ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica, Curriculum applicativo

APPROSSIMAZIONE DEL MOTO BROWNIANO FRAZIONARIO CON PASSEGGIATE ALEATORIE PESATE

Tesi di Laurea in Probabilità

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Massimo Campanino

Presentata da:
Gabriella Ida Ghiara

Seconda Sessione
Anno Accademico 2010-2011

Introduzione

La presente tesi verte sullo studio dell'approssimazione del moto Browniano frazionario con passeggiate aleatorie pesate (ed alcune sue applicazioni).
Nel 1900 il francese Louis Bachelier scrisse a Parigi, nell'ambito dei suoi studi di dottorato in economia, una dissertazione dal titolo 'Théorie de la Spéculation'. Egli fu il primo a rendersi conto che era possibile applicare la teoria della probabilità allo studio dei mercati finanziari.
Cinque anni prima di Einstein e di Wiener, Bachelier descrisse tutte le caratteristiche essenziali del moto Browniano introducendo il concetto di processo stocastico in tempo continuo. Il matematico francese, nella sua tesi, trattò la fluttuazione dei prezzi delle obbligazioni francesi rifacendosi ad un concetto prettamente fisico affrontato nel secolo precedente da un botanico scozzese di nome Brown, da cui ha origine il nome moto Browniano.
Il botanico nel 1827, mentre esaminava al microscopio alcuni granelli di polline immersi nell'acqua, vide che molti di essi si muovevano percorrendo un tracciato casuale, ondulatorio. La particolare intuizione del botanico scozzese, fu utilizzata da Bachelier nella modellizzazione dei prezzi dei titoli azionari secondo il modello Random Walk, questa modellistica si basava sull'ipotesi statistica che i prezzi delle azioni seguissero un processo di moto Browniano.
Nel 1905 fu Albert Eistein a dare un' interpretazione molecolare al fenomeno del movimento osservato da Brown, mostrando come il moto delle particelle fosse descrivibile matematicamente ipotizzando che i salti di queste fossero dovuti agli scontri casuali delle particelle di polline con le molecole dell'acqua.

Successivamente negli anni 50 gli economisti iniziarono a prendere in considerazione il modello Random Walk, e solo qualche anno dopo ci si interessò alla dissertazione di Bachelier e si iniziò a diffondere questo modello tra gli economisti.
Un altro studioso, a cui si deve il merito di un progresso nell'ambito finanziario, fu Osborne che nel 1964 formalizzò un modello Random Walk per l'andamento delle azioni. In particolare, egli elaborò un processo in base al quale le variazioni dei prezzi delle azioni potevano essere equivalenti al moto di una particella in un fluido, cioè al moto Browniano. Dato che le variazioni dei prezzi risultavano essere indipendenti, aspettare che le distribuzioni delle variazioni fossero normali, con media stabile e varianza finita, in base al Teorema del Limite Centrale.
Tuttavia solo grazie alla teoria assiomatica, introdotta da Kolmogorov intorno al 1930, si può guardare oggi al moto Browniano come ad un processo stocastico a tempi continui: il processo di Wiener.
L'interesse principale di questa tesi è rivolto al moto Browniano frazionario, partendo dalle sue origini nei lavori di Kolmogorov, che attraverso lo sviluppo della teoria della turbolenza dei grandi numeri di Reynolds, introdusse i campi aleatori con incrementi omogenei ed isotropi.
Lo scopo è quello di introdurre modelli discreti, che corrispondono a fenomeni reali ad esempio della finanza, che hanno come limite il moto Browniano frazionario. L'utilizzo di tale moto si giustifica nei casi in cui una variazione di prezzo è dipendente dalle variazioni precedenti e quindi il semplice moto Browniano, non è in grado di descriverla. Alla luce di queste considerazioni si fa riferimento al moto Browniano frazionario, il quale approssima meglio l'andamento dei mercati e di molti fenomeni naturali, i quali seguono un processo stocastico che presenta una dipendenza di lunga portata nelle osservazioni.

In questa tesi si mostra, seguendo il lavoro di Lindostrom [11], come una passeggiata aleatoria pesata, opportunamente riscalata, possa convergere al moto Browniano frazionario. Nel **Capitolo 1** ripercorro le origini del moto Browniano frazionario, a partire dalla sua introduzione da parte di Kolmogorov.

Nel **Capitolo 2** introduco le definizioni relative ai processi stocastici, ai processi auto-similari, ed in particolare al moto Browniano frazionario e le sue caratteristiche, come la dipendenza di lunga portata.

Nel **Capitolo 3** introduco lo spazio di Skorohod, la sua topologia e la convergenza debole.

Nel **Capitolo 4** espongo i risultati di Lindostrom che mostrano la convergenza di una passeggiata aleatoria pesata al moto Browniano frazionario. La dimostrazione è suddivisa in due parti: per $H > 1/2$ e $H < 1/2$.

Indice

Capitolo 1

Storia del Moto Browniano Frazionario

Generalmente si pensa che il moto Browniano frazionario sia stato introdotto da Mandelbrot, ma in realtà già nel 1940 Kolmogorov introdusse questo processo, sia pure in un diverso contesto.

