

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
CORSO DI LAUREA IN FISICA

**EFFETTO DEI TERREMOTI
SUL MOTO DI ROTAZIONE
DELLA TERRA**

RELATORE:
Michele Dragoni

PRESENTATA DA:
Klaidi Shahu

ANNO ACCADEMICO 2021/2022

Abstract

La rotazione terrestre è un fenomeno complesso. Una delle sue componenti principali è la precessione di Chandler (Chandler wobble), la precessione libera della Terra dovuta alla sua forma ellissoidale e alla sua elasticità. Dunque, effetti su questa precessione si riflettono sulla rotazione terrestre complessiva. I terremoti sono una delle possibili cause che modificano la rotazione della Terra: possono spostare la posizione del polo e indurre variazioni nella durata del giorno. Per trattare i terremoti e la Terra verranno sfruttati diversi modelli di Terra, in base a forma e composizione. Lo studio coinvolgerà anche il potenziale gravitazionale e centrifugo della Terra. Le equazioni di Liouville rappresentano le equazioni cardine che ci permettono di analizzare insieme rotazione e terremoti: è necessaria una conoscenza del momento di inerzia della Terra e della sua variazione in seguito a una dislocazione. Inoltre, i terremoti rappresentano uno dei meccanismi di alimentazione della precessione di Chandler che in alternativa decadrebbe nel giro di alcune decine di anni. Anche processi atmosferici e oceanici alimentano il Chandler wobble e ne costituiscono la sorgente principale.

Indice

Introduzione	3
1 Il momento di inerzia della Terra	5
1.1 Momento di inerzia di una sfera omogenea	5
1.2 Modello sferico a due strati	6
1.3 Momento di inerzia di un ellissoide	7
1.4 Variazione di I_{ij} in seguito a una dislocazione	10
1.5 Variazione del potenziale gravitazionale	12
1.6 Effetti viscoelastici sulla variazione del momento di inerzia	13
2 La precessione libera della Terra	16
2.1 Rotazione di una sfera rigida omogenea	17
2.2 Rotazione di un ellissoide rigido	17
2.3 Effetto dell'elasticità della Terra	19
2.4 Equazioni di Liouville per un ellissoide elastico	20
2.5 Effetto della forza centrifuga	20
2.6 Numeri di Love e potenziale centrifugo modificato	21
3 Variazioni nel moto di rotazione	24
3.1 Effetto dei terremoti sul moto di rotazione della Terra	24
3.2 Soluzione dell'equazione di Liouville per m_1 e m_2	25
3.3 Soluzione dell'equazione di Liouville per m_3	27
3.4 Spostamenti nel moto del polo in seguito a grandi terremoti	28
3.5 Shift polare antecedente le scosse principali	30
3.6 Influenza dei parametri del terremoto sullo spostamento polare	32
3.7 Cenni sugli effetti dell'atmosfera e degli oceani sul Chandler wobble	35
Conclusioni	38
Bibliografia	40

Introduzione

La rotazione della Terra è un fenomeno che dipende da diverse variabili. Il suo studio deve considerare svariate proprietà della Terra: dal momento di inerzia, al potenziale gravitazionale, alla sua forma. I diversi modelli di Terra mettono in luce differenti aspetti, quali la sua stratificazione e la sua risposta nei confronti di eccitazioni esterne o interne. Nel primo capitolo viene affrontato il momento di inerzia di un sfera omogenea e successivamente di un ellissoide oblato. L'obiettivo è capire quali siano le equazioni che governano il moto di rotazione e comprendere se dislocazioni (terremoti) ne possano influenzare l'evoluzione. Poichè queste variazioni determinano cambiamenti nel potenziale gravitazionale, anche esse verranno trattate nel primo capitolo. Passando invece alla composizione della Terra, viene esaminato un modello a due strati (con densità diverse) e gli effetti viscoelastici del mantello e della litosfera terrestre al fine di determinare se queste proprietà partecipino o meno alla variazione del momento di inerzia.

Nel secondo capitolo è presentata una delle componenti del moto di rotazione, quella di precessione libera (data dalla forma ellissoidale della Terra) che viene analizzata tramite le due equazioni cardine: equazioni di Eulero e equazioni di Liouville. Queste relazioni presuppongono rispettivamente un comportamento rigido ed elastico della Terra e vengono prese in considerazione al fine di stabilire quali corrispondano meglio alle osservazioni e ai dati ad oggi disponibili. Allo stesso modo del potenziale gravitazionale, vengono studiati gli effetti della forza centrifuga sul moto di precessione libera grazie ai cosiddetti numeri di Love.

Nell'ultimo capitolo ci si concentra sull'effetto dei terremoti allo scopo di verificare se effettivamente questi causino variazioni nel moto di rotazione. La risposta risulta affermativa in quanto è possibile vedere come, trattando in un certo modo le dislocazioni, si abbia sia un cambiamento nella direzione dell'asse di rotazione, sia nel suo modulo (durata del giorno). Viene fornita infatti una soluzione alle equazioni di Liouville per ogni componente della rotazione.

Nei vari capitoli vengono forniti diversi ordini di grandezza delle varie quantità in gioco: ciò sarà utile per stimare lo spostamento del polo medio terrestre e la variazione nella durata del giorno. Con il termine Chandler wobble ci si riferisce al moto di precessione libera che considera l'elasticità della Terra, ovvero lo scostamento dalla precessione libera rigida, detta "euleriana". Un'ulteriore analisi viene svolta per chiarire quali siano i meccanismi che eccitano questa particolare precessione, in quanto la non perfetta elasticità della Terra farebbe sì che il moto decada nel giro di alcune decine di anni (fatto non osservato). Ad oggi si suppone che i contributi maggiori alla precessione di Chandler derivino da fluttuazioni della pressione nei fondali oceanici e da variazioni nella pressione atmosferica; i terremoti danno un contributo minore, ma comunque stimabile. Misure geodetiche e modelli più recenti hanno portato alla conclusione che l'eccitazione sismica che accompagna un terremoto possa alimentare il Chandler wobble. I grandi terremoti sono responsabili non solo dell'eccitazione del Chandler wobble, ma anche della sua inibizione, in quanto ne

diminuiscono l'ampiezza di precessione.

I risultati ad oggi ottenuti si basano su osservazioni di geodesia spaziale: ci riferiamo a interferometri (di tipo very long-based), ranging lunari attraverso l'utilizzo di fasci laser e misure di laser satellitari. Giungiamo alla conclusione che il moto di rotazione della Terra sia un fenomeno molto complesso che fonde numerosi aspetti della Terra.

Capitolo 1

Il momento di inerzia della Terra

La conoscenza del momento di inerzia è estremamente utile e necessaria in quanto lo studio che stiamo considerando tratta di un corpo in rotazione (Terra) con una certa forma e soggetta a diverse perturbazioni che spaziano dai terremoti alle correnti oceaniche o atmosferiche. Per conoscere quindi l'evoluzione temporale di questo sistema è assolutamente indispensabile stabilire quali sia il momento di inerzia della Terra (dovuto alla sua forma) e quali siano le variazioni di esso in seguito alle varie perturbazioni. Nel caso dei terremoti infatti (trattabili come dislocazioni) essi producono deformazioni permanenti della Terra e la redistribuzione della massa ne modifica il momento di inerzia. Più nel dettaglio vengono proposti diversi modelli di Terra, da più semplici a più elaborati, per trattare in modo progressivamente più accurato la rotazione terrestre. In particolare, il momento di inerzia ottenuto, sarà importante nel determinare i meccanismi di eccitazione del Chandler wobble.

1.1 Momento di inerzia di una sfera omogenea

Iniziamo perciò col caso più semplice: una sfera omogenea di raggio R e densità $\rho = \rho(r)$ con r la distanza radiale a partire dal centro della sfera. Consideriamo quindi la definizione del tensore d'inerzia come :

$$I_{ij} = \int_V \rho(\mathbf{x})(r^2\delta_{ij} - x_i x_j) dV \quad (1.1)$$

dove con δ_{ij} indichiamo la delta di Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (1.2)$$

e con $\rho(\mathbf{x})$ la distribuzione di massa in funzione della posizione. I vettori x_i, x_j rappresentano le varie direzioni considerate (x, y, z) tale che $x_i x_i = r^2$ (qui in notazione tensoriale che corrisponde a $\sum_{i=1}^3 x_i x_i = r^2$). Vediamo subito che I_{ij} è un tensore del secondo ordine (esprimibile come una matrice) simmetrico cioè tale che $I_{ij} = I_{ji}$. Perciò possiamo applicare il teorema spettrale e rappresentarlo in forma diagonale come:

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

dove I_1, I_2, I_3 sono i valori principali del tensore di inerzia lungo gli assi principali x_j . Poichè la simmetria è sferica, sfruttiamo il fatto che gli assi passanti per il centro della sfera siano assi principali e perciò esprimiamo il tensore d'inerzia come :

$$I_{ij} = I\delta_{ij} \quad (1.4)$$

Per trovare il valore di I consideriamo ad esempio il caso in cui $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ e analizziamo I_{33} . Dalla eq (1.1) abbiamo che:

$$I_{33} = I = \int_V \rho(x, y, z)(r^2 - z^2)dV = \int_V \rho(x, y, z)(x^2 + y^2)dV \quad (1.5)$$

ricordando che $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Passando ora all'integrale in coordinate sferiche abbiamo che :

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta \quad (1.6)$$

$$dxdydz = r^2 \sin^2 \theta dr d\theta d\phi \quad (1.7)$$

e andando quindi a esprimere l'integrale in coordinate sferiche, risolvendo inizialmente la parte angolare, otteniamo:

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r)r^4 dr. \quad (1.8)$$

Svolgendo l'integrale giungiamo alla formula:

$$I = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 \quad (1.9)$$

e sapendo che la sfera è omogenea, la massa è data da $m = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$. Pertanto otteniamo in definitiva:

$$I_0 = \frac{2}{5} m R^2. \quad (1.10)$$

Questo semplice calcolo è utile per capire con che ordini di grandezza abbiamo a che fare: utilizzando come valore di $m \simeq 5.97 \times 10^{24}$ kg e $R \simeq 6371$ km otteniamo il valore di $I_0 \simeq 9.7 \times 10^{37}$ kg m^2 . In realtà il valore vero si scosta da I_0 , in quanto la Terra non è omogenea e la misura osservata è $I \simeq 0.83I_0$ (valore dedotto dalla velocità del moto di precessione negli equinozi). Per ovviare a questo problema viene proposto un modello di pianeta stratificato a due strati, in quanto si stima che il nucleo (che occupa solo il 10% del volume terrestre) abbia una massa di circa il 30% del totale. Possiamo quindi separare la Terra in due strati: nucleo e mantello poichè la crosta ha uno spessore estremamente piccolo rispetto ad essi.

1.2 Modello sferico a due strati

Supponiamo adesso di avere un pianeta a due strati con una densità data da :

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_1 & 0 \leq r \leq R_1 \\ \rho_2 & R_1 \leq r \leq R \end{cases} \quad (1.11)$$

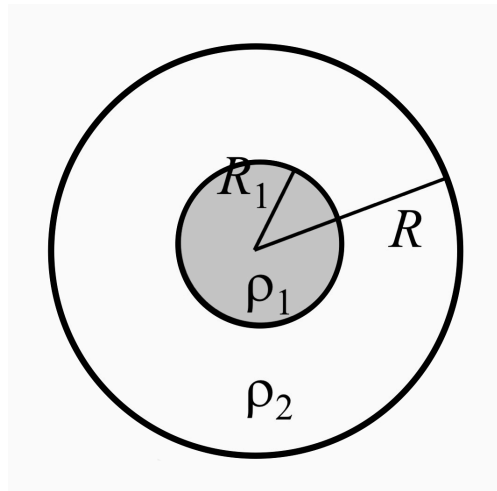


Figura 1.1: Modello del pianeta a due strati

con $\rho_1 > \rho_2$ e con R_1 e R rispettivamente il raggio del nucleo e del mantello. Riprendendo la (1.1) notiamo che la parte angolare dell'integrale che fornisce il momento di inerzia rimane invariato mentre la parte radiale, riprendendo i passaggi precedentemente fatti per il modello sferico, diventa:

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r)r^4 dr \quad (1.12)$$

e utilizzando la ρ introdotta prima si ottiene:

$$I = \frac{8\pi}{15} [\rho_1 R_1^5 + \rho_2 (R^5 - R_1^5)]. \quad (1.13)$$

Poniamo ora, per facilitare il calcolo, $k = \frac{R_1}{R}$ che vale circa 0.55 per la Terra e dividendo I per la I_0 fornita dalla (1.10) otteniamo:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho} k^5 + \frac{\rho_2}{\rho} \quad (1.14)$$

con ρ la densità media della Terra (circa 5.5 g cm^{-3}). Inoltre, poichè il termine $k^5 \ll 1$, possiamo trascurare il primo termine e otteniamo in definitiva:

$$\frac{I}{I_0} \simeq \frac{\rho_2}{\rho}. \quad (1.15)$$

Sapendo che il rapporto fra le densità dell'equazione (1.3) è circa 0.81 otteniamo che $I \simeq 0.81I_0$, molto vicino al valore osservato di $I \simeq 0.83I_0$. Per trovare un'approssimazione ancora migliore però, va considerata la forma che più si avvicina a quella della Terra: l'ellissoide oblato. Questa figura è ciò che meglio riflette le proprietà della Terra, anche se in realtà la più corretta sarebbe quella del geoide (esprime le variazioni da quello che viene chiamato l'ellissoide di riferimento per la Terra).

