

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Le superfici minime

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Manaresi Mirella

Presentata da:
Siciliano Giuseppe

II Sessione
Anno Accademico 2010-2011

Ai miei genitori...

Introduzione

Questa tesi è volta allo studio delle superfici minime nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 . Oggi questa teoria ha una vasta gamma di applicazioni: esse vengono utilizzate in vari settori della ricerca a partire dalla chimica, alla biologia e all'architettura.

La teoria delle superfici minime si è sviluppata a partire dal problema dell'area minima (noto anche come *problema di Plateau*): date una o più curve chiuse nello spazio, trovare, tra tutte le superfici aventi le curve date come bordo, quella che ha area minima.

Il primo ad affrontare questo tipo di problema fu Eulero nel 1744. Nel suo lavoro di calcolo delle variazioni *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* egli affronta il problema di trovare la superficie di area minima che ha come bordo due circonferenze nello spazio, poste su due piani paralleli ed allineate in modo che il segmento che congiunge i centri delle due circonferenze risulti perpendicolare ad entrambi i piani su cui giacciono le due circonferenze stesse. Vista la particolare geometria del problema, Eulero cerca le superfici soluzione di tale problema tra le superfici di rotazione; in particolare egli reimposta il problema in maniera tale che esso sia equivalente a quello di determinare la funzione il cui grafico, fatto ruotare in modo da descrivere le due circonferenze assegnate, generi la superficie cercata. Eulero dimostra (e lo faremo anche noi nel corso della trattazione) che la curva cercata deve essere un arco di catenaria. La superficie ottenuta dalla rotazione della catenaria è detta catenoide. Ed è proprio da questi tipi di problemi che nasce la teoria delle superfici minime.

Il termine *superficie minima* fu introdotto da Lagrange nel 1760 per designare quelle superfici che sono soluzioni di un problema variazionale, e più precisamente punti critici della funzione area. La definizione originaria di superficie minima è dunque quella di superficie che rende stazionaria l'area rispetto a variazioni della superficie stessa.

Nel 1776 Meusnier si accorge del significato geometrico che sta dietro alla definizione di superficie minima data da Lagrange: tale definizione, infatti, equivale a richiedere che la superficie abbia in ogni suo punto curvatura media nulla. Quindi le superfici minime sono quelle superfici che hanno curvatura media identicamente nulla, e le superfici che risolvono il problema dell'area minima sono superfici minime.

A Meusnier è anche dovuta la scoperta di un'altra superficie minima: l'elicoide. Per lungo tempo l'elicoide, la catenoide e il piano (esempio banale di superficie minima) sono rimaste le uniche superfici minime note.

In natura esempi di superfici minime si possono ottenere immergendo nell'acqua saponata un telaietto di ferro di una qualunque forma chiusa: alla estrazione del telaio, la lamina di sapone che rimane attaccata ad esso rappresenta una superficie che ha curvatura media nulla ovunque.

Il lavoro è stato strutturato nel seguente modo. Il primo capitolo è stato elaborato con lo scopo di arrivare a dare le definizioni di area e curvatura media di una superficie, concetti fondamentali se si vogliono studiare le superfici minime: pertanto esso presenta una serie di nozioni e di richiami di geometria differenziale della superficie. Il secondo capitolo è invece una presentazione delle superfici minime in \mathbb{R}^3 e un'esposizione di alcune loro proprietà: l'essere estremali per la funzione area o l'essere soluzioni dell'equazione di Lagrange (questo nel caso in cui la superficie è il grafico di una funzione differenziabile) giusto per citarne alcune. Infine il terzo capitolo è una trattazione di alcuni esempi classici di superfici minime; in esso viene evidenziato il legame tra catenoide ed elicoide che, come dimostreremo, sono superfici minime coniugate e localmente isometriche.

Indice

Introduzione	i
1 Richiami di geometria differenziale della superficie	1
1.1 Superfici e prima forma fondamentale	1
1.2 Area	5
1.3 Campo di Gauss e seconda forma fondamentale	6
1.4 Curvature	8
2 Le superfici minime	13
2.1 Variazione normale e funzione area	13
2.2 Superfici isoterme	17
2.3 Superfici minime e funzioni analitiche	20
2.4 Equazione di Lagrange	22
3 Esempi di superfici minime	25
3.1 Superfici di rotazione	25
3.2 La catenoide	27
3.3 L'elicoide	30
3.4 Legame tra catenoide ed elicoide	31
3.5 La superficie di Enneper	34
3.6 La superficie di Scherk	36
Bibliografia	39

Capitolo 1

Richiami di geometria differenziale della superficie

In questo capitolo riporteremo alcune nozioni di geometria differenziale utili per lo studio delle superfici minime nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 .

1.1 Superfici e prima forma fondamentale

Definizione 1.1. Un sottoinsieme connesso $S \subset \mathbb{R}^3$ è una **superficie regolare** nello spazio se per ogni $p \in S$ esiste un'applicazione $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ , con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, tale che:

1. $\mathbf{x}(U) \subseteq S$ sia un intorno aperto di p in S (ovvero, equivalentemente, esiste un intorno aperto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{x}(U) = A \cap S$);
2. \mathbf{x} sia un omeomorfismo con l'immagine;
3. il differenziale $d_q \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia iniettivo (cioè abbia rango massimo, uguale a 2) per ogni $q \in U$.

Ogni applicazione \mathbf{x} che soddisfa 1, 2 e 3 è detta **parametrizzazione** o **sistema di coordinate** (locali) in (un intorno di) p .

Definizione 1.2. Un **atlante** di una superficie regolare $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è una famiglia $\mathcal{A} = \{\mathbf{x}_a\}$ di parametrizzazioni $\mathbf{x}_a : U_a \rightarrow S$ tali che $S = \bigcup_a \mathbf{x}_a(U_a)$.

Analizziamo ora le proprietà metriche delle superfici di \mathbb{R}^3 . Sfruttiamo il fatto che le superfici sono immerse in \mathbb{R}^3 , che è uno spazio euclideo, per introdurre un prodotto scalare su ciascun piano tangente. Questo prodotto scalare ci permetterà di effettuare delle misure su una superficie (lunghezza di una curva, angolo tra due vettori tangenti, area di una determinata regione...) senza dover fare riferimento allo spazio ambiente \mathbb{R}^3 in cui la superficie è immersa.

Per arrivare a dare la definizione di piano tangente, abbiamo bisogno di introdurre il concetto di vettore tangente ad una superficie in un punto.

Definizione 1.3. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme e sia $p \in S$. Un **vettore tangente** a S in p è un vettore della forma $\sigma'(0)$, dove $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva di classe C^∞ tale che $\sigma(0) = p$ e $\sigma(-\epsilon, \epsilon) \subset S$.

L'insieme di tutti i possibili vettori tangenti a S in p è uno spazio vettoriale di dimensione 2 detto **piano tangente** a S in p e denotato con $T_p(S)$.

Osservazione 1. Se \mathbf{x} è una parametrizzazione di S in p , una base di $T_p(S)$ è data dai vettori \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v , definiti come:

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad \mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}.$$

Definizione 1.4. Siano S e T due sottovarietà differenziabili rispettivamente di \mathbb{R}^s e \mathbb{R}^t e di dimensione rispettivamente m e d . Sia $p \in S$ e sia $F : N \rightarrow T$ un'applicazione differenziabile, con N intorno aperto di p in S .

Si chiama **applicazione tangente** di F in p o **differenziale** di F in p l'applicazione $d_p F : T_p(S) \rightarrow T_q(T)$ con $q = F(p)$, che ad ogni vettore $\alpha'(0) \in T_p(S)$, con $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ cammino differenziabile tale che $\alpha(0) = p$, associa $d_p F(\alpha'(0)) = (F \circ \alpha)'(0)$.

Il prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^3 induce su ogni piano tangente $T_p(S)$ di una superficie regolare S un prodotto interno denotato con $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$: se $w_1, w_2 \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$, allora $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ è uguale al prodotto diretto di w_1 e w_2

come vettori in \mathbb{R}^3 . A questo prodotto interno, che è una forma bilineare simmetrica, corrisponde una forma quadratica $I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0. \quad (1.1)$$

Definizione 1.5. La forma quadratica I_p su $T_p(S)$, definita dall'equazione (1.1), è detta **prima forma fondamentale** della superficie regolare S nel punto $p \in S$.