1.1 Hurst

Per il moto Browniano frazionario molto importante risulta l'apporto dell'idrologo Hurst. Egli lavorando ai progetti di dighe sul Nilo dal 1907 all'inizio degli anni 50 ed occupandosi del controllo delle riserve idriche, concluse che una riserva ideale non dovrebbe mai straripare ed una politica di rilascio idrico dovrebbe essere formulata in modo da soddisfare i bisogni idrici a valle senza svuotare completamente la riserva. Nel tentativo di definire un modello matematico in grado di simulare il problema reale, Hurst ipotizza che la parte incontrollabile del sistema (l'afflusso di acqua nel bacino) segua un cammino casuale. Se l'ipotesi di cammino casuale risulta verificata, il range di fluttuazione dovrebbe crescere in proporzione alla radice quadrata dell'intervallo temporale di misurazione T. Le analisi empiriche svolte da Hurst sulle piene del Nilo contraddicono, però, tale ipotesi di casualità e queste lo spinsero a svolgere studi analoghi su altri sistemi naturali, dove nota che gran parte di essi non seguono un vero e proprio cammino casuale, ma un cammino casuale persistente. Queste considerazioni, riportate nelle esigenze pratiche di Hurst, sostanzialmente implicano che, dopo un incremento del livello della riserva, è più probabile registrare un ulteriore incremento piuttosto che un suo decremento. Ad un certo punto questa tendenza termina, cioè avviene una brusca inversione del trend e diventa più probabile osservare un decremento del livello seguito da un ulteriore decremento. Se il sistema coincidesse con un cammino casuale il valore dell'esponente H sarebbe 0.5 ma, effettuando l'analisi su svariati fenomeni naturali, Hurst ottiene sempre valori di H assai superiori: ad esempio, per le variazioni logaritmiche del livello idrico del Nilo, Hurst calcola empiricamente un valore di H pari a circa 0.9 . Questo sta a significare che la distanza coperta dal sistema è assai maggiore di quella predetta dal modello Random Walk: il sistema risulta caratterizzato da un effetto memoria per il quale ogni osservazione influenzata da quelle passate influenzerà quelle future.

Si osservano diverse situazioni al variare di H:

- per $H = 0.5$ si denotano una serie di eventi indipendenti: ogni variazione non è influenzata dalle precedenti e neppure influenzerà quelle future;

- per $0 \leq H < 0.5$ la serie è antipersistente. Ossia se in un dato periodo il sistema ha subito un incremento (decremento) è più probabile registrare un successivo decremento (incremento) che un ulteriore incremento (decremento). La serie risulta più volatile di una serie casuale (poiché caratterizzata da più frequenti inversioni) tanto più il valore di H si avvicina a zero;

- per $0.5 < H < 1$ si ha una serie persistente, caratterizzata da una dipendenza positiva tra le variazioni generate dal processo: se nell'ultima osservazione abbiamo registrato un incremento (decremento) è più probabile che l'osservazione successiva registri un ulteriore incremento (decremento). La probabilità di registrare due variazioni di segno concorde risulta tanto più alta quando H si avvicina ad uno.

1.2 Kolmogorov e la spirale di Wiener

Kolmogorov, nel 1941 sviluppa la teoria fenomenologica sulla turbolenza dei grandi numeri di Reynolds, dove introduce i campi aleatori con incrementi omogenei e isotropi. Questa teoria si basa su due ipotesi di auto-similarità con una struttura di funzione di potenza per grandi distanze. L'anno successivo Kolmogorov presenta rilevanti costruzioni matematiche in due brevi note: la prima riguardante la rappresentazione spettrale per processi con incrementi stazionari e la seconda i processi con incrementi stazionari auto-similari.
Kolmogorov fu il primo a considerare i processi gaussiani continui con incrementi stazionari e con la proprietà di auto-similarità [1], questo significa che $\forall a > 0$ esiste $b > 0$ tale che verifica:

$$\text{Legge}(X(at); t \geq 0) = \text{Legge}(bX(t); t \geq 0)$$

Da questo segue che tali processi, hanno una speciale funzione di correlazione:

$$\mathbb{E}X(t)X(s) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

dove $0 < H < 1$.
Kolmogorov chiama tali processi gaussiani 'Spirali di Wiener', e scrive un trattato dal titolo 'The Wiener spiral and some other interesting curves in Hilbert space' [2] in cui affronta alcuni casi di curve presenti nello spazio di Hilbert.

Sotto il nome di trasformazione di similitudine in H si intende una qualunque trasformazione A dello spazio in se stesso che è rappresentabile nella forma:

$$Ax = a + qUx$$

dove a è un elemento fissato nello spazio di Hilbert, U è un operatore unitario e q è un numero reale positivo.

Definizione 1.1. Una funzione $\xi(t)$ della classe $\mathfrak{R}$ appartiene alla classe $\mathfrak{A}$, se per un opportuno numero reale $k \neq 0$ esiste una trasformazione di similitudine A_k tale che verifica:

$$\xi(kt) = A_k \xi(t)$$

per tutti i t.

