ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Compattezza negli spazi topologici

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Rita Fioresi

Presentata da:
Laura Zanoni

Sessione seconda
Anno Accademico
2010/2011

Alla mia famiglia,
a Gio, Sapo, Pol, Noe e Luci,
e alla Bea.

Introduzione

Lo scopo di questa tesi é arrivare a enunciare e dimostrare il Teorema di Tychonoff:

Il prodotto topologico di spazi compatti é compatto.

Nel primo capitolo della tesi ho presentato le nozioni fondamentali della topologia: definisco cos'é uno spazio topologico ed una base per lo spazio topologico e vedo come definire una topologia data una base. Introduco poi le applicazioni continue per arrivare alle funzioni omeomorfe; queste applicazioni permettono di definire una relazione d'equivalenza tra spazi topologici, quindi sono importanti perché in topologia lo studio di uno spazio é equivalente allo studio di uno spazio omeomorfo ad esso.
Mi soffermo poi sullo studio della topologia prodotto tra due spazi topologici e vedo che una sua base é formata dagli insiemi che sono il prodotto degli elementi delle basi dei due rispettivi spazi. Utilizzando le proiezioni canoniche vedo che la famiglia data dall'unione delle preimmagini rispetto alle proiezioni canoniche degli aperti di due spazi X e Y é una sottobase per lo spazio topologico $X \times Y$.
Nell'elaborato accenno brevemente a cosa sono gli spazi di Hausdorff, mentre mi soffermo ad approfondire gli spazi compatti, analizzando le varie proprietá che aiutano a riconoscere quando uno spazio é compatto. In particolare vedo che l'immagine di un compatto tramite un'applicazione continua é compatto e che il prodotto topologico di un numero finito di compatti é sempre un compatto.

Il secondo capitolo é interamente dedicato al teorema di Tychonoff. Comincio con il definire la proprietá dell'intresezione finita e la caratterizzazione degli spazi compatti tramite essa. Per dimostrare il teorema di Tychonoff utilizzo due risultati. Il primo afferma che dato uno spazio con una famiglia avente la proprietá dell'intersezione finita, esiste sempre una famiglia che é massimale rispetto a questa proprietá; il secondo afferma che data una famiglia $\mathscr{D}$ massimale rispetto alla proprietá dell'intersezione finita, ogni intersezione finita di suoi elementi e ogni sottospazio che interseca ogni suo elemento é ancora un elemento di $\mathscr{D}$. Come mostreró, dati questi risultati preliminari, la dimostrazione del teorema di Tychonoff si rivelerá abbastanza semplice.

Indice

1 Nozioni topologiche di base **5**
1.1 Spazi Topologici 5
1.2 Omeomorfismo 8
1.3 La Topologia Prodotto 10
1.4 Spazi di Hausdorff 13
1.5 Spazi compatti 13

2 Teorema di Tychonoff **17**
2.1 Proprietá dell'intersezione finita 17
2.2 Premesse al teorema di Tychonoff 19
2.3 Teorema di Tychonoff 21

A Lemma di Zorn **23**

Bibliografia **25**

Capitolo 1

Nozioni topologiche di base

In questo capitolo vogliamo brevemente enunciare e dimostrare le nozioni di base della topologia, soprattutto quelle che ci serviranno per il Teorema di Tychonoff, argomento principale dell'elaborato. In particolare ci interesseranno le nozioni di spazio topologico, base per una topologia e la topologia prodotto. Introdurremo inoltre le applicazioni continue ed il concetto di omeomorfismo. Infine ci soffermeremo su due tipi di spazi topologici particolari e loro proprietá: gli spazi di Hausdorff e gli spazi compatti.

1.1 Spazi Topologici

In questa sezione vogliamo definire il concetto di spazio topologico e base.

Definizione 1.1. Sia X un insieme non vuoto. Una *struttura topologica*, o *topologia*, su X é una famiglia non vuota τ di sottoinsiemi di X, che si chiamano *insiemi aperti* della topologia, con le seguenti proprietá:

1. $\emptyset$ e X sono insiemi aperti;
2. l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi aperti é un insieme aperto;
3. l'intersezione di due insiemi aperti qualsiasi é un insieme aperto.

Uno *spazio topologico* é un insieme X su cui sia assegnata una topologia τ, e si denota con $\big(X,\tau\big)$. Gli elementi di X si dicono *punti*. L'insieme X si dice *supporto* dello spazio topologico $\big(X,\tau\big)$.

Spesso é peró difficile descrivere l'intera famiglia τ di spazi aperti, quindi nella maggior parte dei casi é piú conveniente specificare una piú piccola famiglia di sottospazi di X e definire la topologia in base ad essa.

Definizione 1.2. Sia X uno spazio. Una *base* per una topologia su X é una famiglia $\mathscr{B}$ di sottospazi di X, detti *elementi della base*, tali che:

1. per ogni $x \in X$, esiste almeno un elemento B della base contenente x;
2. se x appartiene all'intersezione di due elementi B_1 e B_2 della base, allora esiste un elemento B_3 contenente x tale che $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Se $\mathscr{B}$ soddisfa queste due condizioni, allora definiamo la *topologia* τ *generata da* $\mathscr{B}$: un sottospazio U di X é *aperto* in X (cioé é un elemento di τ) se é unione di elementi della base $\mathscr{B}$. Notiamo che ogni elemento della base é a sua volta un elemento di τ.

Vediamo ora quali sono le proprietá che caratterizzano le basi e come possiamo costruire una topologia a partire da una base $\mathscr{B}$.

