ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

L'equazione delle onde e il concetto di derivata debole

Tesi di Laurea in
Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Presentata da:
Giovanni Raccichini

Sessione seconda
Anno Accademico
2010/2011

Indice

Intoduzione

Il contenuto della seguente tesi é, come suggerisce il titolo, la soluzione dell'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n$ per n=1,2,3 e la soluzione del problema debole in $\mathbb{R}$.
Nel primo capitolo, dopo aver impostato il problema, mostriamo la soluzione di D'Alembert nel caso n=1, di Kirchoff n=3 e con il metodo del discendente anche la formula di Poisson per n=2. Detto ció tutte le formule risolutive trovate evidenziano una caratteristica, cioé che tutte richiedono condizioni molto deboli sui dati, che sole peró non consentono di verificare che la soluzione sia soluzione in senso classico. Nel secondo capitolo dunque, dopo aver introdotto il concetto di derivata debole e di formulazione debole del problema di Cauchy relativo all'equazione delle onde, riconosceremo che esattamente le soluzioni trovate nel capitolo precedente soddisfano il problema debole dell'equazione delle onde.

Capitolo 1

La soluzione classica dell'equazione delle onde

1.1 Il problema della corda vibrante

La prima formulazione e soluzione del problema della corda vibrante si ha nel XVIII secolo. La formulazione é la seguente: si ha una corda, giacente in un piano, della quale si conoscono la posizione e la velocitá al tempo $t = 0$; si chiede di determinare una funzione che dipenda soltanto dalle suddette condizioni e che descriva la posizione della corda in un qualsiasi successivo istante di tempo t.
Il problema si formulerá nella seguente maniera: trovare una funzione $u : \bar{U}\times(0,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi l'equazione

$$\begin{cases} u_{tt} \text{-} \triangle u{=}0 & U\times(0,\infty) \\ u = g & U\times\{t=0\} \\ u_t = h & U\times\{t=0\} \end{cases}$$

con U aperto di $\mathbb{R}^n$, $u_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\triangle u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, g e f funzioni date.

Vediamo ora da dove sorge questa espressione formale e qual é il suo significato fisico.
Chiamiamo V una regione regolare contenuta in U. L'accelerazione che sente questa regione é data da

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_V u dx = \int_V u_{tt} dx$$

mentre la forza netta agente sulla regione, supponendo unitaria la densitá di massa, si esprime cosí:

$$-\int_{\partial V} \langle \mathbf{F}, n\rangle dS$$

dove **F** sta a indicare la forza agente su V tramite la sua frontiera ∂V. Per la legge di Newton, che afferma che la massa per l'accelerazione é uguale alle forze agente, possiamo scrivere che

$$\int_V u_{tt} \quad dx = -\int_{\partial V} \langle \mathbf{F}, n\rangle dS. \tag{1.1}$$

D'altra parte, per il teorema della divergenza

$$\int_{\partial V} \langle \mathbf{F}, u\rangle \ dS = -\int_V div\mathbf{F} \ dx.$$

Quindi

$$\int_V u_{tt} \ dx = \int_V div\mathbf{F} \ dx.$$

Questa identitá é vera per ogni regione $V \subset U$, pertanto in U si ha

$$u_{tt} = -div\mathbf{F}(Du).$$

Abbiamo scritto $\mathbf{F}(Du)$ perché **F** si esprime in funzione del gradiente di u per i corpi elastici. Inoltre, per valori piccoli di Du, possiamo dire che $\mathbf{F}(Du) \approx -aDu$ ovvero é proporzionale al gradiente di u. Sostituendo quello che abbiamo trovato nella (1.1) si ha l'equazione della corda vibrante

$$u_{tt} - a\triangle u = 0$$

poiché $\triangle u = div(Du)$. Nel seguito supporremo $a = 1$

1.2 Il caso $n = 1$: la soluzione di d'Alembert

Consideriamo il problema su tutto $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_{tt} \text{ -} u_{xx}\text{=}0 & \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u = g & \mathbb{R}\times\{t=0\} \\ u_t = h & \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases}$$