Se lo spazio di Hilbert è sostituito da uno spazio unitario finito dimensionale, allora le uniche funzioni della classe $\mathfrak{A}$ sono funzioni lineari della forma:

$$\xi = ut + v$$

dove u e v denotano elementi fissati dello spazio.
Il fatto interessante è che nello spazio di Hilbert esistono altri tipi di funzioni della classe $\mathfrak{A}$. Geometricamente ogni funzione di tale classe definisce una curva nello spazio H, invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni di similitudine e dipendente da due parametri che permettono di rappresentare la curva su se stessa in modo che un'arbitraria data coppia di suoi punti x e $y \neq x$ vada in un'arbitraria data coppia x' e $y' \neq x'$ di punti.

Proposizione 1.2.1. *La funzione $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$, che corrisponde alla funzione $\xi(t)$ della classe $\mathfrak{A}$, può essere rappresentata nella forma :*

$$B_\xi(\tau_1, \tau_2) = c[|\tau_1|^\gamma + |\tau_2|^\gamma - |\tau_1 - \tau_2|^\gamma]$$

dove c e γ sono costanti reali, che soddisfano le disuguaglianze seguenti:

$$c \geq 0 \quad e \quad 0 \leq \gamma \leq 2.$$

Risulta evidente che nel caso in cui $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$ non sia identicamente nullo le costanti $c = c_\xi$ e $\gamma = \gamma_\xi$ sono definite univocamente dalla funzione $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$ e di conseguenza dalla funzione $\xi(t)$ stessa.
Nel caso inverso $B_\xi(\tau_1, \tau_2)$ risulta identicamente nullo solo se la funzione $\xi(t)$ risulta costante.
Di seguito considero solo il caso in cui $\gamma_\xi > 0$ e $c_\xi > 0$. Le funzioni della classe $\mathfrak{A}$, a meno di trasformazioni di movimento in H, sono caratterizzate dagli invarianti α_ξ, c_ξ e γ_ξ. Per quanto riguarda le curve risultanti, esse sono definite a meno di congruenza tramite gli invarianti α_ξ e γ_ξ, la varianzione dell'invariante c_ξ invece non cambia la forma della curva, che è rappresentata tramite la funzione $\xi(t)$, ma è legata solo alla variazione della scelta del parametro t.

Proposizione 1.2.2. *A qualunque* α $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$*,* $c(c > 0)$ *e* $\gamma(0 < \gamma \leq 2)$*, corrisponde almeno una funzione* $\xi(t)$ *della classe* $\mathfrak{A}$ *con:*

$$\alpha_\xi = \alpha, \quad c_\xi = c, \quad \gamma_\xi = \gamma.$$

Per la funzione della classe $\mathfrak{A}$ che corrisponde ai dati α, c e γ si ha:

$$\theta_\xi = 0$$

$$F_\xi(\Delta_\lambda) = \frac{c}{D} \int_{\Delta_\lambda} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{\gamma+1}}$$

dove

$$D = 4 \int_0^\infty \frac{(\sin \frac{\lambda}{2})^2}{\lambda^{\gamma+1}} d\lambda$$

Nel caso in cui si ha $\gamma = 2$, la funzione $\xi(t)$ risulta lineare, ossia rappresenta geometricamente una retta nello spazio di Hilbert. Di seguito viene affrontata la classe $\mathfrak{W}$ delle funzioni $\xi(t)$ della classe $\mathfrak{A}$, per le quali vale:

$$\gamma_\xi = 1.$$

Le curve che corrispondono a questa classe di funzioni sono chiamate da Kolmogorov 'Spirali di Wiener'. In base a quanto detto precedentemente una spirale di Wiener è definita a meno di una congruenza tramite l'unico invariante α_ξ. Se si considerasse solamente la posizione della curva nel corrispondente spazio H_ξ, si avrebbe che per due qualunque spirali di Wiener, definite tramite le funzioni $\xi_1(t)$ e $\xi_2(t)$, esiste una corrispondenza biunivoca fra H_{ξ_1} e H_{ξ_2} della forma:

$$y = a + Ux$$

dove a è un elemento fissato di H_{ξ_1} ed U è un operatore lineare isometrico, che trasforma la prima nella seconda curva. Ciò significa che tutte le spirali di Wiener risultano congruenti l'una con l'altra, sotto l'ipotesi di considerare solo la posizione della curva in H_ξ.

Proposizione 1.2.3. *Affinché una funzione della classe* $\mathfrak{R}$ *appartenga alla classe* $\mathfrak{W}$*, è necessario e sufficiente che per due arbitrari intervalli disgiunti dell'asse* t*:*

$$s_1 < t < t_1, \quad s_2 < t < t_2$$

vale l'uguaglianza:

$$(\xi(t_1) - \xi(s_1), \xi(t_2) - \xi(s_2)) = 0$$

La precedente **Proposizione** geometricamente può essere espressa come segue:
Le spirali di Wiener sono caratterizzate completamente tramite le seguenti proprietà:

- sono invarianti rispetto ad un gruppo di movimenti;
- le loro corde, che corrispondono a due archi disgiunti sono ortogonali.

