ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Integrale e Primitiva

Tesi di Laurea in
Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Presentata da:
Noemi Sponticcia

Sessione seconda
Anno Accademico
2010/2011

Indice

Capitolo 1

Integrazione di funzioni Reali

Definizione 1.1. Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Chiamiamo *scomposizione* finita di $[a,b]$ un sottoinsieme finito $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ *di* $[a,b]$, *tale che*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

Se $\sigma = \{\ x_0, x_1, x_2, ...x_n\ \}$ é una scomposizione finita di $[a,b]$, allora l'intervallo $I_k = [x_k - x_{k-1}]$ si chiama k-esimo intervallo componente della scomposizione, mentre $x_0, ...x_n$ si chiamano punti della scomposizione.
Definiamo

$$misI_k = x_k - x_{k-1}$$

Risulta

$$\sum_{k=1}^{n} misI_k = b - a$$

Infatti $\sum_{k=1}^{n} misI_k = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0$

Definiamo il *parametro di finezza di* σ il numero reale

$$|\sigma| = max\{misI_k/k = 1, 2, ..., n\}$$

Indichiamo con $\Omega_{[a,b]}$ la totalitá delle scomposizioni di $[a,b]$.
Se σ_1 *e* $\sigma_2 \in \Omega_{[a,b]}$, si dice che σ_1 é *piú fine di* σ_2 se $\sigma_1 \supseteq \sigma_2$.

Definizione 1.2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Se $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\} \in \Omega_{[a,b]}$, chiamiamo *somma superiore di f relativa a σ* il numero reale

$$S(f, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k} f \cdot mis\ I_k$$

e *somma inferiore di f relativa a σ* il numero reale

$$s(f, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k} \cdot mis\ I_k\ .$$

Osservazione 1. Risulta $s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma)$. Inoltre

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b - a) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{[a,b]} f \cdot mis\ I_k \leq s(f, \sigma) \leq$$

$$\leq S(f, \sigma) \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{[a,b]} f \cdot mis\ I_k = \sup\,[a, b] f \cdot (b - a),$$

quindi

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b - a) \leq s(f, \sigma) \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b - a)\ \forall \sigma \in \Omega_{[a,b]},$$

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b - a) \leq S(f, \sigma) \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b - a)\ \forall \sigma \in \Omega_{[a,b]}.$$

Definizione 1.3 (Integrale inferiore e superiore). Nelle ipotesi precedenti, si definisce *integrale inferiore di f*, il numero reale

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{s(f, \sigma)/\sigma \in \Omega_{[a,b]}\}$$

e *integrale superiore di f*, il numero reale

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{S(f, \sigma)/\sigma \in \Omega_{[a,b]}\}.$$

Proposizione 1.0.1. *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata. Allora se* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_{[a,b]}$ *e* σ_2 *é piú fine di* σ_1*, ossia* $\sigma_2 \supseteq \sigma_1$*, si ha*

$$s(f,\sigma_2) \geq s(f,\sigma_1) \text{ e } S(f,\sigma_2) \leq S(f,\sigma_1).$$

Inoltre per ogni $\sigma, \tau \in \Omega_{[a,b]}$ *si ha* $s(f,\sigma) \leq S(f,\tau)$

Dimostrazione. Proviamo la proposizione nel caso $\sigma_1 = \sigma_2 \cup \{c\}$ con $c \notin \sigma_2$. Infatti il risultato generale segue applicando queste un numero finito di volte. Sia $\sigma_2 = \{x_0, x_1, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_n\}$ e sia $x_p < c < x_{p+1}$. Si ha:

$S(f,\sigma_1) - S(f,\sigma_2) =$
$= \sup_{[x_p,c]} f \cdot (c - x_p) + \sup_{[c,x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - c) - \sup_{[x_p,x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - x_p)$
$\leq \sup_{[xp,x_{p+1}]} f \cdot (c - x_p) + \sup_{[x_p,x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - c) - \sup_{[x_p,x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - x_p) =$
$= \sup_{[x_p,x_{p+1}]} f \cdot (c - x_p + x_{p+1} - c - x_{p+1} + x_p) = 0$

Allo stesso modo:

