad (4.30)$$

In generale un tensore  $\phi_q$  si trasforma per il gruppo  $U(1)$  così:

$$\phi_q \quad \longrightarrow \quad \phi'_q = e^{iq\alpha}\phi_q \quad (4.31)$$

dove  $q$  rappresenta la carica del campo ( $q$  è una rappresentazione irriducibile del gruppo  $U(1)$ ). La derivata covariante  $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu Q$  dove  $Q$  è il generatore di  $U(1)$  con algebra di Lie abeliana  $[Q, Q] = 0$  e si verifica che:

$$D_\mu \phi_q = \partial_\mu \phi_q - iqA_\mu \phi_q \quad (4.32)$$

che è di nuovo un tensore di carica  $q$ . La derivata covariante ha infatti la peculiarità di preservare il carattere tensoriale degli oggetti su cui agisce. La carica  $e$  che appare in (4.28) è una *costante di accoppiamento*. La carica elettrica non rappresenta soltanto una quantità conservata ma misura anche l'intensità con cui il campo  $\phi$  interagisce con il campo elettromagnetico.



### Corrente covariante conservata

Le equazioni di Maxwell con sorgenti si ottengono a partire dalla Lagrangiana (4.24) variando  $A_\mu$ . Le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] = 0 \quad (4.33)$$

permettono di trovare:

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) - 2e^2 A^\mu \phi^* \phi = \\ &= -ie(\phi^* D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^*) = -e\mathcal{J}^\mu \end{aligned} \quad (4.34)$$

dove  $\mathcal{J}^\mu$  è la corrente “covariante”. Poiché  $F^{\mu\nu}$  è un tensore antisimmetrico,  $\mathcal{J}^\mu$  risulta conservata:  $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$ .

### 4.1.2 QED

La Lagrangiana di Dirac, analogamente a quella di Klein-Gordon, è invariante per trasformazioni di simmetria globali del gruppo  $U(1)$ . Adottando la procedura introdotta nella sezione precedente si può trovare una Lagrangiana invariante per simmetrie di gauge operando la sostituzione:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \quad (4.35)$$

per cui Lagrangiana per un campo di Dirac libero di massa  $m$  si riscrive:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \longrightarrow \mathcal{L}_{Dirac} = -\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (4.36)$$

Aggiungendo il termine di interazione elettromagnetica (4.23) ed esplicitando la derivata covariante, si ottiene finalmente la Lagrangiana della QED:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi = \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi + ie A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (4.37)$$

È importante sottolineare il termine di massa  $m \bar{\psi} \psi$  in (4.36) è invariante per trasformazioni di gauge (4.12):

$$m \bar{\psi} \psi \longrightarrow m \bar{\psi}' \psi' = m \bar{\psi} e^{-i\alpha} e^{i\alpha} \psi = m \bar{\psi} \psi \quad (4.38)$$

quindi è ammesso nella Lagrangiana totale poiché non preclude la richiesta di invarianza. Al contrario un termine di massa del tipo:

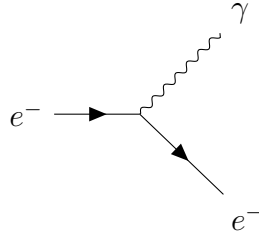
$$\mathcal{L}_m = m^2 A_\mu A^\mu \quad (4.39)$$

non è permesso, dal momento che viola l'invarianza per trasformazioni di gauge:

$$A'_\mu A'^\mu \longrightarrow (A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha)(A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\alpha) \neq A_\mu A^\mu \quad (4.40)$$

Queste considerazioni sono consistenti con il fatto che il campo elettromagnetico è mediato dai fotoni, che sono particelle non massive.

Per visualizzare le interazioni tra particelle elementari si introduce una trattazione essenziale dei *diagrammi di Feynman*. Descrivendo le sorgenti esterne tramite i campi e le loro fluttuazioni, i termini di interazione corrispondono ai termini cubici o di ordine maggiore presenti nella Lagrangiana. Se le costanti che moltiplicano questi termini, dette costanti di accoppiamento, sono abbastanza piccole, allora le interazioni possono essere studiate utilizzando una teoria perturbativa. Tutti i fenomeni elettromagnetici si possono ridurre ad un processo elementare[10]:



con il tempo che scorre lungo l'asse orizzontale. In questo caso abbiamo considerato come particella l'elettrone che ha carica  $q = -1$ , ma lo stesso vale per i quark<sup>3</sup> e per leptoni, fatta eccezione per i neutrini che sono elettricamente neutri e non risentono della forza elettromagnetica.

