

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Dinamica dei sistemi collisionali

Tesi di Laurea

Presentata da:

Luca Zucchi

Relatore:

Chiar.ma Prof.ssa Marcella Brusa

Anno Accademico 2021-2022

Sessione IV

*A Jacopo e alla sua famiglia,
ai miei nonni,
ai miei genitori,
ai miei fratelli,
a tutta la mia famiglia,
ai miei amici,
a voi che avete reso
tutto questo possibile.*

Sommario

In questa tesi viene affrontato un argomento molto importante nel campo astrofisico, ovvero la dinamica dei sistemi collisionali. Questa tematica è di vasto interesse, dal momento che riguarda diversi principi alla base della termodinamica e dei fenomeni gravitazionali dei sistemi stellari.

In primo luogo verrà affrontato il problema dal punto di vista teorico (**Capitolo 1**), introducendo alcune nozioni che porteranno poi alla naturale definizione di sistema collisionale.

Successivamente verranno affrontate quelle che sono delle considerazioni generali riguardanti la dinamica dei sistemi in questione (**Capitolo 2**). prima verrà posta l'attenzione sull'importanza del numero elevato di corpi interessati e della conseguente redistribuzione dell'energia, poi verrà fatto un veloce excursus sul Teorema del Viriale e sulla sua rilevanza.

Infine verrà trattato un esempio più strettamente astrofisico, circa la dinamica degli Ammassi Globulari (**Capitolo 3**), in cui si potranno apprezzare tutte le nozioni teoriche affrontate precedentemente, con relative spiegazioni di quelli che sono i fenomeni dinamici al loro interno.

Indice

1	Introduzione teorica	1
1.1	Definizione di sistema collisionale	1
1.2	Effetto fionda e tempo di rilassamento a due corpi	1
1.2.1	Effetto Fionda: introduzione al problema dei 2 corpi	2
1.2.2	Effetto Fionda: calcolo del tempo di rilassamento a due corpi	4
2	Considerazioni dinamiche sui sistemi collisionali	9
2.1	Introduzione ad un sistema autogravitante	9
2.2	Considerazioni generali sui Sistemi Collisionali e la conservazione dell'energia	11
2.2.1	Problema N-corpi con $E < 0$	11
2.2.2	Problema N-corpi con $E > 0$	12
2.2.3	Teorema del Viriale per Sistemi Autogravitanti	12
3	Esempi in astrofisica:	
	Dinamica degli Ammassi Globulari	13
3.1	Equipartizione dell'energia	13
3.1.1	Formazione struttura <i>Core-Halo</i> ed Evaporazione gravitazionale	13
3.2	Catastrofe gravotermica	14
3.2.1	3 Body Capture	15
3.2.2	"Tidal Capture"	15
	Bibliografia	16

1 Introduzione teorica

1.1 Definizione di sistema collisionale

In astrofisica un sistema gravitazionale è definito collisionale quando l'effetto cumulativo delle interazioni gravitazionali tra i corpi al suo interno non è trascurabile. Se, invece, questo effetto è trascurabile, allora il sistema è considerato non collisionale. Volendo dare una definizione più pratica e intuitiva dell'argomento, possiamo dire che siamo davanti a un sistema autogravitante di N corpi collisionale quando si osserva un'evoluzione dinamica del sistema. Per capire dopo quanto tempo si osserva tale evoluzione, è necessario introdurre il concetto di *tempo di rilassamento a due corpi* (t_{2b}), ovvero un tempo caratteristico proprio di ogni sistema stellare. Questo tempo caratteristico può essere messo a confronto con l'età dell'Universo, e se risulta che t_{2b} è minore o commensurabile a quest'ultima il sistema è di tipo collisionale. Vedremo in seguito degli esempi astrofisici che ci permetteranno di apprezzare come i casi di sistemi gravitazionali composti da moltissimi oggetti siano poco collisionali (o non collisionali) e come invece quelli composti da un numero limitato di oggetti siano molto collisionali (o collisionali), questo ci fa capire che la collisionalità non ha a che fare con dei veri e propri urti, ma che invece è dovuta alle interazioni gravitazionali tra i diversi corpi che formano il sistema. Verrà approfondito in seguito questo concetto, per ora verranno solamente elencati dei casi astrofisici che danno prova empirica di questo fatto, ovvero che gli ammassi stellari ($N = 10^2 - 10^6$ stelle) sono sistemi altamente collisionali, invece le galassie ($N = 10^5 - 10^{12}$ stelle) sono sistemi non collisionali.

1.2 Effetto fionda e tempo di rilassamento a due corpi

Come citato nell'introduzione un parametro fondamentale, che ci permette di arrivare a definire la collisionalità di un sistema o meno, è il tempo di rilassamento a due corpi. Andremo ora a ricavare questo termine partendo dal considerare un sistema a 2 corpi interagenti tra loro, arrivando poi a quella che è la definizione di *tempo di rilassamento a due corpi* passando per l'effetto fionda e l'approssimazione impulsiva.

Per entrare nel nocciolo della questione bisogna fare delle considerazioni di carattere teorico molto importanti: ovvero dobbiamo chiarire come ci siamo spostati da un mondo reale, dove il problema degli N -corpi è dato da una sommatoria discreta di interazioni, e di conseguenza ad una distribuzione discreta (discontinua), ad un mondo "ideale" (continuo) nel quale svolgeremo i calcoli per il problema a due corpi. Questa approssimazione ci permette di trattare il problema tramite le leggi classiche della dinamica partendo da una distribuzione ideale (liscia) $\rho(\vec{x}, t)$ e le leggi $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ e $\ddot{\vec{x}} = -\nabla\phi$, ottenendo così una traiettoria ideale. Confrontare quest'ultima con quella reale ci dà la possibilità di stabilire il tempo di rilassamento, ovvero il tempo che deve passare affinché l'orbita reale di un corpo si discosti in maniera significativa da quella ideale ottenuta con il metodo sopracitato.

Per il calcolo di questo tempo caratteristico verrà utilizzata l'*approssimazione impulsiva*. Che ci permette di semplificare ulteriormente il calcolo, ma che allo stesso tempo ci darà la possibilità di affrontare il problema con rigore matematico, ottenendo comunque un'approssimazione valida.

Partiamo da due assunzioni:

- i) tratteremo tutti gli incontri tra i corpi in maniera indipendente tra loro, andando a sommare tutti i loro contributi;
- ii) tutti gli incontri tra le stelle sono trattati come problemi dei due corpi iperbolici.