1.3 Momento di inerzia di un ellissoide

Focalizziamoci adesso sulla forma della Terra piuttosto che sulla sua composizione. Supponiamo di avere un ellissoide oblato cioè tale che il suo semiasse maggiore a e semiasse

minore c rappresentino rispettivamente il raggio equatoriale e quello polare. Ipotizziamo che la direzione z sia la stessa del raggio polare e che il piano che contiene il raggio equatoriale sia il piano xy .

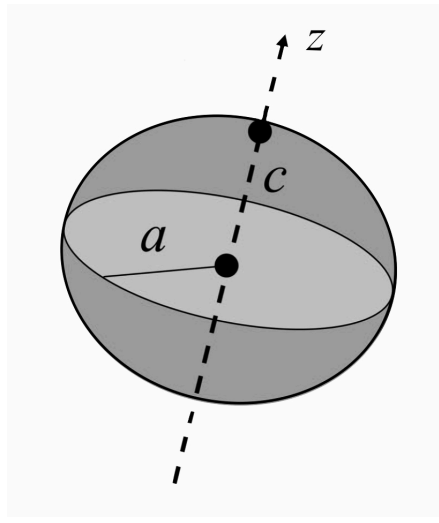


Figura 1.2: *Ellissoide oblatto con relativi semiassi*

L'equazione che rappresenta questo ellissoide è dunque:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.16)$$

che approssima molto bene il caso della Terra. In generale però, in un ellissoide, i semiassi sono tutti diversi: ipotizziamo di avere un ellissoide con semiassi a, b, c rispettivamente nelle direzioni x, y, z e di volerne calcolare il momento di inerzia. Per calcolare il momento di inerzia di ellissoide generico, supponiamo per semplicità di avere una densità costante ρ . Il tensore di inerzia ha una forma simile a quella per una sfera, ma le componenti diagonali non sono uguali fra loro:

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Per calcolare C , dalla definizione data da (1.1), abbiamo che considerando ρ costante:

$$C = \rho \int_V (r^2 - z^2) dV = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV \quad (1.18)$$

Trasformiamo ora, attraverso un cambio di variabili, l'ellissoide in una sfera:

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases} \quad (1.19)$$

L'elemento di volume diventa perciò $dV = JdV'$ dove $J = abc$ è lo Jacobiano della trasformazione appena applicata. Otteniamo quindi:

$$C = \rho abc \int_{V'} (a^2 u^2 + b^2 v^2) dV' \quad (1.20)$$

Passando di nuovo alle coordinate sferiche attraverso il cambio di variabile:

$$\begin{cases} u = r \sin \theta \cos \phi \\ v = r \sin \theta \sin \phi \\ w = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.21)$$

e poichè abbiamo trasformato l'ellissoide in una sfera unitaria, svolgiamo l'integrale di volume che diventa :

$$C = \rho abc \int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) r^4 \sin^3 \theta \quad (1.22)$$

L'integrale è facilmente risolvibile e fornisce l'espressione:

$$C = \frac{4}{15} \pi \rho abc (a^2 + b^2). \quad (1.23)$$

Sapendo inoltre che la massa dell'ellissoide vale $M = \frac{4}{3} \pi abc$, sostituendola in C otteniamo l'espressione:

$$C = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2) \quad (1.24)$$

Il ragionamento fatto per C è assolutamente simmetrico sia per A che B per cui giungiamo alle formule:

$$A = \frac{1}{5} M (b^2 + c^2) \quad B = \frac{1}{5} M (a^2 + c^2) \quad (1.25)$$

Poichè nel caso particolare della Terra si ha $a = b$ vediamo subito che possiamo esprimere il tensore di inerzia come:

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Con $C > A$. Le espressioni di A e C sono finalmente date da:

$$A = \frac{1}{5} M (a^2 + c^2) \quad C = \frac{2}{5} M a^2 \quad (1.27)$$

La forma della Terra (assunta per semplicità come ellissoide oblato) ha conseguenze anche da un punto di vista energetico-potenziiale: il potenziale gravitazionale è proporzionale a grandezze che ne descrivono lo schiacciamento. Introduciamo pertanto le seguenti grandezze:

$$H = \frac{C - A}{A} \quad f = \frac{a - c}{a} \quad (1.28)$$

dove H è chiamata ellitticità dinamica e f è chiamata schiacciamento. Vediamo subito che se la prima rappresenta un fattore dinamico (in quanto coinvolge i momenti di inerzia e quindi eventualmente variazioni di distribuzione di massa), la seconda è puramente geometrica in quanto dipendente solamente dalle lunghezze dei semiassi. Manipolando l'espressione di H sostituendo le espressioni di C, A date da (1.27) vediamo che:

$$H = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \quad (1.29)$$

E quindi:

$$H = \frac{(a+c)(a-c)}{a^2+b^2} = \frac{(1+\frac{c}{a})(a-c)}{a(1+\frac{c^2}{a^2})} \quad (1.30)$$

Poichè per la terra $\frac{c}{a} \approx 1$ abbiamo che $\frac{c}{a} \approx \frac{c^2}{a^2}$ e in conclusione otteniamo:

$$H \approx f. \quad (1.31)$$

Ora, il raggio equatoriale terrestre è più lungo di quello polare di circa 21 km indi per cui $f \simeq \frac{1}{298}$, mentre $H \simeq \frac{1}{305}$ a causa della disomogeneità della densità.

1.4 Variazione di I_{ij} in seguito a una dislocazione

Sappiamo che i terremoti sono dovuti allo scorrimento di una faglia (frattura nella litosfera) e questo scorrimento è descritto dalla teoria delle dislocazioni, discontinuità del campo di spostamenti all'interno di un mezzo elastico. La litosfera è soggetta a un raffreddamento molto veloce che causa un cambiamento nel comportamento reologico delle rocce: queste passano dall'aver proprietà viscoelastiche a elastico-fragile. Si possono quindi originare fratture in questo strato, generando faglie che, scorrendo, possono causare i terremoti. Analizziamo adesso il ruolo delle dislocazioni nella variazione del momento di inerzia della Terra. Supponiamo di avere inizialmente un campo di spostamenti statico prodotto da una dislocazione (ad esempio da un terremoto). In generale verranno modificate tutte le componenti del tensore di inerzia, di quantità piccole, sia quelle diagonali che non. In sostanza I_{ij} assume questa forma:

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} A + \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & B + \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & C + \delta_{33} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

con δI_{ij} molto piccole rispetto ad A e C . Inoltre una dislocazione dipende da numerosi parametri, in particolare si identificano attraverso tre angoli: ϕ (strike), δ (dip), λ (rake).

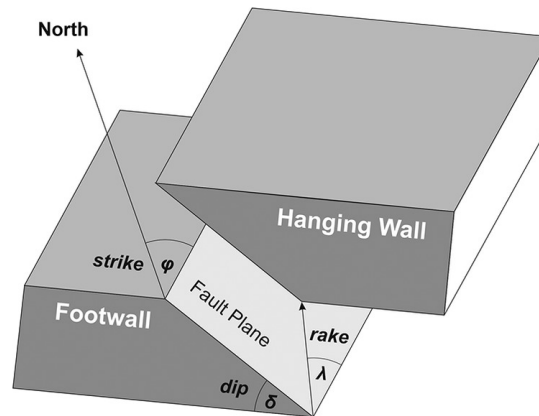


Figura 1.3: Generica dislocazione con relativi parametri angolari. L'angolo di strike ϕ rappresenta la direzione della faglia ed è calcolato rispetto al Nord geografico, δ rappresenta l'angolo di "immersione" della faglia, mentre λ la direzione dello scorrimento lungo il piano di faglia (Gestermann N. and Plenefisch T, 2021).

Per calcolare queste variazioni assumiamo per semplicità una Terra sferica e uniforme di raggio R e densità ρ .

Supponiamo che all'interno di essa si produca una dislocazione piccola e di volerne calcolare la variazione del momento di inerzia.

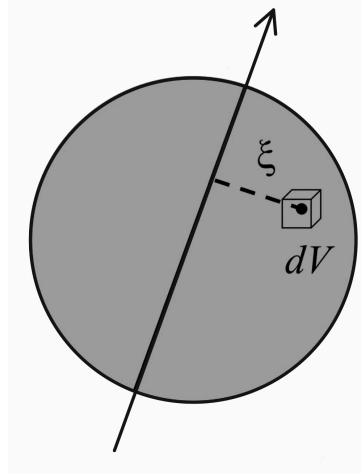


Figura 1.4: Sfera rotante intorno a un asse

Abbiamo che il momento di inerzia rispetto a un asse è espresso come:

$$I = \rho \int_V \xi^2 dV \quad (1.33)$$

La dislocazione trasformerà l'elemento ξ in $\xi + u_\xi$, dove u_ξ è uno spostamento infinitesimo in direzione perpendicolare all'asse. Trascurando infinitesimi del secondo ordine otteniamo che:

$$I' = \rho \int_V (\xi^2 + 2\xi u_\xi) dV \quad (1.34)$$

$$\Delta I = I' - I = 2\rho \int_V \xi u_\xi dV \quad (1.35)$$

Queste componenti δI_{ij} sono date quindi da integrali di combinazioni lineari di componenti di \mathbf{u} . Per esprimere lo spostamento \mathbf{u} ipotizziamo che la sorgente che crea la dislocazione sia puntiforme e che la sfera considerata sia un solido di Poisson (isotropo, elastico e che possiede costanti di Lamè tali che $\lambda = \mu$). L'approssimazione di sorgente sismica puntiforme è particolarmente comoda in quanto rappresentabile come singola doppia coppia di forze, la cui intensità è descritta da un momento sismico $M(t)$. Il momento sismico è una funzione monotona crescente che, partendo da 0 per un tempo T , satura fino a un valore finale M_0 . Questa grandezza esprime l'intensità complessiva della sorgente ed è data dalla formula relativamente semplice:

$$M_0 = \mu A U \quad (1.36)$$

dove μ è la rigidità del mezzo elastico, A l'area finale della dislocazione e U lo scorrimento medio. Il momento sismico occupa un intervallo che spazia su molti ordini di grandezza. Per avere idea del valore massimo utilizziamo come valori $\mu = 3 \times 10^{10}$ Pa, $U = 10$ m

e $A = 30 \times 10^4$ km che forniscono $M_0 \simeq 10^{22}$ Nm. Poichè μ è più o meno fisso nella litosfera e U arriva a decine di metri solo nei grandi terremoti, il limite superiore del momento sismico è influenzato in particolare dall'area della dislocazione A che è connessa alla struttura convettiva del mantello e che difficilmente raggiunge i 10^5 km². Nella realtà l'andamento del momento sismico è strettamente connesso alla impulsività della sorgente: la derivata del momento rispetto al tempo è rappresentata dalla forma delle onde P ed S (l'ampiezza di quest'onda varia, in quanto le onde S sono più ampie delle P). Infatti, a un momento $M(t)$ che cresce da 0 a M_0 linearmente, per poi rimanere costante, corrisponde un'onda quadra. Concentrando l'attenzione sull'altra approssimazione, possiamo esprimere lo spostamento \mathbf{u} dovuto a una dislocazione come:

$$\mathbf{u} = \frac{M_0}{\mu r^2} \mathbf{f}(\phi, \theta, \lambda) \quad (1.37)$$

dove r indica la distanza dalla sorgente M_0 il momento sismico, μ la rigidità e \mathbf{f} una funzione degli angoli precedentemente descritti per caratterizzare una faglia (strike, dip, rake). Andando a sostituire l'espressione di \mathbf{u} nell'equazione (1.35) e passando a un sistema di coordinate sferiche otteniamo che :

$$= 2\rho \frac{M_0}{\mu} \int_0^R \frac{r^3}{r^2} dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi, h, \phi, \delta, \lambda) d\theta d\varphi \quad (1.38)$$

dove R è il raggio della Terra e F è combinazione di funzioni trigonometriche di ordine unitario rispettivamente di latitudine, longitudine, profondità della sorgente e i soliti angoli che definiscono la faglia. L'ordine di grandezza per ΔI vale quindi:

$$\Delta I \approx \frac{\rho R^2 M_0}{\mu} \quad (1.39)$$

Inserendo come valori $\rho = 5 \times 10^3$ kg/m³, $R = 6 \times 10^6$ m, $\mu = 10^{11}$ Pa e $M_0 = 10^{21}$ Nm (per un grande terremoto) si ottiene $\Delta I \approx 10^{27}$ kg m². La variazione di I sul totale corrisponde quindi a un fattore $\frac{\Delta I}{I} \simeq 10^{-11}$.