dove g, h sono funzioni date. L'operatore $\partial_{tt} - \triangle$ si chiama operatore delle onde. Cerchiamo quindi una soluzione dell'equazione in termini della g e della h. Possiamo fattorizzare formalmente l'operatore delle onde nel seguente modo

$$u_{tt} - \triangle u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

Allora, se definiamo

$$v(x,t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t).$$

dall'equazione delle onde si ottiene

$$v_t(x,t) + v_x(x,t) = 0 \quad , x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

che é un'`equazione di trasporto` [1] a coefficienti costanti e con coefficiente del gradiente di u uguale a 1. Sappiamo che la soluzione di un'equazione di questo tipo é

$$v(x,t) = a(x-t)$$

con $a(x) := v(x,0)$, ovvero il valore di v al tempo iniziale. Da qui si ha

$$u_t(x,t) - u_x(x,t) = a(x-t) \quad in \quad \mathbb{R} \times (0,\infty)$$

Considerandola come tale, abbiamo che la soluzione al seguente problema é

$$u(x,t) = \int_0^t a(x+(t-s)-s)ds + c(x+t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + c(x+t)$$

dove si é posto $c(x) := u(x,0)$. Imponendo le condizioni iniziali del problema definiamo a e c. La prima condizione ci dice che

$$c(x) = g(x) \quad \text{per} \quad x \in \mathbb{R}$$

mentre la seconda condizione impone che

$$a(x) = v(x,0) = u_t(x,0) - u_x(x,0) = h(x) - g'(x) \quad (\text{per} \quad x \in \mathbb{R}).$$

[1] L'equazione del trasporto é la piú semplice tra le equazione alle derivate parziali. Il problema di Cauchy relativo all'equazione non omogenea del trasporto si formula nella seguente maniera:

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = f & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

con b vettore fissato di $\mathbb{R}^n$ e $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'incognita. Se $f = 0$ si ha il problema relativo all'equazione omogenea.
Per i nostri scopi, riportiamo direttamente la soluzione per il problema di Cauchy relativo all'equazione non omogenea :

$$u(x,t) = g(x-tb) + \int_0^t f(x+(s-t)b, s)\, ds, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

Quindi ora possiamo scrivere

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) + g'(y)dy \ + \ g(x+t) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy \ + \ \big(g(x+t)+g(x-t)\big)\Big) \end{aligned}} \tag{1.2}$$

che é la soluzione del nostro problema. Enunciamo pertanto il teorema che ci assicura che quella che abbiamo trovato é una soluzione del problema iniziale:

Teorema 1.2.1. *Siano $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ e u definita dalla formula di d'Alembert (1.2), allora*

1. $u \in C^2(\mathbb{R})$
2. $u_{tt} - u_{xx} = 0$ *in* $\mathbb{R} \times (0, \infty)$
3. $$\lim_{(x,t)\to(x_0,t^+)} u(x,t) = g(x_0), \qquad \lim_{(x,t)\to(x_0,t^+)} u_t(x,t) = h(x_0)\,\forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Osservazione 1.2.2. Possiamo giá osservare che nell'equazione (1.2) le condizioni che abbiamo posto inizialmente sulla h e sulla g, cioé che dovessero essere C^2, in veritá non sono necessarie. Dunque il fatto che nella soluzione non sia necessaria la stessa continuitá delle condizioni iniziali, ci spinge a pensare che proprio quella equazione fornisca una soluzione in senso debole; é quello che dimostreremo nel capitolo successivo.

1.3 L'equazione delle onde dell'equazione in $\mathbb{R}^n$

In questo paragrafo studieremo il problema di Cauchy per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n$ per n=3.
Sia $u \in C^m((\mathbb{R}^n) \times (0, \infty))$, con $m \geq 2$, una soluzione il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u = 0 & \text{in}\, \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u = g\,,\ u_t = h & \text{in}\, \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Il nostro scopo é quello di trovare una formula esplicita per u in termini di g e h. La formula di D'Alambert ci suggerisce di cercare la soluzione in utilizzando le medie sferiche. Studiamo quindi, innanzitutto, le proprietá delle medie di una funzione sopra superfici sferiche.