Teorema 1.1.1. *Sia* (X, τ) *uno spazio topologico.* $\tau \supset \mathscr{B}$ *é una base per la topologia* τ *se e solo se per ogni aperto* U *di* τ *e per ogni elemento* $x \in U$*, esiste* $B \in \mathscr{B}$ *tale che* $x \in B \subset U$*.*

Dimostrazione. Innanzitutto se $\mathscr{B}$ é una base di aperti, per definizione di base per ogni $U \in \tau$ si ha che $U = \bigcup_{\substack{B_j \in \mathscr{B} \\ j \in J}} B_j$. Ma allora per ogni $x \in U$ esiste un $B_j \in \mathscr{B}$ tale che $x \in B_j \subset U$. Vediamo il viceversa. Per dimostrare che $\mathscr{B}$ é una base dobbiamo verificare le proprietá (1) e (2) della definizione 1.2. Se $x \in X$, poiché X é un aperto, esiste per ipotesi un elemento B di $\mathscr{B}$ tale che $x \in B \subset X$. Per dimostrare (2), sia x appartenente a $B_1 \cap B_2$, con B_1 e B_2 elementi di $\mathscr{B}$. Dato che B_1, B_2 sono aperti, anche la loro intersezione lo é. Allora esiste per ipotesi un elemento B_3 in $\mathscr{B}$ tale che $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Sia τ una famiglia di aperti di X, dobbiamo mostrare che la topologia τ' generata da $\mathscr{B}$ é uguale alla topologia τ. Prima di tutto, notiamo che se U appartiene a τ e se $x \in U$, esiste per ipotesi un elemento B di $\mathscr{B}$ tale che $x \in B \subset U$. Segue che U appartiene a τ' per definizione. Invece se W

appartiene a τ', allora W é unione di elementi di $\mathscr{B}$. Poiché ogni elemento di $\mathscr{B}$ appartiene a τ ed essa é una topologia, anche W appartiene a τ.

$\square$

Teorema 1.1.2. *Sia X un insieme e $\mathscr{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X.*

$$\tau = \Big\{ \bigcup_{\substack{B_j \in \mathscr{B} \\ j \in J}} B_j \Big\}$$

é una topologia su X con base $\mathscr{B}$ se e solo se:

1. *X é unione di elementi di $\mathscr{B}$;*

2. *dati B_1, $B_2 \in \mathscr{B}$, allora*

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{\substack{B_i \in \mathscr{B} \\ i \in I}} B_i.$$

Dimostrazione. Vediamo che se τ é una topologia su X allora valgono le proprietá (1) e (2) del teorema.

(1) Per definizione di topologia, $X \in \tau$, allora poiché ogni aperto della topologia é unione di elementi della base $\mathscr{B}$, X é unione di elementi di $\mathscr{B}$

(2) Dati due elementi B_1, B_2 di $\mathscr{B}$, la loro intersezione appartiene a τ, ma per come é definita τ nell'ipotesi, tale intersezione é unione di elementi di $\mathscr{B}$.

Viceversa, a partire da queste due condizioni vogliamo dimostrare le tre proprietá che definiscono τ una topologia.

(1) Segue dal teorema precedente;

(2) Siano U e V aperti, cioé: $U = \bigcup_{j \in J} B_j$, $V = \bigcup_{i \in I} B_i$. Allora

$$U \cap V = (\bigcup_{j \in J} B_j) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{\substack{j \in J \\ i \in I}} (B_j \cap B_i) = \bigcup_{\substack{j \in J \\ i \in I}} [\bigcup_{k \in K} B_k] \in \tau;$$

(3) Immediato dal punto due dell'ipotesi, dato che gli aperti sono unione di elementi di $\mathscr{B}$.

□

Dalla definizione segue immediatamente che se $\mathscr{B}$ é una base di τ e $\mathscr{B} \subset C \subset \tau$, allora anche C é una base di τ.

Definizione 1.3. Una *sottobase* $\mathcal{S}$ per una topologia su X é una famiglia di sottospazi di X la cui unione é uguale a X. La *topologia generata dalla sottobase* $\mathcal{S}$ é definita dalla famiglia τ di tutte le unioni delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$.

Definizione 1.4. Un *ricoprimento* di un insieme non vuoto X é una famiglia $\mathscr{F}$ di sottoinsiemi di X tale che

$$X = \bigcup_{F \in \mathscr{F}} F.$$

Piú in generale, se A é un sottoinsieme non vuoto di un insieme X, una famiglia $\mathscr{F}$ di sottoinsiemi di X tale che

$$A \subset \bigcup_{F \in \mathscr{F}} F$$

si dice *ricoprimento* di A.

1.2 Omeomorfismo

Cominciamo con il definire il concetto di funzione continua.

Definizione 1.5. Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione. f si dice *continua nel punto* $x \in X$ se per ogni intorno N di $f(x) \in Y$ esiste un intorno M di x tale che $f(M) \subset N$. Equivalentemente $f : X \longrightarrow Y$ é continua se per ogni sottospazio aperto V di Y, $f^{-1}(V)$ é un sottospazio aperto di X. f si dice *continua* se é continua in ogni punto di X.

Vediamo ora come sapere se una funzione $f : X \longrightarrow Y$ é continua conoscendo prima la base $\mathscr{B}$ che genera la topologia di Y, poi conoscendo la sottobase $\mathcal{S}$.

Osservazione 1.2.1. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un' applicazione e sia τ la topologia di Y generata dalla base $\mathscr{B}$. Allora f é continua se per ogni $B \in \mathscr{B}$, $f^{-1}(B)$ é aperto.*

Infatti un aperto arbitrario V di Y puó essere scritto come unione di elementi della base

$$V = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha \ ;$$

allora

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha) \ ,$$

cosí che $f^{-1}(V)$ é aperto se ogni spazio $f^{-1}(B_\alpha)$ é aperto.