La Lagrangiana (4.37) si può visualizzare tramite i propagatori e i vertici di interazione come:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi + ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \\ &= \text{wavy } \gamma + \text{solid } e^- + \text{wavy } \gamma + \text{solid } e^- \end{aligned}$$

Nella QED, la carica elettrica spesso si scrive in termini di  $\alpha$  detta costante di struttura fine

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (4.41)$$

<sup>3</sup>I quark  $u, c, t$  hanno carica  $q = +2/3$  mentre i quark  $d, s, b$  hanno carica  $q = -1/3$ .

infatti ponendo  $\hbar = c = 1$  si ha  $e = \sqrt{4\pi\alpha} \approx 0.3$ .

A titolo di esempio si mostrano, con i seguenti diagrammi di Feynman, altri fenomeni fisici descritti dalla QED. Il processo di scattering elettrone-elettrone detto *Möller scattering*:

$$(4.42)$$

Una particella che si muove “indietro nel tempo” (le frecce sono puntate nella direzione opposta del tempo) si interpreta come la antiparticella corrispondente che si muove nella direzione positiva dell’asse temporale.

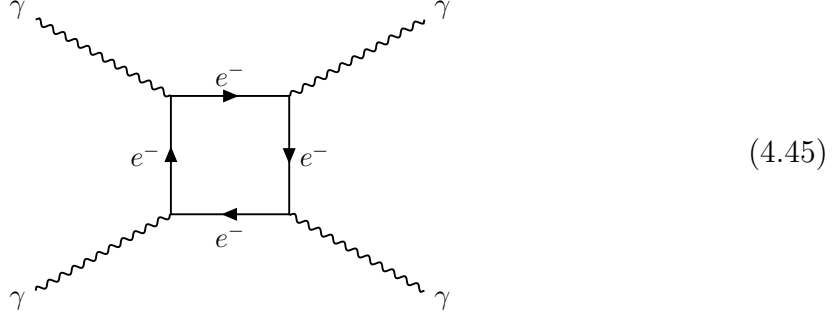
Lo scattering elettrone-positrone, detto *Bhabha scattering*, si visualizza allora:

$$(4.43)$$

Il *Compton scattering*, ovvero lo scattering elettrone-fotone:

$$(4.44)$$

É possibile osservare anche lo scattering fotone-fotone:



## 4.2 Teorie di gauge non-abeliane e il campo di Yang Mills

A questo punto si desidera estendere la trattazione ad un caso più generale e si ampliano i concetti di simmetria di gauge introdotti precedentemente per i gruppi non-abeliani compatti [2]. Queste teorie furono sviluppate inizialmente da Yang e Mills[22], i quali si proponevano di mostrare che la simmetria di isospin è una simmetria locale. Tuttavia, il formalismo introdotto si rivelò inadatto e venne invece impiegato nella descrizione delle interazioni tra quark: esiste infatti una simmetria locale del gruppo  $SU(3)$  che descrive l'interazione forte (cromodinamica quantistica) così come una simmetria locale di  $SU(2)$  che descrive l'interazione debole (isospin debole).

Si generalizza la teoria a  $N$  campi di Dirac con massa identica  $m$ :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix} \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_N) \quad (4.46)$$

cosicché il prodotto scalare sia un invariante per  $SU(N)$ :

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_1\psi^1 + \bar{\psi}_2\psi^2 + \dots + \bar{\psi}_N\psi^N \quad (4.47)$$