Kolmogorov nel trattato affronta alcune osservazioni che seguono dalle precedenti proposizioni:

1. per $\gamma < 2$ la funzione $\xi(t)$ della classe $\mathfrak{A}$ non è differenziabile;

2. se $\xi(t)$ appartiene alla classe $\mathfrak{A}$, a valori diversi di t corrispondono diversi ξ. Le funzioni della classe $\mathfrak{R}$ non hanno necessariamente questa proprietà, fra di loro ci sono ad esempio funzioni periodiche;

3. i valori della funzione $\xi(t)$ della classe $\mathfrak{A}$ non sono limitate in norma. Dato che i valori di una funzione della classe $\mathfrak{R}_o$ hanno norma costante, da questo segue che le classi $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{R}_o$ sono disgiunte.

Di seguito mostro un esempio della realizzazione della spirale di Wiener ed una sua applicazione.
Considero lo spazio di Hilbert H_0 della funzione dell'argomento reale z $(-\infty < z < \infty)$ a valori complessi con valore finito dell'integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2 dz$$

in cui il prodotto scalare è definito dalla forma:

$$< f, g >= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\overline{g(z)} dz.$$

Per $t \geq 0$ considero la funzione $\xi(t)$ uguale alla funzione $f(z)$ data da:

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{quando } 0 \leq z \leq t \\ 0 & \text{per gli altri valori di z} \end{cases}$$

Per $t \leq 0$ considero la funzione $\xi(t)$ uguale alla funzione $f(z)$ data da:

$$f(z) = \begin{cases} -1 & \text{quando } t \leq z \leq 0 \\ 0 & \text{per gli altri valori di z} \end{cases}$$

Si affronta successivamente un'applicazione delle funzioni delle classi $\mathfrak{R}$,$\mathfrak{R}_o$,$\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{W}$ nel calcolo delle probabilità [3].
Sia dato uno spazio di probabilità, le variabili aleatorie complesse X di questo spazio con attesa finita pari a $E(|X|^2)$ costituiscono, se si definisce il loro prodotto scalare tramite la formula $< X, Y >= E(X\overline{Y})$, uno spazio unitario R con un numero finito o infinito di dimensioni. In questo caso R soddisfa tutti gli assiomi dello spazio di Hilbert. Se ad ogni t corrisponde una variabile aleatoria allora si dice che $\xi(t)$ è una funzione aleatoria.
Supponendo che $\xi(t)$, per ogni t, appartenga allo spazio R e risulti continua nel senso della convergenza della norma in R allora si arriva alle seguenti osservazioni [4]:

1. l'appartenenza di $\xi(t)$ alla classe $\mathfrak{R}_o$ significa che la funzione aleatoria $\xi(t)$ è stazionaria in senso lato;

2. quando una funzione aleatoria $\xi(t)$ appartiene alla classe $\mathfrak{R}$ si chiama funzione aleatoria con incrementi stazionari;

3. la tesi della **Proposizione 1.2.3**:

   $$(\xi(t_1) - \xi(s_1), \xi(t_2) - \xi(s_2)) = 0$$

   nel linguaggio del calcolo delle probabilità sta a significare l'annullarsi del coefficiente di correlazione fra due incrementi su due intervalli disgiunti dell'asse t.

Le funzioni aleatorie della classe $\mathfrak{W}$ sono funzioni con incrementi stazionari e non correlati. Un caso particolare di queste funzioni aleatorie, che riguardano lo studio del moto Browniano, fu considerato già nel 1923 da Wiener [5] in alcune osservazioni che conducono alle spirali di Wiener studiate da Kolmogorov.

1.3 B.B. Mandelbrot e J.W. van Ness

I lavori di Kolmogorov sui processi di Wiener e di Yaglom sui processi con n incrementi stazionari, definirono le basi su cui Mandelbrot e Van Ness fondarono il moto Browniano frazionario.
Kolmogorov arrivò a rappresentare i processi autosimilari con incrementi stazionari mediante la seguente formula:

$$B_H(t) - B_H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{it\lambda} - 1)|\lambda|^{-H-\frac{1}{2}} dB(\lambda)$$

dove $B()$ è un processo con incrementi omogenei ortogonali. Successivamente Yaglom [6], con l'aiuto di Pinsker, descrisse i processi con n incrementi stazionari ed ottenne per loro una versione della decomposizione di Wold [7], secondo cui una serie storica stazionaria può essere espressa come somma di una componente deterministica ed una componente stocastica la quale a sua volta può essere espressa come una media mobile infinita. Con i loro studi viene anticipata la rappresentazione di tali processi B_H in termini di 'white noise' $dB()$:

$$B_H(t) - B_H(s) = c_H \int_{-\infty}^{t} \left[(t-r)_+^{H-\frac{1}{2}} - (s-r)_+^{H-\frac{1}{2}} \right] dB(r) \tag{1.1}$$

con $s < t$.