1.5 Variazione del potenziale gravitazionale

Conoscere il potenziale gravitazionale è importante in quanto una dislocazione produce una variazione del potenziale gravitazionale: una modifica dei coefficienti armonici che rappresentano il potenziale è proporzionale alla variazione dei momenti di inerzia. Consideriamo quindi per semplicità una Terra con una certa distribuzione di massa $\rho(\mathbf{r})$ dove \mathbf{r} è la variabile centrata nel suo centro di massa. L'equazione di Poisson per il potenziale gravitazionale è data da:

$$\nabla^2 U = 4\pi G \rho \quad (1.40)$$

dove U è il potenziale e G la costante di gravitazione universale. La soluzione di quest'equazione per U è rappresentata da un integrale:

$$U(\mathbf{r}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (1.41)$$

Per arrivare alla forma del potenziale possiamo anche scegliere un altro percorso: il suo sviluppo in armoniche sferiche. La sua espansione è fornita da:

$$U(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a}{r}\right)^l (C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)) P_{lm}(\cos \theta) \right] \quad (1.42)$$

dove M è la massa della Terra, a il raggio equatoriale, θ e λ rispettivamente colatitudine e longitudine, C_{lm} e S_{lm} i coefficienti armonici ed infine P_{lm} le funzioni di Legendre associate. Vediamo subito che dall'espansione è stato isolato il cosiddetto termine di monopolo ($\frac{GM}{r}$), mentre gli altri termini della sommatoria rappresentano i termini di multipolo (sostanzialmente scostamenti dalla simmetria sferica). Consideriamo i termini con $l = 1$, $m = 0, 1$. Vediamo che C_{10} , C_{11} , S_{11} (i termini di dipolo) sono nulli se poniamo come origine del sistema di coordinate il centro di massa (vale infatti $\mathbf{p} = M\mathbf{X}$ dove \mathbf{p} è il momento di dipolo e \mathbf{X} è la coordinata del centro di massa). Il termine invece S_{10} non compare in quanto contiene $\sin 0$. Focalizzando l'attenzione sui coefficienti armonici di secondo grado ($l = 2$), si possono ricavare le seguenti espressioni per i coefficienti C_{2m} :

$$C_{20} = -\frac{1}{Ma^2} \left(I_{33} - \frac{I_{11} + I_{22}}{2} \right) \quad C_{21} = -\frac{I_{13}}{Ma^2} \quad C_{22} = -\frac{I_{11} - I_{22}}{4Ma^2} \quad (1.43)$$

mentre per i coefficienti S_{2m} :

$$S_{20} = 0 \quad S_{21} = -\frac{I_{23}}{Ma^2} \quad S_{22} = -\frac{I_{12}}{2Ma^2} \quad (1.44)$$

Vediamo subito che se ci trovassimo in una distribuzione di densità a simmetria sferica si avrebbe $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, mentre le componenti diagonali $I_{ij} = 0$ (quindi con $i \neq j$). Ciò porta ad un annullamento di tutti i coefficienti C_{2m}, S_{2m} in linea con quanto precedentemente detto (questi termini rappresentano lo scostamento da una simmetria sferica e pertanto in questo caso si devono annullare). Nel caso particolare di un ellissoide oblato con distribuzione omogenea si ha come tensore I_{ij} quello precedentemente ottenuto, con momenti A, C dati dall'eq. (1.27). I coefficienti armonici di grado 2 prendono la forma:

$$C_{21} = C_{22} = S_{21} = S_{22} = 0 \quad (1.45)$$

con unico termine non nullo:

$$C_{20} = \frac{C - A}{Ma^2} \quad (1.46)$$

mentre tutti quelli di ordine superiore sono nulli. Il potenziale ottenuto per questo particolare caso assume una forma molto semplice:

$$U(r, \theta) = -\frac{GM}{r} + \frac{G(C - A)}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (1.47)$$

in cui il secondo termine è il risultato dello schiacciamento ai poli.

1.6 Effetti viscoelastici sulla variazione del momento di inerzia

Sappiamo che l'azione sismica non è esaurita in una deformazione iniziale, ma è prolungata nel tempo. Ciò è dovuto al fatto che il Mantello terrestre ha un comportamento viscoelastico:

si può considerare come un solido elastico per tempi brevi e come liquido viscoso per tempi lunghi (si propagano in esso sia le onde P che le onde S ed è perciò elastico. Inoltre, è interessato da moti convettivi lenti su tempi lunghi, indice di un'alta viscosità). Un solido che possiede questo comportamento viene chiamato corpo di Maxwell. In particolare, riguardo alle proprietà elastiche, viene definita la rigidità (o modulo di taglio) μ , mentre per le proprietà viscosi la viscosità dinamica η . Con una semplice divisione, si ottiene dalle due grandezze un tempo caratteristico definito come tempo di Maxwell:

$$\tau_M = \frac{\eta}{\mu} \quad (1.48)$$

Questo tempo caratteristico separa i due regimi del solido: prima di τ_M si comporta come un solido elastico, mentre dopo assume le proprietà di un fluido newtoniano. Consideriamo una sfera stratificata in due parti entrambe omogenee: un mantello di raggio r_1 e una litosfera di raggio r_2 e chiamiamo R il rapporto fra r_1 e r_2 . È possibile trovare una relazione fra il tempo di rilassamento viscoelastico (tempo per rilassare un certo sforzo iniziale) del solido e R :

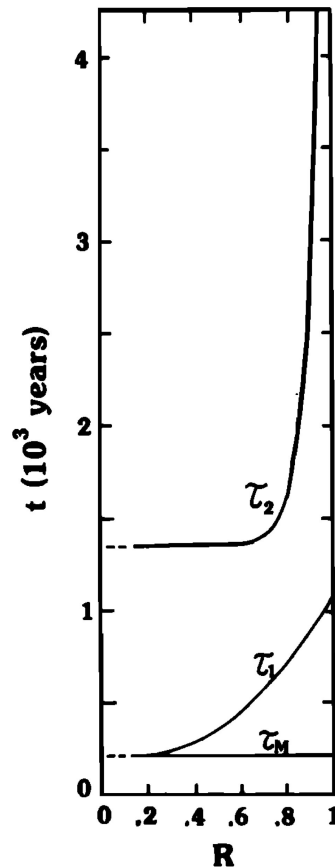


Figura 1.5: *Tempi di rilassamento di mantello τ_1 e litosfera τ_2 in funzione di R (Dragoni et al, 1983).*

Il modello considerato nella figura (1.5) utilizza come densità di mantello e litosfera rispettivamente $\rho_1 = 5.69 \text{ g/cm}^3$ e $\rho_2 = 2.69 \text{ g/cm}^3$, mentre per la rigidità $\mu_1 = 1.45 \times 10^{12} \text{ dyne/cm}^2$ e $\mu_2 = 2.82 \times 10^{11} \text{ dyne/cm}^2$. L'accelerazione di gravità è $g = 982 \text{ cm/s}^2$. Andiamo a vedere i comportamenti asintotici: per il limite $R \rightarrow 1$ il tempo di rilassamento della litosfera tende a infinito, mentre quello del mantello si ferma a una costante. Se

invece $R \rightarrow 0$ il tempo di rilassamento della litosfera tende a un valore costante diverso da τ_M , mentre quello del mantello a τ_M . Come il tempo di rilassamento, anche la variazione del momento di inerzia (dovuto a un terremoto) è soggetto alle proprietà del corpo di Maxwell. Inizialmente infatti c'è un'eccitazione del corpo, data dalla parte elastica, che decade quando il solido tende al limite di fluido ($> 10\tau_M$). La variazione del momento di inerzia è influenzata anche da R . Anche in questo caso perciò, è possibile studiare i regimi in cui la litosfera è spessa o sottile.

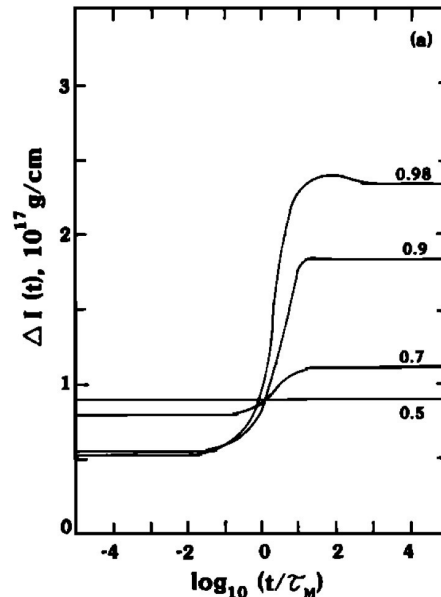


Figura 1.6: *Evoluzione temporale della variazione del momento di inerzia. Ogni curva corrisponde a un diverso valore di R , indicato sopra di esse (Dragoni et al, 1983).*

Il modello utilizzato è lo stesso della figura (1.5). Nel caso $R < 0.5$, il comportamento non è molto diverso da un solido elastico e la litosfera spessa impedisce di avere deformazione superficiale associata a scorrimento transiente nel Mantello. Diverso è il caso della litosfera sottile, in cui lo stress, esercitato dalla viscoelasticità sulla litosfera, produce una deformazione aggiuntiva che incrementa ulteriormente la variazione del momento di inerzia. Nel caso della Terra (in cui $R \simeq 0.98$), rispetto al valore iniziale si ha un incremento di un fattore di circa 4-6 in base a se consideriamo gli strati con la stessa densità o meno. Lo studio delle deformazioni sismiche su larga scala è utile a comprendere se queste siano responsabili o meno di variazioni nel moto di precessione della Terra ad esempio nel caso del Chandler wobble (che verrà approfondito nel Capitolo 2). Nonostante il fattore di amplificazione 4-6 sulla variazione del momento di inerzia, le analisi condotte escludono che Chandler wobble sia alimentato da questo tipo di effetti che trovano il loro picco in una scala temporale di migliaia di anni (Dragoni et al 1983).

Capitolo 2

La precessione libera della Terra

Il moto di rotazione terrestre è un sistema molto complesso in cui giocano ruolo i momenti esercitati dai corpi esterni (Luna e Sole). Trascurando questi effetti, la Terra subisce comunque un moto di precessione dovuto alla sua forma ellissoidale. Questo moto è chiamato precessione libera in quanto avviene appunto senza forze esterne. Poichè il momento di inerzia terrestre è funzione del tempo, anche la velocità angolare di questo moto sarà soggetta a una continua variazione. Consideriamo un corpo rotante che possiede un certo momento angolare \mathbf{J} e un certo momento torcente \mathbf{N} . In un sistema di riferimento inerziale vale:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{N} \quad (2.1)$$

e ne segue che se $\mathbf{N} = 0$ allora $\mathbf{J} = \text{cost}$. Se consideriamo invece un sistema di riferimento solidale con il corpo rotante, con una certa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. L'eq (2.1) prende la forma:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} = \mathbf{N} \quad (2.2)$$

dove la relazione che lega \mathbf{J} a $\boldsymbol{\omega}$ è fornita da:

$$J_i = I_{ij}\omega_j \quad (2.3)$$

in cui I_{ij} è il momento di inerzia. Nel caso più generale \mathbf{J} e $\boldsymbol{\omega}$ non sono paralleli. Se gli assi delle coordinate coincidono con gli assi principali del tensore I_{ij} si ha che:

$$J_1 = I_1\omega_1 \quad J_2 = I_2\omega_2 \quad J_3 = I_3\omega_3 \quad (2.4)$$

che sostituendo nell'equazione (2.2) porta alle cosiddette equazioni di Eulero:

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = N_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = N_3 \end{cases} \quad (2.5)$$

Queste equazioni differenziali del primo ordine descrivono la rotazione di un corpo rigido. La risoluzione di questo sistema fornisce l'evoluzione temporale del corpo, nel sistema di riferimento precedentemente nominato. Sarà interessante vedere che nel caso della Terra si potrà fare un parallelismo con il moto di precessione di una trottola. Questo moto terrestre è chiamato precessione euleriana e non è da confondere con il moto di precessione degli equinozi (forzata dai momenti gravitazionali del Sole e della Luna).

2.1 Rotazione di una sfera rigida omogenea

Consideriamo un caso relativamente semplice: una sfera omogenea di raggio R e densità ρ costante. Ricordiamo l'espressione del momento di inerzia di una sfera rigida omogenea data da (1.9) e (1.4). In questo caso il momento angolare \mathbf{J} è parallelo alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$.