1.3.1 Alcuni risultati sulle medie sferiche

Per ogni n$\geq$ 2 sia $\alpha(n)$ la misura della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$. Perl $x \in \mathbb{R}^n$ e per $r > 0$ denotiamo con

$$B(x,r) \ = \ \{y \in \mathbb{R}^n \ \big| \ |x-y| < r\}$$

la sfera di centro x e raggio r. Indichiamo poi con $dS(y)$ la misura $n-1$ dimensionale.
Se $v \in C(\mathbb{R}^n)$ definiamo:

$$M(v;x,r) := \fint_{\partial B(x,r)} v(y)\ dS(y) \ = \frac{1}{\alpha(n)r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} v(y)\ dS(y)$$

Effettuando un cambio di variabile nell'integrale si ha

$$M(v;x,r) = \frac{1}{\alpha(n)r^{n-1}} \int_{|x-y|=r} v(y)\ dS(y) = \frac{1}{\alpha(n)} \int_{|\nu|=1} v(x+r\nu)\ dS.$$

Da queste uguaglianze possiamo evincere diverse proprietá:

1. se $v \in C^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{N}$, allora anche la funzione $x \to M(v;x,r) \in C^m((\mathbb{R}^n)$;
2. si ha $lim_{r\to 0} M(v;x,r) = v(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Equazione di Darboux

Ai fini del nostro problema, la proprietá piú importante e significativa delle medie sferiche é che queste soddisfano l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux, che, per semplicitá, d'ora in poi chiameremo equazione di Darboux. Infatti, considerando $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ si ha, per il teorema della divergenza,

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|<r} \triangle v(y)\ dy &= \int_{|x-y|=r} \triangledown v(y) \cdot \nu\ dS(y) \\ &= r^{n-1} \int_{|\nu|=1} \triangledown v(x+r\nu) \cdot \nu\ dS(y) \\ &= r^{n-1} \frac{d}{dr} \int_{|\nu|=1} v(x+r\nu)\ dS(y).\end{aligned}$$

Da questa si ricava

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} M(v;x,r) &= \frac{1}{\alpha(n)r^{n-1}} \int_{|x-y|<r} \triangle v(y)\ dy \\ &= \frac{1}{\alpha(n)r^{n-1}} \int_0^r \rho^{n-1} \triangle_x \int_{|\nu|=1} v(x+\rho\nu)\ dS d\rho.\end{aligned}$$

Moltiplicando per r^{n-1} entrambi i membri della precedente identitá, e derivando poi rispetto a r si ha:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}M(v;x,r)) = \triangle_x(r^{n-1}M(v;x,r))$$

ovvero

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r})M(v;x,r) = \triangle_x M(v;x,r).$$

Questa é l'equazione di Darboux. Oppure, riscrivendola sotto un'altra forma, denotando con il pedice la derivata rispetto alla variabile indicata, abbiamo

$$\triangle M(v;x,r) - M_{rr}(v;x,r) - \frac{n-1}{r}M_r(v;x,r) = 0.$$

Una condizione equivalente al problema di Cauchy

Sia u una soluzione di classe C^2 del problema (1.3). Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$

$$\begin{aligned}\triangle_x M(u;x,r) &= \frac{1}{\alpha(n)}\int_{|\nu|=1} \triangle_x u(x+r\nu,t)\, dS \\ &= \frac{1}{\alpha(n)}\int_{|\nu|=1} u_{tt}(x+r\nu,t)\, dS = \frac{\partial^2}{\partial t^2}M(u;x,r)\end{aligned}$$

Ponendo

$$M(u;x,r,t) = U(x;r,t) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS(y) \tag{1.4}$$

e

$$M(g;x,r,t) = G(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} g(y)dS(y)$$

$$M(h;x,r,t) = H(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} h(y)dS(y). \tag{1.5}$$

otteniamo che u é soluzione di (1.3) se e solo se

$$\begin{cases} U_{tt}(x;r,t) - U_{rr}(x;r,t) - \frac{n-1}{r}U_r(x;r,t) = 0 & in\ \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ U(x,t) = G,\ U_t(x,t) = H & in\ \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases} \tag{1.6}$$