Osservazione 1.2.2. *Se la topologia sullo spazio Y é data da una sottobase $\mathcal{S}$, $f : X \longrightarrow Y$ é continua se la preimmagine di ogni elemento della sottobase é aperto.*

Vediamo ora cos'é un omeomorfismo.

Definizione 1.6. Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \longrightarrow Y$ una funzione biettiva. Se f e la sua inversa $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ sono continue, allora f é detta *omeomorfismo*. Equivalentemente, f é omeomorfismo se e solo se f é un'applicazione continua, biettiva e aperta, cioé $f(U)$ é aperto per ogni aperto U della topologia τ di X.

Un omeomorfismo realizza dunque una corrispondenza biunivoca tra X e Y e le famiglie di aperti di X e di Y.

Definizione 1.7. Due spazi topologici X e Y si dicono *omeomorfi*, oppure *topologicamente equivalenti*, se esiste un omeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$.

Vediamo ora tre proprietá ovvie dell'omeomorfismo, da cui segue immediatamente che é una relazione d'equivalenza:

- l'identitá $id : X \longrightarrow X$ é un omeomorfismo (*riflessivitá*);

- se $f : X \longrightarrow Y$ é un omeomorfismo, anche $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ é un omeomorfismo (*simmetricitá*);
- se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ sono due omeomorfismi, allora anche la composizione $g \circ f : X \longrightarrow Z$ lo é (*transitivitá*).

La topologia é infatti lo studio delle classi di equivalenza della relazione di omeomorfismo.

Questo significa che due spazi topologici omeomorfi, anche se definiti in maniera totalmente differente, sono indistinguibili da un punto di vista topologico. Cioé l'omeomorfismo é una corrispondenza biunivoca che mantiene la struttura topologica coinvolta. A questo punto studiare uno spazio topologico o studiarne un altro a lui omeomorfo é equivalente.

1.3 La Topologia Prodotto

Vogliamo ora studiare un procedimento per costruire nuovi spazi topologici a partire da spazi topologici assegnati, che consiste nel considerare il loro prodotto cartesiano e su di esso definire una nuova topologia.
Siano $\big(X_1, \tau_1\big)$ e $\big(X_2, \tau_2\big)$, spazi topologici.

Definizione 1.8. Il *prodotto topologico* su $X_1 \times X_2$ é una topologia avente come base la famiglia $\mathscr{B}$ di tutti gli spazi della forma $U \times V$, dove U é un sottospazio aperto di X_1 mentre V un sottospazio aperto di X_2.

Vediamo che $\mathscr{B}$ é una base. La prima condizione é banale, dato che $X_1 \times X_2$ é proprio un elemento della base. La seconda condizione é comunque molto semplice: si ha che

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2),$$

e il secondo termine dell'uguaglianza é un elemento della base, dato che $U_1 \cap U_2$ e $V_1 \cap V_2$ sono aperti in X_1 e X_2 rispettivamente, allora anche l'intersezione di due elementi della base $U_1 \times V_1$ e $U_2 \times V_2$ é ancora un elemento della base.

Teorema 1.3.1. *Se $\mathscr{B}$ é una base per la topologia di X_1 e $\mathscr{C}$ é base per la topologia di X_2, allora la famiglia*

$$\mathscr{D} = \{B \times C : B \in \mathscr{B} \quad e \quad C \in \mathscr{C}\}$$

é base per la topologia di $X_1 \times X_2$.

Dimostrazione. Dato uno spazio aperto W di $X_1 \times X_2$ ed un punto $x \times y$ di W, dalla definizione di prodotto topologico esiste un elemento della base $U \times V$ tale che $x \times y \in U \times V \subset W$. Dato che $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ sono basi per X e Y rispettivamente, possiamo scegliere un elemento B di $\mathscr{B}$ tale che $x \in B \subset U$, e un elemento $C \in \mathscr{C}$ tale che $y \in \mathscr{C} \subset W$. Cosí $\mathscr{D}$ rispecchia le condizioni richieste nel Teorema 1.1.1, e allora $\mathscr{D}$ é una base per $X \times Y$.

□

A volte é utile esprimere il prodotto topologico in termini di sottobasi.

Consideriamo le proiezioni $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ e $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$. Se U é un sottospazio aperto di X, allora precisamente $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$, che é aperto in $X \times Y$; analogamente, se V é un aperto di Y, $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, che é ancora un aperto di $X \times Y$. L'intersezione di questi due spazi é $U \times V$, che quindi é un aperto in $X \times Y$. Questo fatto porta al seguente teorema.

Teorema 1.3.2. *La famiglia*

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U \text{ aperto in } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) : V \text{ aperto in } Y\}$$

é una sottobase per il prodotto topologico su $X \times Y$.

Dimostrazione. Sia τ la topologia prodotto su $X \times Y$; sia τ' la topologia generata da $\mathcal{S}$. Vogliamo dimostrare che le due topologie sono uguali per cui dimostriamo prima che una é inclusa nell'altra e viceversa. Dato che ogni elemento di $\mathcal{S}$ appartiene a τ, cosí lo sono le unioni arbitrarie o le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$. Allora $\tau' \subset \tau$. D'altra parte, dato che $U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$, cosí ogni elemento $U \times V$ della base della topologia τ é intersezione finita di elementi di $\mathcal{S}$. Allora, $U \times V$ appartiene a τ', cosí $\tau \subset \tau'$ come richiesto.
In questo modo la doppia inclusione é provata e $\tau = \tau'$.