La Lagrangiana per un campo libero di Dirac (4.36) è invariante per trasformazioni di simmetria:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = U\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)U^\dagger = \bar{\psi}(x)U^{-1} \end{aligned} \quad (4.48)$$

dove  $U \in SU(N)$  è una simmetria globale poiché i parametri  $\alpha^a$  di  $U = U(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a}$  sono costanti. Per costruire una Lagrangiana invariante sotto trasformazioni di gauge si

promuove questa simmetria ad una simmetria locale considerando le  $\alpha^a$  come funzioni arbitrarie di  $x$ , quindi:

$$\psi(x) \quad \longrightarrow \quad \psi'(x) = U(x)\psi(x) \quad \text{dove} \quad U(x) = e^{i\alpha^a(x)T^a} \quad (4.49)$$

con  $U(x)$  una matrice  $N \times N$  di  $SU(N)$ . Esattamente come nel caso di  $U(1)$  si nota che il  $\partial_\mu\psi$  non si trasforma in modo covariante:

$$\partial_\mu\psi'(x) = \partial_\mu(e^{i\alpha^a(x)T^a}\psi(x)) = e^{i\alpha^a(x)T^a}\partial_\mu\psi(x) + iT^a\partial_\mu(\alpha^a(x))e^{i\alpha^a(x)T^a}\psi \quad (4.50)$$

In analogia con (4.28) è necessario definire una derivata covariante associata al gruppo non-abeliano  $SU(N)$ , che si trasformi come  $\psi(x)$ :

$$D_\mu = \partial_\mu + gW_\mu(x) \quad (4.51)$$

dove  $g$  è la costante di accoppiamento e  $W_\mu(x)$  si chiama “potenziale di gauge” (o “connessione”) ed è un potenziale vettore che per ogni  $\mu$  rappresenta una matrice  $N \times N$ .  $W_\mu(x)$  si può sviluppare in termini dei generatori dell'algebra di Lie  $T^a$  nel modo seguente:

$$W_\mu(x) = -iW_\mu^a(x)T^a \quad (4.52)$$

Grazie a questa relazione si introducono i campi di gauge  $W_\mu^a$  che sono uno per ogni generatore indipendente, quindi  $N^2 - 1$  per il gruppo  $SU(N)$ . Si osserva che a partire dalla richiesta di covarianza:

$$D_\mu\psi(x) \quad \longrightarrow \quad D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x) \quad (4.53)$$

si ottiene una legge di trasformazione per i potenziali di gauge<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} D'_\mu\psi' &\equiv (\partial_\mu + gW'_\mu)\psi' = UD_\mu\psi(x) = \\ &= U(\partial_\mu + gW_\mu)\psi = U(\partial_\mu + gW_\mu)U^{-1}U\psi = \\ &= U(\partial_\mu + gW_\mu)U^{-1}\psi' = U\partial_\mu(U^{-1}\psi') + UgW_\mu U^{-1}\psi' = \\ &= UU^{-1}\partial_\mu\psi' + U(\partial_\mu U^{-1})\psi' + UgW_\mu U^{-1}\psi' = \\ &= \partial_\mu\psi' + [UgW_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}]\psi' \end{aligned} \quad (4.54)$$

quindi:

$$W_\mu \quad \longrightarrow \quad W'_\mu = UW_\mu U^{-1} + \frac{1}{g}U\partial_\mu U^{-1} \quad (4.55)$$

Per definire una generica Lagrangiana invariante per trasformazioni di gauge del gruppo non-abeliano  $SU(N)$  è sufficiente inserire in (4.36) questa nuova derivata covariante. Si può dunque procedere a completare la Lagrangiana con un termine che descriva la

---

<sup>4</sup>Si omette per semplicità la dipendenza da  $x$ .

dinamica dei campi  $W_\mu^a$  purché soddisfi il requisito di invarianza. Per farlo si costruisce un analogo del tensore campo elettromagnetico (3.78) tramite il commutatore:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu + gW_\mu, \partial_\nu + gW_\nu] \equiv gF_{\mu\nu} \\ &= g\partial_\mu W_\nu - g\partial_\nu W_\mu + g^2 [W_\mu, W_\nu] \end{aligned} \quad (4.56)$$

per cui il *tensore campo di forza*  $F_{\mu\nu}$  è definito come segue:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + g [W_\mu, W_\nu] \quad (4.57)$$

e si trasforma seguendo la legge:

$$F_{\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \quad (4.58)$$

La combinazione dei tensori campo di forza descrive sia la propagazione libera dei campi  $W_\mu^a$  che i loro vertici autointerazione:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad \text{dove} \quad F_\mu(x) = -F_\mu^a(x) T^a \quad (4.59)$$

infatti la Lagrangiana contiene dei termini cubici e quartici in  $W_\mu^a$  ed è invariante per trasformazioni di gauge e di Lorentz<sup>5</sup>.