$s(f,\sigma_1) - s(f,\sigma_2) =$
$= \inf_{[x_p,c]} f \cdot (c - x_p) + \inf_{[c,x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - c) - \inf_{[x_p,x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - x_p)$
$\geq \inf_{[xp,x_{p+1}]} f \cdot (c - x_p) + \inf_{[x_p,x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - c) - \inf_{[x_p,x_{p+1}]} f \cdot (x_{p+1} - x_p) =$
$= \inf_{[x_p,x_{p+1}]} f \cdot (c - x_p + x_{p+1} - c - x_{p+1} + x_p) = 0$

Ció posto se $\sigma, \tau \in \Omega_{[a,b]}$, poniamo $\omega = \sigma \cup \tau$, pertanto ω risulta piú fine sia di σ che di τ. Allora

$$s(f,\sigma) \leq s(f,\omega) \leq S(f,\omega) \leq S(f,\tau).$$

□

Osservazione 2. Osserviamo che con la precedente Proposizione segue immediatamente che per ogni funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ risulta

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Definizione 1.4 (Integrale secondo Riemann). Si dice che $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ é *integrabile secondo Riemann* se f é limitata e

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

In questo caso il valore reale comune degli integrali inferiore e superiore si chiama *integrale* di f e si indica

$$\int_a^b f(x)dx$$

Indichiamo con $\mathscr{R}_{[a,b]}$ l'insieme delle funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili su $[a, b]$.

Il Teorema seguente illustra una prima condizione necessaria e sufficiente di integrabitá.

Teorema 1.0.2 (*di Riemann*). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Condizione necessaria e sufficiente affinché $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ é*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \sigma \in \Omega_{[a,b]} \text{ tale che } S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon.$$

Dimostrazione. Sia $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$, si ha $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

$\forall \epsilon > 0$ *esitono* $\sigma,\ \tau \in \Omega_{[a,b]}$ tali che

$$S(f, \sigma) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}$$

$$s(f, \tau) > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} = \int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2}$$

Sia ora $\omega = \sigma \cup \tau$; poiché ω é piú fine sia di σ che di τ, risulta

$$S(f, \omega) - s(f, \omega) \le S(f, \sigma) - s(f, \tau) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} - \int_a^b f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

e quindi

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon.$$

Viceversa, supponiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esista $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$ tale che risulti $S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \epsilon$. Poiché $\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,\sigma)$ e $\underline{\int_a^b} f(x)dx \geq s(f,\sigma)$ si ha

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \epsilon$$

e quindi per l'arbitrarietá di ϵ

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Valendo anche $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$ si ha

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

ossia $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$. □

Definizione 1.5 (**Integrale secondo Cauchy**)**.** Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \Omega_{[a,b]}$. Scegliamo ad arbitrio n punti $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ tali che $\xi_k \in I_k$, $1 \leq k \leq n$ e consideriamo $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot misI_k$.

Si dice che f é *integrabile* su $[a,b]$ se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta(\epsilon) > \; tale\ che \; |\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot misI_k - l| < \epsilon$$

per ogni $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$ con $|\sigma| < \delta(\epsilon)$ per ogni k e qualunque sia la scelta dei punti $\xi_1, ..., \xi_n$.
Il numero reale l si dirá *integrale* di f secondo l'attuale definizione.

Vediamo ora che le due definizioni di integrale, secondo Riemann e secondo Cauchy coincidono. Premettiamo il seguente lemma.

Lemma 1.0.3. *Sia $f : [a,b] \to \mathscr{R}$, limitata, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - s(f,\sigma) < \epsilon, \qquad S(f,\sigma) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$$

per ogni $\sigma in \Omega[a,b]$ tale che $|\sigma| < \delta(\epsilon)$.

Teorema 1.0.4. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrabile secondo la definizione di Cauchy, se e solo se, lo é secondo la definizione di Riemann. In tal caso i due integrali coincidono.*

Dimostrazione. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo la definizione di Cauchy. Anzitutto osserviamo che f é limitata. Infatti, per assurdo, se fosse $\sup_{[a,b]} f = +\infty$ allora esisterebbe $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; dalla successione $\big(x_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ possiamo estrarre una sottosuccessione convergente

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{x}, \qquad \overline{x} \in [a, b]$$

Si avrebbe

$$\sup_{[\overline{x}-\epsilon,\overline{x}+\epsilon]\cap[a,b]} f = +\infty \ \ \forall\epsilon > 0.$$

Ció posto, sia $\sigma = \big\{x_0, x_1, ..., x_n\big\}$ un' arbitraria scomposizione di $[a, b]$; sia $\overline{x} \in I_m$; fissati i punti $\xi_1, ...\xi_{m-1}, \xi_{m+1}, ...\xi_n$, per ogni $M > 0$ esiste $\xi_m \in I_m$ tale che $f(\xi_m) > M$. Ne segue che non esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che $|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)misI_k - l| < \epsilon$ qualunque sia la scelta dei punti ξ_k, da cui l'assurdo.