□

In generale:

Definizione 1.9. Consideriamo una famiglia qualsiasi $\{X_s\}_{s\in S}$ di spazi topologici con topologie τ_s, $s \in S$, e il prodotto cartesiano

$$X = \prod_{s\in S} X_s = \Big\{ f : S \longrightarrow \bigcup_{s\in S} X_s : f(s) \in X_s, s \in S \Big\}.$$

Se $t \in S$ e $f \in X$, $f(t) \in X_t$ si chiama *t-esima coordinata di f*. L'applicazione

$$\pi_t : X \longrightarrow X_t$$

definita da $\pi_t(f) = f(t)$ si chiama *t-esima proiezione.*
Definiamo su X una topologia nel modo seguente. Consideriamo la famiglia $\mathscr{B}$ di tutte le intersezioni finite di insiemi $\pi_s^{-1}(U_s)$, al variare di $s \in S$ e di $U_s \in \tau_s$. La famiglia $\mathscr{B}$ é ovviamente un ricoprimento di X $(= \pi_s^{-1}(X_s)$ per un qualsiasi $s \in S)$, e l'intersezione di due qualsiasi elemento di $\mathscr{B}$ é ancora un elemento della famiglia $\mathscr{B}$. Dunque $\mathscr{B}$ é base di una topologia τ su X che si chiama *topologia prodotto* delle topologie τ_s, $s \in S$. Con la topologia τ, X si chiama *spazio topologico prodotto* della famiglia $\{X_s\}_{s\in S}$.

Vediamo un'importante proprietá degli spazi prodotto.

Teorema 1.3.3. *Nel prodotto topologico $X \times Y$, per ogni $x \in X$ e ogni $y \in Y$ i sottospazi $\{x\} \times Y$ e $X \times \{y\}$ sono omeomorfi rispettivamente a Y e a X.*

Dimostrazione. La funzione $f : X \times \{y\} \longrightarrow X$ definita da $f(x, y) = x$ é biettiva. Inoltre possiamo scrivere f come composizione dell'inclusione $i : X \times \{y\} \longrightarrow X \times Y$ e della proiezione $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$; poiché entrambe queste funzioni sono continue e la composizione mantiene la continuitá, anche f é continua. Infine vediamo che f é un'applicazione aperta: se W é un sottoinsieme aperto di $X \times \{y\}$, $W = (\bigcup_{j\in J}(U_j \times V_j)) \cap (X \times \{y\})$, dove U_j, V_j sono aperti di X e Y rispettivamente; possiamo quindi rappresentare W come $\bigcup_{j\in J'} U_j \times \{y\}$, dove $J' = \{j \in J : y \in V_j\}$, e quindi $f(W) = \bigcup_{j\in J'} U_j$, che é un aperto di X. Ció dimostra che f é aperta, e quindi é un omeomorfismo.

Analogamente si dimostra che $g : \{x\} \times Y \longrightarrow Y$ é un omeomorfismo, utilizzando $i_1 : \{x\} \times Y \longrightarrow X \times Y$ e $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$.

$\square$

1.4 Spazi di Hausdorff

Per arrivare a trattare gli spazi compatti dobbiamo prima introdurre gli spazi di Hausdorff ed alcune loro proprietá.

Definizione 1.10. Uno spazio topologico X é detto di *Hausdorff* (o T_2) se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esistono due aperti U_x e U_y contenenti rispettivamente x e y tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$.

In uno spazio di Hausdorff X ogni sottospazio Y é di Hausdorff, inoltre ogni punto é un sottoinsieme chiuso.

Uno spazio topologico i cui punti sono sottoinsiemi chiusi si dice *spazio* T_1, quindi uno spazio T_2 é sempre T_1, ma il viceversa non é vero.
In generale:

Definizione 1.11. Se per ogni coppia x, y di punti distinti di uno spazio topologico X, esistono due aperti U_x e U_y, l'uno contenente x ma non y e l'altro contenente y ma non x, allora X é uno spazio T_1.

1.5 Spazi compatti

Definizione 1.12. Uno spazio topologico X si dice *compatto* se ogni suo ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento finito, cioé possiede una sottofamiglia costituita da un numero finito di insiemi, che é ancora un ricoprimento dello spazio.

In generale non é semplice riconoscere se uno spazio sia compatto o meno, vediamo quindi alcuni teoremi e proprietá che ci aiutano in questo.

Lemma 1.5.1. *Sia Y un sottospazio di X. Y é compatto se e solo se ogni ricoprimento di Y di aperti in X contiene una sottofamiglia finita che ricopre Y.*

Dimostrazione. La dimostrazione si trova in Topology di J. R. Munkres, al capitolo 3 paragrafo 26.

□

Teorema 1.5.2. *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio topologico compatto é compatto.*

Dimostrazione. Sia Y un sottospazio chiuso di uno spazio topologico compatto X. Dato un ricoprimento $\mathscr{A}$ di Y in X, formiamo un ricoprimento aperto $\mathscr{B}$ di X aggiungendo ad $\mathscr{A}$ il singolo aperto $X - Y$, cioé

$$\mathscr{B} = \mathscr{A} \cup \{X - Y\}.$$

Dato che X é compatto, esiste una certa sottofamiglia finita di $\mathscr{B}$ che ricopre X. Se questa sottofamiglia contiene $X - Y$, allora scarto lo spazio $X - Y$; altrimenti lascio invariata la sottofamiglia. La famiglia che infine trovo é una sottofamiglia finita di $\mathscr{A}$ che ricopre Y. E quindi Y é compatto.