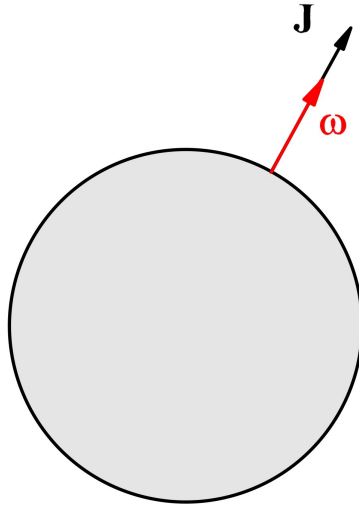


Figura 2.1: Sfera rigida e omogenea che ruota con velocità angolare ω

La relazione che lega \mathbf{J} a $\boldsymbol{\omega}$ è data da:

$$J_i = I\delta_{ij}\omega_j = I\omega_i \quad (2.6)$$

Supponiamo inoltre di avere $\mathbf{N} = 0$ nelle equazioni (2.5): ne segue che il vettore $\boldsymbol{\omega} = \text{cost.}$ Ipotizzando che la direzione di \mathbf{J} sia coincidente con quella dell'asse x_3 abbiamo che:

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0 \quad \omega_3 = \Omega \quad (2.7)$$

con Ω la velocità angolare della rotazione.

2.2 Rotazione di un ellissoide rigido

Riconsideriamo un ellissoide rigido con momento di inerzia fornito dalla (1.27), in assenza di momenti esterni ($\mathbf{N} = 0$). Inserendo il tutto nelle equazioni di Eulero (2.5) si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \frac{C-A}{A}\omega_2\omega_3 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - \frac{C-A}{A}\omega_3\omega_1 = 0 \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

oppure per semplificare riprendiamo l'ellitticità dinamica H da (1.28):

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + H\omega_2\omega_3 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - H\omega_3\omega_1 = 0 \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Abbiamo quindi che solo ω_3 è costante (come prima, chiamiamo Ω la velocità angolare della rotazione lungo l'asse x_3 e quindi $\omega_3 = \Omega$). Definiamo adesso una frequenza data da:

$$\gamma_0 = H\Omega \quad (2.10)$$

e riesprimiamo il sistema in funzione di questa frequenza γ_0 che diventa:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + \gamma_0 \omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - \gamma_0 \omega_1 = 0 \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

La soluzione ha una forma relativamente semplice che appare come:

$$\begin{cases} \omega_1(t) = a_0 \sin(\gamma_0 t) \\ \omega_2(t) = a_0 \cos(\gamma_0 t) \\ \omega_3 = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

con a_0 un'ampiezza costante. Questa soluzione rappresenta un moto di precessione di $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse x_3 con frequenza angolare γ_0 .

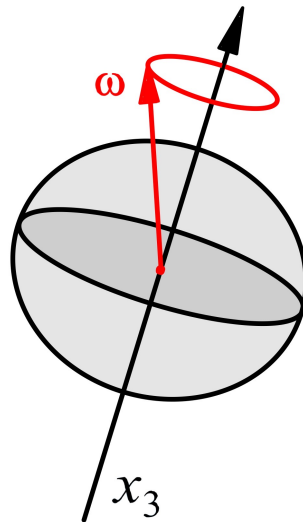


Figura 2.2: *Moto di precessione libera dell'ellissoide attorno all'asse x_3*

Si può anche ottenere una relazione fra energia E e l'ampiezza a_0 . Sappiamo che l'energia cinetica di oscillazione è data da (vedi *Goldstein 2001*):

$$E = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \quad (2.13)$$

che nel caso dell'ellissoide oblatto appena considerato, diventa:

$$E = \frac{1}{2} A a_0^2 + \frac{1}{2} C \Omega^2 \quad (2.14)$$

Introduciamo anche l'angolo θ compreso fra il vettore $\boldsymbol{\omega}$ e l'asse x_3 per cui vale la seguente relazione:

$$\tan \theta = \frac{a_0}{\Omega} \quad (2.15)$$

Assumendo che questo angolo sia piccolo vale $\tan \theta \simeq \theta$ che ci permette di ottenere il raggio della circonferenza percorsa dall'asse di rotazione sulla superficie terrestre come:

$$r_0 \simeq b\theta \quad (2.16)$$

dove b è il raggio polare della Terra (che assumiamo $\simeq 6357$ km). Utilizzando come valori di $a_0 \simeq 7 \times 10^{-11}$ rad s⁻¹ e $\Omega \simeq 7 \times 10^{-5}$ rad s⁻¹ otteniamo $\theta \simeq 10^{-6}$ rad (0.2 arcs). Finalmente, il raggio risulta essere $r_0 \simeq 6$ m. Focalizzandoci sul periodo, sappiamo che alla frequenza γ_0 corrisponde un periodo:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\gamma_0} \quad (2.17)$$

mentre il periodo della rotazione diurna è dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (2.18)$$

Rapportiamo (2.17) con (2.18) da cui si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{T_0}{T} = \frac{\Omega}{\gamma_0} = \frac{1}{H} \quad (2.19)$$

Ricordando infine che $H \simeq \frac{1}{305}$, arriviamo al valore $T_0 = 305$ giorni. Tuttavia, questo importante risultato si scosta in maniera significativa dal valore osservato. Si osserva, infatti, un'oscillazione di periodo $T_0 = 435$ giorni, chiamata **Chandler wobble**. Questo scostamento è dovuto al fatto che il modello considerato è rigido e non assume una Terra elastica (come invece andrebbe fatto).

2.3 Effetto dell'elasticità della Terra

Riprendendo quanto appena detto, introduciamo la deformazione elastica della Terra. Questa proprietà modifica il momento angolare e produce variazioni del momento di inerzia. Infatti il momento angolare assume la seguente forma (*Lambeck* 1980):

$$J_i(t) = I_{ij}(t)\omega_j(t) + h_i(t) \quad (2.20)$$

con \mathbf{h} il momento angolare dovuto alla velocità di deformazione. Assumiamo inoltre che tutte le quantità in gioco possano dipendere dal tempo. Inserendo l'espressione di \mathbf{J} nell'eq.(2.2), in assenza di momenti esterni otteniamo:

$$\frac{d}{dt}(I_{ij}\omega_j + h_i) + \epsilon_{ijk}\omega_j(I_{kl}\omega_l + h_k) = 0 \quad (2.21)$$

le cosiddette equazioni di Liouville. Con ϵ_{ijk} identifichiamo il simbolo di Levi-Civita cioè:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è una permutazione pari}=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è una permutazione dispari}=(3,2,1),(1,3,2),(2,1,3) \\ 0 & \text{se } i = j \text{ e/o } j = k \text{ e/o } k = i \end{cases} \quad (2.22)$$

2.4 Equazioni di Liouville per un ellissoide elastico

Consideriamo nuovamente un ellissoide, questa volta elastico, con asse di simmetria x_3 . Supponiamo che non vi sia moto rispetto al sistema rotante ($\mathbf{h} = 0$) e assenza di momenti esterni ($\mathbf{N}=\mathbf{0}$). Supponiamo inoltre che la velocità angolare si scosti poco da quella di una sfera rigida Ω . Perciò abbiamo che:

$$\omega_1 = m_1\Omega \quad \omega_2 = m_2\Omega \quad \omega_3 = (1 + m_3)\Omega \quad (2.23)$$

con m_1, m_2, m_3 quantità piccole ($< 10^{-6}$ nella Terra). Lasciamo invariata l'ipotesi che il momento di inerzia possa variare nel tempo e riconsideriamo un tensore di inerzia nella forma data da (1.32) dove compaiono piccole componenti non diagonali. Inserendo le espressioni di ω_i e I_{ij} nelle equazioni di Liouville (2.21), si ottiene una forma non troppo complessa:

$$\begin{cases} \frac{\dot{m}_1}{\gamma_0} + m_2 = \psi_2 \\ \frac{\dot{m}_2}{\gamma_0} - m_1 = -\psi_1 \\ \dot{m}_3 = \psi_3 \end{cases} \quad (2.24)$$

con γ_0 data da (2.10). Abbiamo introdotto le funzioni di eccitazione date dalle seguenti espressioni:

$$\psi_1 = \frac{\Omega\delta I_{13} + \delta\dot{I}_{23}}{\Omega(C - A)} \quad \psi_2 = \frac{\Omega\delta I_{23} + \delta\dot{I}_{13}}{\Omega(C - A)} \quad \psi_3 = -\frac{\delta I_{33}}{C} \quad (2.25)$$

Poichè $\mathbf{J} = \text{cost}$, ne segue che una variazione del momento di inerzia produce una variazione nella velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. Vediamo inoltre che le variazioni di I_{13}, I_{23} modificano la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ (cioè la direzione dell'asse di rotazione), mentre una variazione di I_{33} fa variare il suo modulo, ovvero la durata del giorno.

2.5 Effetto della forza centrifuga

Consideriamo sempre un ellissoide rotante con simmetria rispetto all'asse x_3 , con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. Allora la forza centrifuga per unità di massa ha modulo dato dall'espressione:

$$q = \omega^2 s \quad (2.26)$$

dove ω è il modulo della velocità angolare e s la distanza dall'asse istantaneo di rotazione. In assenza di precessione la forza centrifuga espressa in funzione della distanza radiale r e dell'angolo polare θ è dato da:

$$q(r, \theta) = \omega^2 r \sin \theta \quad (2.27)$$

che ammette il potenziale U_c nella seguente forma:

$$U_c(r, \theta) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (2.28)$$

Questo potenziale è sviluppabile in armoniche sferiche proprio come quello gravitazionale. In particolare U_c è ben approssimato da una funzione armonica di secondo grado. Se consideriamo un moto di precessione libera, l'asse istantaneo di rotazione è in movimento

rispetto all'ellissoide. La distanza s di ogni punto, data dall'eq.(2.26) varia nel tempo causando una variazione nella forza centrifuga in quel punto. Poichè l'ellissoide è elastico, si ha un continuo riaggiustamento del rigonfiamento equatoriale e una variazione nel momento di inerzia. Tale variazione verrà inserita nelle equazioni di Liouville definendo delle nuove funzioni di eccitazione.

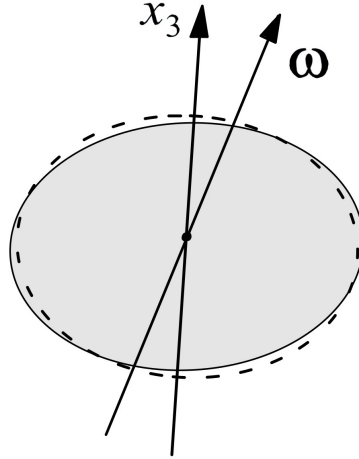


Figura 2.3: *Riaggiustamento del rigonfiamento equatoriale*

2.6 Numeri di Love e potenziale centrifugo modificato

La deformazione della Terra causata dal potenziale centrifugo U_c porta a una variazione del potenziale stesso. Risulta utile introdurre quelli che vengono chiamati numeri di Love: essi legano un potenziale, causato da forze esterne, a una sua variazione determinata da una deformazione elastica. L'ipotesi è che questa risposta alla deformazione elastica sia lineare e a simmetria sferica. Consideriamo perciò un potenziale, in generale variabile nel tempo t , nella forma:

$$U(r, \theta, \phi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r, \theta, \phi, t) \quad (2.29)$$

con r, θ, ϕ le solite variabili delle coordinate sferiche. Chiamiamo U' il potenziale modificato dalla deformazione e U'_n l'ampiezza delle sue componenti armoniche. Poichè abbiamo assunto una risposta lineare fra le componenti armoniche, allora vale per le componenti dello stesso grado:

$$U'_n = K_n(r)U_n \quad (2.30)$$

dove con K_n descriviamo la linearità della relazione fra modifica del potenziale e deformazione. Approssimando la Terra ad una sfera di raggio a , chiamiamo i coefficienti k_n come numeri di Love definiti da:

$$k_n \equiv K_n(a) \quad (2.31)$$

Come abbiamo fatto per il potenziale gravitazionale, sfruttiamo il fatto di poter approssimare U_c come una funzione armonica di secondo grado: ne risulta che alla superficie, il potenziale modificato U'_c è:

$$U'_c = k_2 U_c(a) \quad (2.32)$$

che a sua volta può essere sviluppato in armoniche sferiche considerando solo i termini di grado $l = 2$. Abbiamo una forma simile a (1.42), più precisamente:

$$U_c(r, \theta, \phi) = \frac{GM}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sum_{m=0}^2 (C'_{2m} \cos(m\phi) + S'_{2m} \sin(m\phi)) P_{2m}(\cos\theta) \quad (2.33)$$

dove G è la costante di gravitazione universale, M la massa della Terra e come al solito P_{2m} sono le funzioni di Legendre associate (con $l = 2$). Come precedentemente fatto, ricaviamo le seguenti espressioni per i coefficienti armonici C'_{2m} :

$$C'_{20} = \frac{k_2 a^3 (\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_3^2)}{6GM} \quad C'_{21} = -\frac{k_2 a^3 \omega_1 \omega_3}{3GM} \quad C'_{22} = \frac{k_2 a^3 (\omega_2^2 - \omega_1^2)}{12GM} \quad (2.34)$$

mentre per i coefficienti S'_{2m} :

$$S'_{20} = 0 \quad S'_{21} = -\frac{k_2 a^3 \omega_2 \omega_3}{3GM} \quad S'_{22} = -\frac{k_2 a^3 \omega_1 \omega_3}{6GM} \quad (2.35)$$