Si sottolinea che la differenza tra i due tensori (3.78) e (4.57) è data dalla presenza del commutatore  $[W_\mu, W_\nu]$ : nel caso non-abeliano il campo di forza  $F_{\mu\nu}$  è non lineare. Da questa caratteristica consegue naturalmente una grande differenza tra la teoria abeliana della QED e quella non-abeliana di Yang-Mills. L'elettrodinamica quantistica è difatti una teoria dei campi libera: i fotoni sono elettricamente neutri e non vi è accoppiamento diretto tra loro. Al contrario, la teoria di Yang-Mills possiede una struttura più ricca. Anche in assenza di campi fermionici ci sono interazioni tra i gli stessi campi di gauge  $W_\mu^a$ . La Lagrangiana completa di Yang-Mills si definisce:

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu + m)\psi \quad (4.60)$$

o anche:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \bar{\psi}(\gamma^\mu(\partial_\mu - igW_\mu^a T^a) + m)\psi \quad (4.61)$$

dove abbiamo esplicitato il tensore campo di forza nel modo seguente:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf^{abc}W_\mu^b W_\nu^c \quad (4.62)$$

Il secondo termine di (4.60) descrive la propagazione libera dei campi  $\psi$  (particelle di spin 1/2 con cariche non-abeliane) e la loro interazione con il campo di gauge.

---

<sup>5</sup>È stata utilizzata la normalizzazione in (1.49)

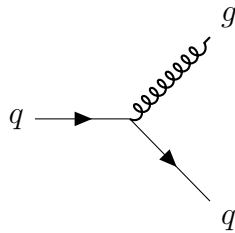
### 4.2.1 QCD

La cromodinamica quantistica è una teoria basata sulla simmetria per trasformazioni del gruppo non-abeliano  $SU(3)_c$  che descrive le interazioni forti. La simmetria di colore viene introdotta per garantire la validità del principio di esclusione di Pauli. Questo principio afferma che i barioni, essendo particelle costituite da tre quark (ossia tre fermioni), sono descritti da funzioni d'onda antisimmetriche. Tuttavia alcuni barioni risultano sempre simmetrici a scambi di quark, come ad esempio  $\Delta^{++} = uuu$ . Si introduce allora un nuovo grado di libertà nascosto, detto *colore*, cosicché la funzione d'onda sia sempre antisimmetrica.

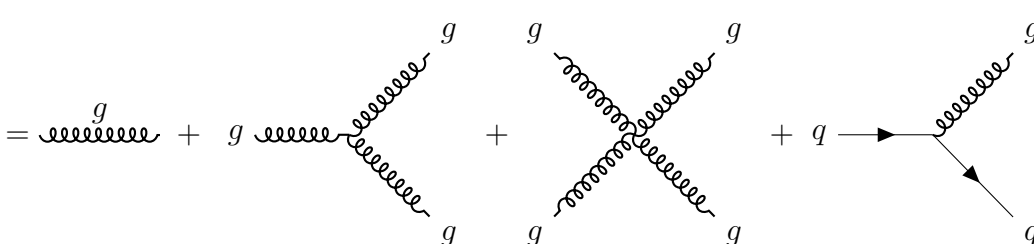
La Lagrangiana della cromodinamica quantistica ha  $3^2 - 1 = 8$  campi di gauge che descrivono otto gluoni e sei campi fermionici associati ai sei sapori di quark: *up*, *down*, *charm*, *strange*, *top*, *bottom*. Ogni sapore di quark è degenere perché si trasforma nella 3 e si dice abbia un colore: *rosso*, *verde* e *blu* (per convenzione). L'assenza di colore indica uno scalare, con rappresentazione 1. Per quanto riguarda le proprietà principali del gruppo  $SU(3)$  si rimanda alla sezione (1.2) ed a [9] e [6]. Si ricorda che gli otto generatori del gruppo dipendono matrici di Gell-Mann  $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ . Alla luce di quanto esposto, la (4.61) si scrive esplicitamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f (\gamma^\mu D_\mu + m) \psi_f = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi_f + i\frac{g_s}{2} W_\mu^a \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f \gamma^\mu \lambda^a \psi_f \end{aligned} \quad (4.63)$$