1.2.1 Effetto Fionda: introduzione al problema dei 2 corpi

Il principio fondamentale su cui si basa l'effetto fionda è il seguente: l'energia meccanica nei sistemi inerziali è una quantità conservata, ma non invariata. Consideriamo ora il problema dei due corpi dal punto di vista del sistema inerziale S_0 e del sistema di riferimento del centro di massa S_{CM} . Abbiamo che:

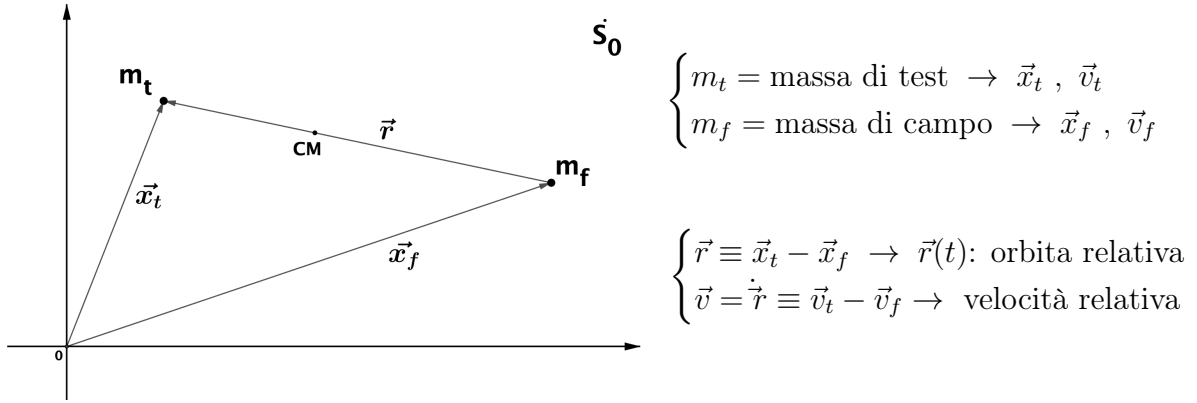


Figura 1.1: Sistema di riferimento inerziale S_0

questi due oggetti (m_t e m_f) interagiscono tra loro attraverso l'energia potenziale gravitazionale $U(r)$ e, dunque, possiamo descrivere il sistema tramite le equazioni del moto:

$$\begin{cases} m_t \ddot{\vec{x}}_t = -\nabla_t U \\ m_f \ddot{\vec{x}}_f = -\nabla_f U = \nabla_t U \end{cases} \quad (1.1)$$

Sappiamo che la natura conserva sempre l'impulso in un sistema isolato. Sommando le due relazioni del sistema 1.1 ottengo che:

$$m_t \ddot{\vec{x}}_t + m_f \ddot{\vec{x}}_f = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m_t \vec{v}_t + m_f \vec{v}_f) = 0 \Rightarrow m_t \vec{v}_t + m_f \vec{v}_f = \text{cost} = M \vec{v}_{CM} \quad (1.2)$$

dove $M = m_t + m_f$, $\vec{R}_{CM} = \frac{m_t \vec{x}_t + m_f \vec{x}_f}{M}$ e $\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt}$ sono rispettivamente la massa totale del sistema, il vettore posizione del CM rispetto al sistema di riferimento inerziale e la velocità del CM rispetto allo stesso sistema.

Considerando ora che i sistemi di riferimento inerziali non si possono mettere in moto da soli, che il moto del centro di massa si muove con velocità costante, che il suddetto sistema (S_{CM}) è inerziale e che la fisica in tutti i sistemi di riferimento inerziali è uguale, allora si ha che la velocità del centro di massa è data dalle condizioni iniziali. Al tempo $t = 0$:

$$\begin{cases} \vec{x}_{t0}, \vec{v}_{t0} \\ \vec{x}_{f0}, \vec{v}_{f0} \end{cases}$$

e quindi, essendo \vec{v}_{CM} costante e conoscendo le condizioni iniziali in questo determinato sistema di riferimento, allora si avrà che $\vec{v}_{CM} = \vec{v}_{CM_0}$, ovvero alla velocità del CM calcolata al tempo iniziale.

Moltiplicando scalarmente le equazioni del sistema 1.1 rispettivamente per \vec{v}_t e \vec{v}_f e considerando la III legge di Newton, ottengo un altro risultato importantissimo per il problema dei due corpi ovvero l'espressione della conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{m_t \|\vec{v}_t\|^2}{2} + \frac{m_f \|\vec{v}_f\|^2}{2} + U = E \quad (1.3)$$

dove l'energia totale E è costante. Allo stesso modo, facendo il prodotto vettoriale di \vec{x}_t per la prima equazione del sistema 1.1 e \vec{x}_f per la seconda equazione del sistema 1.1, sommando i risultati ottengo

$$m_t \vec{x}_t \times \vec{v}_t + m_f \vec{x}_f \times \vec{v}_f = \vec{J} \quad (1.4)$$

ovvero la legge che ci dice che anche il momento angolare totale si conserva.

Per procedere ora dobbiamo spostarci su quello che è il sistema di riferimento relativo a una delle due masse, che non è più un sistema inerziale ma che ciò nonostante continuerà a conservare due quantità a noi molto utili, *l'energia totale e il momento angolare*. Per fare questo passaggio basta dividere le equazioni di Newton del sistema 1.1 per le rispettive masse, successivamente si sottrae la 2^a dalla 1^a e si ottiene

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla U \quad (1.5)$$

dove $\mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f}$ è la massa ridotta. Quest'importantissima equazione ottenuta descrive l'orbita relativa. Come detto precedentemente introduciamo la *legge di conservazione dell'energia* e del *momento angolare* dell'orbita relativa:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + U &= E_r \\ \vec{J} &= \mu \vec{r} \times \vec{v} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Prendendo in riferimento la massa di campo (m_f), al tempo $t = 0$ ovvero quando il secondo corpo è lontano si ha $U = 0$, invece quando il corpo si avvicinerà questo termine cambierà, tornerà infine a 0 quando il corpo andrà all'infinito. Di conseguenza la velocità relativa iniziale è uguale a quella finale.

Ora partendo dal fatto che non conosciamo come sono fatti i termini \vec{x}_t e \vec{x}_f in S_0 , ma conosciamo il valore di $(\vec{x}_t - \vec{x}_f)$ e spostandosi nel sistema di riferimento del CM, possiamo esprimere le nostre coordinate dal punto di vista del sistema del centro di massa e ottenere quindi quelle che sono le velocità nel medesimo sistema, uguali in modulo ma di segno opposto:

$$\begin{cases} \vec{v}'_t = \frac{\mu}{m} \vec{v} \\ \vec{v}'_f = -\frac{\mu}{m} \vec{v} \end{cases}$$

Ponendoci dunque sul sistema di riferimento del CM si ha che non soltanto le velocità relative sono uguali, ma anche le velocità \vec{v}'_t e \vec{v}'_f restano uguali al tempo iniziale (quando il corpo arriva dall'infinito) e finale (quando il corpo torna a infinito), ovvero

$$\begin{cases} \|\vec{v}'_t\|_{fin} = \|\vec{v}'_t\|_{in} \\ \|\vec{v}'_f\|_{fin} = \|\vec{v}'_f\|_{in} \end{cases} \quad (1.7)$$