Riconsideriamo $\boldsymbol{\omega}$ come nell'eq.(2.23). Esprimiamo perciò $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ attraverso m_1, m_2, m_3 . In quest'approssimazione abbiamo che:

$$\omega_1^2 \simeq 0 \quad \omega_2^2 \simeq 0 \quad \omega_3^2 \simeq \Omega^2 \quad \omega_1 \omega_2 \simeq 0 \quad \omega_1 \omega_3 \simeq m_1 \Omega^2 \quad \omega_2 \omega_3 \simeq m_2 \Omega^2 \quad (2.36)$$

Questa semplificazione riduce le espressioni dei coefficienti armonici date da (2.34) e (2.35) alle formule:

$$C'_{20} \simeq -\frac{k_2 a^3 \Omega^2}{6GM} \quad C'_{21} \simeq -\frac{k_2 a^3 m_1 \Omega^2}{3GM} \quad C'_{22} \simeq 0 \quad (2.37)$$

per i coefficienti C'_{2m} , mentre a:

$$S'_{20} \simeq 0 \quad S'_{21} = -\frac{k_2 a^3 m_2 \Omega^2}{3GM} \quad S'_{22} \simeq 0 \quad (2.38)$$

per i coefficienti S'_{2m} . Finalmente abbiamo che una variazione del potenziale centrifugo fa variare i coefficienti armonici $C'_{20}, C'_{21}, S'_{21}$ del potenziale roto-gravitazionale. Una loro modifica equivale a una variazione delle componenti del momento di inerzia. In particolare C'_{21} e S'_{21} sono sensibili a m_1, m_2 : poichè i coefficienti dipendono dal tempo grazie a m_1 e m_2 essi corrispondono a una variazione del momento di inerzia dipendente dal tempo. Riguardo invece a C'_{20} vediamo che esso non dipende dal tempo in quanto non compare un termine m_i . Ne consegue che la variazione di δI_{33} (vedi (1.43)) non contribuisce alle equazioni di Liouville. Sempre confrontando C'_{21}, S'_{21} con C'_{21}, S'_{21} cioè le (1.43), (1.44) con (2.37) e (2.28) otteniamo la dipendenza da m_1, m_2 (quindi dal tempo) di δI_{13} e δI_{13} :

$$\delta I_{13} \simeq \frac{k_2 a^5 \Omega^2 m_1}{3G} \quad \delta I_{23} \simeq \frac{k_2 a^5 \Omega^2 m_2}{3G} \quad (2.39)$$

Riconsiderando l'equazione (2.25), definiamo come nuove funzioni di eccitazione della forza centrifuga:

$$\Psi_1 = \frac{k_2}{k_0} \left(m_1 + \frac{\dot{m}_2}{\Omega} \right) \quad \Psi_2 = \frac{k_2}{k_0} \left(m_2 + \frac{\dot{m}_1}{\Omega} \right) \quad \Psi_3 = \text{cost} \quad (2.40)$$

dove abbiamo posto per semplificare:

$$k_0 = \frac{3G(C - A)}{a^5 \Omega^2} \quad (2.41)$$

I significati di C , A rimangono sempre gli stessi dell'equazione (1.27). Analizzando nuovamente la precessione libera, abbiamo che la sua frequenza $\gamma_0 \ll \Omega$. Infine abbiamo che sia per m_1 che m_2 (hanno lo stesso ordine di grandezza) vale:

$$\frac{\dot{m}_2}{\Omega} \ll m_1 \quad \frac{\dot{m}_1}{\Omega} \ll m_2 \quad (2.42)$$

che semplifica ancora maggiormente le espressioni di Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 :

$$\Psi_1 = \frac{k_2}{k_0} m_1 \quad \Psi_2 = \frac{k_2}{k_0} m_2 \quad \Psi_3 = \text{cost} \quad (2.43)$$

Inserendo il tutto nelle equazioni di Liouville (2.24) otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\dot{m}_1}{\gamma_0} + \left(1 - \frac{k_2}{k_0}\right) m_2 = 0 \\ \frac{\dot{m}_2}{\gamma_0} - \left(1 - \frac{k_2}{k_0}\right) m_1 = 0 \\ \dot{m}_3 = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

e posta la nuova frequenza γ :

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 - \frac{k_2}{k_0}\right) \quad (2.45)$$

abbiamo la forma molto semplice:

$$\begin{cases} \frac{\dot{m}_1}{\gamma} + m_2 = 0 \\ \frac{\dot{m}_2}{\gamma} - m_1 = 0 \\ \dot{m}_3 = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

Questo sistema è formalmente identico a quello di un ellissoide rigido, vedi eq.(2.11): varia solamente la frequenza angolare. Posto $X = \frac{k_0}{k_0 - k_2}$, γ diventa:

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{X} \quad (2.47)$$

Il valore di k_0 dipende da G, A, C, a, Ω e il calcolo fornisce $k_0 \simeq 0.94$, mentre k_2 è dipendente dalla struttura elastica della Terra. In base alla conoscenza delle costanti elastiche all'interno della Terra si trova $k_2 \simeq 0.29$ da cui $X \simeq 1.4$, (Lambeck 1980). Ne segue che il periodo di precessione (che va come l'inverso della frequenza) della Terra elastica è circa 1.4 volte maggiore di quella rigida, in ottimo accordo con le osservazioni. La non perfetta elasticità della Terra porterebbe la precessione di Chandler a smorzarsi molto velocemente nel tempo. La sua ampiezza infatti dovrebbe decadere in un tempo caratteristico $\tau = 15$ anni. In realtà ciò non succede in quanto questo meccanismo è continuamente alimentato da diversi fenomeni. I principali protagonisti sono variazioni della pressione atmosferica e sui fondali oceanici. Anche i terremoti sono classificabili come meccanismi di alimentazione di questa precessione, seppur in misura minore.

Capitolo 3

Variazioni nel moto di rotazione

3.1 Effetto dei terremoti sul moto di rotazione della Terra

Trascurando forze esterne e analizzando solamente il moto di precessione libera, ci rendiamo conto che il momento angolare della Terra si conserva. Ne segue che la variazione del momento di inerzia, dovuto a una generica dislocazione, modifica la velocità di rotazione terrestre, ma anche la direzione dell'asse di precessione.

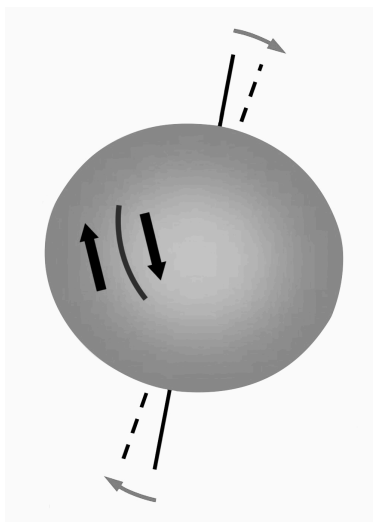


Figura 3.1: *Spostamento della direzione dell'asse di precessione in seguito a una dislocazione*

Nelle equazioni di Liouville (2.24) andranno perciò aggiunte le funzioni di eccitazione che rappresentano il terremoto e che chiameremo ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Il sistema da analizzare diventa perciò:

$$\begin{cases} \frac{\dot{m}_1}{\gamma_0} + m_2 = \psi_2 + \Psi_2 \\ \frac{\dot{m}_2}{\gamma_0} - m_1 = -\psi_1 - \Psi_1 \\ \dot{m}_3 = \psi_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

dove Ψ_1, Ψ_2 sono le funzioni di eccitazione della forza centrifuga introdotte in (2.40). Esplicitando le espressioni di Ψ_1, Ψ_2 e esprimendo il sistema in funzione delle variabili X, γ

introdotte in (2.47), le equazioni di Liouville assumono una forma molto semplice:

$$\begin{cases} \frac{\dot{m}_1}{\gamma} + m_2 = X\psi_2 \\ \frac{\dot{m}_2}{\gamma} - m_1 = -X\psi_1 \\ \dot{m}_3 = \psi_3 \end{cases} \quad (3.2)$$

in quanto le funzioni di eccitazione della forza centrifuga sono inglobate in X, γ e non compaiono esplicitamente nel sistema. Abbiamo finalmente gli strumenti per capire come calcolare l'effetto di un terremoto sulla rotazione della Terra: abbiamo trovato un'espressione per δI_{ij} dovuta al terremoto e le funzioni di eccitazione. Non ci resta che risolvere le equazioni di Liouville (quelle per m_1, m_2 vanno risolte simultaneamente, mentre per m_3 indipendentemente). Introduciamo due nuove variabili complesse M, Ψ per risolvere il sistema:

$$M = m_1 + im_2 \quad \Psi = \psi_1 + i\psi_2 \quad (3.3)$$

che combina le equazioni per m_1, m_2 in un'unica equazione complessa:

$$i\frac{\dot{M}}{\gamma_0} + M = \Psi \quad (3.4)$$

In modo analogo per la variazione del momento di inerzia introduciamo la grandezza ΔI :

$$\Delta I = \delta I_{13} + i\delta I_{23} \quad (3.5)$$

che porta alla funzione di eccitazione Ψ :

$$\Psi = \frac{\Omega\Delta I - i\Delta\dot{I}}{\Omega(C - A)} \quad (3.6)$$

con i significati di C, A dati come al solito da (1.27), mentre Ω è la rotazione diurna. La soluzione dell'equazione è data dall'espressione:

$$M(t) = M_0 e^{i\gamma_0 t} - i\gamma_0 e^{i\gamma_0 t} \int_{-\infty}^t \Psi(\tau) e^{-i\gamma_0 \tau} d\tau \quad (3.7)$$

in cui il primo termine è la precessione euleriana ($\Psi = 0$).

3.2 Soluzione dell'equazione di Liouville per m_1 e m_2

Introduciamo la funzione di Heaviside $H(x)$ definita come:

$$H(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Supponiamo ora che avvenga un terremoto all'istante $t = 0$ che produca variazioni del momento di inerzia $\delta I_{13}, \delta I_{23}, \delta I_{33}$. Introduciamo ora come ΔI_0 :

$$\Delta I_0 = \delta I_{13} + i\delta I_{23} \quad (3.9)$$

e esprimiamo la variazione del momento di inerzia in funzione del tempo attraverso H :

$$\Delta I(t) = \Delta I_0 H(t) \quad (3.10)$$

Fra le proprietà di H vi è il fatto che la sua derivata corrisponde alla delta di Dirac δ . Segue immediatamente che :

$$\Delta \dot{I}(t) = \Delta I_0 \delta(t) \quad (3.11)$$

Come per i termini $\delta I_{13}, \delta I_{23}$ introduciamo per δI_{33} , la quantità ΔI_{33} :

$$\Delta I_{33} = \delta I_{33} H(t) \quad (3.12)$$

Per semplificare, includiamo il fattore X in quella che sarà la funzione di eccitazione complessa $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = \frac{X}{C - A} (\Delta I - \frac{i}{\Omega} \Delta \dot{I}) \quad (3.13)$$

Introduciamo ulteriormente la quantità Θ per sostituire l'espressione di ΔI :

$$\Theta = X \frac{\Delta I_0}{C - A} \quad (3.14)$$

La funzione Ψ data da (3.13) diventa così:

$$\Psi(t) = \Theta [H(t) - \frac{i}{\Omega} \delta(t)] \quad (3.15)$$

mentre la funzione di eccitazione di δI_{33} è semplicemente:

$$\psi_3 = -\frac{\delta I_{33}}{C} H(t) \quad (3.16)$$

Abbiamo ora tutti gli strumenti per risolvere l'equazione di Liouville (3.7) per m_1, m_2 . Sostituiamo perciò γ_0 con γ e supponiamo che per $t < 0$ si abbia $m_1 = m_2 = 0$. La soluzione, esplicitando $\Psi(t)$ prende la forma:

$$M(t) = -i\gamma e^{i\gamma t} \Theta \left[\int_0^t e^{-i\gamma\tau} d\tau - \frac{i}{\Omega} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) e^{-i\gamma\tau} d\tau \right] \quad (3.17)$$

e tenendo conto del fatto che $\tau < t$ (lo si vede dall'intervallo di integrazione) otteniamo che:

$$M(t) = e^{i\gamma t} \Theta \left[e^{-i\gamma t} - 1 - \frac{\gamma}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{-i\gamma\tau} d\tau \right] \quad (3.18)$$

Ricordiamo che $\frac{\gamma}{\Omega} \ll 1$, dunque la soluzione per M diventa:

$$M(t) = \Theta (1 - e^{i\gamma t}) \quad (3.19)$$

Θ rappresenta lo spostamento angolare (complesso) della posizione media dell'asse di rotazione. Richiamando le espressioni di X, γ_0 da (2.10) e (2.47) otteniamo un'espressione per Θ data da:

$$\Theta = \frac{\Omega \Delta I_0}{\gamma A} \quad (3.20)$$

che possiamo suddividere in parte reale e immaginaria dalla definizione di ΔI_0 :

$$\Re(\Theta) = \theta_1 = \frac{\Omega \delta I_{13}}{\gamma A} \quad \Im(\Theta) = \theta_2 = \frac{\Omega \delta I_{23}}{\gamma A} \quad (3.21)$$

Abbiamo visto nella figura 2.2 che l'asse descrive una circonferenza sulla superficie terrestre attorno al polo di rotazione medio. Il moto istantaneo in seguito a uno spostamento di questo polo è come se seguisse due circonferenze: la prima, nel momento precedente lo spostamento, e la seconda successivamente ad esso. In particolare, $\delta I_{13}, \delta I_{23}$ causano uno spostamento s della posizione del polo di rotazione medio e una deviazione della traiettoria dall'asse di rotazione.