Fissiamo ora $\epsilon > 0$. Sia $\sigma = \big\{x_0, x_1, ..., x_n\big\} \in \Omega_{[a,b]}$ tale che

$|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)misI_k - l| < \frac{\epsilon}{4}$ per ogni $\xi_k \in I_k,\ 1 \le k \le n.$

Sia $\xi'_k \in I_k$ tale che

$$f(\xi'_k) < \inf_{I_k} f + \frac{\epsilon}{4}(b-a), \ \ 1 \le k \le n$$

e sia $\xi''_k \in I_k$ tale che

$$f(\xi''_k) > \sup_{I_k} f - \frac{\epsilon}{4}(b-a), \ \ 1 \le k \le n.$$

Allora

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)misI_k < s(f,\sigma) + \frac{\epsilon}{4} < \underline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi''_k)misI_k > S(f,\sigma) - \frac{\epsilon}{4} > \overline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\epsilon}{4}$$

dove

$$l - \frac{\epsilon}{4} < \underline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{4}\ , \quad l + \frac{\epsilon}{4} > \overline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\epsilon}{4}$$

e quindi

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon$$

e quindi, per l'arbitrarietá di ϵ,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Dunque $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$.
Osserviamo inoltre che

$$l - \int_a^b f(x)dx < \frac{\epsilon}{2}, \quad \int_a^b f(x)dx - l < \frac{\epsilon}{2}$$

e quindi

$$l = \int_a^b f(x)dx.$$

Viceversa, sia $f \in \mathscr{R}$, si ha

$$s(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} (\inf_{I_k} f) mis I_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) mis I_k \leq S(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} (\sup_{I_k} f) mis I_K$$

per ogni $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \Omega_{[a,b]}$ e qualunque sia la scelta dei punti $\xi_k \in I_k$.
Per il lemma precedente, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx - \epsilon < s(f,\sigma), \quad S(f,\sigma) < \int_a^b f(x)dx + \epsilon$$

per ogni $\sigma \in \Omega_{[a,b]}, |\sigma| < \delta(\epsilon)$. Perció

$$|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) mis I_k - \int_a^b f(x)dx| < \epsilon$$

per ogni $\sigma \in \omega_{[a,b]}, |\sigma| < \delta(\epsilon)$ e qualunque sia la scelta dei punti $\xi_k \in I_k$. $\square$

Mostriamo ora alcune condizioni sufficienti di integrabilitá.

Teorema 1.0.5. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é continua su $[a,b]$ allora $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$.*

Dimostrazione. Osserviamo subito che per il Teorema di Weierstrass f é limitata e che per il Teorema di Heine-Cantor, f é uniformemente continua su $[a, b]$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\rho > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \rho.$$

Sia ora $\sigma = \{x_o, x_1, ...x_n\} \in \Omega_{[a,b]}$ con parametro di finezza $|\sigma| < \rho$, si ha

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} (\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f) misI_k.$$

Sfruttando ancora il Teorema di Weiestrass, per ogni $k \in \{1, 2, ...n\}$, esistono $x'_k, x''_k \in I_k$ tali che

$$f(x'_k) = \sup_{I_k} f, \qquad f(x''_k) = \inf_{I_k} f.$$

D'altra parte, $|x'_K - x''_k| \leq misI_k \leq |\sigma| < \rho \quad \forall k = 1, 2, ...n$. risulta allora $f(x'_k) - f(x''_k) < \epsilon$ e quindi, per quanto ricavato sopra

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \sum_{k=1}^{n} \epsilon \; misI_k = \epsilon(b - a).$$

Per il Teorema di Riemann, $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$. □

Teorema 1.0.6. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é una funzione monotona allora $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$*

Dimostrazione. Supponiamo f monotona crescente, $f \uparrow$. Allora $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ per ogni $x \in [a, b]$, quindi f é limitata. Sia $\epsilon > 0$ e sia $\sigma = \{x_0, x_1, ...x_n\} \in \Omega_{[a,b]}$ tale che $|\sigma| < \epsilon$. Si ha