In questo caso il colore riveste il ruolo della carica per la QED e il vertice elementare per diventa quark  $\rightarrow$  quark + gluone:



e si può visualizzare la Lagrangiana (4.63):

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi_f + i\frac{g_s}{2}W_\mu^a \sum_{f=1}^6 \bar{\psi}_f \gamma^\mu \lambda^a \psi_f =$$


The diagram shows four Feynman diagrams representing the terms in the QCD Lagrangian. The first diagram is a gluon self-energy loop, labeled with 'g'. The second and third diagrams are vertex corrections, each labeled with 'g' at both ends. The fourth diagram is a quark-gluon vertex, labeled with 'q' at the quark line and 'g' at the gluon line.

### Simmetrie rigide della QCD

La Lagrangiana della QCD possiede altre simmetrie rigide. La più nota è quella per il gruppo  $U(1)$  che ruota tutti i campi con la stessa fase. La carica conservata associata a questa trasformazione è il *numero barionico*, ed è conservata anche dalle altre interazioni fondamentali. Ci sono altre simmetrie rigide  $U(1)$  che danno origine a leggi di conservazione per i numeri fermionici separatamente (carica di stranezza  $S$ , carica di charm  $C$ , ...) che sono però violate dall'interazione debole. Il numero barionico è una combinazione di queste cariche indipendenti.

Supponendo che i quark up e down abbiano masse uguali, i campi  $\psi_u$  e  $\psi_d$  si trasformano l'uno nell'altro per simmetrie del gruppo  $SU(2)$ . Questa simmetria corrisponde all'*isospin forte*. Abbiamo già mostrato, nella sezione dedicata al gruppo  $SU(3)$ , quali siano le applicazioni del gruppo per la fisica delle particelle. Se consideriamo che i quark leggeri abbiano masse uguali, è possibile descrivere con queste trasformazioni, alcuni multipletti di adroni tra cui:

- un ottetto mesonico ( $\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, \bar{K}^0, \eta$ )
- un ottetto barionico ( $p, n, \Sigma^\pm, \Sigma^0, \Xi^\pm, \Lambda$ )
- un decupletto barionico ( $\Delta^+, \Delta^0, \Delta^-, \Delta^{++}, \Sigma^{*\pm}, \Sigma^{*0}, \Xi^{*\pm}, \Omega^-$ )

Consideriamo i barioni, dato che i mesoni sono già stati analizzati nel primo capitolo. Un barione è uno stato legato di tre quarks ( $qqq$ ) e si trasforma come:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \quad (4.64)$$

## 4.3 Il Modello Standard

Il Modello Standard è una teoria di gauge non-abeliana basata sul gruppo di simmetria  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  in grado di descrivere tre delle quattro forze fondamentali note



(forte, debole, elettromagnetica) e di classificare le particelle elementari. Le particelle descritte dal Modello Standard sono di tre tipi, a seconda dello spin che possiedono: fermioni (spin 1/2), bosoni mediatori o di gauge (spin 1) e bosone di Higgs (spin 0). Ogni interazione ha i suoi mediatori: la forza elettromagnetica è mediata dal fotone  $\gamma$  senza massa, la forza nucleare debole è mediata dai bosoni massivi  $W^+, W^-$  e  $Z^0$  e infine la forza nucleare forte ha come mediatori otto gluoni non massivi.

L'evidenza sperimentale che quantifica la massa dei bosoni  $W^\pm$  e  $Z^0$  di circa  $80$  e  $91 GeV/c^2$  è in contraddizione con la simmetria esatta della teoria di gauge del gruppo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . L'aggiunta di un termine di massa nella Lagrangiana del Modello Standard romperebbe la simmetria cercata<sup>6</sup> e non è dunque ammesso. Per lo stesso motivo, non sono ammessi i termini espliciti di massa dei fermioni.