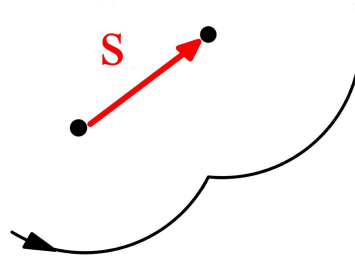


Figura 3.2: Deviazione della traiettoria dell'asse di rotazione causata dallo spostamento del polo di rotazione medio

Riprendendo le quantità (3.21) con i valori precedentemente considerati di $\frac{\Omega}{\gamma}$ e $\frac{\delta I}{A}$, viene calcolato l'ordine di grandezza di θ_1, θ_2 che risulta essere $\theta_1, \theta_2 \simeq 5 \times 10^{-9}$ rad $\simeq 10^{-3}$ arcs (secondi d'arco). L'espressione di s è data semplicemente come:

$$s = \theta R \quad (3.22)$$

dove θ è l'ordine di grandezza di θ_1, θ_2 . e R è il raggio della Terra. Dalla formula risulta che $s \simeq 3$ cm, circa 1% dell'ampiezza della precessione libera (Lambeck 1980).

3.3 Soluzione dell'equazione di Liouville per m_3

Se consideriamo l'equazione di Liouville per m_3 , la soluzione è $\frac{\delta I_{33}}{C}$ dall'equazione (2.25) e la variazione della componente ω_3 è data da:

$$\delta \omega_3 = m_3 \Omega = -\frac{\delta I_{33}}{C} \Omega \quad (3.23)$$

La variazione relativa del periodo di rotazione vale quindi:

$$\frac{\delta T}{T} \simeq -\frac{\delta \omega_3}{\Omega} = -m_3 \quad (3.24)$$

Le stime forniscono come ordine di grandezza di m_3 circa 10^{-11} che corrisponde a una variazione nella durata del giorno $\delta T \simeq 1\mu s$ (per avere un confronto, si stima che l'allungamento diurno dovuto alla marea lunare sia di circa $1\mu s$ /mese).

3.4 Spostamenti nel moto del polo in seguito a grandi terremoti

I meccanismi di eccitazione della precessione di Chandler costituiscono un vero e proprio "puzzle geofisico" nato da quando si trovò una correlazione fra attività sismica e moto polare. Inoltre, in tempi relativamente recenti, la misura degli spostamenti polari (polar shifts) dovuti ai terremoti, ad esempio quelli del 1960 in Cile e del 1964 in Alaska, hanno permesso di stabilire alcuni dei parametri che descrivono i terremoti stessi e, talvolta, i relativi vincoli. Infatti, l'analisi dei meccanismi che alimentano il Chandler wobble impone dei limiti al valore massimo di momento sismico M_0 , affrontato nel Capitolo 1, (1.36).

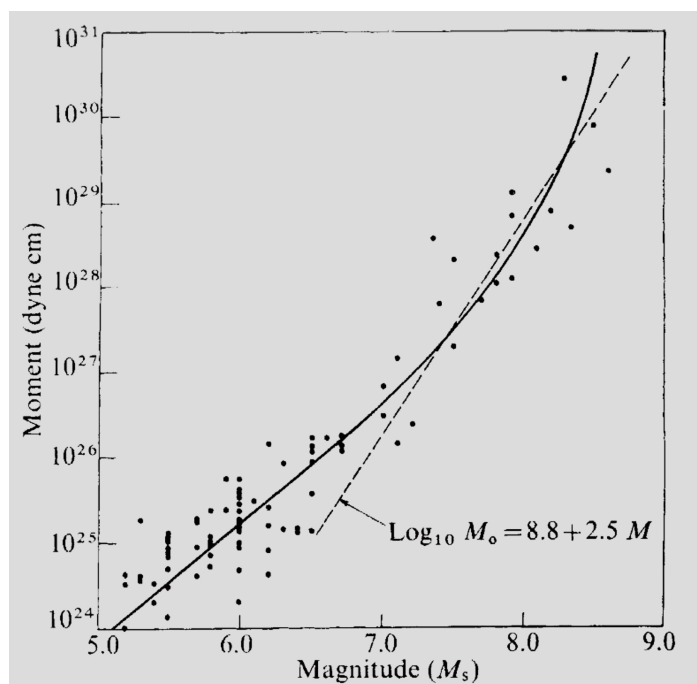


Figura 3.3: Relazione fra momento sismico e magnitudo (O'Connell and Dziewonski, 1979).

In figura (3.3) sono stati analizzati diversi terremoti e misurati i momenti sismici e magnitudo per ognuno di essi. Vediamo come il fit (linea tratteggiata) sia consistente coi dati a partire da una magnitudo $M_s > 7.5$, quindi applicabile al caso di grandi terremoti. I valori massimi di momento sismico si aggirano intorno a $M_0 \sim 10^{30}$ dyne cm. La relazione che lega le due grandezze è espressa nel grafico come:

$$\log_{10} M_0 = 8.8 + 2.5M_s \quad (3.25)$$

L'analisi cumulativa di trenta grandi terremoti nel periodo 1901-64 ha portato a uno spostamento di 0.10 arcs (1 arcs corrisponde a uno shift di 30 cm circa), molto vicino al valore osservato ~ 0.15 arcs (O'Connell and Dziewonski, 1979). Per avere un'idea dei

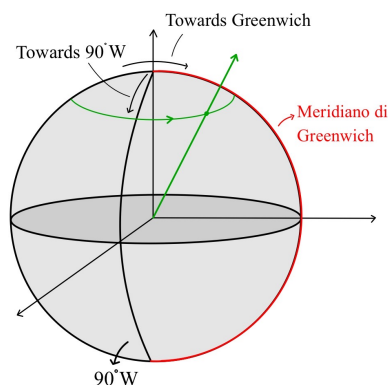


Figura 3.4: Sistema di coordinate utilizzato nei grafici successivi. È costituito da due assi: towards Greenwich e towards 90°W (o E). In verde è mostrato il movimento polare.

grafici che verranno discussi in seguito, si riportano le coordinate utilizzate, figura (3.4). Le interruzioni (break) nella precessione del polo sono direttamente correlate a grandi terremoti: da essi, come precedentemente accennato, è possibile scegliere le soluzioni migliori dei meccanismi focali del terremoto, vedi fig. (1.3) (Mansinha and Smylie, 1970). Consideriamo i grandi terremoti introdotti prima: Cile 1960 a 75°E e Alaska 1964 a 242° E. Questi hanno causato rispettivamente degli spostamenti polari di 0.037 arcs e 0.043 arcs.

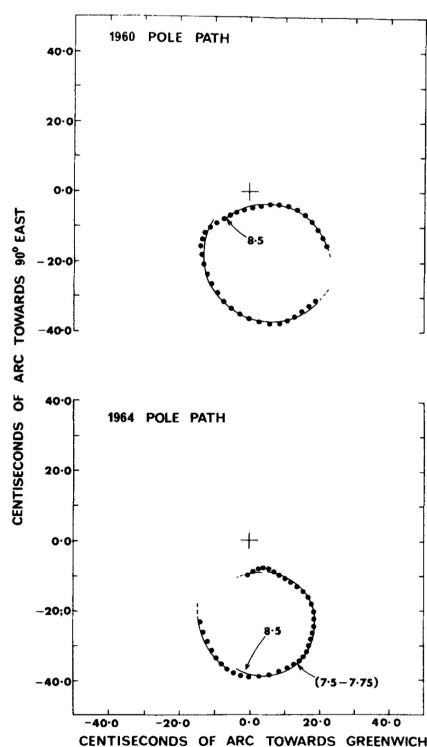


Figura 3.5: Shift polare causato dai terremoti in Cile (in alto) e Alaska (in basso). Le posizioni polari sono medie calcolate nell'arco di 10 giorni (Mansinha and Smylie, 1979)

Nei grafici (3.5), vediamo chiaramente degli spostamenti nella posizione del polo e gli eventi che li hanno causati. In alto (terremoto del Cile 1960), è indicata la magnitudo del

terremoto stesso: $M_s = 8.5$ (l'unico terremoto con $M_s > 7.5$ in quell'anno). Invece, nel 1964 sono avvenuti due terremoti con grande magnitudo: in Alaska (indicato nel grafico in basso come 8.5) e nelle South Sandwich Islands (indicato con la relativa magnitudo M_s compresa fra 7.5 e 7.75).

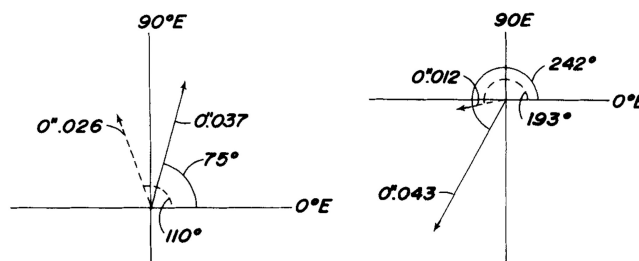


Figura 3.6: *Paragone fra i vettori stimati (tratteggiati) e osservati (non tratteggiati) che rappresentano lo shift del polo (Mansinha and Smylie, 1979).*

In figura (3.6) vediamo lo shift del polo nei due terremoti di Cile e Alaska (rispettivamente a sinistra e destra). I vettori tratteggiati sono calcolati sulla base delle soluzioni dei meccanismi focali (vedi *Maninsha and Smylie, 1979*). Possiamo notare come gli spostamenti polari ottenuti non siano completamente in disaccordo con quelli osservati: ciò è incoraggiante nello sfruttare gli shift polari per trovare soluzioni preferenziali ai meccanismi focali (per capire quale sia il meccanismo che ha generato il terremoto). Un fatto molto interessante riguardo al terremoto del Cile 1960 è che stato osservato un rilascio di energia pre-sismico molto significativo. In particolare, per questo terremoto, l'energia è stata pari alla metà della scossa principale. Il rilascio è avvenuto per un periodo di 5-10 min 15 min prima della scossa dominante. Da qui l'idea che i terremoti vengano anticipati da un rilascio di energia asismico antecedente la scossa.

3.5 Shift polare antecedente le scosse principali

Un altro fenomeno importante, oltre al rilascio di energia è il break nella precessione polare che precede persino il rilascio di energia stesso. L'ordine di grandezza del break si aggira intorno alle decine di giorni: in alcuni terremoti significativi ($M_s > 8$) di 20 giorni e in casi particolari fino a 30 giorni prima (*Smylie et al, 2015*). È possibile scomporre il moto polare in più componenti:

- la precessione di Chandler (Chandler wobble)
- un movimento stagionale dettato dalla variazione nelle distribuzioni di massa di oceani e atmosfera (le cosiddette componenti annuali)
- un offset permanente del polo, anche chiamato "secular polar shift"

in cui la precessione di Chandler rappresenta un moto circolare progrado come già affermato nel Capitolo 2, vedi fig.(2.2). L'analisi della precessione di Chandler risulta possibile una volta eliminate le componenti annuali e l'offset permanente. Dall'analisi di *Smylie* del 2015, sono stati filtrati i segnali per isolare il Chandler wobble dalle componenti annuali. Come già accennato, è stato ipotizzato che i terremoti, oltre ad alimentare la precessione di Chandler, potessero anche diseccitarla. Vediamo un caso reale.