□

Teorema 1.5.3. *Ogni sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff é chiuso.*

Dimostrazione. Sia Y un sottospazio compatto dello spazio X di Hausdorff. Vogliamo dimostrare che $X - Y$ é aperto, cosí Y é chiuso. Sia x_0 un punto di $X - Y$. Mostriamo che esiste un intorno di x_0 disgiunto da Y, e siccome x_0 é arbitrario in $X - Y$ segue che Y é chiuso. Per ogni $y \in Y$, siano U_x e V_y due intorni disgiunti dei punti x_0 e y rispettivamente (esistono perché X é di Hausdorff). La famiglia $\{V_y : y \in Y\}$ é un ricoprimento di Y di aperti in X, quindi un numero finito di essi V_{y1}, ..., V_{yn} ricopre Y. Lo spazio aperto

$$V = V_{y1} \cup ... \cup V_{yn}$$

contiene Y, ed é disgiunto dall'aperto

$$U = U_{x1} \cup ... \cup U_{xn}$$

formato dall'intersezione dei corrispondenti intorni di x_0. Sia z un qualsiasi punto di V, allora esiste almeno un i tale per cui $z \in V_{yi}$, quindi $z \notin U$. Allora U é un intorno aperto di x_0 disgiunto da Y, come richiesto.

□

Si noti che ogni sottoinsieme proprio non vuoto di uno spazio topologico banale é compatto ma non é chiuso, quindi l'ipotesi che X sia di Hausdorff é necessaria.
Il procedimento che abbiamo appena usato nella precedente dimostrazione ci sará utile in seguito, quindi lo formalizziamo nel seguente

Lemma 1.5.4. *Se Y é un sottospazio compatto di uno spazio topologico X di Hausdorff e $x_0 \notin Y$, allora esistono degli aperti disgiunti U e V contenenti rispettivamente x_0 e Y.*

Vediamo ora alcuni teoremi che utilizzeremo in seguito.

Teorema 1.5.5. *L'immagine di uno spazio topologico compatto tramite un'applicazione continua é compatto.*

Dimostrazione. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua e X uno spazio topologico compatto. Sia $\mathscr{A}$ un ricoprimento di $f(X)$ di aperti in Y. La famiglia

$$\{f^{-1}(A) : A \in \mathscr{A}\}$$

é una famiglia di aperti che ricoprono X (sono aperti in X perché f é continua). Siccome X é compatto, un numero finito di questi, vale a dire

$$f^{-1}(A_1),\ \ldots\ , f^{-1}(A_n),$$

ricopre X. Allora gli spazi A_1, ..., A_n ricoprono $f(X)$.

□

Teorema 1.5.6. *Il prodotto di un numero finito di spazi topologici compatti é compatto.*

Dimostrazione. Proviamo che il prodotto di due spazi topologici compatti é compatto; la dimostrazione completa del teorema segue per induzione da questo.
Passo 1. Supponiamo di avere due spazi topologici X e Y, dove Y é compatto; sia x_0 un punto di X e N un aperto dello spazio topologico X $\times$ Y contenente la striscia $x_0 \times Y \in X \times Y$. Proviamo che:

Esiste un intorno W di x_0 in X tale che N contiene l'intero spazio topologico $W \times Y$.

Lo spazio topologico W × Y é spesso chiamato *tubo* attorno a $x_0 \times Y$. Innanzitutto ricopriamo $x_0 \times Y$ da elementi della base U × V (della topologia di X × Y) che giacciono in N. Lo spazio $x_0 \times Y$ é compatto, essendo omeomorfo a Y. Inoltre possiamo ricoprire $x_0 \times Y$ da un numero finito di elementi della base

$$U_1 \times V_1, ..., U_n \times V_n.$$

(Assumiamo che ogni elemento della base $U_i \times V_i$ intersechi $x_0 \times Y$, poiché altrimenti questo elemento sarebbe inutile e potremmo scartarlo dalla famiglia finita che ricopre $x_0 \times Y$). Definiamo

$$W = U_1 \cap ... \cap U_n.$$

W é aperto e contiene x_0 perché ogni $U_i \times V_i$ interseca $x_0 \times Y$. Gli spazi $U_i \times V_i$, che sono stati scelti per ricoprire la striscia $x_0 \times Y$, effettivamente ricoprono il tubo $W \times Y$. Sia $x \times y$ un punto di $W \times Y$; considero $x_0 \times y \in x_0 \times Y$. Ora, esiste almeno un i tale per cui $x_0 \times y \in U_i \times V_i$, cosí $y \in V_i$. Ma $x \in U_j$ per ogni j (dato che $x \in W$). Per cui $x \times y \in U_i \times V_i$, come richiesto. Poiché tutti gli spazi $U_i \times V_i$ giacciono in N, e poiché essi ricoprono $W \times Y$, il tubo $W \times Y$ giace in N anch'esso.

Passo 2. Proviamo ora la compattezza del prodotto topologico. Siano X e Y due spazi topologici compatti; sia $\mathscr{A}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$. Dato $x_0 \in X$, la striscia $x_0 \times Y$ é compatta e quindi potrebbe essere interamente ricoperta da un numero finito di elementi $A_1, ..., A_m$ di $\mathscr{A}$. La loro unione $N = A_1 \cup ... \cup A_m$ é un aperto contenente $x_0 \times Y$; dal Passo 1, N contiene un tubo $W \times Y$ attorno a $x_0 \times Y$, dove W é aperto in X. Allora $W \times Y$ é ricoperto da un numero finito di elementi $A_1, ..., A_m$ di $\mathscr{A}$.

Per cui, per ogni $x \in X$, possiamo scegliere un intorno W_x di x tale che il tubo $W_x \times Y$ puó essere ricoperto da un numero finito di elementi di $\mathscr{A}$. La famiglia di tutti gli intorni W_x é un ricoprimento aperto di X; quindi per la compattezza di X, esiste una sottofamiglia finita $\{W_1, ..., W_k\}$ che ricopre X. L'unione dei tubi $W_1 \times Y, ..., W_k \times Y$ da tutto $X \times Y$; e poiché ognuno puó avere un ricoprimento finito fatto da elementi di $\mathscr{A}$, cosí anche $X \times Y$.