Questo risultato è dovuto dal fatto che nel problema dei due corpi le orbite sono omotetiche, quindi simili, e in questo caso vengono riscalate in base al rapporto delle masse. Si ottengono inoltre le relazioni

$$\begin{cases} \vec{x}_t = \vec{R}_{CM} + \frac{\mu}{m_t} \vec{r} \\ \vec{x}_f = \vec{R}_{CM} - \frac{\mu}{m_f} \vec{r} \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{v}_t = \vec{V}_{CM} + \frac{\mu}{m_t} \vec{v} \\ \vec{v}_f = \vec{V}_{CM} - \frac{\mu}{m_f} \vec{v} \end{cases} \quad (1.8)$$

e tramite esse si arriva a calcolare ora quelle che sono le differenze di velocità della massa di test e di campo (nel sistema S_0) in relazione alla variazione della velocità relativa al tempo iniziale e finale:

$$\begin{cases} \Delta \vec{v}_t = \frac{\mu}{m_t} \Delta \vec{v} \\ \Delta \vec{v}_f = -\frac{\mu}{m_f} \Delta \vec{v} \end{cases} \quad (1.9)$$

E' possibile calcolare la variazione di energia cinetica della massa di test (m_t), partendo dalla formula iniziale e considerando le relazioni 1.8 e 1.7 si può semplificare ottenendo così:

$$\Delta E_t = \frac{m_t}{2} \|\vec{v}_t(+\infty)\|^2 - \frac{m_t}{2} \|\vec{v}_t(-\infty)\|^2 \implies \Delta E_t = \mu \langle \vec{v}_{CM}, \Delta \vec{v} \rangle \quad (1.10)$$

Questo termine è molto importante in quanto ci dà informazioni su quella che è la redistribuzione dell'energia nel sistema.

1.2.2 Effetto Fionda: calcolo del tempo di rilassamento a due corpi

Forti delle nozioni apprese finora per il problema dei due corpi, si procede con la trattazione dell'Effetto fionda, per arrivare ad ottenere quella che è la formula del *tempo di rilassamento a due corpi*.

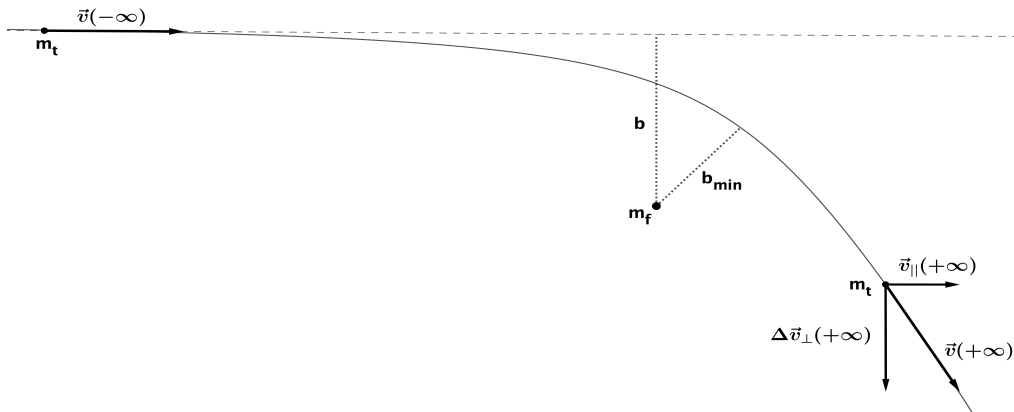


Figura 1.2: Rappresentazione dell'orbita iperbolica della massa di test nel sistema di riferimento della massa di campo

Ricordiamo la relazione che discende dalla conservazione dell'energia dell'orbita relativa E_r (1.6)

$$\|\vec{v}(-\infty)\| = \|\vec{v}(+\infty)\|, \quad \vec{v} = \vec{v}_t - \vec{v}_f \quad (1.11)$$

questa relazione tra moduli ci sta dicendo che il valore delle velocità sono uguali all'istante iniziale e finale, altrettanto non si può dire della direzione, ovvero che l'orbita gira (cambia direzione). Dalla figura 1.2 possiamo infatti notare che il vettore \vec{v} può essere scomposto in due componenti, una *perpendicolare* e una *parallela*. Da una rapida osservazione intuitiva della figura, si può dedurre come la componente parallela finale della velocità sia più "corta" di quella iniziale, questo ci dà indicazioni sul fatto che lungo questa direzione abbia origine un'interazione che "raffredda" la traiettoria. Si può osservare l'opposto per la componente perpendicolare della velocità finale, dato che in questo caso il vettore risulta più lungo rispetto a quello iniziale che è nullo, infatti si parla di *riscaldamento perpendicolare*. Si può anche notare che si crea una *termodinamica* gravitazionale che fa scaldare ciò che era troppo freddo e viceversa tende a raffreddare ciò che era troppo caldo. Dalla figura notiamo l'importanza del parametro b detto parametro d'impatto, definito come la distanza minima tra i due oggetti se non ci fosse interazione tra essi. Questa definizione è importante perchè ci permette di ricavare quello che è il b_{min} , parametro d'impatto minimo che ci permette di discriminare i seguenti casi:

se $b_{min} > b$ allora si ha *forza repulsiva*,

se $b_{min} < b$ allora si ha *forza attrattiva*.

Tenendo in considerazione anche il momento angolare

$$J = \mu b \|\vec{v}(-\infty)\| \quad (1.12)$$

possiamo distinguere due situazioni:

- se c'è "poco" momento angolare passo più vicino alla massa di campo e ho orbite molto deviate;
- se c'è "molto" momento angolare passo molto lontano e ho delle orbite poco (quasi per niente) deviate.

Per proseguire dobbiamo andare a calcolare quello che è il contributo dato da tutti i corpi all'interno del nostro sistema, tenendo in considerazione prima un singolo caso e successivamente sommandoli tutti. Si ottiene così quella che può essere considerata la stima della variazione totale dell'energia riferita alla massa di test, presa in considerazione nel sistema di riferimento S_0 , data dalla relazione " $\frac{m_t}{2} \|\vec{v}_{t_0}\|^2 = \sum_i \Delta E_t$ ". Dobbiamo quindi partire andando a cercare quello che il contributo alla variazione della velocità, dato dalla componente perpendicolare, che all'istante iniziale ha valore nullo. Si ha che

$$\Delta \vec{v}_{t_\perp} = \frac{\mu}{m_t} \Delta \vec{v}_\perp \implies \|\Delta \vec{v}_{t_\perp}\| = \frac{\mu}{m_t} \|\Delta \vec{v}_\perp\| \quad (1.13)$$

dove la componente perpendicolare della velocità relativa \vec{v}_\perp è perpendicolare relativamente alla velocità relativa \vec{v} , di conseguenza anche la componente \vec{v}_{t_\perp} è perpendicolare rispetto alla velocità relativa e non rispetto a \vec{v}_t . Come precedentemente accennato si procede ora andando a stimare quello che è il *riscaldamento perpendicolare* dovuto dalla somma dei contributi perpendicolari delle singole interazioni:

$$\frac{\sum m_t \|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2}{2} = \Delta E_{t\perp} \quad (1.14)$$

Tenendo in considerazione le ultime due relazioni ottenute, si deve affrontare il problema di come si calcola $\|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|$.