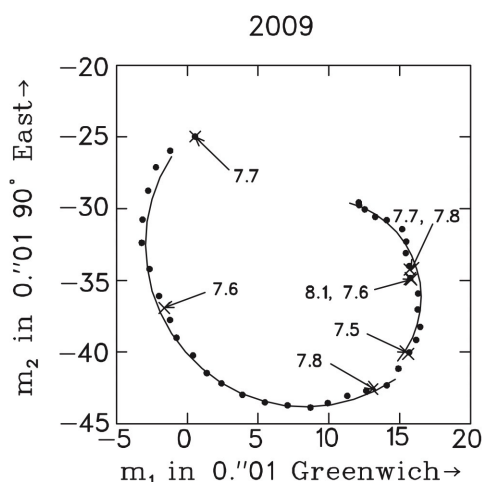


Figura 3.7: *Precessione di Chandler nel 2009 (Smylie et al, 2015).*

In figura (3.7), l'anno 2009 inizia con il terremoto di magnitudo 7.7 nella costa di Papua, Indonesia: l'ampiezza della precessione è notevole (la posizione del polo durante il terremoto è indicato in alto a sinistra nel grafico come 7.7). Successivamente si sono susseguiti altri grandi terremoti (la posizione del polo evolve temporalmente seguendo una direzione antioraria nel grafico, a partire dall'alto a sinistra). Di particolare interesse è il terremoto di magnitudo 7.5 del 10 agosto nelle Isole Andamane, India che ha cambiato l'ampiezza dello wobble: la precessione ha subito una diminuzione di un fattore $2/3$. In realtà il break nel moto polare è stato osservato l'1 agosto, andando a confermare l'ipotesi secondo la quale questo tipo di eventi sia antecedente le scosse principali (in figura vediamo che il polo si è spostato un punto prima del terremoto del 10 agosto, indicato in figura come 7.5). Quindi, questo grafico risulta importante perchè rappresenta un caso reale di diseccitazione della precessione di Chandler. Invece, riguardo all'ordine di grandezza dei giorni che precedono una scossa intensa e in cui il polo si sposta, la situazione è più o meno varia: passiamo da qualche giorno ($4/5$) a casi di 19 o addirittura 30 giorni nonostante rimaniamo sempre nell'ordine delle decine di giorni.

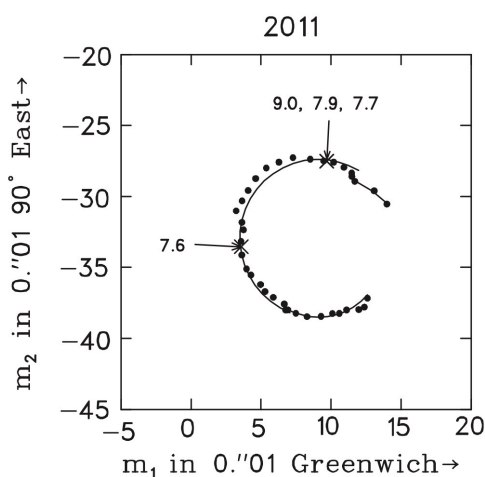


Figura 3.8: *Chandler wobble nel 2011 (Smylie et al, 2015).*

Nel grafico (3.8) è rappresentato il wobble nel 2011, nelle stesse modalità in cui è descritto nella figura (3.7). Durante quell'anno sono avvenuti tre terremoti nella costa di Honshu,

Giappone, l'11 marzo: sono indicati in figura con la loro magnitudo 7.7, 7.9 e 9.0. Diversamente dal caso del 2009, gli effetti premonitori della breve serie di terremoti sono ben visibili nel grafico poichè lo spostamento polare avviene significativamente prima delle scosse. Infatti, si parla di uno shift avvenuto 30 giorni prima dei terremoti. Ciò ci porta a pensare che nei giorni prima del terremoto, il campo di spostamento evolva prima del rilascio di stress tettonico, dovuto allo scorrimento sul piano di faglia (*Smylie and Zuberi, 2009*).

3.6 Influenza dei parametri del terremoto sullo spostamento polare

Finora ci siamo resi conto come i terremoti siano responsabili dei cambiamenti nella rotazione terrestre: il parametro principale che abbiamo evidenziato è stato il momento sismico. Non ci siamo interrogati sugli altri parametri che coinvolgono i terremoti: la posizione e il meccanismo che lo ha generato. Infatti, dopo l'analisi precedente, possono sorgere diverse le domande:

- Qual è la posizione in cui l'ampiezza dello spostamento polare è maggiore?
- Lo spostamento dipende dalla longitudine?
- Che ruolo hanno gli angoli coinvolti nella faglia? (si rimanda alla figura (1.3))

Questi punti verranno affrontati nell'analisi e simulazioni di *Xu et al, 2013*. Infatti, da questo studio è possibile trovare un'espressione analitica della funzione di eccitazione del terremoto che non comprende la longitudine e cioè ne è indipendente. I modelli di Terra considerati sono due: una Terra simmetrica rotante e il modello SNREI (Spherically symmetric Non-Rotating Elastic Isotropic Earth). Per entrambi i modelli, la longitudine non risulta essere un fattore che influenza la rotazione terrestre: un terremoto prodotto a una longitudine arbitraria produrrà gli stessi effetti di uno con gli stessi parametri, ma longitudine diversa. Poichè gli angoli che descrivono i terremoti rientrano nelle variabili che modificano la rotazione terrestre, consideriamo ora gli stessi modelli sfruttati da *Xu et al, 2013*.

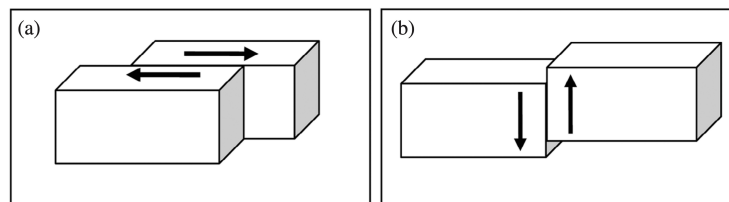


Figura 3.9: Modelli di dislocazioni. In figura (a) è rappresentato il modello vertical strike-slip fault in cui il piano di faglia è verticale e lo scorrimento avviene orizzontalmente, come ad esempio nel caso della faglia di San Andreas. In figura (b) il piano di faglia è sempre verticale, ma l'angolo di rake è 90° (*Xu et al, 2013*).

I due modelli ci permettono di considerare separatamente su variabili diverse. Prendiamo il caso (a) della figura (3.9) e supponiamo di volere vedere come si comportano l'ampiezza dello spostamento polare e la variazione del giorno in funzione dell'angolo di strike.

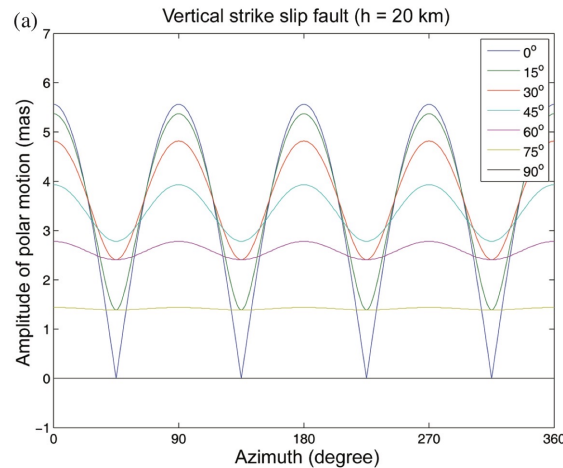


Figura 3.10: Ampiezza dello spostamento polare in funzione dell'azimuth o angolo di strike (Xu et al, 2013).

La figura (3.10) studia il modello (a) di dislocazione e ne analizza gli effetti per diverse latitudini (7 progressivamente di 0° a 90° ogni 15°). Le curve sono rappresentate con colori diversi nel grafico. A partire dall'alto vediamo che a una latitudine di 0° corrisponde un'ampiezza maggiore (misurata in millisecondi d'arco, mas). Scaliamo d'intensità man mano che la latitudine cresce, fino al caso particolare di 90° dove l'ampiezza è nulla, indipendentemente dall'angolo azimutale. Vediamo inoltre che i picchi di intensità si osservano periodicamente ogni 90° a partire da 0° , stesso periodo per i minimi che partono da 45° .

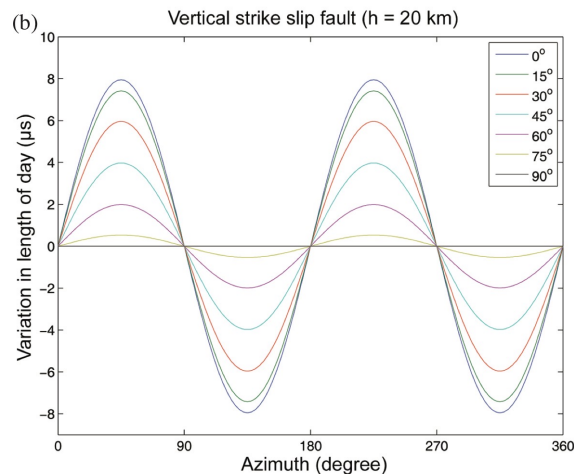


Figura 3.11: Variazione della durata del giorno in funzione dell'angolo di strike (azimuth) (Xu et al, 2013).

Come avevamo anticipato, l'ordine di grandezza della variazione diurna si aggirava intorno ai μs . Anche in figura (3.11) sono riportate le curve delle 7 latitudini. Vediamo subito che se l'ampiezza dello spostamento polare è nulla, allora lo sarà anche la sua variazione diurna (caso della curva che rappresenta i 90° di latitudine). La variazione diurna è massima a partire da 45° gradi di angolo azimutale, ogni 90° gradi (consideriamo la variazione in modulo, quindi variazioni sia negative che positive). Altro fatto che ci aspettiamo è che maggiori sono le ampiezze del moto polare, maggiori saranno le variazioni sulla durata

del giorno: le curve infatti in (3.11) scalano progressivamente come quelle della (3.10). Risolviamo adesso la stessa analisi, utilizzando il modello (b) della (3.9), supponendo che avvenga con un angolo azimutale di 45° e studiamo gli effetti dell'angolo di dip sull'ampiezza del moto polare e sulla variazione della durata del giorno.

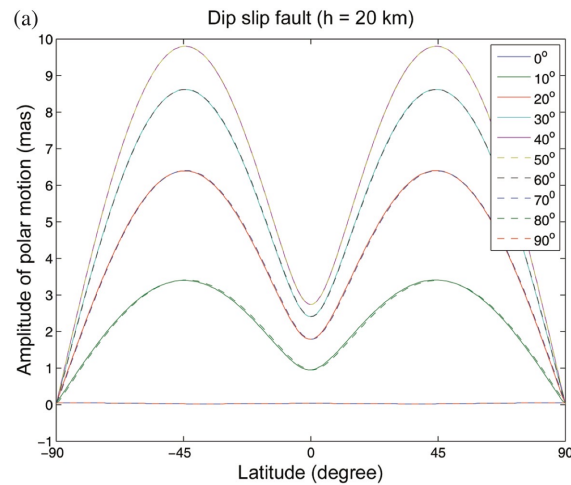


Figura 3.12: *Variazione dell'ampiezza del moto polare in funzione della latitudine, modello (b). L'angolo azimutale viene fissato a 45° (Xu et al, 2013).*

Il grafico (3.12) mostra diverse curve con angoli di dip variabile. L'ampiezza delle curve è simmetrica rispetto a 0° di latitudine e presenta un massimo a 45° , un minimo locale corrispondente a 0° e quelli globali a $\pm 90^\circ$. Inoltre, l'ampiezza delle curve è simmetrica rispetto a un angolo di dip di 45° (cioè la curva di 0° si sovrappone a quella di 90° , quella di 10° a quella di 80° , quella di 20° con 70° e così via). Le ampiezze massime si hanno per $0^\circ/90^\circ$ e scalano al crescere dell'angolo di dip.