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) misI_k$$

$$\leq |\epsilon| \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) < \epsilon(f(b) - f(a)).$$

Per il Teorema di Riemann $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$. □

Proposizione 1.0.7. *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata e sia* $c\, in(a,b)$. *Allora* $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ *se e solo se* $f \in \mathscr{R}_{[a,c]}$ *e* $f \in \mathscr{R}_{[c,b]}$. *In questo caso si ha*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx.$$

Lemma 1.0.8. *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata continua su* (a,b). *Allora* $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$

Teorema 1.0.9. *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata e tale che l'insieme*

$$F = \big\{x \in [a,b]/ \; f \; non \; e' \; continua \; in \; x\big\}$$

sia finito.
Allora $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$.

Dimostrazione. Escludiamo a priori il caso in cui $F = 0$ in quanto l'affermazione coinciderebbe con il caso di f funzione continua su tutto $[a,b]$.
Supponiamo allora $F \neq 0$. Possiamo affermare che esiste un numero finito di punti $a = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j = b, \quad j \geq 2$ tali che f é continua su (α_k, α_{k+1}), per $k = 1, ..., j-1$. Allora per il lemma precedente $f \in \mathscr{R}_{[\alpha_k, \alpha_{k+1}]}$ per $k = 1, ...j-1$ e quindi per la Proposizione precedente, $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$. □

Alcune proprietá dell'integrale

Teorema 1.0.10. *Siano* f *e* $g \in \mathscr{R}_{[a,b]}$. *Allora:*

- $f + g \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ *e*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

- $\lambda f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e*

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;$$

- *se* $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in \mathscr{R}_{[a,b]}$,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

- $|f| \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ *e*

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Teorema 1.0.11 (*Teorema della media integrale*)**.** *Sia* $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$. *Posto*

$$\mu := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

risulta

$$\inf_{[a,b]} f \leq \mu \leq \sup_{[a,b]} f.$$

Dimostrazione. Per ogni $\sigma \in \Omega_{[a,b]}$, si ha

$$inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq S(f,\sigma) \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

e quindi, poiché $\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$,

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a).$$

Dunque, poiché

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

si ha

$$\inf_{[a,b]} f \leq \mu \leq \sup_{[a,b]} f.$$

□

Definizione 1.6. Sia $f : [a,b] \to \mathscr{R}$. Si chiama *primitiva* di f una funzione $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto di $[a,b]$ e tale che $\phi'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Diamo ora due versione del teorema del calcolo fondamentale dell'integrale.

Teorema 1.0.12 (I Teorema fondamentale del calcolo integrale). *Sia $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$ e sia ϕ una primitiva di f. Allora*

$$\int_a^b f(x)dx = \big[\phi(x)\big]_{x=a}^{x=b} := \phi(b) - \phi(a).$$

Dimostrazione. Poiché $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$, fissato $\epsilon > 0$, per il Teorema di Riemann esiste una scomposizione $\sigma = \big\{x_0, x_1, ..., x_n\big\} \in \Omega_{[a,b]}$ tale che

$$S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon.$$

Possiamo scrivere

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi(x_n) - \phi(x_0) = \sum_{k=1}^{n}(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})).$$

Per il teorema del valor medio, esiste $y_k \in (x_{k-1} - x_k)$ tale che

$$\phi(x_k) - \phi(k_{k-1}) = \phi'(y_k)(x_k - x_{k-1}) = f(y_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Sostituendo sopra

$$\phi(b) - \phi(a) = \sum_{k=1}^{n} f(y_k)(x_k - x_{k=1}) \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x_k - x_{k-1})$$

$$= S(f, \sigma) < s(f, \sigma) + \epsilon \leq \int_a^b f(x)dx + \epsilon.$$

In modo analogo dimostriamo la disuguaglianza

$$\phi(b) - \phi(a) \geq \int_a^b f(x)dx - \epsilon.$$

Utilizzando questa e la precedente e per l'arbitrarietá di ϵ otteniamo

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a).$$

□

Teorema 1.0.13 (II Teorema fondamentale del calcolo integrale). *Sia $f \in \mathscr{R}_{[a,b]}$. Poniamo*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Allora:
(i) F é continua in ogni punto di $[a,b]$;
(ii) se f é continua in x_0, allora F é derivabile in x_0 e si ha