Alla prima forma fondamentale sono associati i coefficienti di Gauss che dipendono dalla parametrizzazione scelta per la superficie e che ora definiremo:

Definizione 1.6. Sia $\mathbf{x} : U \rightarrow A \cap S$, $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$, una parametrizzazione locale di S in p . Si chiamano **coefficienti metrici** (o **coefficienti di Gauss** della prima forma fondamentale) di S rispetto a \mathbf{x} le funzioni $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$E(u, v) = \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_u(u, v) \rangle_p,$$

$$F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle_p,$$

$$G(u, v) = \langle \mathbf{x}_v(u, v), \mathbf{x}_v(u, v) \rangle_p.$$

Osservazione 2. I coefficienti di Gauss godono della seguente proprietà:

$$E(u, v)G(u, v) - (F(u, v))^2 > 0, \quad \forall (u, v) \in U.$$

Le applicazioni fra superfici che conservano la prima forma fondamentale necessitano di un nome particolare:

Definizione 1.7. Siano S e T due superfici regolari di \mathbb{R}^3 e sia $f : S \rightarrow T$ un'applicazione di classe C^∞ . Diremo che f è un'**isometria** di S in T quando:

1. f è un diffeomorfismo (in particolare $f(S) = T$);
2. per ogni punto $w \in S$ e per ogni coppia di vettori $(a, b) \in T_w(S)$, vale:

$$\langle a, b \rangle = \langle d_w f(a), d_w f(b) \rangle.$$

Osservazione 3. Un'isometria conserva la prima forma fondamentale, infatti nelle condizioni della definizione precedente vale:

$$\langle a, b \rangle = \langle d_w f(a), d_w f(b) \rangle \iff I_w(a) = I_{f(w)}(d_w f(a))$$

per ogni $w \in S$ e per ogni $a, b \in T_w(S)$.

Dimostrazione. Per la prima implicazione basta prendere $b = a$ e la tesi segue immediatamente:

$$I_w(a) = \langle a, a \rangle = \langle d_w f(a), d_w f(a) \rangle = I_{f(w)}(d_w f(a)).$$

Viceversa abbiamo che

$$\begin{aligned} 2\langle a, b \rangle &= -(\|a\|^2 + \|b\|^2) + \|a + b\|^2 = I_w(a + b) - I_w(a) - I_w(b) \\ &= I_{f(w)}(d_w(f(a + b))) - I_{f(w)}(d_w f(a)) - I_{f(w)}(d_w f(b)) \\ &= \|d_w f(a) + d_w f(b)\|^2 - \|d_w f(a)\|^2 - \|d_w f(b)\|^2 \\ &= 2\langle d_w f(a), d_w f(b) \rangle. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che $\langle a, b \rangle = \langle d_w f(a), d_w f(b) \rangle$.

□

Definizione 1.8. Siano S e T due superfici regolari di \mathbb{R}^3 , siano $p \in S$ e $q \in T$. Un' **isometria locale** in p di S su T è un'applicazione differenziabile $f : N \rightarrow f(N)$, con N intorno opportuno di p in S e $f(N)$ intorno aperto di $f(p) = q$ tale che:

1. $f : N \rightarrow f(N)$ è un diffeomorfismo;
2. $\forall w \in N, \forall a, b \in T_w(S)$ vale:

$$\langle a, b \rangle = \langle d_w f(a), d_w f(b) \rangle \quad (\text{o equivalentemente } I_w(a) = I_{f(w)}(d_w f(a))).$$

1.2 Area

La prima forma fondamentale permette anche di calcolare l'area di regioni limitate di una superficie regolare. Per semplicità, limiteremo la nostra discussione al caso di regioni contenute nell'immagine di una parametrizzazione locale.

Definizione 1.9. Sia $T \subseteq S$ una regione regolare contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ di una superficie S . Si chiama **Area** di T la quantità:

$$\iint_{\mathbf{x}^{-1}(T)} \sqrt{E(u, v)G(u, v) - (F(u, v))^2} \, dudv.$$

Proposizione 1.2.1. Siano S una superficie regolare, $p \in S$, $\mathbf{x} : U \rightarrow S \cap A$ una parametrizzazione di S in p . Allora:

$$\|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\|^2 = E(u, v)G(u, v) - (F(u, v))^2$$

Dimostrazione. Se $a, b \in \mathbb{R}^3$, allora:

$$\begin{aligned} \|a\|^2\|b\|^2 - (\langle a, b \rangle)^2 &= \|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2 \cos^2(\hat{a}, \hat{b}) = \\ &= \|a\|^2\|b\|^2(1 - \cos^2(\hat{a}, \hat{b})) = \|a\|^2\|b\|^2 \sin^2(\hat{a}, \hat{b}) = \|a \wedge b\|^2 \end{aligned}$$

Per dimostrare la nostra proposizione è sufficiente prendere $a = \mathbf{x}_u(u, v)$ e $b = \mathbf{x}_v(u, v)$.

□

Possiamo quindi dare altre due definizioni equivalenti di area:

Definizione 1.10. Nelle condizioni della Definizione 1.9 si ha:

$$\begin{aligned} \text{Area}(T) &= \iint_{\mathbf{x}^{-1}(T)} \|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\| \, dudv = \\ &= \iint_{\mathbf{x}^{-1}(T)} \sqrt{\det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \det \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \det \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2} \, dudv, \end{aligned}$$

dove x , y e z sono le funzioni componenti di \mathbf{x} .

1.3 Campo di Gauss e seconda forma fondamentale

Definizione 1.11. Un **campo di versori normali** (o **campo di Gauss**) su una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è un'applicazione $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che, $\forall p \in S$, $N(p)$ sia ortogonale a $T_p(S)$ e $\|N(p)\| = 1$.

La mappa di Gauss N mette in relazione la geometria di S con quella della sfera S^2 ; in generale N dà informazioni sulla geometria locale di S e su quanto questa si discosta dall'essere una sfera.

Osservazione 4. Localmente l'esistenza di un campo di Gauss è assicurata.

Infatti, se la superficie S è data localmente dalla parametrizzazione $\mathbf{x} : \rightarrow S \cap A$, un tale campo è dato da:

$$N(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \wedge \mathbf{x}_v(u, v)\|}.$$

Nel caso in cui è possibile definire un campo di Gauss su tutta la superficie S , diciamo che S è **orientabile**.

Prima di passare a definire la seconda forma fondamentale, soffermiamoci un po' sull'applicazione tangente del campo di Gauss N in un punto p :

Osservazione 5. Sia S una superficie regolare in p di \mathbb{R}^3 differenziabile. Sia $N : A \cap S \rightarrow S^2$ un campo di Gauss, con $A \cap S$ un intorno di p in S . Si può considerare il suo differenziale

$$d_p N : T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(S^2).$$

Ovviamente $T_p(S) \perp N(p)$ e $T_{N(p)} \perp N(p)$ per definizione di campo di Gauss. Quindi $T_p(S) = T_{N(p)}(S)$, da cui segue che $d_p N$ è un endomorfismo.

Proposizione 1.3.1. *Nelle ipotesi precedenti $d_p N : T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ è un endomorfismo autoaggiunto (o simmetrico), cioè:*

$$\langle d_p N(v), w \rangle_p = \langle v, d_p N(w) \rangle_p \quad \forall v, w \in T_p(S).$$

Dimostrazione. Ci basta dimostrare che $d_p N$ è simmetrico sulla base di $T_p(S)$ indotta da \mathbf{x} , ossia che

$$\langle d_p N(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, d_p N(\mathbf{x}_v) \rangle.$$

Siano $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, con U aperto di \mathbb{R}^2 , cammini differenziabili in S tali che $\beta^{(1)}(t) = (u_0 + t, v_0)$, $\beta^{(2)}(t) = (u_0, v_0 + t)$. Allora vale che $\mathbf{x}_u(u_0, v_0) = (\mathbf{x} \circ \beta^{(1)})'(0)$, quindi

$$\begin{aligned} d_p N(\mathbf{x}_u) &= d_p N((\mathbf{x} \circ \beta^{(1)})'(0)) = (N \circ \mathbf{x} \circ \beta^{(1)})'(0) \\ &= (N \circ \mathbf{x})_u(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Analogamente, sapendo che vale $\mathbf{x}_v(u_0, v_0) = (\mathbf{x} \circ \beta^{(2)})'(0)$, otteniamo

$$d_p N(\mathbf{x}_v) = (N \circ \mathbf{x})_v(u_0, v_0).$$

Inoltre, $\forall (u, v) \in U$, abbiamo che

$$\langle N \circ \mathbf{x}, \mathbf{x}_u \rangle = 0 \quad , \quad \langle N \circ \mathbf{x}, \mathbf{x}_v \rangle = 0 \quad (1.2)$$

perchè $N \circ \mathbf{x}$ è ortogonale al piano tangente ad S in p che è generato da \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v . Derivando la prima equazione della (1.2) rispetto a v e la seconda rispetto a u otteniamo

$$\langle (N \circ \mathbf{x})_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N \circ \mathbf{x}, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0 \quad , \quad \langle (N \circ \mathbf{x})_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N \circ \mathbf{x}, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0.$$