La soluzione trattata in questo elaborato è quella della "*Born Approximation*", detta anche *approssimazione impulsiva*, che consiste nel calcolare un'approssimazione asintotica, che ha la proprietà di essere tanto più "buona" quanto sarà più grande il valore del *momento angolare* dell'orbita relativa. Partiamo dall'equazione dell'orbita relativa nel caso newtoniano

$$\mu \dot{\vec{v}} = -\frac{Gm_t m_f}{r^2} \hat{r} \quad (1.15)$$

che tratteremo tramite l'approssimazione sopracitata, che consiste nel considerare l'impulso, ovvero una forza \times tempo, che ci dà indicazioni su come tale forza devia il corpo

$$\mu \|\Delta\vec{v}_{t\perp}\| \sim \frac{Gm_t m_f}{b^2} \frac{2b}{\|v_i\|} \quad (1.16)$$

dove il termine dato da $\frac{2b}{\|v_i\|}$ ci dice per quanto tempo viene "tirato" il corpo di test sotto l'azione della forza di gravità. In conclusione si ottiene così la formula della sopracitata approssimazione:

$$\mu \|\Delta\vec{v}_{t\perp}\| \sim \frac{2Gm_t m_f}{b\|v_i\|} \quad (1.17)$$

Visto quanto detto sopra riguardo la correttezza dell'approssimazione per grandi momenti angolari e ricordando la formula 1.12, si nota che la 1.17 sarà più valida per b grandi, cioè per variazioni di orbita piccole, per le quali ci sarà meno energia trasferita. Però sappiamo che in natura gli urti lontani (più deboli) sono molti di più di quelli vicini (più forti) e la somma dei loro contributi avrà un'influenza maggiore. Continuiamo ora prendendo in considerazione nuovamente la relazione 1.13, elevandola al quadrato e sostituendo la relazione ottenuta per *l'approssimazione impulsiva* 1.17 si ottiene

$$\|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 v^2} \quad \text{con } v = \|\vec{v}(-\infty)\| \quad (1.18)$$

da cui possiamo ottenere quella che è la variazione dell'energia cinetica perpendicolare della massa di test dovuta da ogni singolo "urto"

$$\Delta E_{t\perp} = \frac{m_t \|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2}{2} \sim \frac{m_t}{2} \left(\frac{4G^2 m_f^2}{b^2 v^2} \right) \quad (1.19)$$

Per procedere con la somma dei vari contributi per ottenere la $\Delta E_{t\perp}$ finale, dobbiamo sapere come sono distribuiti i corpi del bersaglio di interazione gravitazionale della massa di test lungo la sua orbita. Introdurremo quindi quella che è la *teoria cinetica*, che ci permette di affrontare il problema in una maniera più approssimativa ed intuitiva.

Partiamo dal definire un campo $f(\vec{x}, \vec{v})$ come:

- 1) **Omogeneo e isotropo** (spazialmente), ipotesi altamente approssimativa, ma che semplifica molto la trattazione;
- 2) **Isotropo nelle velocità** (cioè nello spazio delle velocità), stessa distribuzione di velocità ovunque.

Si ha dunque la funzione

$$f = n_f g(\|\vec{v}_f\|) \quad (1.20)$$

dove n_f =numero di corpi (stelle) per unità di volume (densità numerica costante)
Questa funzione è una distribuzione chiamata *Scattering gravitazionale*. Nel caso delle nostre approssimazioni abbiamo che l'integrale di f su tutto il volume deve dare una densità, ovvero il numero di stelle di campo

$$n_f = \int_{\mathfrak{R}^3} f d^3\vec{v} = n_f \int_{\mathfrak{R}^3} g d^3\vec{v} \implies \int_{\mathfrak{R}^3} g(\|\vec{v}_f\|) d^3\vec{v} = 1 = 4\pi \int_0^\infty g(v_f) v_f^2 dv_f \quad (1.21)$$

con $v_f = \|\vec{v}_f\|$. Nello spazio delle velocità, g è una funzione a simmetria sferica, questo deriva dal fatto che dipende solamente dal modulo del vettore \vec{v}_f , cioè solamente dalla sua lunghezza. Dunque otteniamo un integrale sferico nello spazio delle velocità:

$$\chi(v) = 4\pi \int_0^v g(v_f) v_f^2 dv_f$$

$$\text{con } \begin{cases} \chi(0) = 0 \\ \chi(\infty) = 1 \end{cases} \quad (1.22)$$

Ora procediamo tenendo conto del fatto che stiamo cercando di stimare il numero di oggetti totali incontrati percorrendo l'orbita, di conseguenza il termine che ci darà informazioni a riguardo è proprio la velocità relativa \vec{v} , più precisamente il suo modulo, moltiplicata per quella che è la sezione del cilindro percorso dato dal parametro b , per la funzione f durante un determinato intervallo di tempo, tutto ciò si traduce in

$$n_{inc} = 2\pi b db \|\vec{v}_t - \vec{v}_f\| \Delta t f d^3\vec{v}_f$$

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per poter calcolare quella che è la sommatoria di nostro interesse, moltiplicando la formula appena citata per la 1.18 e ottenendo così il contributo totale dovuto a tutti gli incontri che avvengono nel sistema

$$\sum \|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2 = \|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2 \cdot n_{inc} = \Delta t 8\pi G^2 m_f^2 n_f \int_0^\infty \frac{db}{b} \int_{\mathfrak{R}^3} \frac{g(\|\vec{v}_f\|) d^3\vec{v}_f}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} \quad (1.23)$$

il fatto che i due integrali presenti nella formula 1.23 siano scindibili deriva dal fatto che siamo in *approssimazione impulsiva*, nel mondo fisico reale non si potrebbe fare.

Si nota immediatamente come per il primo integrale si incontrino dei problemi, ovvero il termine logaritmico ottenuto divergerebbe sia all'estremo inferiore che a quello superiore,

di conseguenza bisogna effettuare delle considerazioni che ci permetteranno di definirne dei limiti naturali che risolvono tale problema. Nello specifico:

- $+\infty$ in questo caso si parla di **divergenza Infrarossa (IR)**, dovuta dal fatto che ci siano tanti urti a piccole emissioni. Il problema di questa divergenza è che non si può togliere in alcun modo, la sua autoenergia all'infinito diverge sempre. In questo caso però possiamo porre un limite superiore $b_{MAX} = b_M$, facendo un analogia con quella che è la *lunghezza di Debye* nella fisica dei plasmi si basa sul fatto che oltre la *Debye lent* è come se l'Universo fosse finito, quindi si smette di sommare le fluttuazioni date dai contributi oltre quel limite. Si risolve così la divergenza IR.
- 0 questa è chiamata **divergenza Ultra Violetta (UV)**, questo termine è presente solamente perché siamo in *approssimazione impulsiva*, altrimenti non ci sarebbe. In questo caso per risolvere questa divergenza basta considerare una lunghezza minima chiamata $b_{min} = b_m$. Il parametro d'impatto minimo deriva direttamente dalla dinamica del problema, ovvero se la affrontassimo con precisione e senza approssimazioni si otterrebbe che questo termine deriva direttamente dall'equazione del moto per un'orbita iperbolica, ovvero con deviazione di traiettoria di 90° .