1.4 Soluzione per n=3: l'equazione di Kirchoff

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ tale che risolva il problema (1.2).
Poniamo

$$\tilde{U} := rU, \tag{1.7}$$

$$\tilde{G} := rG, \quad \tilde{H} := rH. \tag{1.8}$$

Per la (1.6) si ha che $\tilde{U}$ risolve il problema:

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{xx} = 0 & \mathit{in}\ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G},\, \tilde{U}_t = \tilde{H} & \mathit{in}\ \mathbb{R} \times \{t=0\} \\ \tilde{U} = 0 & \mathit{in}\ \{r=0\} \times (0,\infty) \end{cases} \tag{1.9}$$

Dunque, applicando (1.2) alla (1.9) si ha che

$$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}[\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y)dy.$$

Dalla (1.4) si ricava che $u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} U(x;r,t)$ quindi si ha che

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r\to 0^+} U(x;r,t) \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(y)dy \\ &= G'(t) + H(t). \end{aligned}$$

Per la (1.5) si ha che

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} g\, dS\right) + t \fint_{\partial B(x,t)} h\, dS.} \tag{1.10}$$

D'altronde

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(y)\, dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} g(x+sz)\, dS(z)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} g\, dS\right) &= \fint_{\partial B(0,1)} Dg(x+tz)\cdot z\, dS(z) \\ &= \fint_{\partial B(x,t)} Dg(y)\, \cdot \Big(\frac{y-x}{t}\Big)\, dS(y). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Perció sostituendo la (1.11) in (1.10) si ha

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} th(y) + g(y) + Dg(y)\cdot(y-x)\, dS(y) \quad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0) \tag{1.12}$$

Questa é proprio l'equazione di Kirchoff per la soluzione del problema iniziale (1.3) in tre dimensioni.

Osservazione 1.4.1. Osseviamo che nella (1.10) le derivate non passano ancora sotto il segno di integrale, quindi la g e f non necessitano della regolaritá richiesta inizialmente, anzi basta che siano solo L^1. Infatti come vedremo nel capitolo successivo per n=1, questa é proprio la soluzione del problema debole in $\mathbb{R}^3$.

1.5 Soluzione per n=2

Per n=2 nessuna trasformazione come (1.7) e (1.8) puó convertire l'equazione di Eulero-Poisson-Darboux nell'equazione delle onde monodimensionale, quindi considereremo il problema iniziale (1.3) quando n=2 e lo guarderemo come un problema di $\mathbb{R}^3$, dove peró la terza coordinata non appare.
Assumiamo $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$ tale che risolva (1.3) per $n = 2$ e scriviamo

$$\bar{u}(x_1, x_2.x_3, t) := u(x_1, x_2, t).$$

Allora (1.3) implica

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \triangle \bar{u} = 0 & \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ \bar{u} \ = \ g,\ \bar{u}_t = \bar{h} & \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{1.13}$$

con

$$\bar{g}(x_1, x_2, x_3) := g(x_1, x_2),\ \bar{h}(x_1, x_2, x_3) = h(x_1, x_2).$$

Se scriviamo ora $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\bar{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$, allora la (1.13) e la formula di Kirchoff implicano che

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \bar{u}(\bar{x}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial \bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g}\, d\bar{S} \right) + t \fint_{\partial \bar{B}(\bar{x},t)} \bar{h}\, d\bar{S} \end{aligned} \tag{1.14}$$

dove $\bar{B}(\bar{x}, t)$ denota una palla in $\mathbb{R}^3$ con centro in $\bar{x}$, raggio $t > 0$, e $d\bar{S}$ denota la misura di una superficie bidimensionale su $\partial \bar{B}((x), t)$.