Più tardi, nel 1968 Mandelbrot e Van Ness interpretarono il secondo membro dell'equazione (1.1) come integrazione frazionaria di Weyl del 'white noise' e chiamarono B_H il moto Browniano frazionario nel caso gaussiano.
Nel loro trattato Mandelbrot e Van Ness [8] definiscono una famiglia di funzioni gaussiane casuali come segue:

- $B(t)$ è un moto Browniano ordinario;
- H è un parametro che soddisfa la relazione $0 < H < 1$;
- il moto Browniano frazionario (FBM) di esponente H è una media mobile di $dB(t)$, in cui gli incrementi passati di $B(t)$ sono pesati dal kernel $(t-s)^{H-\frac{1}{2}}$.

Il moto Browniano frazionario fornisce modelli utili a moltissime serie temporali naturali le cui proprietà sono utili per scienziati, ingegneri ed esperti di statistica. La caratteristica fondamentale del moto Browniano frazionario è che l'intervallo di interdipendenza tra i loro incrementi è infinito. Di contrasto, lo studio delle funzioni casuali è stato dedicato prevalentemente alle sequenze di variabili casuali indipendenti, ai processi di Markov e ad altre funzioni casuali, con la proprietà che campioni sufficientemente distanti di queste funzioni o i loro incrementi sono indipendenti, o quasi indipendenti. Studi empirici di fenomeni casuali spesso suggeriscono, al contrario, una forte interdipendenza tra campioni distanti o incrementi. Una classe di questi esempi sorse in economia. È noto che le serie temporali economiche in genere presentano cicli di tutti gli ordini di grandezza, i cicli più lenti hanno periodi di durata paragonabile alla dimensione totale del campione. Gli spettri campione di tali serie non mostrano alcun 'periodo puro', ma una densità spettrale con un picco acuto in prossimità di frequenze intorno all'inverso della dimensione del campione. Molte di queste fluttuazioni sono chiamate $1 : f$ rumori, perchè la loro densità spettrale del campione ha la forma λ^{1-2H} con la frequenza λ, $\frac{1}{2} < H < 1$ ed H spesso vicino a 1.

Dal momento che i valori di H lontani da 1, sono spesso osservati, allora risulta impreciso il termine $1 : f$ rumori. Proprio per i motivi precedenti si propone di rietichettare $1 : f$ rumori come 'rumori frazionari'. Un'altra classe di fenomeni con interdipendenza estremamente lunga si incontra in idrologia, dove Hurst trovò la gamma dei flussi idrici cumulati al variare proporzionale di t^H con $\frac{1}{2} < H < 1$. La legge di Hurst acquista un'importanza pratica nella progettazione dei sistemi d'acqua. Questi risultati empirici suggeriscono due obiettivi di ricerca in probabilità:

- promuovere lo sviluppo della teoria generale per coinvolgere i nuovi fenomeni;
- individuare e studiare in dettaglio famiglie di funzioni specifiche casuali che non verificano indipendenza asintotica.

Il lavoro di Mandelbrot e Van Ness è indirizzato al secondo obiettivo, poiché lo scopo non è principalmente quello di contribuire allo sviluppo di tecniche analitiche di probabilità, ma si sceglie il moto Browniano frazionario per trarre i risultati di interesse pratico con la minore difficoltà matematica.
Dal punto di vista puramente matematico, il loro trattato risulta essere in gran parte espositivo della teoria del moto Browniano frazionario già considerato implicitamente da Kolmogorov.

Capitolo 2

Moto Browniano Frazionario

Il moto Browniano frazionario (FBM) ed il suo processo incremento, il rumore gaussiano frazionario, sono spesso utilizzati per modellizzare fenomeni fisici che manifestano dipendenza a lungo raggio. Dopo aver introdotto i necessari strumenti matematici che occorrono per lo studio del FBM tratterò i processi auto-similari ad incrementi stazionari e darò una definizione rigorosa di moto Browniano frazionario e studierò il suo processo incremento.

2.1 Processi stocastici e filtrazione

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia I=[0,∞).

Definizione 2.1. Si definisce un processo stocastico a valori reali, una famiglia $\{X_t\}_{t\in I}$ di variabili aleatorie reali definite su $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$:

$$X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N, \qquad t \in I \tag{2.1}$$

Definizione 2.2. Una famiglia crescente $\mathcal{F}_t = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ di sotto σ-algebre di $\mathcal{F}$ che contengono gli eventi di misura nulla è detta filtrazione in $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$.

Un processo stocastico $\{X_t\}_t$ è detto *adattato* alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_t$ se:

$$\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t$$

per ogni $t \leq 0$; ovvero se X_t é $\mathcal{F}_t$-misurabile per ogni t.
$\mathcal{F}_t^X$ rappresenta le informazioni disponibili fino al tempo t per il processo X.