La parametrizzazione \mathbf{x} è di classe C^∞ , quindi possiamo applicare il teorema di Schwarz e scambiare l'ordine di derivazione ($\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$). Quindi

$$\langle (N \circ \mathbf{x})_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle (N \circ \mathbf{x})_v, \mathbf{x}_u \rangle \iff \langle d_p N(\mathbf{x}_u), \mathbf{x}_v \rangle = \langle d_p N(\mathbf{x}_v), \mathbf{x}_u \rangle.$$

□

Definizione 1.12. Sia S una superficie regolare, sia $p \in S$. La **seconda forma fondamentale** di S in p è la forma quadratica su $T_p(S)$, definita da:

$$II_p(v) = -\langle d_p N(v), v \rangle.$$

Anche alla seconda forma fondamentale sono associati dei coefficienti che dipendono dalla parametrizzazione scelta:

Definizione 1.13. Sia S una superficie regolare di \mathbb{R}^3 , sia $p \in S$. Sia $\mathbf{x} : U \rightarrow S \cap A$ una parametrizzazione di S in p e sia N il campo di Gauss definito in modo tale che $N \circ \mathbf{x} = (\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v) / \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|$. Per $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$ i **coefficienti di Gauss** della seconda forma fonamentale di S in p sono:

$$e(p) = -\langle d_p N(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)), \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \rangle = -\langle (N \circ \mathbf{x})_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \rangle,$$

$$f(p) = -\langle d_p N(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)), \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \rangle = -\langle (N \circ \mathbf{x})_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \rangle,$$

$$g(p) = -\langle d_p N(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)), \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \rangle = -\langle (N \circ \mathbf{x})_v(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \rangle.$$

1.4 Curvature

Una delle domande a cui deve rispondere la geometria differenziale è come misurare la curvatura di una superficie. La risposta a questa domanda non è semplice e neppure univoca: esistono modi significativi per misurare la curvatura di una superficie, che analizzeremo in questo paragrafo.

Definizione 1.14. Siano α una curva regolare in S passante per $p \in S$, k la curvatura di α in p e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, dove n è il vettore normale ad α e N è il vettore normale a S in p . La quantità $k_n = k \cos \theta$ è chiamata **curvatura normale** di α in p .

In altre parole k_n è la lunghezza della proiezione del vettore kn sulla normale alla superficie in p , con il segno dato dall'orientazione di N su S in p .

Definizione 1.15. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientata con mappa di Gauss $N : S \rightarrow S^2$ e sia $p \in S$. Un autovettore di $d_p N$ di lunghezza unitaria è detto **direzione principale** di S in p , e il relativo autovalore cambiato di segno è detto **curvatura principale**.

Nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato che $d_p N$ è un endomorfismo simmetrico, e dunque (grazie al teorema spettrale) diagonalizzabile; quindi ha senso parlare di autovalori e autovettori di $d_p N$.

Osservazione 6. Se $v \in T_p(s)$ è una direzione principale con curvatura principale k , abbiamo

$$II_p(v) - \langle d_p N(v), v \rangle = -\langle -kv, v \rangle = k,$$

per cui le curvatures principali sono curvatures normali. Per essere esatti sono la minima e la massima curvatura normale nel punto.

In generale, dato un endomorfismo, due quantità fondamentali per descriverne il comportamento sono la traccia e il determinante.

Definizione 1.16. Sia S una superficie regolare orientata, siano k_1 e k_2 le curvatures principali di S in p .

La **curvatura di Gauss** di S in p è:

$$K(p) = \det(d_p N) = (-k_1)(-k_2) = k_1 k_2.$$

La **curvatura media** di S in p è:

$$H(p) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(d_p N) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Proposizione 1.4.1. *Sia S una superficie regolare. Indichiamo con $(\beta_j^i)_{1 \leq i, j \leq 2}$ la matrice che rappresenta $d_p N$ nella base $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$, dove $\mathbf{x} : U \rightarrow S \cap A$ è una parametrizzazione di S in p . Allora:*

$$\begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e(p) & f(p) \\ f(p) & g(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(p) & F(p) \\ F(p) & G(p) \end{pmatrix}^{-1}$$

Il seguente teorema ci consente di calcolare effettivamente il valore delle curvatures principali, Gaussiana e media, esprimendole in termini dei coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale.

Teorema 1.4.2. *Sia S una superficie regolare in p orientata, sia $\mathbf{x} : U \rightarrow S \cap A$ una parametrizzazione di S intorno a p , sia N il campo di Gauss. Allora valgono le seguenti condizioni:*

- *Le curvatures principali k_1 e k_2 sono le radici del polinomio $\lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p)$.*
- *La curvatura di Gauss di S in p è:*

$$K(p) = \det \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 \end{pmatrix}$$

che si può anche scrivere come:

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

- *La curvatura media di S in p è:*

$$H(p) = -\frac{1}{2}(\beta_1^1 + \beta_2^2) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Dimostrazione. Per il primo punto è sufficiente un controllo diretto. Infatti, per $\lambda = k_1$, abbiamo:

$$\begin{aligned} k_1^2 - 2 \left(\frac{1}{2}(k_1 + k_2) \right) k_1 + k_1 k_2 &= k_1^2 - (k_1 + k_2)k_1 + k_1 k_2 \\ &= k_1^2 - k_1^2 - k_1 k_2 + k_1 k_2 = 0. \end{aligned}$$

Allo stesso risultato si arriva per $\lambda = k_2$.

Per gli altri due punti bisogna lavorare sulle β . Sappiamo che le curvature principali k_1 e k_2 , in quanto autovalori di $-d_p N$, sono le radici del polinomio caratteristico $\det(-d_p N - \lambda I)$. Calcoliamo tale determinante:

$$\begin{aligned} \det(-d_p N - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\beta_1^1 - \lambda & -\beta_2^1 \\ -\beta_1^2 & -\beta_2^2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + \beta_1^1 \beta_2^2 + \beta_1^1 \lambda + \beta_2^2 \lambda - \beta_1^2 \beta_2^1 \\ &= \lambda^2 + (\beta_1^1 + \beta_2^2) \lambda + \det(\beta_{ij}); \end{aligned}$$

ma sopra abbiamo dimostrato che k_1 e k_2 sono anche le soluzioni di $\lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0$, quindi si deve avere che:

$$\beta_1^1 + \beta_2^2 = -2H(p) \quad \left(\text{ossia } H(p) = -\frac{1}{2}(\beta_1^1 + \beta_2^2) \right) \quad \text{e} \quad \det(\beta_{ij}) = K(p).$$

□

Definizione 1.17. Sia S una superficie di \mathbb{R}^3 regolare in p , orientata intorno a p dal campo di Gauss N .

- Si dice che p è un **punto ellittico** se $\det(d_p N) > 0$;
- Si dice che p è un **punto iperbolico** se $\det(d_p N) < 0$;
- Si dice che p è un **punto parabolico** se $d_p N \neq 0$ e $\det(d_p N) = 0$;
- Si dice che p è un **punto piatto** (o **planare**) se $d_p N = 0$.

Queste definizioni non dipendono dall'orientazione della superficie, cioè non dipendono dalla scelta del campo di Gauss.

Proposizione 1.4.3. Siano k_1 e k_2 le curvature principali in p . Siano $K(p)$ e $H(p)$ rispettivamente le curvature di Gauss e media in p . Allora:

- p è ellittico $\iff K(p) > 0 \iff eg - f^2 > 0 \iff k_1, k_2$ hanno lo stesso segno;

- p è iperbolico $\iff K(p) < 0 \iff eg - f^2 < 0 \iff k_1, k_2$
hanno segno opposto;
- p è parabolico $\iff K(p) = 0, H(p) \neq 0 \iff eg - f^2 = 0$ e
 $(e, f, g) \neq (0, 0, 0) \iff k_1 = 0, k_2 \neq 0$ oppure $k_1 \neq 0, k_2 = 0$;
- p è piatto $\iff K(p) = 0, H(p) = 0 \iff e = f = g = 0 \iff$
 $k_1 = k_2 = 0$.