Si ottiene dunque il cosiddetto *Logaritmo di Coulomb*:

$$\int_{b_m}^{b_M} \frac{db}{b} = \ln\left(\frac{b_M}{b_m}\right) = \ln(\Lambda) \quad (1.24)$$

Riprendendo ora il secondo integrale di 1.22, per risolverlo si parte osservandone la forma. Si nota il parallelismo con il potenziale in un problema a simmetria sferica

$$\begin{array}{l} g \longrightarrow \rho \\ \vec{v}_f \longrightarrow \vec{x} \\ \|\vec{v}_f\| \longrightarrow r \\ \vec{v}_t \longrightarrow \vec{y} \end{array} \quad \phi(\vec{y}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(r) d^3\vec{x}}{\|\vec{y} - \vec{x}\|} = f(\|\vec{y}\|)$$

e dato che stesse equazioni hanno lo stesso risultato, avremo di conseguenza che l'integrale prenderà il nome di *Potenziale di Rosenbluth* e sarà così definito

$$\Psi(\|\vec{v}_t\|) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\|\vec{v}_f\|) d^3\vec{v}_f}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} \quad (1.25)$$

Arriviamo quindi a riscrivere la 1.23, come:

$$\sum \|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2 = 8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln(\Lambda) \Psi(\|\vec{v}_t\|) \Delta t \quad (1.26)$$

L'ultimo passaggio fondamentale per poter arrivare a ottenere il tempo di rilassamento a due corpi consiste nel sostituire nell'espressione il valore del *Potenziale di Rosenbluth*, in quanto nella sua forma generale il campo di gravità di un sistema di forma qualsiasi è difficilissimo da ottenere, faremo dunque un'approssimazione. Ovvero considerando una situazione a grandi distanze possiamo approssimare il campo al primo ordine con un termine di **monopolo** (Espansione in Multipoli). Così facendo si ottiene:

$$\Psi(\|\vec{v}_t\|) \sim \frac{\chi(\|\vec{v}_t\|)}{\|\vec{v}_t\|} \quad (1.27)$$

dove la funzione $\chi(\|\vec{v}_t\|)$ è definita dalla 1.22. Possiamo dire che per $\|\vec{v}_t\|$ molto elevate allora quella del 1° ordine è una buona approssimazione. Inoltre possiamo aggiungere che la funzione $\chi(\|\vec{v}_t\|)$ si satura alle alte velocità, tendendo a 1. Passando ora attraverso l'energia cinetica e paragonando queste due energie si ottiene questa relazione tra i moduli delle velocità

$$\frac{m_t}{2} \cdot \sum \|\Delta \vec{v}_{t\perp}\|^2 = \frac{m_t}{2} \cdot \|\vec{v}_t\|^2 \quad \implies \quad \sum \|\Delta \vec{v}_{t\perp}\|^2 = \|\vec{v}_t\|^2 \quad (1.28)$$

sostituendo tutto nella 1.26 si arriva infine alla relazione del **tempo di rilassamento a 2 corpi** in *approssimazione impulsiva*:

$$t_{2b} = \frac{\|\vec{v}_t\|^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln(\Lambda) \Psi} \quad (1.29)$$

2 Considerazioni dinamiche sui sistemi collisionali

2.1 Introduzione ad un sistema autogravitante

Andiamo ora ad introdurre quello che è il concetto ideale di sistema autogravitante all'equilibrio, così da poterne calcolare il t_{2b} e così da metterlo successivamente a confronto con il tempo dinamico t_{dyn} , dove per tempo dinamico intendiamo il tempo di attraversamento collegato al sistema. E' possibile trarre interessanti conclusioni riguardo la collisionalità dei sistemi.

Consideriamo dunque un *Sistema autogravitante* all'equilibrio, ovvero virializzato, con caratteristiche N = numero di corpi, m = massa e R = raggio. Consideriamo il sistema a simmetria sferica, partendo dalla legge del Viriale:

$$2T = -U \quad (2.1)$$

Tralasciando i coefficienti perché tanto sono dell'ordine delle unità, si ottiene

$$2 \frac{M\sigma^2}{2} = \frac{GM^2}{R} \quad (2.2)$$

dove σ è la *dispersione di velocità viriale*. Dalla 2.2 otteniamo che

$$\sigma^2 = \frac{GM}{R} \quad (2.3)$$

dove si ha che $\|\vec{v}_t\| = \sigma$

Ora considerando la formula 1.27, possiamo fare un'ulteriore approssimazione dovuta dal fatto che $\|\vec{v}_t\| \gg \|\vec{v}_f\|$ (del sistema), allora otteniamo che il *potenziale di Rosenbluth* dato dalla 1.25 approssimato alle alte velocità diventa

$$\Psi \sim \frac{1}{\|\vec{v}_t\|}$$

Dunque avremo che il tempo di rilassamento a due corpi diventa

$$t_{2b} \sim \frac{\|\vec{v}_t\|^3}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln(\Lambda)}$$

Sostituendo ora ciò che abbiamo ottenuto nella 2.3 e considerando $m_f = m$, con distribuzione omogenea $n_f = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, dove $M = mN$ è la massa del sistema, si avrà

$$t_{2b} \sim \frac{\|\vec{v}_t\|^3}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln(\Lambda)} = \frac{\sigma^3}{8\pi G^2 m \frac{mN}{\frac{4}{3}\pi R^3} \ln(\Lambda)} = \frac{\sigma^3 N}{6G^2 \ln(\Lambda) \frac{M^2}{R^3}} = \frac{NR}{6\sigma \ln(\Lambda)} \quad (2.4)$$

Confrontandolo ora con il tempo dinamico del sistema

$$t_{dyn} = \frac{2R}{\sigma} = \frac{2R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{GM}{R^3}}} \quad (2.5)$$

si ha

$$\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} \sim \frac{N}{12 \ln(\Lambda)} \quad (2.6)$$

Stimiamo ora il valore per il *Logaritmo di Coulomb*, $\ln(\Lambda) = \ln(\frac{2R}{b_m})$, dove il valore stimato per b_m deriva dal considerare l'equazione del moto $\mu v^2 = \frac{Gm^2}{b_m}$ considerando tutte le masse uguali di valore m , si ottiene quindi

$$\ln(\Lambda) = \ln(N)$$

Dunque si ha che se messi a confronto i due tempi caratteristici ci danno

$$\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} \sim \frac{0.1N}{\ln(N)} \quad (2.7)$$