Definizione 2.3. Un processo stocastico $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t$ ed alla misura $\mathbb{P}$ se, per ogni $t \geq 0$, si ha:

1. $M_t \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$;
2. $\mathbb{E}(M_t|F_s) = M_s \qquad \forall \leq s \leq t.$

La proprietà 2. implica che M_t è $\mathcal{F}_t$-adattato, inoltre il valore atteso di M_t non dipende dal tempo infatti vale:

$$\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(M_0).$$

Definizione 2.4. Un processo stocastico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ è detto stazionario se una qualunque collezione $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\}$ ha la stessa distribuzione della famiglia $\{X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \ldots, X_{t_n+\tau}\}$, per ogni $\tau \geq 0$.

Si scrive:

$$\{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\} \doteq \{X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \ldots, X_{t_n+\tau}\}$$

per indicare l'uguaglianza delle distribuzioni.

Sia X un processo stocastico stazionario, allora :

- tutte le variabili aleatorie X_t sono isonome;
- i momenti del processo, se esistono, sono costanti nel tempo;
- la distribuzione congiunta di due variabili X_{t_1} e X_{t_2}, dipende solo dalla separazione temporale $t_2 - t_1$.

Indico il coefficiente di autocovarianza con:

$$\Gamma(\tau) = \mathbb{E}((X_t - \mu)(X_{t-\tau} - \mu)) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-\tau}).$$

Definizione 2.5. Un processo stocastico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ è detto un processo ad incrementi stazionari, e si indica con **si** se per ogni $h \geq 0$ vale:

$$\{X_{t+h} - X_h\}_{t\geq 0} \doteq \{X_t - X_0\}_{t\geq 0}. \tag{2.2}$$

Quindi se X è un processo **si**, allora il processo degli incrementi dato da:

$$Y_t = \Delta_{\delta t} X_t = X_{t+\delta t} - X_t$$

è stazionario; infatti per ogni $h > 0$, sfruttando la relazione (2.2), si ha:

$$\{Y_{t_1+h}, Y_{t_2+h}, \ldots, Y_{t_n+h}\} \doteq \{Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}\}.$$

2.2 Processi auto-similari

Definizione 2.6. Un processo stocastico reale $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ è detto **auto-similare** di indice $H > 0$, e si indica con **H-ss**, se per ogni $a > 0$ si ha:

$$\{X_{at}\}_{t\geq 0} \doteq \{a^H X_t\}_{t\geq 0}.$$

L'indice H è detto esponente di Hurst del processo.
Allo stesso modo si può definire l'auto-similarità per processi $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.
Chiaramente se X è un processo **H-ss**, allora le distribuzioni finito-dimensionali di X su $[0, \infty)$ sono completamente determinate dalle distribuzioni in un qualunque intervallo finito.

Definizione 2.7. Un processo $\{X_t\}_t$ è detto **degenere** se per ogni $t \geq 0$, $X_t = 0$ quasi ovunque.

Osservazione 1. Sia $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un processo non degenere stazionario, allora X non può essere **H-ss**, infatti per ogno $a > 0$ si ha:

$$X_t \doteq X_{at} \doteq a^H X_t,$$

la quale genera una contraddizione al limite per $a \longrightarrow \infty$.

La seguente **Proposizione** mostra come sia possibile costruire processi auto-similari a partire dai processi stazionari.

Proposizione 2.2.1. *Sia $\{X_t\}_t$ un processo **H-ss**, allora il processo*

$$Y(t) = e^{-tH} X(e^t), \quad t \geq 0$$

è stazionario.
Viceversa se $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ è un processo stazionario, allora

$$X(t) = t^H Y(\log t), t \geq 0$$

*è un processo **H-ss**.*

2.3 Moto Browniano

Definizione 2.8. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità con filtrazione, un processo stocastico $\{B_t\}_{t\geq 0}$ si dice moto **Browniano** reale di punto iniziale l'origine se valgono:

i) $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$;

ii) per ogni $\omega \in \Omega$ la funzione $t \longrightarrow B_t(\omega)$ è continua;

iii) B è $\mathcal{F}_t$-adattato ;

iv) per ogni $t, h > 0$ l'incremento $B_{t+h} - B_t$ ha distribuzione normale $\mathcal{N}(0, h)$ ed è indipendente da $\mathcal{F}_t$.

2.3.1 Proprietà del moto Browniano

Sia $\{B_t\}_t$ un moto Browniano reale di punto iniziale l'origine, si mostrano le relative proprietà:

- Le traiettorie partono per $t = 0$, quasi sicuramente, dall'origine e sono continue.
- Per ogni $t \geq 0$ si ha:

$$B_t \sim \mathcal{N}(0, t);$$

  infatti dal punto *i*) e dal *iv*) della definizione precedente si ha:

$$B_t = B_t - B_0 \sim \mathcal{N}(0, t).$$

- Dal punto iv) segue che B_t ha incrementi indipendenti nel senso che le variabili aleatorie $B_{t_2} - B_{t_1}$ e $B_{t_4} - Bt_3$ sono indipendenti per ogni $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$.