Osserviamo che

$$
\begin{aligned}
\fint_{\partial \bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g}\, d\bar{S} &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g}\, d\bar{S} \\
&= \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(x,t)} g(y)(1+|D\gamma(y)|^2)^{\frac{1}{2}}\, dy,
\end{aligned}
$$

con $\gamma(y) = (t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}$ per $y \in B(x,t)$. Il fattore 2 entra in gioco per il fatto che $\partial \bar{B}(\bar{x},t)$ é composta da due emisferi.
Osserviamo che $(1+|D\gamma|^2)^{1/2} = t(t^2 - |y-x|^2)^{-1/2}$.
Dunque

$$
\begin{aligned}
\fint_{\partial \bar{B}(\bar{x},t)} \bar{g}\, d\bar{S} &= \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy \\
&= \frac{t}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy.
\end{aligned}
$$

Conseguentemente la formula (1.14) diventa

$$
\boxed{
\begin{aligned}
u(x,t) = &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy \right) \\
&+ \frac{t^2}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy.
\end{aligned}
}
$$

Effetuando una sostituzione si ha

$$
t^2 \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy = t \fint_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{(1+|z|^2)^{1/2}}\, dz,
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}} dy \right) \\
&\quad = \fint_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{(1-|z|^2)1/2}\, dy \;+\; t \fint_{B(0,1)} \frac{Dg(x+tz)\cdot z}{(1-|z|^2)^{1/2}}\, dz \\
&\quad = t \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy \;+\; t \fint_{B(x,t)} \frac{Dg(y)\cdot(y-x)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy.
\end{aligned}
$$

Possiamo riscrivere la (1.14) ottenendo la relazione

$$
u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + tDg(y)\cdot(y-x)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\, dy \tag{1.15}
$$

per $x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0$.
Questa é la formula di Poisson per la soluzione del problema (1.3) in due dimensioni.

Capitolo 2

Il concetto di derivata debole e la soluzione debole al problema

2.1 La derivata debole

Definizione 2.1. Siano $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Si dice che $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = g$ in senso debole in Ω se risulta

$$\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega g(x)\varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Analogamente, per ogni multiindice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_p)$ si dice che $D^\alpha = g$ in senso debole in Ω se

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x)\varphi(x) dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty$$

dove abbiamo posto

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_p \quad e \quad D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_p}}$$

Osservazione 2.1.1. Ovviamente se $f \in C^m(\Omega)$ e $g_\alpha := D^\alpha f$ l'ordinaria derivata di ordine α, $|\alpha| \leq m$, allora

$$D^\alpha f = g_\alpha$$

in senso debole in Ω.

Se $P(D) := \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha$ é un operatore differrenziale lineare di ordine $m \in \mathbb{N}$ con coefficienti costanti $c_\alpha \in \mathbb{R}$, si dice che $P(D)f = g$ in senso debole in Ω se

$$\int_\Omega f(x) P^*(D)\varphi(x)\, dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\, dx$$

ove $P^*(D)$ indica l'operatore autoaggiunto di $P(D) := \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}c_\alpha D^\alpha$. Se $P(D) = P^*(D)$ si dice che $P(D)$ é autoaggiunto. In particolare, ogni operatore differenziale omogeneo di ordine 2 é autoaggiunto, infatti se

$$P(D) = \sum_{|\alpha|=2} c_\alpha D^\alpha$$

allora

$$P^*(D) = \sum_{|\alpha|=2}(-1)^{|\alpha|}c_\alpha D^\alpha = \sum_{|\alpha|=2} c_\alpha D^\alpha = P(D).$$

Esempio 2.1.2. L'operatore delle onde in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\square = \partial_t^2 - \triangle\,, \quad \triangle = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$$

é un operatore autoaggiunto. Qui abbiamo denotato con (x,t), la coppia $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$e $t \in \mathbb{R}$

2.2 Mollificatori

Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, scegliamo una funzione $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\psi(x) = 0 \quad |x| \geq 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\ dx = 1.$$

Per ogni $\varepsilon \geq 0$ poniamo

$$\psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\psi(\frac{x}{\varepsilon}) \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Allora $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e si ha

$$\psi_\varepsilon(x) = 0 \qquad |x| \geq \varepsilon$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x)dx = 1 \qquad \forall\varepsilon > 0.$$