Si nota quindi che con l'aumentare del numero di corpi (N) il t_{2b} aumenta. La spiegazione di questo fatto la si può ottenere facendo una considerazione sui vari fattori che danno origine al tempo di rilassamento. Nel caso del t_{2b} i fattori che lo influenzano sono il *numero di urti* e l'*energia ceduta* ad ogni urto. Consideriamo quindi un esempio pratico: partendo da due sistemi identici, stessa massa totale M , stesso t_{dyn} (stesso σ) e stesse dimensioni ($2R$), se frammentiamo i due sistemi in un numero diverso di oggetti N_1 e N_2 , si ottiene che l'energia totale trasferita dagli urti è data da $(N_i) \times (\frac{M}{N_i})^2$. Considero $N_1 < N_2$, si ha quindi che in un caso ho suddiviso il sistema in meno oggetti (N_1) ma di massa maggiore (di massa m_{f_1}), invece nell'altro caso ho più corpi (N_2), ma di massa inferiore (di massa m_{f_2}). Si ha che nel sistema con più corpi, e quindi più urti (N_2), c'è meno energia trasmessa. La spiegazione di questo fenomeno deriva direttamente dalla formula 1.19, dove vediamo che $\Delta E \propto m_f^2$. Di conseguenza sapendo che $m_f = \frac{M}{N}$, considerando sistemi di massa totale M uguale e che ci sono N urti che prendono parte al trasferimento totale di energia, si vede che

$$\Delta E_{sing} \propto m_f^2 \implies \Delta E_{tot} \propto N \times \frac{M^2}{N^2} \propto \frac{M^2}{N}$$

Si vede come la variazione totale di energia dovuta da tutte le interazioni sia inversamente proporzionale al numero di urti (e di corpi che incontra) N .

Andiamo ora a calcolare alcuni valori tipici di sistemi astrofisici reali, ottenendo il loro valore di t_{2b} tramite la 2.7:

- **Ammassi globulari**, composti da $N = 10^5 - 10^6$ stelle e con $t_{dyn} \simeq 10^6$ years ottengo che $t_{2b} \simeq 4 \times 10^9$ years, si osserva che questo tempo è inferiore a quello di vita dell'universo, questo ci permette di dire che questi sono sistemi leggermente collisionali.
- **Ammassi aperti**, composti da $N = 10^2 - 10^3$ stelle e con $t_{dyn} \simeq 10^6$ years si ottiene dunque $t_{2b} \simeq 10^7$ years, anche in questo caso vediamo che il tempo di rilassamento è inferiore a quello dell'Universo, possiamo concludere dunque che anche in questo caso siamo di fronte ad un sistema collisionale.
- **Galassie ellittiche**, composta da $N \simeq 10^{11}$ e $t_{dyn} \simeq 2 \times 10^8$ years ottenendo quindi che $t_{2b} \simeq 10^{17}$ years, a differenza dei primi due notiamo come in questo caso il valore di t_{2b} sia molto maggiore del tempo di Hubble, il che ci fa concludere che le galassie siano sistemi non collisionali.

Da questi semplici esempi abbiamo visto come effettivamente le considerazioni fatte in precedenza sui sistemi composti da un numero maggiore di corpi, rispetto a quelli contenenti un numero minore, siano corrette, nonostante le diverse approssimazioni fatte. Questo ci dimostra la correttezza del metodo di approccio utilizzato e come questo tempo caratteristico sia valido per ottenere informazioni riguardanti la collisionalità di un sistema.

2.2 Considerazioni generali sui Sistemi Collisionali e la conservazione dell'energia

Andiamo ora ad affrontare una serie di proprietà elementari che possiamo dedurre nel caso di *sistemi collisionali*, collegati alla conservazione dell'energia. Possiamo affrontare l'argomento dividendo in punti la trattazione.

2.2.1 Problema N-corpi con $E < 0$

Se consideriamo un sistema a $N \geq 3$ corpi, si ha che nel caso di $E < 0$, ci può essere *escape* di un corpo (**NB:** c'è la possibilità, ma non è necessario che succeda). Ovvero si può avere che anche nel caso in cui l'energia totale del sistema sia minore di zero, il sistema può perdere stelle in maniera continuativa, senza violare la conservazione dell'energia. Un risultato che sembra strano se pensiamo al problema dei due corpi, un caso alquanto particolare del più generico problema degli N-corpi; in quel caso particolare infatti se l'energia $E < 0$ allora si ha che il sistema è legato e nessuno dei due corpi può sfuggire. Tornando al caso generale, il fatto che il corpo nonostante abbia energia negativa possa sfuggire dal sistema, è direttamente collegato alla **conservazione dell'energia**, dal momento che in un sistema legato come quello degli N-corpi, dove essi interagiscono tra di loro tramite la forza gravitazionale, si ha un *equipartizione* delle energie, ovvero ogni corpo possiede la stessa *energia cinetica*. La redistribuzione viene descritta da " $m_i \frac{v_i^2}{2} = -m_i \phi_{TOT}$ " dove " ϕ_{TOT} " è il potenziale totale. Vediamo dunque che ogni corpo possiede la stessa energia cinetica, a discapito di quello che è il "serbatoio" totale dell'energia, dovuto dal potenziale totale. Si ha infatti che ogni oggetto ha un *energia potenziale* diversa proporzionale alla massa. Osservando la formula sopracitata questo comporta però che corpi di massa m_i minore abbiano velocità v_i maggiori, e di conseguenza risalgono più facilmente lungo la buca di potenziale, riuscendo così a sfuggire più facilmente ad un sistema di N corpi legati. Possiamo quindi concludere che in un sistema come questo, prendendo un corpo al suo interno e espellendolo dal sistema ad altissima velocità, vedremo che la conservazione dell'energia è comunque rispettata, in quanto basta che gli $N - 1$ che rimangono si stringano sempre di più tra di loro, così da avere che l'energia potenziale negativa fa sì che la somma di quello che rimane sommata

all'energia positiva scappata (tramite energia cinetica) dà come totale l'energia negativa iniziale.

2.2.2 Problema N-corpi con $E > 0$

Se consideriamo un sistema a $N \geq 3$ corpi, con $E \geq 0$, allora si avrà che almeno un corpo deve "scappare", quindi per il teorema di Weierstrass-Jacobi si avrà sicuramente l'*escape* di almeno un corpo. A questo punto ci troviamo con un sistema di $N - 1$ corpi, in cui si avranno due casi: il primo dove l'energia del nostro sistema è ancora ≥ 0 quindi si avrà nuovamente tale situazione, dove ci sarà l'*escape* di un altro corpo; nel secondo caso invece, si potrebbe avere che il corpo che "scappa", viene eiettato ad una velocità talmente tanto alta (di conseguenza l'energia cinetica data da $m_i \frac{v_i^2}{2}$) che porta via con se dell'energia, e quel sistema a $N - 1$ corpi che rimane lì, si trova ad $E < 0$ e di conseguenza ci si ritrova al caso precedente (non è detto ci sia per forza un'ulteriore *escape*). Dove l'energia E ricordiamo essere come nel caso precedente energia baricentrica totale del sistema, ovvero riferita sempre al Sistema del Baricentro.