- Il moto Browniano è un esempio di processo ad incrementi stazionari.
- Il moto Browniano è un processo auto-similare con esponente di Hurst $H = \frac{1}{2}$, infatti per ogni $t > 0$ si ha:

$$a^{\frac{1}{2}} B_t \sim \mathcal{N}(0, at) \qquad \textit{ovvero} \qquad B_{at} \doteq a^{\frac{1}{2}} B_t.$$

2.4 Processi H-sssi

Definizione 2.9. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità con filtrazione, un processo stocastico $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ adattato alla filtrazione $\mathcal{F}_t$ è detto **H-sssi** se è auto-similare, con indice di Hurst H, ed ha incrementi stazionari.

2.4.1 Proprietà dei processi H-sssi

I processi **H-sssi** a varianza finita godono di interessanti proprietà.
Sia $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ un processo **H-sssi** a varianza finita allora valgono le seguenti proprietà:

1. $X_0 = 0$ quasi sicuramente:

   $\forall a > 0$ si ha:
   $$X(0) = X(a0) \doteq a^H X(0).$$

2. Se $H \neq 1$, allora per ogni $t \geq 0$ si ha:
   $$\mathbb{E}(X_t) = 0.$$

   Dato che vale:
   $$\mathbb{E}(X(2t)) = 2^H \mathbb{E}(X(t)),$$

dalla stazionarietà degli incrementi e dalla proprietà 1 si ha:

$$2^H\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(X(2t)) = \mathbb{E}(X(2t) - X(t)) + \mathbb{E}(X(t)) =$$

$$= 2\mathbb{E}(X(t)) \Longleftrightarrow \mathbb{E}(X(t)) = 0.$$

3. Si ha:

$$X(-t) \doteq -X(t)$$

che segue dalla proprietà 1 e dalla stazionarietà degli incrementi data da:

$$X(-t) = X(-t) - X(0) \doteq X(0) - X(t) = -X(t).$$

Questa proprietà ci permette di estendere la definizione di un processo **H-sssi** a tutta la retta reale: $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

4. La varianza: sia $\sigma^2 = \mathbb{E}(X_1^2)$ allora:

$$\mathbb{E}(X_t^2) = |t|^2H\sigma^2;$$

questo segue dalla proprietà 3 e dalla auto-similarità:

$$\mathbb{E}X(t)^2 = \mathbb{E}X^2(|t|sign(t)) = |t|^{2H}\mathbb{E}X^2(sign(t)) =$$
$$= |t|^{2H}\mathbb{E}(X_1^2) = |t|^{2H}\sigma^2.$$

Il processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ è detto standard se $\sigma^2 = 1$.

5. La funzione di autocovarianza:

$$\Gamma^H_{s,t} = \frac{\sigma^2}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}),$$

segue dalla proprietà 4 e dalla stazionarietà degli incrementi:

$$\mathbb{E}(X_s X_t) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}X_s^2 + \mathbb{E}X_t^2 - \mathbb{E}(X_t - X_s)^2).$$

6. Se $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ è un processo **H-sssi**, allora $H \leq 1$.

Il vincolo sull'esponente di Hurst deriva dalla richiesta di stazionarietà degli incrementi:

$$2^H \mathbb{E}|X_1| = \mathbb{E}|X_2| = \mathbb{E}|X_2 - X_1 + X_1| \leq$$

$$\leq \mathbb{E}|X_2 - X_1| + \mathbb{E}|X_1| = 2\mathbb{E}|X_1|$$

allora si ha:

$$2^H \leq 2 \Longleftrightarrow H \leq 1.$$

2.5 Il Moto Browniano Frazionario

Definizione 2.10. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità con filtrazione ed $I \subseteq \mathbb{R}$; un processo stocastico normale $B_H = \{B_H(t)\}_{t\in I}$, **H-sssi**, con $0 < H < 1$, adattato alla filtrazione $\mathcal{F}_t$, è detto **moto Browniano frazionario**.

B_H è detto standard se $\sigma^2 = \mathbb{E}(B_H(1)^2) = 1$.

Osservazione 2. Sia $\{B_H(t)\}_{t\in I}$, $0 < H < 1$, un moto Browniano frazionario:

- per $H = \frac{1}{2}$, $\{B_{\frac{1}{2}}(t)\}_{t\in I}$ è l'usuale moto Browniano, con funzione di covarianza:

$$\Gamma(s,t) = \begin{cases} \min(|s|,|t|) & \text{se } \frac{|s|}{s} = \frac{|t|}{t} \\ \Gamma(s,t) = 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- $H = 1$ non viene considerato perché corrisponde al caso banale di una retta con pendenza casuale:

$$B_1(t) = tB_1(1).$$

2.5.1 Caratterizzazione del Moto Browniano Frazionario

Proposizione 2.5.1. *Sia $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un processo stocastico definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ che verifica le seguenti proprietà:*

i) $P(X_0 = 0) = 1$;

ii) X *è* $\mathcal{F}_t$*-adattato;*

iii) per ogni $t > 0$ *allora:*

$$X_t \doteq \mathcal{N}(0, \sigma^2|t|^{2H}) \text{ per qualche } \sigma > 0 \text{ e } 0 < H < 1;$$

iv) X_t *è un processo ad incrementi stazionari(**-si**)*

allora $\{X_t\}_{t>0}$ *è il moto* ***Browniano frazionario****.*

2.6 Rumore Gaussiano Frazionario

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità con filtrazione $\mathcal{F}_t$, sia $B_H = \{B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ un moto Browniano frazionario definito su Ω. Considero una griglia temporale $I = \{t_k = k\delta t, k \in \mathbb{Z}\}$, definisco il processo a tempo discreto $\{B_H(t_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ come la restrizione ad I del processo a tempo continuo $B_H(t)$ ed indico $\tilde{B}_H(k) = B_H(t_k)$