$\square$

Capitolo 2

Teorema di Tychonoff

In questo capitolo vogliamo dimostrare il Teorema di Tychonoff, che afferma che il prodotto di spazi topologici compatti é compatto. Mentre questa affermazione é abbastanza semplice da dimostrare nel caso di un prodotto di un numero finito di spazi topologici, nel caso generale presenta notevoli sottigliezze. Abbiamo giá parlato delle nozioni topologiche basilari che é ne-cessario conoscere per poter comprendere il teorema. La dimostrazione fa uso di alcune proprietá particolari: la *proprietá dell'intersezione finita*, che da un'ulteriore caratterizzazione degli spazi topologici compatti, e il *Lemma di Zorn*.

2.1 Proprietá dell'intersezione finita

Vogliamo descrivere un criterio che caratterizza la compattezza negli spazi topologici. É un criterio non molto utilizzato, ma alcune volte puó ritornare molto utile, come nel nostro caso.
Diamo innanzitutto una definizione.

Definizione 2.1. Una famiglia $\mathscr{C}$ di sottospazi di X ha la *proprietá dell'intersezione finita* se per ogni sottofamiglia finita $\{C_1, ..., C_n\}$ di $\mathscr{C}$, l'intersezione $C_1 \cap ... \cap C_n$ é non vuota.

Vediamo da qui come possiamo definire uno spazio topologico compatto.

Teorema 2.1.1. *Sia X uno spazio topologico. Allora X é compatto se e solo se per ogni famiglia $\mathscr{C}$ di spazi chiusi in X avente la proprietá dell'intersezione finita, l'intersezione $\bigcap_{C\in\mathscr{C}} C$ di tutti gli elementi di X é non vuota.*

Dimostrazione. Data una famiglia $\mathscr{A}$ di sottospazi di X, sia

$$\mathscr{C} = \{X - A : A \in \mathscr{A}\}$$

la famiglia dei complementari degli elementi di $\mathscr{A}$. Allora segue che:

- $\mathscr{A}$ é una famiglia di aperti se e solo se $\mathscr{C}$ é una famiglia di spazi chiusi;
- la famiglia $\mathscr{A}$ ricopre X se e solo se l'intersezione $\bigcap_{C\in\mathscr{C}} C$ di tutti gli elementi di $\mathscr{C}$ é vuota;
- la sottofamiglia finita $\{A_1, ..., A_n\}$ di $\mathscr{A}$ ricopre X se e solo se l'intersezione dei corrispondenti elementi $C_i = X - A_i$ di $\mathscr{C}$ é vuota.

La prima affermazione é banale; la seconda e la terza seguono dalle leggi di De Morgan, che dicono:

$$X - (\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in J}(X - A_\alpha).$$

Che X sia compatto é equivalente a dire che data una famiglia $\mathscr{A}$ di aperti di X, se $\mathscr{A}$ ricopre X, allora ogni intersezione finita di elementi di $\mathscr{C}$ ricopre X, cioé data una famiglia $\mathscr{A}$, se non esiste una sottofamiglia finita che ricopre X, allora $\mathscr{A}$ non ricopre X. Come prima, sia $\mathscr{C} = \{X - A : A \in \mathscr{A}\}$ ed utilizzando le tre proprietá precedenti e quanto giá detto, si ha che se ogni intersezione finita di elementi di $\mathscr{C}$ é non vuota, cioé non esiste un sottoricoprimento finito di elementi di $\mathscr{A}$, allora l'intersezione di tutti gli elementi di $\mathscr{C}$ non é vuota, cioé $\mathscr{A}$ non ricopre X. Quindi il teorema é dimostrato.

$\square$

Un caso particolare del teorema precedente si ha quando abbiamo una famiglia di spazi topologici chiusi in uno spazio topologico compatto X, ognuno contenuto nell'altro $C_1 \supset C_2 \supset ... \supset C_n \supset C_{n+1} \supset ....$ Se ogni spazio topologico C_i, per ogni i, non é vuoto, allora la famiglia $\mathscr{C} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ ha automaticamente la proprietá dell'intersezione finita. Quindi l'intersezione

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} C_n$$

é diversa dal vuoto.

2.2 Premesse al teorema di Tychonoff

Ora vediamo due lemmi molto utili nella dimostrazione del teorema di Tychonoff che riguardano una famiglia di sottospazi massimale rispetto alla proprietá dell'intersezione finita.

Lemma 2.2.1. *Sia X uno spazio topologico. Sia $\mathscr{A}$ una famiglia di sottospazi di X avente la proprietá dell'intersezione finita (vedi cap. 2, def. 2.1). Allora esiste una famiglia $\mathscr{D}$ di sottospazi di X tale che $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$, $\mathscr{D}$ ha la proprietá dell'intersezione finita e non esiste una famiglia di sottospazi di X che propriamente contiene $\mathscr{D}$ e ha questa proprietá.*