Capitolo 2

Le superfici minime

In questo capitolo analizzeremo alcune delle più importanti proprietà che caratterizzano le superfici minime in \mathbb{R}^3 .

Nel seguito considereremo soltanto superfici con atlante costituito da una sola parametrizzazione.

2.1 Variazione normale e funzione area

Definizione 2.1. Sia S una superficie regolare di \mathbb{R}^3 . Diciamo che S è una **superficie minima** se ha curvatura media identicamente nulla.

Una superficie regolare $S \subset \mathbb{R}^3$ è minima se la sua curvatura media è nulla in una qualunque parametrizzazione. Infatti, a differenza dei coefficienti della prima e seconda forma fondamentale, il valore assoluto della curvatura media non dipende dalla parametrizzazione locale scelta, in quanto è definito direttamente a partire dalla mappa di Gauss senza utilizzare parametrizzazioni locali. Ne segue che una superficie è minima se ogni sua parametrizzazione è minima.

Le superfici minime sono anche caratterizzate dal fatto che tutti i punti sono o iperbolici o planari. Infatti se $H = 0$, allora le due curvature principali sono opposte: $k_1 = -k_2$ (eventualmente $k_1 = k_2$). Pertanto la curvatura

Gaussiana è negativa o nulla.

Per giustificare l'utilizzo del termine *minime* riferito a determinate superfici, abbiamo bisogno di introdurre il concetto di variazione normale.

Definizione 2.2. Sia $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di una superficie regolare S . Prendiamo un dominio limitato $D \subset U$ e una funzione differenziabile $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, dove \bar{D} è l'unione del dominio D e del suo bordo ∂D .

Ricordando che N indica la mappa di Gauss della superficie S , la **variazione normale** di $\mathbf{x}(\bar{D})$, determinata da h , è la mappa (Figura 2.1) data da:

$$\phi : \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\phi(u, v, t) = \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

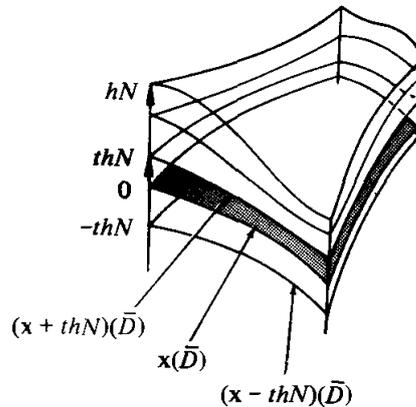


Figura 2.1: Variazione normale di $\mathbf{x}(\bar{D})$.

Per ogni fissato $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, la mappa $\mathbf{x}^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x}^t(u, v) = \phi(u, v, t)$$

è la parametrizzazione di una superficie con

$$\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial u} = \mathbf{x}_u + thN_u + th_u N,$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial v} = \mathbf{x}_v + thN_v + th_vN.$$

Se indichiamo con E^t , F^t , G^t i coefficienti della prima forma fondamentale, otteniamo

$$\begin{aligned} E^t &= \langle \mathbf{x}_u + thN_u + th_uN, \mathbf{x}_u + thN_u + th_uN \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, thN_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, th_uN \rangle + \langle thN_u, \mathbf{x}_u \rangle \\ &\quad + \langle thN_u, thN_u \rangle + \langle thN_u, th_uN \rangle + \langle th_uN, \mathbf{x}_u \rangle + \langle th_uN, thN_u \rangle \\ &\quad + \langle th_uN, th_uN \rangle. \end{aligned}$$

Ricordando che

$$\mathbf{x}_u \perp N, \quad N_u = d_p N(\mathbf{x}_u) \perp N, \quad \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = E, \quad \langle N, N \rangle = 1$$

abbiamo

$$E^t = E + th(\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u.$$

Analogamente otteniamo

$$F^t = F + th(\langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v,$$

$$G^t = G + th(\langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle) + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v.$$

Usando il fatto che

$$\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle = -e, \quad \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle = -2f, \quad \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle = -g$$

e il fatto che la curvatura media è

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2fF + Ge}{EG - F^2},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2fF + Ge) + R(t) \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R(t), \end{aligned}$$

dove $\lim_{t \rightarrow 0} R(t)/t = 0$.

Vista la regolarità di h ed N , risulta che \mathbf{x}^t parametrizza ancora una regione

di superficie regolare, che è modificata ortogonalmente rispetto a $\mathbf{x}(\bar{D})$.

L'area $A(t)$ di $\mathbf{x}^t(\bar{D})$ è:

$$\begin{aligned} A(t) &= \iint_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} \, dudv \\ &= \iint_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}(t)} \sqrt{EG - F^2} \, dudv, \end{aligned}$$

dove $\bar{R}(t) = R(t)/(EG - F^2)$.

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ha

$$A'(t) = \iint_{\bar{D}} \frac{(-4hH + \bar{R}'(t))\sqrt{EG - F^2}}{2\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}(t)}} \, dudv.$$

Avendosi $R(t)/t \rightarrow 0$, per $t \rightarrow 0$, si ha pure $R'(0) = 0$; dunque

$$A'(0) = - \iint_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2} \, dudv. \quad (2.1)$$

Il prossimo teorema ci consente (in parte) di giustificare l'uso del termine *minima* per superfici la cui curvatura media è identicamente nulla.

Teorema 2.1.1. *Sia S una superficie regolare di \mathbb{R}^3 e sia $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una sua parametrizzazione. Sia inoltre $D \subset U$ un dominio limitato in U . Allora \mathbf{x} parametrizza una superficie minima se e solo se $A'(0) = 0$ per ogni $D \subset U$ e per ogni variazione normale di $\mathbf{x}(\bar{D})$.*

Dimostrazione. Se \mathbf{x} è minima $\implies H \equiv 0 \implies A'(0) = 0$.

Viceversa supponiamo che $\exists q \in D : H(q) \neq 0$. Scegliamo $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $h(q) = H(q)$ e $h \equiv 0$ al di fuori di un piccolo intorno di q . Allora $A'(0) < 0$ per la variazione determinata da questa h , e questa è una contraddizione.

□

Dunque ogni regione limitata $\mathbf{x}(\bar{D})$ di una superficie minima \mathbf{x} è un punto critico della funzione area per qualsiasi variazione normale di $\mathbf{x}(\bar{D})$. C'è da notare che questo punto critico può non essere un minimo e ciò rende il termine *minima* non del tutto appropriato. Tuttavia si tratta di un'antica terminologia introdotta per la prima volta da Lagrange nel 1760.

Possiamo quindi stabilire una correlazione tra le superfici minime e i cosiddetti problemi di area minima: data una o più curve chiuse nello spazio, trovare, tra tutte le superfici aventi le curve date come bordo, quella che ha area minima. Ogni superficie soluzione del problema, oltre a minimizzare l'area, avrà anche curvatura media identicamente nulla, quindi sarà una superficie minima.

Non vale il viceversa, ossia non tutte le superfici minime aventi delle date curve chiuse nello spazio come bordo sono superfici che minimizzano l'area per il bordo assegnato.

2.2 Superfici isoterme

Andiamo ora a considerare una classe più ristretta di parametrizzazioni, ma prima introduciamo il **vettore curvatura media**, definito come $\mathbf{H} = HN$.

Il significato geometrico della direzione di \mathbf{H} può essere ottenuto da (2.1). Infatti, se prendiamo $h = \mathbf{H}$, abbiamo, per questa particolare variazione

$$A'(0) = -2 \iint_{\bar{D}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \sqrt{EG - F^2} \, dudv < 0.$$

Questo significa che, se deformiamo $\mathbf{x}(\bar{D})$ nella direzione del vettore \mathbf{H} , l'area inizialmente decresce.

Il vettore curvatura media ha anche un'altra interpretazione che ora analizzeremo, in quanto ha importanti implicazioni nella teoria delle superfici minime.

Definizione 2.3. Sia S una superficie regolare di \mathbb{R}^3 e sia \mathbf{x} una sua parametrizzazione. Diciamo che $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ è **isoterma** se:

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \lambda^2(u, v) \quad e \quad \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0. \quad (2.2)$$

In questo caso le coordinate (u, v) sono dette *isoterme* o *conformi*.