La struttura del Modello Standard è preservata con il meccanismo di Higgs che induce una rottura parziale di simmetria nel settore elettrodebole  $SU(2) \times U(1)$ . Questo meccanismo porta all'introduzione di un'ulteriore particella detta bosone di Higgs capace di conferire massa alle particelle elementari.

I fermioni si possono interpretare come campi di materia e si dividono ulteriormente in leptoni e quarks. I leptoni sono particelle che non risentono dell'interazione forte e si classificano attraverso la carica  $Q$ , il numero elettronico  $L_e$ , muonico  $L_\mu$  e tauonico  $L_\tau$  e si raggruppano in 3 famiglie:

/	Q	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$
$e$	-1	1	0	0
$\nu_e$	0	1	0	0
$\mu$	-1	0	1	0
$e_\mu$	0	0	1	0
$\tau$	-1	0	0	1
$\nu_\tau$	0	0	0	1

I quarks sono le particelle fermioniche che risentono anche dell'interazione forte. Ne esistono sei "sapori": *up*, *down*, *charm*, *strange*, *top*, *bottom*. Si dividono in tre famiglie secondo alla loro carica  $Q$ , carica di stranezza  $S$ , carica di charm  $C$ , ...

---

<sup>6</sup>Abbiamo già visto che se si aggiungesse un termine di massa (4.39) per il fotone alla Lagrangiana della QED questa non risulterebbe più invariante sotto trasformazioni di simmetria.

/	Q	D	U	S	C	B	T
$d$	$-1/3$	$-1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$u$	$+2/3$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$
$s$	$-1/3$	$0$	$0$	$-1$	$0$	$0$	$0$
$c$	$+2/3$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$
$b$	$-1/3$	$0$	$0$	$0$	$0$	$-1$	$0$
$t$	$+2/3$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$

Per le antiparticelle corrispondenti i segni delle cariche sono opposti.

Il Modello Standard è una teoria chirale, ossia non è invariante sotto trasformazioni di parità. Una particella di spin  $1/2$  ha generalmente carica di gauge diversa per la sua parte sinistrorsa e per quella destrorsa. Un fermione di Dirac  $\psi$  si divide in:

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad \psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \quad \psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \quad (4.65)$$

e le due parti sono due rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz proprio e ortocrono  $(\frac{1}{2}, 0)$  e  $(0, \frac{1}{2})$ , con gli spinori corrispondenti detti spinori di Weyl. La Lagrangiana dello spinore di Dirac si scrive in termini di  $\psi_L$  e  $\psi_R$  come:

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}_L \not{\partial} \psi_L - \bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R - m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (4.66)$$

Dato il gruppo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , come detto precedentemente  $SU(3)$  si dice gruppo di colore. I quarks si trasformano nella rappresentazione fondamentale, la  $3$ , ed hanno quindi tre colori, mentre gli antiquarks si trasformano nella rappresentazione complesso coniugata, la  $\bar{3}$  e hanno tre anticolori. I leptoni non risentono dell'interazione forte, sono scalari sotto il gruppo di colore e hanno quindi carica 1. Il gruppo  $SU(2)$  si dice gruppo di isospin debole e si trasformano nella rappresentazione 2 con isospin debole  $I = \frac{1}{2}$  e  $I_3 = \pm \frac{1}{2}$  terza componente.  $U(1)$  è il gruppo dell'ipercarica con  $Y$  ipercarica che corrisponde a  $Y = Q - I_3$ . Si possono riportare le cariche sotto il gruppo di gauge con la notazione  $(SU(3), SU(2))_{U(1)}$ , nel modo seguente:

$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\nu_{eR}$	$e_R$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$u_R$	$d_R$
$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\nu_{\mu R}$	$\mu_R$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$c_R$	$s_R$
$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\nu_{\tau R}$	$\tau_R$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$t_R$	$b_R$
$(1, 2)_{-\frac{1}{2}}$	$(1, 1)_0$	$(1, 1)_{-1}$	$(3, 2)_{\frac{1}{6}}$	$(3, 1)_{\frac{2}{3}}$	$(3, 1)_{-\frac{1}{3}}$

# Conclusioni

In questo lavoro si sono illustrati gli strumenti matematici necessari per descrivere le teorie di gauge. Sono stati presentati i concetti alla base della teoria dei gruppi, con attenzione particolare ai gruppi di Lie, per poi soffermarsi sullo studio del gruppo di Lorentz e delle trasformazioni ad esso associate. Successivamente è stato introdotto il formalismo lagrangiano, concentrandosi sul principio di minima azione e sul teorema di Noether. Una volta presentate le equazioni relativistiche, capaci di descrivere la dinamica dei campi e le funzioni Lagrangiane associate, si è proceduto con lo studio delle interazioni fondamentali.