Posto $\Omega_\varepsilon(x) = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ e sia

$$f_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_\varepsilon(x) = \int_\Omega \psi_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

é noto che risulta:

- $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$
- $f_\varepsilon \longrightarrow f$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ per $\varepsilon \to 0$

Precisamente, per ogni compatto $K \subseteq \Omega$

$$\int_K |f_\varepsilon - f| dx \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.1}$$

Osserviamo esplicitamente che, fissato $K \subseteq \Omega$ compatto, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $K \subseteq \Omega_\varepsilon$ per ogni $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ e dalla (2.1) segue poi che

$$\int_\Omega f_\varepsilon(x)\varphi(x)\, dx \longrightarrow \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0.$$

2.3 L'equazione delle onde in senso debole

Vogliamo dimostrare che la formula di d'Alembert e di Kirchoff forniscono soluzione all'equazione delle onde anche quando i dati hanno regolaritá insufficiente a consentire derivazioni in senso classico. Le funzioni fornite da d'Alembert e da Kirchoff avranno comunque un significato corretto, ma verificheranno l'equazione delle onde in senso debole.

2.3.1 Caso unidimensionale

In questo caso la formula risolutiva del problema di Cauchy per la corda vibrante, dovuto a d'Alembert, come visto nel capitolo precedente, é costruita utilizzando funzioni del tipo seguente

$$(x,t) \longmapsto u(x-t)\,,\ (x,t) \longmapsto u(x+t)$$

Queste abbiamo visto essere soluzioni classiche di

$$\Box U = 0 \iff \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \tag{2.2}$$

se u ha derivata seconda in senso classico. Dimostriamo che (2.2) vale in senso debole qualunque sia $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.3.1. *Sia* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *e poniamo*

$$U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad U(x,t) = u(x+t)$$

allora

$$\Box U = 0$$

in senso debole in $\mathbb{R}^2$*.*
Analogamente

$$V : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad V(x,t) = u(x-t)$$

allora

$$\Box V = 0$$

in senso debole in $\mathbb{R}^2$

Dimostrazione. Sia u_ε la regolarizzata C^∞ di u.

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x-y)u(y)\ dy$$

allora

$$u_\varepsilon(x+t) = \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x+t-y)u(y)\ dy.$$

Poiché $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty$, la precedente formula si puó derivare sotto il segno di integrale. Si ottiene cosí

$$\begin{aligned} \Box u_\varepsilon(x+t) &= (\partial_t^2 - \partial_x^2)u_\varepsilon(x+t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\partial_t^2 - \partial_x^2)\psi_\varepsilon(x+t-y)\ u(y)\ dy = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

in questo, evidentemente

$$\partial_t^2 \psi_\varepsilon(x+t-y) = \partial_x^2 \psi_\varepsilon(x+t-y) \qquad \forall x,t,y \in \mathbb{R}.$$

Allora,per ogni funzione $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^2} (\Box u_\varepsilon(x+t))\varphi(x,t)\ dx\ dt \qquad \text{(poiché } \Box \text{ é autoaggiunto)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x+t)\Box\varphi(x,t)\, dx\ dt. \end{aligned}$$

D'altra parte, poiché $u_\varepsilon \longrightarrow u$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ per $\varepsilon \to 0$, risulta
$u_\varepsilon(x+t) \longrightarrow u(x+t) = U(x,t)$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ per $\varepsilon \to 0$.
Pertanto

$$0 = \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x+t)\Box\varphi(x,t)\,dx\,dt \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} U(x,t)\Box\varphi(x,t)\,dx\,dt \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0.$$

In definitiva

$$\int_{\mathbb{R}^2} U(x,t)\Box\varphi(x,t)\,dx\,dt = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Questo dimostra che $\Box U = 0$ in senso debole in $\mathbb{R}^2$ e analogamentesi dimostra che anche $\Box V = 0$ in senso debole in $\mathbb{R}^2$. $\Box$

2.3.2 Risultati

1. Sia $f \in L^1_{loc}$ e $F(x) := \int_{x_0}^x g(t)dt$ allora

$$DF(x) = f(x)$$

in senso debole. Infatti, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{x_0}^x f(t)\,dt\Big)\varphi'(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_t^{+\infty} \varphi'(x)\,dx\Big)f(t)dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)f(t)\,dt\end{aligned}$$

2. Siano $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tali che $Df = g$ in senso debole, allora, in senso debole si ha

   (a) $D_x f(x+t) = g(x+t)$

   (b) $D_t f(x+t) = g(x+t)$

   (c) $D_t f(x-t) = -g(x-t)$.