Proposizione 2.2.1. *Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una parametrizzazione isoterma di una superficie regolare S di \mathbb{R}^3 . Allora:*

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

dove $\lambda^2 = \lambda^2(u, v)$.

Dimostrazione. Siccome \mathbf{x} è isoterma si ha

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle \quad e \quad \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0. \quad (2.3)$$

Differenziando la prima equazione della (2.3) rispetto a u otteniamo

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{vu} \rangle,$$

da cui

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_v \rangle.$$

Differenziando, invece, la seconda equazione della (2.3) rispetto a v otteniamo

$$\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle.$$

Sappiamo che \mathbf{x} è di classe C^∞ in quanto è la parametrizzazione di una superficie regolare, quindi $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$, da cui segue che

$$\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle.$$

Ciò equivale a dire che

$$\langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = 0. \quad (2.4)$$

Analogamente, differenziando la prima equazione della (2.3) rispetto a v e la seconda rispetto ad u , troviamo che

$$\langle \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = 0. \quad (2.5)$$

Dalla (2.4) e dalla (2.5) segue immediatamente che $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}$ è un vettore parallelo a \mathbf{N} . Siccome \mathbf{x} è isoterma si ha

$$H = \frac{1}{2} \frac{g + e}{\lambda^2}.$$

Quindi,

$$2\lambda^2 H = g + e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} \rangle,$$

da cui

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H}.$$

□

Definizione 2.4. Il **Laplaciano** Δf di una funzione differenziabile $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è definito come:

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right),$$

$(u, v) \in U$.

Definizione 2.5. Diciamo che f è **armonica** in U se $\Delta f = 0$.

Utilizzando queste due nuove definizioni e la Proposizione 2.2.1 otteniamo il seguente corollario:

Corollario 2.2.2. Sia $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ la parametrizzazione di una superficie regolare S in \mathbb{R}^3 e supponiamo che \mathbf{x} sia isoterma. Allora \mathbf{x} parametrizza una superficie minima se e solo se x, y, z sono funzioni armoniche.

Dimostrazione. \mathbf{x} è isoterma $\implies \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H}$.

Inoltre \mathbf{x} minima $\implies H = 0 \implies \mathbf{H} = 0 \implies \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$.

Questo equivale a dire che

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) = 0.$$

Quindi possiamo concludere che x, y e z sono funzioni armoniche.

Viceversa abbiamo che x, y, z sono funzioni armoniche \implies

$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0 \implies 2\lambda^2 \mathbf{H} = 0 \implies \mathbf{H} = 0 \implies H = 0 \implies \mathbf{x}$ minima.

□

2.3 Superfici minime e funzioni analitiche

Nel seguito identificheremo \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 mediante l'applicazione

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto \xi = u + iv.\end{aligned}$$

Definizione 2.6. Sia $U \subset \mathbb{C}$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$f(\xi) = f_1(u, v) + if_2(u, v).$$

Diciamo che f è **analitica** quando le funzioni reali f_1 e f_2 hanno derivate parziali del primo ordine continue che soddisfano le cosiddette *equazioni di Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}.$$

Sia ora $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione di una superficie regolare.

Definiamo le funzioni complesse ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 come segue:

$$\phi_1(\xi) = \frac{\partial x}{\partial u} - i\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \phi_2(\xi) = \frac{\partial y}{\partial u} - i\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \phi_3(\xi) = \frac{\partial z}{\partial u} - i\frac{\partial z}{\partial v}, \quad (2.6)$$

dove x, y, z sono le funzioni componenti di \mathbf{x} .

Teorema 2.3.1. \mathbf{x} è isoterma se e solo se

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0. \quad (2.7)$$

Se quest'ultima condizione è verificata, \mathbf{x} è minima se e solo se ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 sono funzioni analitiche.

Dimostrazione. Attraverso semplici calcoli troviamo che

$$\begin{aligned}\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle - 2i\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ &= E - G - 2iF.\end{aligned}$$

Questo dimostra la prima parte del teorema.

Inoltre, $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ se e solo se

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) &= -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right),\end{aligned}$$

che soddisfano una parte delle equazioni di Cauchy-Riemann per ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 . E' facile verificare che le restanti condizioni sono sempre soddisfatte, per costruzione delle stesse ϕ_k ($k = 1, 2, 3$), quindi possiamo concludere che $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ se e solo se ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 sono analitiche. \square

E' facile a questo punto dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 2.3.2. *Sia S una superficie di \mathbb{R}^3 data mediante la parametrizzazione $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, con $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Allora:*

a) *Se \mathbf{x} è isoterma, allora S è regolare \iff*

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0. \quad (2.8)$$

b) *ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sono analitiche in $\xi \iff x, y, z$ sono armoniche in (u, v) .*

Dimostrazione. Il punto (b) deriva direttamente dalla definizione delle ϕ_k , quindi ci rimane da dimostrare il punto (a). Attraverso facili calcoli otteniamo:

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = |\mathbf{x}_u|^2 + |\mathbf{x}_v|^2.$$

Dire che $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0$ equivale a dire che \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v sono linearmente indipendenti e questa è proprio la condizione di regolarità. \square

Quindi possiamo concludere che ad ogni superficie minima regolare \mathbf{x} , con \mathbf{x} parametrizzazione isoterma, è possibile associare le funzioni ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 definite dalle (2.6) che soddisfano le equazioni (2.7) e (2.8). Ma in realtà vale anche il viceversa; e a tal proposito enunciamo la seguente proposizione:

Proposizione 2.3.3. *Siano ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 funzioni analitiche in ξ che soddisfano (2.7) e (2.8) in un dominio semplicemente connesso D . Allora esiste una superficie minima regolare $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ definita su D tale che valgono le (2.6).*

Dimostrazione. Se definiamo

$$x = \operatorname{Re} \int \phi_1(\xi) d\xi, \quad y = \operatorname{Re} \int \phi_2(\xi) d\xi, \quad z = \operatorname{Re} \int \phi_3(\xi) d\xi, \quad (2.9)$$

allora $x, y,$ e z sono funzioni armoniche che soddisfano le (2.6).

Applicando poi le due proposizioni precedenti, il risultato segue dal Corollario 2.2.2.

□

Le funzioni $x, y,$ e z della (2.9) sono definite a meno di una costante additiva, pertanto la superficie è determinata a meno di traslazioni.

2.4 Equazione di Lagrange

Finora abbiamo considerato esclusivamente superfici parametriche e abbiamo visto alcune condizioni necessarie e sufficienti a definire una superficie minima.

In questo paragrafo consideriamo, invece, superfici date come grafico di una funzione differenziabile f . Dimostriamo innanzitutto la seguente proposizione:

Proposizione 2.4.1. *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora il grafico $\Gamma_f = \{(u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in U\}$ di f è una superficie regolare con atlante costituito da una sola parametrizzazione locale, la $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$.*

Dimostrazione. La condizione 1 della Definizione 1.1 è chiaramente soddisfatta. La restrizione a Γ_f della proiezione sulle prime due coordinate è l'inversa (continua) di \mathbf{x} , per cui anche la condizione 2 è soddisfatta. Infine,

$$Jac(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

ha rango 2 in ogni punto, quindi possiamo concludere che il grafico di f è una superficie regolare.

□

Vediamo ora sotto quali condizioni una funzione differenziabile definita in un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ a valori in \mathbb{R} definisce una superficie minima.

Proposizione 2.4.2. *Tutte le funzioni f i cui grafici definiscono superfici minime sono soluzioni dell'equazione differenziale del secondo ordine:*

$$\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0. \quad (2.10)$$

La (2.11) è nota come **equazione delle superfici minime** o **equazione di Lagrange**.

Dimostrazione. Sia

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

la superficie minima grafico di f . Per semplicità poniamo

$$p = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Quindi si ha:

$$\mathbf{x}_u = (1, 0, p),$$

$$\mathbf{x}_v = (0, 1, q),$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}(-p, -q, 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}(-p, -q, 1),$$

dove ∇ indica il gradiente, e quindi

$$E = (1 + p^2), \quad F = pq, \quad G = (1 + q^2),$$

$$e = \frac{r}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \quad f = \frac{s}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}, \quad g = \frac{t}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}.$$

Sostituendo in

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg + Ge - 2Ff}{EG - F^2}$$

si ha

$$H = \frac{(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs}{2(1 + |\nabla f|^2)\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}.$$

Poniamo

$$W = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

e consideriamo la quantità

$$2W^3H = (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t =: T(f).$$

Poichè $H = 0$, $T(f) = 0$, ossia

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0.$$

e questa equazione equivale alla (2.10).