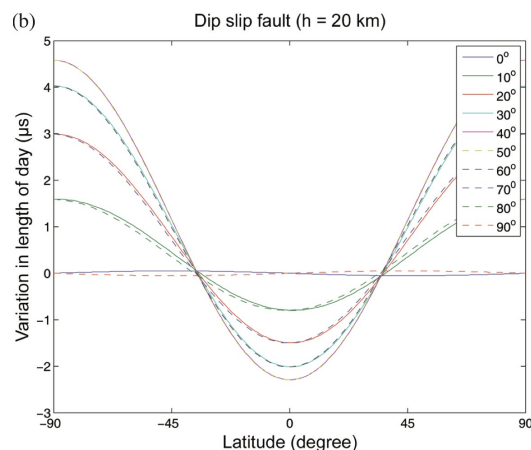


Figura 3.13: *Variazione della durata del giorno in funzione della latitudine (Xu et al, 2013).*

Riguardo invece alla variazione della durata del giorno, si vede che i massimi corrispondono a $\pm 90^\circ$ di latitudine, mentre è nulla a 40° circa. Alle curve che hanno causato un'ampiezza maggiore del moto polare corrisponde una maggiore variazione nella durata del giorno. Concludiamo dicendo che i meccanismi che coinvolgono le faglie ci permettono di capire come evolvano gli effetti sulla rotazione terrestre in funzione dei parametri del terremoto

(angolo di dip o immersione, latitudine e angolo di strike). Riassumiamo questa sezione in questi punti:

- L'ampiezza del moto polare è indipendente dalla longitudine alla quale avviene un terremoto
- In uno stesso terremoto l'ampiezza della rotazione è maggiore per latitudini più basse: al crescere della latitudine l'ampiezza diminuisce. Inoltre, la variazione è simmetrica per i due emisferi
- La variazione nell'ampiezza è simmetrica per un angolo di dip di 45° . Quando quest'angolo cresce, l'ampiezza decresce, mentre la variazione della durata del giorno aumenta.
- I risultati sono fortemente dipendenti dal modello utilizzato

3.7 Cenni sugli effetti dell'atmosfera e degli oceani sul Chandler wobble

Questa sezione si scosta dalle analisi appena condotte: fino a questo momento ci siamo concentrati sugli effetti della Terra solida, senza studiare la Terra fluida, in particolare, oceani e atmosfera. I modelli che studiano gli effetti di atmosfera e oceani, rispetto a quelli che stimano quelli dei terremoti, sono stati compatibili con le osservazioni solamente di recente. Infatti, grazie a *Celaya et al* nel 1999 si è giunti alla conclusione che i processi atmosferici, i processi oceanici o una combinazione dei due possedessero abbastanza potenza per alimentare il Chandler wobble (vedi *Gross*, 2000). Il periodo studiato da *Gross* è 1985-96 e vengono discussi gli effetti delle variazioni di pressione dei fondali oceanici e dell'atmosfera, ma anche gli effetti delle correnti oceaniche e dei venti atmosferici. Si riportano per chiarezza le componenti polari, accennate nella Sezione 3.5, e i loro valori:

- Componenti annuali (100 mas, miliardesecondi)
- Chandler wobble (100-200 mas)
- Markowitz wobble, non riportato precedentemente, che consiste in una variazione quasi-periodica su scala decennale (30 mas)
- Offset permanente crescente linearmente (3.5 mas/year)

Lo spettro del moto polare risulta molto ricco poiché possiede diverse componenti. Le assunzioni fatte per questo modello sono: (1) la "inverted barometer assumption", in cui l'oceano risponde isostaticamente alle variazioni di pressione sulla superficie, (2) l'oceano è un corpo rigido che trasmette completamente e senza ritardo le variazioni di pressione atmosferica al suo fondale. L'equazione principale nello studio degli effetti di atmosfera e oceani è (*Gross*, 2000):

$$\mathbf{p}(t) + \frac{i}{\sigma_{CW}} \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \chi(t) \quad (3.26)$$

dove σ_{CW} è la frequenza di Chandler a valori complessi e $\mathbf{p}(t) = x_p - iy_p$. Con x_p, y_p si identificano le coordinate del CEP (Celestial Ephemeris Pole): questo polo rappresenta

l'asse di rotazione che considera precessione e nutazione, escludendo le rotazioni diurne. Le coordinate sono riferite al body-fixed terrestrial reference frame. L'espressione di $\chi(t)$ rappresenta la funzione di eccitazione ed è:

$$\chi(t) = \frac{1.61}{C - A} \left[\mathbf{h}(t) + \frac{\Omega \mathbf{c}(t)}{1.44} \right] \quad (3.27)$$

dove C , A sono date da (1.27), Ω è la rotazione diurna, $\mathbf{h}(t) = h_1(t) + ih_2(t)$ è la variazione del momento angolare dovuta a cambiamenti nei venti atmosferici o nelle correnti oceaniche, $\mathbf{c}(t) = c_{13}(t) + ic_{23}(t)$ rappresenta le variazioni nel momento di inerzia della Terra dovuti a redistribuzioni di massa oceanica o atmosferica.

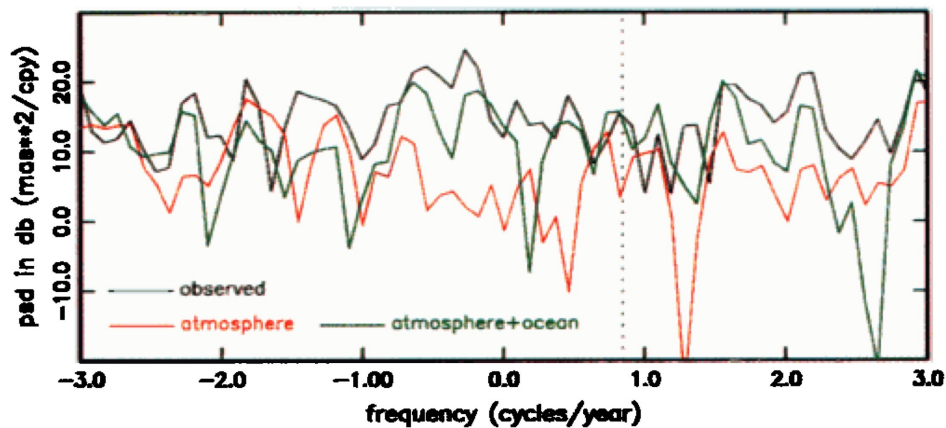


Figura 3.14: Densità spettrale della potenza espressa in decibel ottenuta a partire da χ (funzione di eccitazione). La frequenza è espressa come cicli/anno. (a) La curva nera corrisponde all'eccitazione osservata del moto polare; (b) in arancione abbiamo l'eccitazione dovuta ai venti dell'atmosfera e i suoi cambi di pressione; (c) in verde è rappresentata la somma dei processi oceanici e quelli atmosferici. La linea tratteggiata è la frequenza di Chandler (Gross, 2000).

Excitation process	Power (mas ²)	Excitation process	Power (mas ²)
Observed	4.87	Atmospheric plus oceanic wind plus currents	0.67
Atmospheric		i.b. plus ocean-bottom pressure	6.28
wind	0.32	Total of all atmospheric plus oceanic	5.44
pressure (i.b.)	1.87		
wind plus pressure (i.b.)	1.44		
Oceanic			
currents	0.12		
ocean-bottom pressure	3.45		
currents plus ocean-bottom pressure	3.69		

Figura 3.15: Potenze, in valori numerici, ottenute nei vari processi di eccitazione considerati (Gross, 2000).

In figura (3.14), si può vedere come alla frequenza σ_{CW} , valutata circa 0.8435 cpy, cycles per year, la potenza data dai processi atmosferici non sia compatibile con la potenza osservata. Piuttosto, c'è un ottimo accordo con la somma di processi oceanici e atmosferici con la potenza osservata nella banda di Chandler (stimata da Gross come 0.730-0.913 cpy). In (3.15) si nota che il più importante fra i processi è quello che coinvolge la pressione sul

fondale oceanico: esso corrisponde a circa il doppio della potenza dei processi atmosferici. Il valore totale di processi atmosferici e oceanici viene ridotto in quanto le correnti oceaniche e atmosferiche, ma anche le pressioni, vanno incontro a interferenza distruttiva portando la potenza totale da 6.28 a 5.44 mas² (più vicino al valore osservato 4.87 mas²). Risulta che l'ipotesi, secondo la quale i processi atmosferici e oceanici possano eccitare il wobble, è ben posta. Concludiamo ribadendo che ciò è possibile solo se consideriamo insieme i processi oceanici e atmosferici.

Conclusioni

L'analisi condotta ha permesso di comprendere più approfonditamente il moto di rotazione terrestre. In particolare, l'obiettivo dello studio era trovare una correlazione fra terremoti e variazioni nel moto di rotazione: i terremoti influenzano il moto di rotazione della Terra perchè lo scorrimento di una faglia (dislocazione) produce una variazione nel momento di inerzia della Terra. Inoltre, isolando il Chandler wobble dalle altre componenti del moto di rotazione è stato possibile studiarne l'evoluzione e i meccanismi di eccitazione.

Da modelli più semplici, come quello della Terra sferica e omogenea, ci si è resi conto che, in realtà, le osservazioni erano maggiormente conciliabili con una Terra di forma ellissoidale e stratificata. A partire da questa considerazione, sono stati sviluppati dei modelli di dislocazione ed è stata analizzata la variazione del potenziale gravitazionale dovuta proprio alle dislocazioni. È stato dimostrato che una dislocazione trasforma i coefficienti armonici del potenziale gravitazionale. Inoltre, sono state fatte considerazioni sugli effetti viscoelastici del Mantello terrestre: il risultato è che possiamo escludere questo tipo di effetti dai processi che alimentano la precessione di Chandler.

Dopo aver analizzato le dislocazioni e i modelli di Terra, sono state trattate le proprietà dinamiche del pianeta. A partire dalle equazioni di Eulero, è stato necessario considerare una caratteristica importante della Terra: l'elasticità. È proprio grazie a questa proprietà che sono state rielaborate le equazioni di Eulero e trasformate nelle equazioni di Liouville. La risoluzione delle equazioni di Liouville è risultata compatibile con la precessione di Chandler osservata. Ulteriori considerazioni sono state fatte sull'effetto della forza centrifuga, arrivando ad affermare che una variazione del potenziale centrifugo modifica i coefficienti del potenziale roto-gravitazionale (e quindi del momento di inerzia della Terra). Introducendo nelle equazioni di Liouville l'effetto dei terremoti, tramite opportune funzioni di eccitazione, si è ottenuta un'espressione analitica delle componenti del moto di rotazione. Grazie al fatto che le componenti della rotazione dipendono da parametri influenzati dai terremoti, è stato possibile stimare lo spostamento del polo di rotazione medio (circa 3 cm) e la variazione nella durata del giorno (circa $1 \mu s$) prodotti da un grande terremoto. Dall'analisi dei terremoti di Cile, 1960 e Alaska, 1964, si è osservato uno spostamento polare di rispettivamente 0.037 arcs e 0.043 arcs: ciò a riprova del fatto che grandi terremoti causino interruzioni (break) nel moto polare. Sebbene di regola gli spostamenti polari avvengano nello stesso arco temporale dei terremoti, in alcuni casi è stato possibile osservare shift polari decine di giorni prima: una possibile spiegazione è che il campo di spostamento evolva prima del rilascio di stress tettonico, dovuto allo scorrimento sul piano di faglia. Agli stessi spostamenti è possibile associare un incremento o un'inibizione dell'ampiezza del wobble: abbiamo dimostrato che i terremoti rappresentano un meccanismo di eccitazione (o diseccitazione) della precessione di Chandler.

Infine, si è evidenziato che c'è una forte dipendenza dell'ampiezza dello spostamento del polo e della variazione nella durata del giorno dalla posizione e dalle caratteristiche delle sorgenti sismiche. Per una faglia verticale di tipo strike-slip, l'effetto sulla precessione è

maggiore a latitudini più basse e diminuisce al crescere della latitudine. Invece, per una faglia verticale con angolo di rake di 90° , l'ampiezza ha un massimo a 45° di latitudine e due minimi a 0° e 90° di latitudine. Per faglie inclinate, l'effetto risulta simmetrico per un angolo di dip di 45° , al crescere dell'angolo di dip, l'ampiezza diminuisce e la variazione nella durata del giorno aumenta.

Concludiamo con un cenno sugli effetti dell'atmosfera e degli oceani sulla precessione di Chandler dimostrando che l'azione combinata di venti atmosferici, correnti oceaniche e variazioni nella pressione atmosferica e oceanica costituisce il principale meccanismo di alimentazione del Chandler wobble.

Bibliografia

- Dragoni, M., Yuen, D., and Boschi, E. (1983). Global post-seismic deformation in a stratified viscoelastic Earth: effects on Chandler wobble excitation. *J. Geophys. Res.*, Vol.88, p.2249-2250.
- Gestermann, N. and Plenefisch, T. (2021). *Fault Identification from Seismology*, page 100–117. Cambridge University Press.
- Goldstein, H., Poole, C., and Safko, J. (2001). *Classical Mechanics*. Addison Wesley 3rd ed.
- Gross, R. (2000). The excitation of the Chandler Wobble. *Geophysical Research Letters*, Vol.27, No. 15, p.2329-2332.
- Lambeck, K. (1980). *The Earth's Variable Rotation: Geophysical Causes and Consequences*. Cambridge University Press.
- Mansinha, L. and Smylie, D. (1979). Seismic excitation of the Chandler wobble revisited. *Geophys.J.R.astr.Soc.*, Vol.59, p.1-17.
- O'Connell, R. and Dziewonski, A. (1976). Excitation of Chandler wobble by large earthquakes. *Nature (London)*, Vol.262 (5566), p.259-262.
- Smylie, D., Henderson, G., and Zuberi, M. (2015). Modern observation of the effect of earthquakes on the Chandler wobble. *Journal of Geodynamics* Vol.83 p.85–91.
- Smylie, D. and Zuberi, M. (2009). Free and forced polar motion and modern observation of the Chandler wobble. *Journal of Geodynamics* Vol.48 p.226–229.
- Xu, C., Sun, W., and Zhou, X. (2013). Effects of Huge Earthquake on Earth Rotation and the length of Day. *Terr. Atmos. Ocean. Sci.*, Vol. 24, No. 4, Part I, 649-656.