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Dimostrazione. Proviamo la continuitá di F.
Sia $x_0 \in [a,b]$ e sia $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $x_0 + h \in [a,b]$. Si ha

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = \mu(h)h$$

dove

$$\mu(h) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt,$$

Per il Teorema della media integrale

$$\inf_{(x_0,x_0+h)} f \le \mu(h) \le \sup_{(x_0,x_0+h)} f.$$

In particolare $|\mu(h)| \le \sup_{[a,b]} |f|$. Pertanto

$$\lim_{h\to 0}(F(x_0+h) - F(x_0)) = 0.$$

Proviamo ora la (ii). Sia x_0 un punto di continuitá di f. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\rho > 0$ tale che, per ogni $t \in [a,b]$ con $|t - x_0| < \rho$, si ha

$$f(x_0) - \epsilon < f(t) < f(x_0) + \epsilon,$$

e quindi

$$f(x_0) - \epsilon < f(t) < f(x_0) + \epsilon, \quad \forall t \in (x_0, x_0+h)$$

se $|h| < \rho$. Integrando su $(x_0, x_0 + h)$ e dividendo per h si ottiene

$$f(x_0) - \epsilon \leq \mu(h) \leq f(x_0) + \epsilon \quad se|h| < \rho.$$

Allora

$$\lim_{h \to 0} \mu(h) = f(x_0)$$

quindi

$$\mu(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

□

E' il momento ora di soffermarci sul concetto di Primitiva di una funzione. La prima formulazione del teorema fondamentale del calcolo integrale ci dice che una funzione integrabile e dotata di primitiva ha l'integrale uguale alla differenza dei valori della primitiva stessa calcolata algi estremi dell'intervallo di integrazione.
E' bene ricordare peró che l' *esistenza di una primitiva non é condizione necessaria e sufficiente di integrabilitá.* Vediamo infatti due esempi che dimostrano quanto appena detto.

L' *esistenza di una primitiva non é condizione necessaria di integrabilitá*: esempio di una funzione che non ha primitive ma é integrabile secondo Riemman. Premettiamo il seguente teorema.

Teorema 1.0.14 (*di Darboux*)**.** *Sia I un intervallo non banale di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ funzione derivabile in ogni punto di I. Allora l'insieme*

$$\left\{ f'(x)/x \in I \right\} = f'(I)$$

é un intervallo di $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in I$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_1) < \alpha < f'(x_2)$. Dobbiamo provare che esiste $x \in I$ tale che $f'(x) = \alpha$.
Per fissare le idee supponiamo $x_1 < x_2$ e poniamo

$$g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x) - \alpha x.$$

La funzione g é continua e derivabile in ogni punto di $[x_1, x_2]$ con

$$g'(x) = f'(x) - \alpha$$

per ogni $x \in [x_1, x_2]$. Poiché $g'(x_1) = f'(x) - \alpha < 0$ e $g'(x_2) = f'(x_2) - \alpha > 0$, g non puó essere iniettiva. Infatti, se fosse iniettiva , sarebbe $g \uparrow$ e quindi $g' \geq 0$ su $[x_1, x_2]$, oppure $g \downarrow$ e quindi $g' \leq 0$ su $[x_1, x_2]$. Esistono allora $y_1, y_2 \in [x_1, x_2]$, con $y_1 < y_2$, tali che $g(y_1) = g(y_2)$. Per il teorema di Rolle eisiste un punto $x \in (y_1, y_2)$ tale che $g'(x) = 0$. Allora $f'(x) = \alpha$ e l'affermazione é provata. □

Osservazione 3. Dal teorema di Darboux segue che condizione necessaria affinché $f : I \to \mathbb{R}$ sia dotata di primitiva é che$f(I)$ sia un intervallo.

Esempio
Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ 0 < x \leq 1 \\ 0, & se\ x = 0 \\ -1, & se\ -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Questa funzione non ha primitive, in quanto $f([-1, 1]) = \{1, 0, -1\}$ non é un intervallo ma é integrabile perché limitata e con un solo punto di discontinuitá.

L'*esistenza di una primitiva non é condizione sufficiente di integrabilitá*: esempio di una funzione integrabile non secondo Riemann ma dotata di primitive.

Esempio