□

Nel caso di superfici che sono grafici di funzioni differenziabili, vale quello che non vale in generale: l'essere superficie minima è sufficiente a garantire l'essere superficie che risolve il problema dell'area minima per qualche curva chiusa e semplice (ossia che non si autointerseca) nello spazio. Questa relazione tra superfici minime e superfici di area minima venne scoperta da Monge e pubblicata nel libro *Sur une méthode d'intégrer les équations aux différences ordinaires* del 1783: data una curva chiusa e semplice dello spazio, se una superficie che ha come bordo la curva data è anche il grafico di una funzione differenziabile, allora per questa superficie l'essere minima è condizione necessaria e anche sufficiente a garantire che la sua area è minore dell'area di qualunque altra superficie avente la curva data come bordo.

Capitolo 3

Esempi di superfici minime

In questo capitolo studieremo alcuni esempi classici di superfici minime e ne analizzeremo le proprietà. Prima, però, facciamo una breve introduzione sulle superfici di rotazione che ci sarà poi utile a dimostrare che la catenoide è l'unica, tra esse, ad essere una superficie minima.

3.1 Superfici di rotazione

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto ruotando una curva piana regolare C attorno ad un asse del piano che non interseca la curva. Prenderemo il piano xz come piano della curva e l'asse z come asse di rotazione. Sia

$$x = f(v), \quad z = g(v), \quad a < v < b, \quad f(v) > 0,$$

una parametrizzazione di C e denotiamo con u l'angolo di rotazione attorno all'asse z . Allora otteniamo una mappa

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

dall'aperto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ a S . Vedremo subito che \mathbf{x} è effettivamente la parametrizzazione di una superficie regolare. Siccome S può essere interamente ricoperta da parametrizzazioni del tipo precedente, segue che S è una superficie regolare detta **superficie di**

rotazione. La curva C è detta *curva generatrice* di S e l'asse z è l'*asse di rotazione* di S . I cerchi descritti dai punti di C sono detti *paralleli* di S , e le varie posizioni di C su S sono dette *meridiani* di S . I paralleli e i meridiani hanno la grande proprietà di essere *linee di curvatura* della superficie S , ossia delle curve le cui tangenti in ogni punto sono direzioni principali (e tale proprietà ci sarà utile in seguito).

Per mostrare che \mathbf{x} è una parametrizzazione di S dobbiamo verificare le condizioni 1, 2, 3 della Definizione 1.1. Le condizioni 1 e 3 sono immediate, quindi ci rimane da dimostrare che \mathbf{x} è un omeomorfismo. Facciamo vedere innanzitutto che \mathbf{x} è iniettiva. Infatti, siccome $(f(v), g(v))$ è una parametrizzazione di C , dati z e $x^2 + y^2 = (f(v))^2$, possiamo determinare v univocamente. Quindi \mathbf{x} è iniettiva.

Sempre perchè $(f(v), g(v))$ è una parametrizzazione di C , v è una funzione continua di z e di $\sqrt{x^2 + y^2}$ e quindi è una funzione continua di (x, y, z) .

Per dimostrare che \mathbf{x}^{-1} è continua, rimane da provare che u è una funzione continua di (x, y, z) . Per vedere ciò, osserviamo innanzitutto che se $u \neq \pi$, otteniamo (siccome $f(v) \neq 0$)

$$\begin{aligned} \tan \frac{u}{2} &= \frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1 + \cos u} \\ &= \frac{\frac{y}{f(v)}}{1 + \frac{x}{f(v)}} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}; \end{aligned}$$

quindi,

$$u = 2 \tan^{-1} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pertanto, se $u \neq \pi$, u è una funzione continua di (x, y, z) . Per la stessa ragione, se u è in piccolo intervallo di π , otteniamo

$$u = 2 \cotan^{-1} \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Quindi u è una funzione continua di (x, y, z) e questo mostra che \mathbf{x}^{-1} è continua.

3.2 La catenoide

La catenoide è il primo esempio di superficie minima non banale (l'esempio banale è fornito dal piano), scoperto da Eulero nel 1744.

Una sua parametrizzazione è data da:

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av), \quad (3.1)$$

$$0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

Si tratta della superficie generata dalla rotazione della catenaria $y = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right)$ attorno all'asse z . Ricordiamo che la catenaria è la curva descritta da una corda ideale, cioè perfettamente flessibile, inestendibile, senza spessore e di densità uniforme, appesa a due punti e lasciata libera di pendere sotto l'azione del proprio peso.

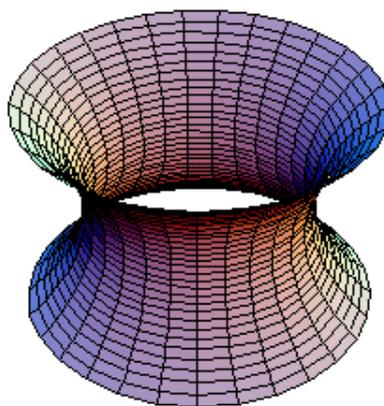


Figura 3.1: Catenoide.

E' facile mostrare che

$$E = G = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0 \quad (3.2)$$

e che $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$. Quindi, dal Corollario 2.2.2, segue che la catenoide è una superficie minima.

Nel caso della catenoide la soluzione dell'equazione di Lagrange è data da

$$f(x, y) = \cosh^{-1} r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposizione 3.2.1. *La catenoide è l'unica superficie minima che sia di rotazione.*

Dimostrazione. Vogliamo trovare una curva $y = f(x)$ tale che, ruotandola attorno all'asse x , descriva una superficie minima. Siccome i paralleli e i meridiani di una superficie di rotazione sono linee di curvatura della superficie, dobbiamo avere che la curvatura della curva $y = f(x)$ è l'opposto della curvatura normale del cerchio generato dal punto $f(x)$ (entrambe sono curvatures principali). Poichè la curvatura di $y = f(x)$ è

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

e la curvatura normale del cerchio è la proiezione della sua usuale curvatura ($=1/y$) sulla normale N alla superficie (vedi figura 3.2), otteniamo

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = -\frac{1}{y} \cos \phi.$$

Ma $-\cos \phi = \cos \theta$ (vedi figura 3.2), e siccome $\tan \theta = y'$, otteniamo

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{1}{y} \frac{1}{(1 + (y')^2)^{1/2}}$$

come equazione che deve essere soddisfatta dalla curva $y = f(x)$.

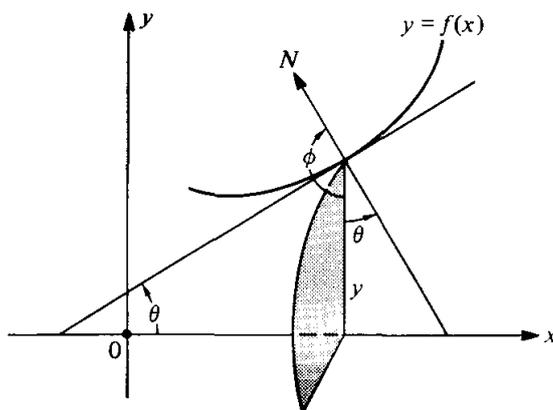


Figura 3.2: Proiezione della curvatura del cerchio sulla normale alla superficie.

Chiaramente esiste un punto in cui $f'(x) \neq 0$. Lavoriamo in un intorno di questo punto in cui $f' \neq 0$. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione precedente per $2y'$, otteniamo

$$\frac{2y''y'}{1 + (y')^2} = \frac{2y'}{y}.$$

Ponendo $1 + (y')^2 = z$ (dunque $2y''y' = z'$), abbiamo

$$\frac{z'}{z} = \frac{2y'}{y},$$

la quale, attraverso un'integrazione, dà (k è una costante)

$$\log z = \log y^2 + \log k^2 = \log(yk)^2$$

oppure,

$$1 + (y')^2 = z = (yk)^2.$$

L'ultima espressione può essere scritta come

$$\frac{kdy}{\sqrt{(yk)^2 - 1}} = kdx$$

che, ancora attraverso un'integrazione, dà (c è una costante)

$$\cosh^{-1}(yk) = kx + c$$

o

$$y = \frac{1}{k} \cosh(kx + c).$$

Quindi, in un intorno di un punto in cui $f' \neq 0$, la curva $y = f(x)$ è una catenaria. Ma y' può essere solo 0 in $x = 0$, e se la superficie è connessa, è per continuità una catenoide.