Con la richiesta di invarianza locale, e non più globale, sono stati introdotti i campi di gauge, che si interpretano come i mediatori delle forze fondamentali. Dopo aver esaminato il caso dell'elettromagnetismo, che può essere trattato come una teoria di gauge abeliana, la formulazione è stata generalizzata nel caso di gruppi non-abeliani con le teorie di Yang-Mills e l'applicazione alla QCD. Dalle teorie di gauge emergono direttamente le caratteristiche principali delle interazioni. Ad esempio, una delle differenze sostanziali tra la QED e la QCD consiste nel fatto che i gluoni autointeragiscono poiché il gruppo di simmetria  $SU(3)$  è non commutativo.

L'intera costruzione di queste teorie rappresenta la base del Modello Standard delle particelle elementari. Tuttavia, il modello presenta alcune limitazioni, tra cui l'incapacità di descrivere la quarta interazione fondamentale, la gravitazione, con una teoria di gauge rinormalizzabile.

# Bibliografia

- [1] I. J. R. Aitchison e A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction, From Relativistic Quantum Mechanics to QED*, Fourth Edition, 2 voll. Taylor & Francis, 2012.
- [2] I. J. R. Aitchison e A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics: A Practical Introduction, Non-Abelian Gauge Theories*, Fourth Edition, 2 voll. Taylor & Francis, 2013.
- [3] F. Bastianelli, *Appunti del corso di Teoria dei Campi 1*, Università di Bologna, 2010. indirizzo: <https://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/qft1-10.html>.
- [4] F. Bastianelli, *Appunti del corso di Fisica Nucleare e Subnucleare*, Università di Bologna, 2018. indirizzo: <https://www-th.bo.infn.it/people/bastianelli/fns-18.html>.
- [5] K. A. Brading, «Which symmetry? Noether, Weyl, and conservation of electric charge,» 2002.
- [6] G. Costa e G. Fogli, *Symmetries and Group Theory in Particle Physics* (Lecture Notes in Physics). Springer, 2012.
- [7] B. De Wit e J. Smith, *Field Theory in Particle Physics*. Elsevier Science Publishers B.V., 1986, vol. 1.
- [8] M. Gasperini, *Manuale di Relatività Ristretta*. Springer, 2010.
- [9] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Second Edition. Taylor & Francis, 1999.
- [10] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley & Sons, 1987.
- [11] C. Itzykson e J. Zuber, *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill International Book Co, 1980.
- [12] E. E. Jenkins, A. V. Manohar e M. Trott, «On gauge invariance and minimal coupling,» *Journal of High Energy Physics*, n. 63, 2013. DOI: 10.1007/JHEP09(2013)063.
- [13] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Third Edition. Pergamon Press, 1971, cap. 3.

- [14] L. Landau e E. M. Lifshitz, *Meccanica*. Editori Riuniti, 2009, vol. 1, Fisica Teorica.
- [15] L. Landau e E. M. Lifshitz, *Teoria dei campi*. Editori Riuniti, 2010, vol. 2, Fisica Teorica.
- [16] L. O’Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theories*. Princeton University Press, 1997.
- [17] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [18] C. Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, Second Edition. Princeton University Press, 2013.
- [19] L. Ryder, *Quantum Field Theory*, Second Edition. Cambridge University Press, 1996.
- [20] D. Tong, *Lectures on Quantum Field Theory*. University of Cambridge, 2006.
- [21] W. Tung, *Group Theory in Physics*. World Scientific Publishing Company, 1985.
- [22] C. N. Yang e R. L. Mills, «Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance,» *Phys. Rev.*, vol. 96, 1954.