   Infatti, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x+t)D_x\varphi(x,t)\,dx\,dt &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x+t)D_x\varphi(x,t)\,dx\Big)\,dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} g(x+t)\varphi(x,t)\,dx\Big)dt.\end{aligned}$$

   Questo dimostra la (a) e in modo analogo si dimostrano la $(b), (c)$.

2.3.3 La formula di d'Alambert

Siano $g, h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, poniamo, seguendo la formula di d'Alembert (1.2)

$$u(x,t) = \frac{g(x+t)+g(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(s)\, ds \tag{2.3}$$

allora

1. $\Box u = 0$ in $\mathbb{R}^2$ in senso debole;

2. $u(x,t) \longrightarrow g(x)$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ per $t \to 0$.
   Infatti, per ogni intervallo compatto $I \subset \mathbb{R}$ si ha

   $$\int_I \left| \frac{g(x+t)+g(x-t)}{2} - g(x) \right| dx \leq \frac{1}{2}\int_I |g(x+t)-g(x)|\, dx + \frac{1}{2}\int_I |g(x-t)-g(x)|\, dx.$$

   Il secondo membro tende a zero per $t \to 0$ a causa della L^1-continuitá di g.
   Risulta poi che

   $$\int_I \left| \int_{x-t}^{x+t} h(s)\, ds \right| dx \leq \int_I \left(\int_{x-t}^{x+t} |h(s)|\, ds \right) dx \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad t \to 0 \tag{2.4}$$

   Infatti

   $$\int_{x-t}^{x+t} |h(s)|\, ds \leq \int_J |h(s)|\, ds = C$$

   poiché $h \in L^1_{loc}$, per ogni $t \in]-\delta, \delta[$ con $\delta \in \mathbb{R}$ e con J intervallo compatto il cui interno contiene I (precisamente $J \supseteq \{x - \delta \mid x \in I\} \cup \{x + \delta \mid x \in I\}$).
   Dunque, essendo

   $$\int_{x-t}^{x+t} |h(s)|\, ds \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad t \to 0$$

   per il teorema della convergenza dominata si puó passare il limite sotto il segno di integrale ottenendo la (2.4).

3. Dalla (2.3) si ha inoltre che nel senso delle distribuzioni

   $$\partial_t u(x,t) = \frac{g'(x+t)-g'(x-t)}{2} + \frac{h(x+t)+h(x-t)}{2}.$$

Ma
$$\frac{g\prime(x+t) - g\prime(x-t)}{2} \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad t \to 0$$
dunque
$$\partial_t u(x,t) \longrightarrow h(x) \quad \text{per} \quad t \to 0 \quad \text{in} \quad L^1_{loc}.$$

2.3.4 Conclusione

La funzione u risolve il problema

$$\begin{cases} \Box u = 0 & \text{per} \quad \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u(\cdot,t) \longrightarrow g & \text{per} \quad t \to 0 \quad \text{in} \quad L^1_{loc} \\ u_t(\cdot,t) \longrightarrow h & \text{per} \quad t \to 0 \quad \text{in} \quad L^1_{loc}. \end{cases}$$

Quindi qualunque siano g, h in L^1_{loc} la funzione u é soluzione debole, nel senso sopra specificato, del problema

$$\begin{cases} \Box u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ u(x,0) = g(x) & \text{in} \quad \mathbb{R} \times \{t=0\} \\ u_t(x,0) = h(x) & \text{in} \quad \mathbb{R} \times \{t=0\}. \end{cases}$$