2.2.3 Teorema del Viriale per Sistemi Autogravitanti

Tratteremo brevemente quello che è il Teorema del Viriale per un sistema autogravitante, enunciandone qualche proprietà e mostrando infine l'utilissimo *Piano del Viriale* molto esplicativo nel caso della dinamica dei sistemi collisionali. Il teorema del viriale nella forma vista nell'equazione 2.1 deriva da una famiglia più grande (infinita) di identità tensoriali per cui vale il teorema del viriale. Da questa famiglia possiamo poi considerare quella che è la più semplice delle identità tensoriali, ovvero quella di ordine 2, abbiamo dunque una matrice 3×3 , essendo essa simmetrica abbiamo ora 6 oggetti diversi, calcolandone infine la traccia ottengo quello che è il "*Scalar Virial Theorem*" (SVT)

$$2T = -W \quad (2.8)$$

Ora considerando che ci troviamo nel caso più specifico in cui i corpi interagiscono tra di loro per la *forza di gravità* ($\propto \frac{1}{r^2}$) si ha che la relazione generale 2.8 diventa quella vista nella 2.1, ovvero sostituiamo $U \rightarrow W$. Trovandoci quindi in una situazione dove le caratteristiche del sistema sono:

- Autogravitante, cioè tutti gli oggetti presenti nel sistema partecipano a formare il campo di interazione gravitazionale;
- Forza di Gravità ($\propto \frac{1}{r^2}$).

dove vale il SVT, e le forze sono conservative $T + U = E$. All'equilibrio avremo che:

$$\begin{cases} T = \frac{|U|}{2} \\ T = E + |U| \end{cases} \quad (2.9)$$

Dalle relazioni viste nella 2.9 e quanto visto nel grafico 2.1 sappiamo che si trova un sistema all'equilibrio solo se T e U sono distribuite come segue

$$\begin{cases} |U|_e = -2E \\ T_e = -E \end{cases} \quad (2.10)$$

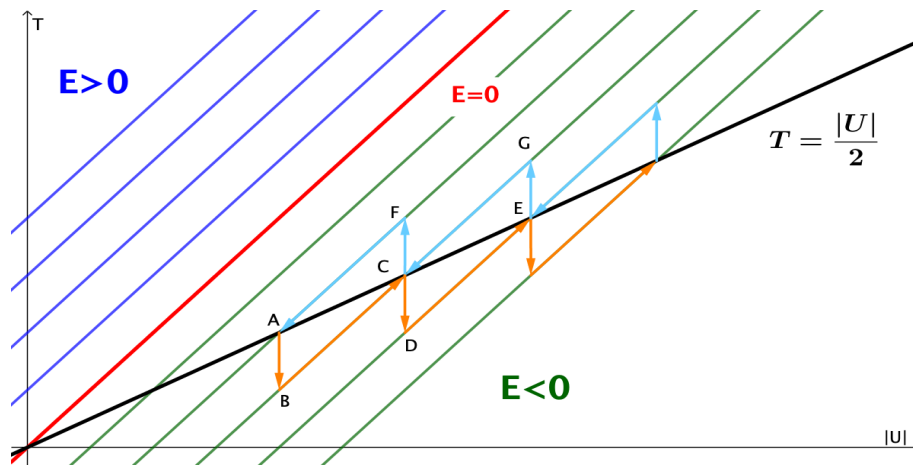


Figura 2.1: Piano del Viriale per un sistema autogravitante

3 Esempi in astrofisica: Dinamica degli Ammassi Globulari

In astrofisica un'applicazione molto interessante di quanto visto finora la si può osservare negli Ammassi Globulari (AG), ovvero dei sistemi Collisionali, autogravitanti composti da $N = 10^5 - 10^6$ stelle.

3.1 Equipartizione dell'energia

Un importante ruolo nella dinamica di questi sistemi stellari la gioca l'equipartizione dell'energia, che tende a redistribuire l'energia totale del sistema in tutti i corpi che lo formano. Questo fenomeno porta alla formazione di quella che è la tipica distribuzione Maxwelliana (DM) delle velocità. In maniera intuitiva possiamo dire che all'equilibrio termodinamico non c'è stato di quiete, ma anzi accadono un sacco di cose, ovvero c'è un bilancio d'equilibrio tra riscaldamento e raffreddamento. Il che ci fa capire che in un sistema descritto da una DM si avrà che al suo interno accadono molti fenomeni, in generale, corpi "caldi" verranno "raffreddati" e viceversa.

3.1.1 Formazione struttura *Core-Halo* ed Evaporazione gravitazionale

Una conseguenza diretta del fenomeno sopracitato porta a quella che è la formazione della struttura tipica di un ammasso globulare in fase di evoluzione dinamica, ovvero la struttura *Core-Halo*.

Questo è dovuto dal fatto che grazie alla ripartizione dell'energia all'interno del sistema, per il ragionamento fatto al capitolo 2.2, si avrà che le stelle con massa minore aumenteranno la loro energia cinetica, spostandosi così più in alto nella buca di potenziale, ovvero allontanandosi dalla regione centrale (centro dell'ammasso);

invece le stelle di massa maggiore perderanno energia cinetica, spostandosi più in basso nella buca di potenziale, dunque verso la zona centrale del sistema stellare.

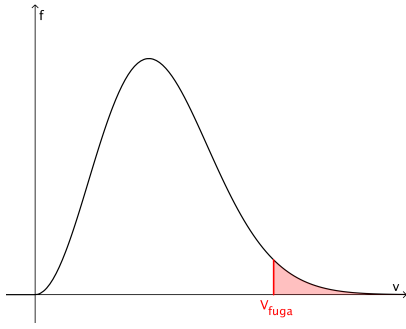


Figura 3.1: Distribuzione Maxwelliana delle velocità

Così facendo si formeranno due strutture distinte nell'ammasso:

- Regione centrale, detta *Core*, formata da stelle più pesanti legate tra loro; è una zona ad alta densità stellare.
- Regione laterale, detta *Halo*, assimilabile ad un'atmosfera di stelle, formata da stelle più leggere. Essa è una zona a bassa densità stellare.

Un altro fenomeno collegato all'equipartizione dell'energia è il *fenomeno di evaporazione gravitazionale*. Riprendendo lo stesso ragionamento fatto in precedenza e sapendo che gli AG hanno una velocità di fuga

finita, si avrà che le stelle che in seguito alle interazioni che avvengono all'interno del sistema, aumenteranno continuamente la loro energia cinetica e di conseguenza la loro velocità, fino ad arrivare e superare il limite dato dalla v_{fuga} come si nota nel grafico 3.1. A questo punto questi corpi celesti hanno abbastanza energia cinetica per riuscire a "scappare" dalla buca di potenziale del sistema.