Dimostrazione. Per costruire $\mathscr{D}$ utilizziamo il Lemma di Zorn.
Sia $\mathbb{A}$ l'insieme di tutte le famiglie $\mathscr{B}$ di sottospazi di X tali che $\mathscr{B} \supset \mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ ha la proprietá dell'intersezione finita. Su $\mathbb{A}$ abbiamo l'ordine parziale $\subsetneqq$.
Vogliamo dimostrare che $\mathbb{A}$ ha un elemento massimale $\mathscr{D}$.
Per poter applicare il Lemma di Zorn mostriamo che se $\mathbb{B}$ é un sottoinsieme di $\mathbb{A}$ semplicemente ordinato grazie all'inclusione, allora $\mathbb{B}$ é superiormente limitato in $\mathbb{A}$. Per fare questo mostriamo che la famiglia $\mathscr{C} = \bigcup_{\mathscr{B}\in\mathbb{B}} \mathscr{B}$ é un elemento di $\mathbb{A}$, ed é il maggiorante richiesto su $\mathbb{B}$.
Per vedere che $\mathscr{C} \in \mathbb{A}$, mostriamo che $\mathscr{C} \supset \mathscr{A}$ e $\mathscr{C}$ ha la proprietá dell'intersezione finita. Ovviamente $\mathscr{C} \supset \mathscr{A}$ dato che ogni elemento di $\mathbb{B}$ contiene $\mathscr{A}$. Inoltre siano $C_1, C_2, ..., C_n$ elementi di $\mathscr{C}$; dato che $\mathscr{C}$ é unione di elementi di $\mathbb{B}$, per ogni i esiste un elemento $\mathscr{B}_i$ di $\mathbb{B}$ tale che $\mathscr{C}_i \in \mathscr{B}_i$. Il sottoinsieme $\{\mathscr{B}_1, ...\mathscr{B}_n\}$ é contenuto in $\mathbb{B}$, cosí é semplicemente ordinato dalla relazione

di inclusione propria.
Essendo finito possiede un elemento che é il piú grande, cioé esiste k tale che $\mathscr{B}_i \subset \mathscr{B}_k$ per ogni $i = 1, ..., n$.
Allora ogni spazio $C_1, ..., C_n$ é un elemento di $\mathscr{B}_k$. Poiché $\mathscr{B}_k$ ha la proprietá dell'intersezione finita, allora l'intersezione di $C_1, ..., C_n$ é non vuota come richiesto, quindi $\mathscr{C}$ ha la proprietá dell'intersezione finita.

□

Lemma 2.2.2. *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathscr{D}$ una famiglia di sottospazi di X, che é massimale rispetto alla proprietá dell'intersezione finita. Allora:*

1. *ogni intersezione finita di elementi di $\mathscr{D}$ é un elemento di $\mathscr{D}$;*

2. *Sia A un sottospazio di X che interseca ogni elemento di $\mathscr{D}$, allora A é un elemento di $\mathscr{D}$.*

Dimostrazione. **(1)** Sia B l'intersezione di un numero finito di elementi di $\mathscr{D}$. Definiamo una famiglia $\mathscr{E}$ tale che $\mathscr{E} = \mathscr{D} \cup \{B\}$. Se $\mathscr{E}$ ha la proprietá dell'intersezione finita; allora per la massimalitá di $\mathscr{D}$ si ha che $\mathscr{E} = \mathscr{D}$, quindi $B \in \mathscr{D}$. Consideriamo quindi un numero finito di elementi di $\mathscr{E}$. Se nessuno di questi é B é chiaro che hanno la proprietá richiesta, altrimenti l'intersezione é della forma $D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_m \cap B$. Siccome B é l'intersezione finita di elementi di $\mathscr{D}$ e $\mathscr{D}$ ha la proprietá dell'intersezione finita, $D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_m \cap B \neq \emptyset$.
Quindi l'intersezione di un numero finito di elementi di $\mathscr{E}$ é sempre diversa dal vuoto, allora $\mathscr{E}$ ha la proprietá dell'intersezione finita.

(2) Dato A sottospazio di X che interseca ogni elemento di $\mathscr{D}$, definisco $\mathscr{E} = \mathscr{D} \cup \{A\}$. Mostro che $\mathscr{E}$ ha la proprietá dell'intersezione finita, da cui concludo che A appartiene a $\mathscr{D}$ per la massimalitá di $\mathscr{D}$.
Considero un numero finito di elementi di $\mathscr{E}$. Se nessuno di essi é A, allora la loro intersezione é automaticamente diversa dal vuoto. Altrimenti é della forma $D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_n \cap A$. Ora, $D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_n$ appartiene a $\mathscr{D}$ (per il punto 1.), A interseca ogni elemento di $\mathscr{D}$ quindi anche $D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_n$, allora $D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_n \cap A$ é diversa dal vuoto. Quindi $\mathscr{E}$ ha la proprietá dell'intersezione finita.

□

2.3 Teorema di Tychonoff

La dimostrazione del teorema di Tychonoff utilizza piú di una idea originale, ed é tutt'altro che lineare. Come vedremo é basata sui lemmi 2.2.1 e 2.2.2 dimostrati nella sezione precedente.

Teorema 2.3.1. *Il prodotto topologico di una quantitá arbitraria di spazi topologici compatti é compatto.*

Dimostrazione. Sia

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha = \{(X_\alpha) : \alpha \in J\}$$

dove ogni X_α é uno spazio topologico compatto. Per dimostrare che X é compatto useremo la caratterizzazione della compattezza attraverso una condizione sui chiusi (vedi teorema 2.1.1). Sia $\mathscr{A}$ una qualsiasi famiglia di sottospazi di X avente la proprietá dell'intersezione finita. Se $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} \overline{A} \neq \emptyset$, cosí per il teorema 2.3.1, X é uno spazio topologico compatto.
Per il lemma 2.3.2., possiamo scegliere la famiglia $\mathscr{D}$ di sottospazi di X massimale rispetto alla proprietá considerata. Quindi basta mostrare che

$$\bigcap_{D \in \mathscr{D}} \overline{D} \neq \emptyset.$$

Dato $\alpha \in J$, sia $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ la proiezione. Considero la famiglia $\{\pi_\alpha(D) : D \in \mathscr{D}\}$ di sottospazi di X_α. Questa famiglia ha la proprietá dell'intersezione finita in quanto $\mathscr{D}$ ha tale proprietá e inoltre π_α é una proiezione:

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha_i} : \prod X_\alpha &\longrightarrow X_{\alpha_i} \\ (x_\alpha) &\longmapsto x_{\alpha i} \end{aligned}$$

Per la compattezza di X_α, per ogni α posso scegliere un punto $x_\alpha \in X_\alpha$ tale che $x_\alpha \in \bigcap_{D \in \mathscr{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}$. Sia $\tilde{x}$ il punto $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ di X. Mostriamo che $\tilde{x} \in \overline{D}$ per ogni $D \in \mathscr{D}$. Innanzitutto vediamo che se $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ é un

elemento della sottobase (per il prodotto topologico) contenente $\tilde{x}$, allora $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ interseca ogni elemento di D. U_β é un intorno di x_β ($x_\beta \in U_\beta \subset X_\beta$). Poiché $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)}$ per definizione di x_β, allora $U_\beta \cap \overline{\pi_\beta(D)} \ni x_\beta$, e quindi $U_\beta \cap \pi_\beta(D) \neq \emptyset$. Ma allora esisterá un $\pi_\beta(y)$, con $y \in D$, che appartiene a $U_\beta \cap \pi_\beta(D)$, e quindi $y \in D \cap \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$. Inoltre dal secondo punto del lemma 2.3.2. segue che ogni elemento della sottobase contenente $\tilde{x}$ appartiene a $\mathscr{D}$. Poiché $\mathscr{D}$ ha la proprietá dell'intersezione finita, questo significa che ogni elemento della base contenente $\tilde{x}$ interseca ogni elemento di $\mathscr{D}$, allora $\tilde{x} \in \overline{D}$ per ogni $D \in \mathscr{D}$ come richiesto.
E quindi $\bigcap_{D \in \mathscr{D}} \overline{D}$ é diversa dal vuoto e quindi X é compatto.

$\square$

Appendice A

Lemma di Zorn

Per poter utilizzare un lemma importante nella dimostrazione del Teorema di Tychonoff, é necessario conoscere il *Lemma di Zorn*. Prima di introdurlo dobbiamo fare alcune premesse.

Enunciamo dapprima il *principio del massimo* che lavora con le relazioni d'ordine parziali, che ricordiamo avere le due proprietá di transitivitá e non riflessivitá.

Teorema A.0.2 (Principio del massimo). *Sia A un insieme e $\prec$ una relazione d'ordine parziale su A. Allora esiste un sottoinsieme B massimale semplicemente ordinato di A.*

Vale a dire che esiste un sottoinsieme B di A tale che B é semplicemente ordinato rispetto a $\prec$ e che nessun sottoinsieme di A che contiene propriamente B é semplicemente ordinato rispetto a $\prec$.

Definiamo ora alcuni termini.

Definizione A.1. Sia A un insieme e sia $\prec$ una relazione d'ordine parziale su A. Se B é un sottoinsieme di A, un *maggiorante* su B é un elemento $c \in A$ tale che per ogni $b \in B$ si ha che $b \prec c$ oppure $b = c$. Un *elemento massimale* di A, invece, é un elemento m di A tale che non esiste $a \in A$ per cui si ha $m \prec a$.

Arriviamo ora a enunciare e dimostrare il Lemma di Zorn.

Corollario A.0.3 (Lemma di Zorn). *Sia A un insieme strettamente parzialmente ordinato. Se ogni sottospazio di A semplicemente ordinato ha un maggiorante in A, allora A ha un elemento massimale.*

Dimostrazione. Il Lemma di Zorn é una semplice conseguenza del principio del massimo. Dato l'insieme A, il principio del massimo implica che A abbia un sottoinsieme B massimale semplicemente ordinato. Le ipotesi del Lemma di Zorn ci dicono che B ha un maggiorante c di A. L'elemento c é allora automaticamente un elemento massimale di A. Per il fatto che $c \prec d$, per qualche d appartenente ad A, allora l'insieme $B \cup \{d\}$, che contiene propriamente B, é semplicemente ordinato perché $b \prec d$ per ogni $b \in B$. Questo fatto contraddice la massimalitá di B.

□

Bibliografia

□ [1] Munkres, James O. *Topology*, 2000, Prentice Hall

□ [2] Sernesi, E. *Geometria 2*, 1994, Bollati Boringhieri

□ [3] Kosniowski, C. *Introduzione alla Topologia Algebrica*, 1988, Zanichelli

□ [4] Dummit, David S - Foote, Richard M. *Abstract Algebra - Third Edition*, 2004, John Wiley and Sons, Inc.

□ [5] Hewitt, E. - Stromberg, K. *Real and Abstract Analysis - A Modern Treatment of the Theory of Function of a Real Variable*, 1975, Springer - Verlag

□ [6] Manetti, M. *Topologia*, 1997, Springer

Ringraziamenti

Desidero rigraziare la Prof.ssa Rita Fioresi per l'aiuto ricevuto in questo lavoro di tesi, per la pazienza e la disponibilitá dimostrata. Inoltre desidero ringraziarla per la stima che ha sempre dimostrato nei miei confronti.
Ringrazio enormemente la mia famiglia che ha sempre creduto in me e mi ha sempre sostenuta e accompagnata nelle scelte fatte. Mi é stata vicina nelle gioie e nelle sconfitte e mi ha sempre trasmesso una positivitá in ogni circostanza.
Voglio ringraziare i miei amici Gio, Noe, Sapo, Pol e Luci con cui ho passato questi tre anni di studio: sono stati un aiuto enorme sia nello studio e nella comprensione degli esami, sia nel ricercare una bellezza nella materia e in particolare nella vita.
Ringrazio tutti gli amici e questa compagnia che mi hanno aiutato, sostenuto e accompagnato in questo percorso.