□

3.3 L'elicoide

Consideriamo un'elica che è data da $(\cos \bar{u}, \sin \bar{u}, b\bar{u})$. Attraverso ogni punto dell'elica, tracciamo una linea parallela al piano xy che interseca l'asse z . La superficie generata da queste linee è chiamata *elicoide* e ammette la seguente parametrizzazione:

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{v} \cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, b\bar{u}), \quad (3.3)$$

$$0 < \bar{u} < 2\pi, \quad -\infty < \bar{v} < \infty.$$

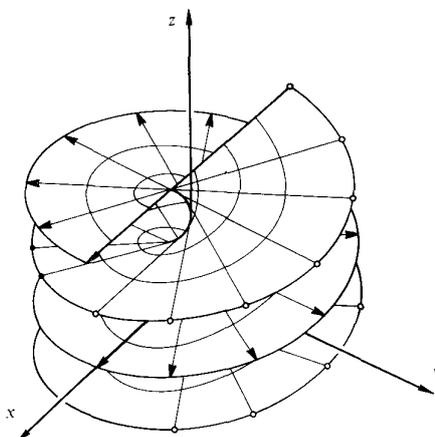


Figura 3.3: Elicoide.

Nel caso dell'elicoide la soluzione dell'equazione di Lagrange è data da

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

Vogliamo dare ora una nuova parametrizzazione dell'elicoide che ci permetterà di dimostrare che tale superficie è minima e che ci tornerà utile quando dimostreremo che l'elicoide e il catenoide sono superfici minime coniugate e localmente isometriche.

A tal proposito consideriamo il seguente cambio di parametri:

$$\bar{u} = u - \frac{\pi}{2}, \quad \bar{v} = a \sinh v, \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty,$$

(la a è la medesima che compare nella (3.1)) che è possibile in quanto la mappa è certamente iniettiva e lo Jacobiano

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = a \cosh v$$

è sempre diverso da 0. Quindi, una nuova parametrizzazione dell'elicoide è

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \sinh v \sin u, -a \sinh v \cos u, a(u - \pi/2)), \quad (3.4)$$

relativamente alla quale i coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = G = a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0. \quad (3.5)$$

Pertanto, sempre dal Corollario 2.2.2, possiamo concludere che l'elicoide è una superficie minima.

3.4 Legame tra catenoide ed elicoide

Esiste una stretta connessione tra la catenoide e l'elicoide. Si dimostra prima di tutto che esse sono superfici minime localmente isometriche, ed è possibile trasformare una catenoide in un elicoide mediante una famiglia continua di superfici minime localmente isometriche (vedi figura 3.4). L'esistenza di un'isometria locale tra le due superfici è assicurata dalla seguente proposizione:

Proposizione 3.4.1. *Supponiamo che esistano due parametrizzazioni $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ e $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{S}$ tali che $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$ in U . Allora la mappa $\phi = \bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \rightarrow \bar{S}$ è un'isometria locale.*

Dimostrazione. Sia $p \in \mathbf{x}(U)$ e sia $w \in T_p(S)$. Allora w è tangente ad una curva $\mathbf{x}(\alpha(t))$ in $t = 0$, dove $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ è una curva in U . Quindi w può essere scritto come (t=0)

$$w = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Per definizione, il vettore $d\phi_p(w)$ è un vettore tangente alla curva $\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}(\alpha(t))$, quindi è tangente alla curva $\bar{\mathbf{x}}(\alpha(t))$ in $t = 0$. Pertanto

$$d\phi_p(w) = \bar{\mathbf{x}}_u u' + \bar{\mathbf{x}}_v v'.$$

Poichè

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 \\ I_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F}u'v' + \bar{G}(v')^2 \end{aligned}$$

possiamo concludere che $I_p(w) = I_{\phi(p)}(d\phi_p(w))$ per ogni $p \in \mathbf{x}(U)$ e per ogni $w \in T_p(S)$; quindi ϕ è un'isometria locale. □

Confrontando le (3.2) e le (3.5), per quanto appena dimostrato si ha che la catenoide e l'elicoide sono superfici localmente isometriche; esse sono dette *superfici minime coniugate*. Questa terminologia è giustificata dalle due seguenti definizioni:

Definizione 3.1. Quando due funzioni $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial u},$$

è facile vedere che esse sono funzioni armoniche; in questo caso f e g sono dette *armoniche coniugate*.

Definizione 3.2. Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} parametrizzazioni isoterme di due superfici minime tali che le loro funzioni componenti sono coppie di funzioni armoniche. Allora \mathbf{x} e \mathbf{y} sono dette *superfici minime coniugate*.

Indichiamo con \mathbf{X}_c la parametrizzazione della catenoide (3.1) e con \mathbf{X}_e la parametrizzazione dell'elicoide (3.4). Sappiamo che \mathbf{X}_c e \mathbf{X}_e sono isoterme e che le loro funzioni componenti sono armoniche in quanto la catenoide e l'elicoide sono superfici minime (vedi Corollario 2.2.2). Inoltre

$$\frac{\partial \mathbf{X}_c}{\partial u} = (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0) = -\frac{\partial \mathbf{X}_e}{\partial v}$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{X}_c}{\partial v} = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a) = \frac{\partial \mathbf{X}_e}{\partial u}.$$

Da ciò segue che la catenoide e l'elicoide sono effettivamente superfici minime coniugate; ma possiamo dire di più. Iniziamo con il porre

$$\mathbf{X}(u, v, t) = \cos t \mathbf{X}_c + \sin t \mathbf{X}_e.$$

In questo modo, al variare di t in \mathbb{R} , otteniamo una famiglia ad un parametro di superfici minime *associate* tale che $\mathbf{X}(u, v, 0) = \mathbf{X}_c$ e $\mathbf{X}(u, v, \pi/2) = \mathbf{X}_e$ e aventi la stessa forma fondamentale. Infatti, ponendo per comodità

$$\frac{\partial \mathbf{X}_c}{\partial u} = \mathbf{X}_{c,u}, \quad \frac{\partial \mathbf{X}_c}{\partial v} = \mathbf{X}_{c,v}, \quad \frac{\partial \mathbf{X}_e}{\partial u} = \mathbf{X}_{e,u}, \quad \frac{\partial \mathbf{X}_e}{\partial v} = \mathbf{X}_{e,v},$$

si ha che

$$\mathbf{X}_u = \cos t \mathbf{X}_{c,u} + \sin t \mathbf{X}_{e,u}$$

e

$$\mathbf{X}_v = \cos t \mathbf{X}_{c,v} + \sin t \mathbf{X}_{e,v},$$

quindi

$$E = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u = \cos^2 t E_c + \sin^2 t E_e + 2 \sin t \cos t (\mathbf{X}_{c,u} \cdot \mathbf{X}_{e,v}).$$

Ricordando che $E_c = E_e$ e utilizzando il fatto che $\mathbf{X}_{c,u} \cdot \mathbf{X}_{e,u} = 0$ (come dimostrano semplici calcoli) otteniamo

$$E = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u = E_c = E_e.$$

In maniera analoga troviamo

$$\begin{aligned} F &= \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v = 0, \\ G &= \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v = G_c = G_e. \end{aligned}$$

Quindi, in generale, due superfici minime coniugate possono essere trasformate l'una nell'altra mediante una famiglia ad un parametro di superfici minime, e la prima forma fondamentale di questa famiglia è indipendente dal parametro.

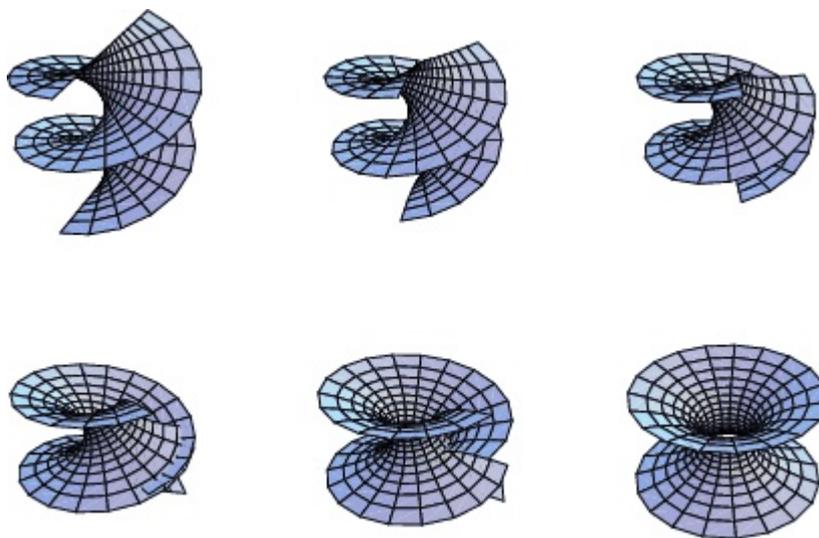


Figura 3.4: In figura è mostrata la deformazione dell'elicoide nella catenoide. Come si vede, la deformazione consiste nel tagliare la catenoide verticalmente avvitandola poi su se stessa. Le superfici intermedie sono ancora superfici minime tutte localmente isometriche.