3.2 Catastrofe gravotermica

Partiamo considerando il grafico del Piano del Viriale (PdV) 2.1), ora faremo delle considerazioni seguendo un ragionamento logico, tenendo conto di quanto appreso fino ad ora, arrivando infine a delle conclusioni. Consideriamo l'aumento dell'energia, aumentiamo quindi la velocità delle stelle, similmente alla termodinamica classica la termodinamica gravitazionale ci dice che in un sistema autogravitante, l'aumento dell'energia corrisponde ad un "raffreddamento" del sistema, lo si può notare osservando la figura (vedi 2.1), si ha $T_A < T_C$, ma l'energia è aumentata (passando per T_F). Quindi abbiamo ottenuto che il sistema si è "raffreddato" e di conseguenza allargato. Considerando ora l'energia potenziale gravitazionale U , che sappiamo essere negativa, di conseguenza il $|U|$ diminuisce, ma in realtà l'energia U è aumentata in quanto da un valore molto negativo (più basso) è passata ad un valore meno negativo (meno basso) e quindi U è più "calda"; l'energia *immessa* al sistema finisce in questa variazione. Inoltre la T diminuisce, finendo anch'essa nel "conteggio" totale di U . Abbiamo di conseguenza che l'energia totale aumenta. La *catastrofe gravotermica* consiste proprio in questo processo, ovvero le energie cominciano a ridistribuirsi, la dinamica gravitazionale comincia a formare una Maxwelliana per la distribuzione delle velocità 3.1 e si nota il fenomeno sopracitato di *evaporazione gravitazionale*. Questo fenomeno quindi riguarda un guadagno di energia che il sistema poi ridistribuisce contraendosi. Quando esso raggiunge una densità di circa 10^3 volte quella media, allora le regioni centrali dell'AG si separano dalle regioni esterne, come visto nel paragrafo precedente. Ogni tanto può accadere che le stelle di massa minore che entrano dentro il *core* subiscono urti dai sistemi più energetici e queste stelle più leggere vengono eiettate via, portando con loro parte dell'energia. Più energia viene persa più il *core* si contrae, ottenendo quindi un sistema che si "scalda" continuamente, dovuto dal fatto che è un *sistema autogravitante virializzato*. Il sistema si "scalda" sempre di più fino ad arrivare alla *catastrofe gravotermica*, che è una instabilità. Ora andremo ad analizzare quelli che sono due fenomeni collegati a questa instabilità. Nel *core* di un AG dove è in atto una catastrofe gravotermica, le stelle cominciano a "rendersi conto" di non essere più puntiformi, cioè risentendo molto delle interazioni con le stelle vicine, le conseguenze date da questi fenomeni sono collegati a sistemi con *tempi di rilassamento brevi*.

3.2.1 3 Body Capture

In questa particolare situazione si hanno 3 stelle, che sentendo l'influenza forte l'una sull'altra, danno origine a un "3 body problem". La stella più leggera viene catapultata fuori con una velocità elevatissima, le due stelle rimanenti formano un sistema binario (da notarsi che NON sono un sistema binario primordiale). Questa particolare categoria di binarie nate da un *3 body problem*, danno vita a quelle che vengono chiamate *Blue Straggler Stars* (BSS), stelle blu, più calde e massive.

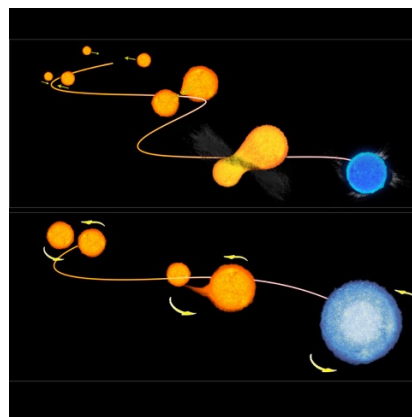


Figura 3.2: Esempio di formazione di una BSS, partendo da un sistema binario.

3.2.2 "Tidal Capture"

Quando due stelle vicine, passano abbastanza vicino ($F_{tidal} \propto \frac{1}{r^3}$) cominciano a deformarsi, questa deformazione non è un fenomeno *anelastico* e il lavoro di compressione emette calore. Quindi questo lavoro prodotto dalla cattura mareale viene dissipato, si ha perdita di energia cinetica, aumenta l'energia potenziale e di conseguenza il sistema si stringe sempre di più. Si ha dunque un'altra famiglia di binarie, dette Binarie Mareali. C'è un irraggiamento di energia dovuta al lavoro dissipato dalle *forze Mareali*, le orbite di queste binarie sono solitamente strette e circolari.

Continuando a descrivere la dinamica di un Ammasso Globulare dopo la fase di *catastrofe gravotermica*, si ha che le stelle che arrivano dall'*halo* cominciano a prendere l'energia dalle binarie e non più dalle stelle di campo. E' come se ora si avesse che nel *core* si fosse "accesa" una nuova fonte di energia, cioè le binarie, e non più le stelle stesse del *core*. Queste binarie si contraggono sempre di più fino a raggiungere quello che è il loro limite di contrazione, ovvero il limite dato delle *Hard-binary*. Una volta raggiunto questo stadio le stelle che vengono da fuori non le "vedono" più, e di conseguenza non le utilizzano più come sorgente di energia. Si arriva dunque ad una fase di *oscillazione gravotermica*, ovvero si presenta un ciclo di espansione e contrazione del *core*.

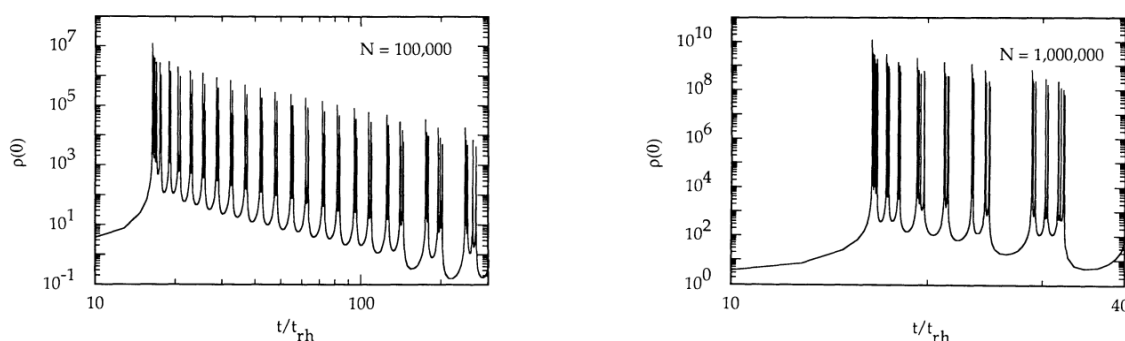


Figura 3.3: Variazione della densità durante oscillazioni gravotermiche in funzione dei tempi scala caratteristici. Con diversi numeri N di corpi. - *Breeden, Cohn & Hut, 1994*

Bibliografia

- [1] **L. Ciotti**, *Astrofisica extragalattica*, appunti lezione, 2022
- [2] **L. Ciotti**, *Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol 5-A – La Matematica nella Società e nella Cultura, n.1, p. 97-141, 2002
- [3] **L. Ciotti**, *Appunti di dinamica stellare*, Bertinoro, 2006
- [4] **L. Ciotti**, *Introduction to stellar dynamics*, Cambridge University Press, 2021
- [5] **Lyman Spitzer, Jr.**, *Dynamical evolution of globular clusters*, Princeton University Press, 1987
- [6] **Breeden Joseph L. , Cohn Haldan N. , Hut Piet**, *The Onset of Gravo-thermal Oscillations in Globular Cluster Evolution*, The Astronomical Journal, 421:195-205, 1994, <https://doi.org/10.1086/173636>
- [7] **F. Ferraro et al.**, *The stellar dynamical clock*, Cosmic Lab, 2021