3.5 La superficie di Enneper

La superficie di Enneper è data dalla seguente parametrizzazione:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

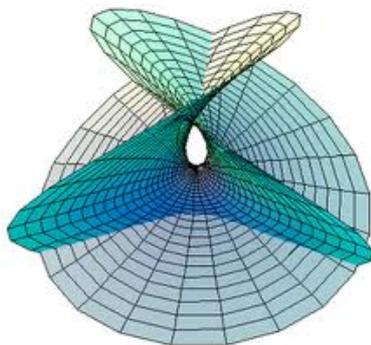


Figura 3.5: Superficie di Enneper.

Anche in questo caso è facile far vedere che

$$E = G = u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2 + 1, \quad F = 0$$

e che $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$. Quindi il Corollario 2.2.2 ci assicura che si tratta di una superficie minima.

Osserviamo che cambiando (u, v) in $(-v, u)$ cambiamo, sulla superficie, (x, y, z) in $(-y, x, -z)$. Quindi se effettuiamo una rotazione positiva di $\pi/2$ attorno all'asse z seguita da una simmetria nel piano xy , la superficie rimane invariata.

Un'interessante caratteristica della superficie di Enneper è che ha auto-intersezioni. Tale proprietà può essere dimostrata ponendo $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$ e scrivendo

$$\mathbf{x}(\rho, \theta) = \left(\rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos 3\theta, \rho \sin \theta + \frac{\rho^3}{3} \sin 3\theta, \rho^2 \cos 2\theta \right).$$

Quindi, se $\mathbf{x}(\rho_1, \theta_1) = \mathbf{x}(\rho_2, \theta_2)$, un semplice calcolo mostra che

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho_1^2 + \frac{\rho_1^6}{9} - \cos 4\theta \frac{2\rho_1^4}{3} \\ &= \left(\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} (\rho_1^2 \cos 2\theta_1)^2 \\ &= \left(\rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} (\rho_2^2 \cos 2\theta_2)^2. \end{aligned}$$

Poichè $\rho_1^2 \cos 2\theta_1 = \rho_2^2 \cos 2\theta_2$, otteniamo

$$\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} = \rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3},$$

dalla quale si ha che $\rho_1 = \rho_2$. Segue che $\cos 2\theta_1 = \cos 2\theta_2$.

Se, ad esempio, $\rho_1 = \rho_2$ e $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$, da

$$y(\rho_1, \theta_1) = y(\rho_2, \theta_2)$$

si ha che $y = -y$. Quindi $y = 0$; ovvero, i punti (ρ_1, θ_1) e (ρ_2, θ_2) appartengono alla curva $\sin \theta + (\rho^2/3) \sin 3\theta = 0$. Chiaramente, per ogni punto (ρ, θ)

che appartiene a questa curva, anche il punto $(\rho, 2\pi - \theta)$ appartiene ad essa, e

$$x(\rho, \theta) = x(\rho, 2\pi - \theta), \quad z(\rho, \theta) = z(\rho, 2\pi - \theta).$$

Quindi, l'intersezione della superficie con il piano $y = 0$ è una curva lungo la quale la superficie interseca se stessa.

Allo stesso modo può essere mostrato che anche l'intersezione della superficie con il piano $x = 0$ è una curva di auto-intersezione (questo corrisponde al caso in cui $\rho_1 = \rho_2$, $\theta_1 = \pi - \theta_2$). E' facile vedere che esse sono le uniche curve di auto-intersezione della superficie di Enneper.

3.6 La superficie di Scherk

Tale superficie è data dalla seguente parametrizzazione:

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\arg \frac{\xi + i}{\xi - i}, \arg \frac{\xi + 1}{\xi - 1}, \log \left| \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \right| \right),$$

$$\xi \neq \pm 1, \quad \xi \neq \pm i,$$

dove $\xi = u + iv$ e $\arg z$ è l'angolo che l'asse reale forma con ξ .

Dimostriamo ora che si tratta di una superficie minima.

Attraverso semplici calcoli abbiamo che

$$\begin{aligned} \arg \frac{\xi + i}{\xi - i} &= \tan^{-1} \frac{2u}{u^2 + v^2 - 1}, \\ \arg \frac{\xi + 1}{\xi - 1} &= \tan^{-1} \frac{-2v}{u^2 + v^2 - 1}, \\ \log \left| \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - 1} \right| &= \frac{1}{2} \log \frac{(u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2}{(u^2 - v^2 - 1)^2 + 4u^2v^2}; \end{aligned}$$

quindi,

$$\phi_1 = \frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{2}{1 + \xi^2}, \quad \phi_2 = -\frac{2i}{1 - \xi^2}, \quad \phi_3 = \frac{4\xi}{1 - \xi^4}.$$

Siccome $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 \equiv 0$ e ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 sono funzioni analitiche, dal Teorema 2.3.1 segue che \mathbf{x} è una parametrizzazione isoterma di una superficie minima.

Per come sono definite le funzioni x , y e z , è facile vedere che si ha

$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x},$$

dove $f(x, y) = \log(\cos y / \cos x)$ è soluzione dell'equazione di Lagrange.

Questa rappresentazione mostra che la superficie di Scherk è definita nel modello a scacchiera della Figura 3.6 (ad eccezione dei vertici dei quadrati, dove la superficie è una linea verticale.).

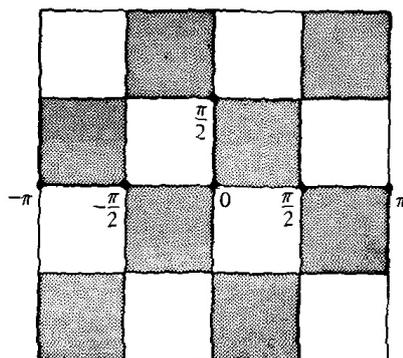


Figura 3.6: Modello a scacchiera.

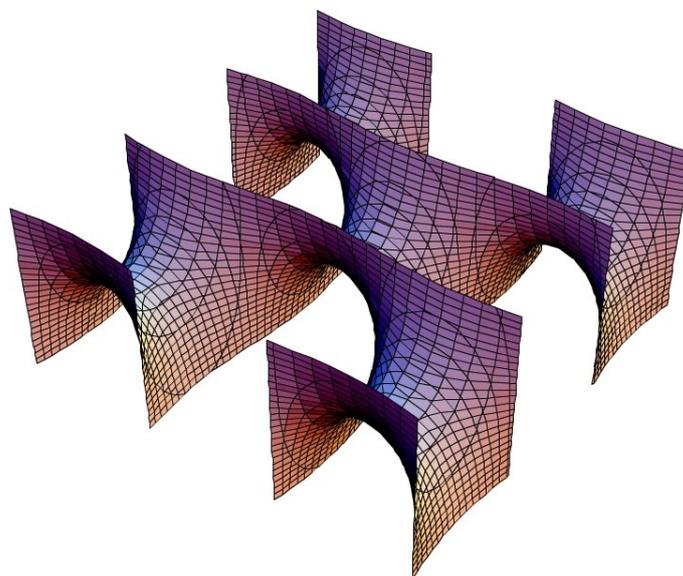


Figura 3.7: Superficie di Scherk. La si può vedere come due famiglie di semipiani ugualmente distanziati, paralleli, verticali che si incontrano ortogonalmente. Queste famiglie di semipiani suddividono il piano orizzontale come una scacchiera e nei quadrati neri (o bianchi) di questa ha la forma di una sella.

Bibliografia

- [1] Manfredo P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New Jersey, Prentice Hall, Inc., 1976
- [2] Robert Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Van Nostrand Reinhold Company, 1969
- [3] M. Abate, F. Tovena, *Curve e Superfici*, Springer Italia, Milano, 2006