Definizione 2.11. Il processo incremento di B_H, $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$, tale che:

$$Z_k = \tilde{B}_H(k+1) - \tilde{B}_H(k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

é detto **rumore Gaussiano frazionario**

2.6.1 Proprietà del rumore Gaussiano frazionario

Sia $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ un rumore Gaussiano frazionario, valgono le seguenti proprietà:

1. $\{Z_t\}_t$ è stazionario;
2. per ogni $k \geq 1 : \mathbb{E}Z_k = 0$;
3. per ogni $k \geq 1 : \mathbb{E}Z_k^2 = \sigma^2 = \mathbb{E}(\tilde{B}_H(1))$;
4. la funzione di autocovarianza del processo $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ vale:

$$\Gamma(k) = \mathbb{E}(Z_t Z_{t+k}) = \frac{\sigma^2}{2}(|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}) = \frac{\sigma^2}{2}\Delta^2|k|^{2H}$$

dove Δ^2 indica l'operatore differenza seconda, cioè $\Delta^2 X_k = X_{k+1} - 2X_k + X_{k-1}$.

2.6.2 Proprietà della funzione di autocovarianza del rumore Gaussiano frazionario

Proposizione 2.6.1. *Sia $k \neq 0$ allora:*

- $\Gamma(k) = 0$, *se* $H = \frac{1}{2}$;
- $\Gamma(k) < 0$, *se* $0 < H < \frac{1}{2}$;
- $\Gamma(k) > 0$, *se* $\frac{1}{2} < H < 1$.

Proposizione 2.6.2. *Se $H \neq \frac{1}{2}$, allora:*

$$\Gamma(k) \doteq \sigma^2 H(2H-1)|k|^{2H-2}, \qquad k \longrightarrow \infty.$$

Osservazione 3. Osservo che per $H = \frac{1}{2}$ il rumore Gaussiano frazionario è un processo normale identicamente indipendente, cioè un processo puramente casuale o **white-noise**.

2.7 Dipendenza di lunga portata

Sia $B_H = \{B_H(t)\}_{t \geq 0}$ un moto Browniano frazionario definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ e sia $Z = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ il rumore gaussiano frazionario associato a B_H. Dalla (2.6.2) osserviamo che la funzione di autocovarianza di Z tende a zero, per $k \longrightarrow \infty$, come una funzione potenza. Inoltre quando $\frac{1}{2} < H < 1$ abbiamo che $\Gamma(k)$ tende a zero così lentamente che la serie:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \Gamma(k)$$

diverge, dirò allora che $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, $\frac{1}{2} < H < 1$, manifesta una dipendenza di lunga portata.

Definizione 2.12. Sia $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ un processo stocastico stazionario definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, dirò che X ha una dipendenza di lunga portata se:

1. la sua funzione di autocovarianza tende a zero con legge di potenza all'infinito:
$$\Gamma(k) \doteq k^{\alpha}, \quad k \longrightarrow \infty;$$

2. $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma(k) = \infty.$$

Proposizione 2.7.1. *Sia $B_H = \{B_H(t)\}_{t\geq 0}$ un moto Browniano frazionario e $Z = \{Z_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ il rumore gaussiano frazionario associato, allora:*

- *se $0 < H < \frac{1}{2}$ il processo Z non manifesta dipendenza di lunga portata;*

- *se $\frac{1}{2} < H < 1$ il processo Z manifesta dipendenza di lunga portata.*

2.8 Integrale Stocastico

Sia $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$ un moto Browniano definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

Definizione 2.13. Sia $u = \{u_t\}_{t\geq 0}$ un processo stocastico definito su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, si dice che u appartiene alla classe Λ^2 se:

i) u è $B \otimes \mathcal{F}$-misurabile e per ogni $T > 0$:

$$\int_0^T \mathbb{E}(u_t^2)dt < \infty$$

ii) u è $\mathcal{F}_t$-adattato.

2.8.1 Integrale stocastico per processi semplici

Definizione 2.14. Un processo $u \in \Lambda^2$ è detto semplice se

$$u_t = \sum_{k=1}^{n} e_k \chi[t_{k-1}, t_k[\qquad 0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \tag{2.3}$$

dove le $\{e_k\}_{k=1,\ldots,n}$ sono variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tali che $\mathbb{P}(e_k = e_{k-1}) = 0$.

Osservazione 4. Affinché un processo semplice u sia un processo adattato dovremo richiedere che e_k sia $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-misurabile per ogni k, infatti per costruzione $u_{t_{k-1}} = e_k$.

Inoltre con $\{e_k\} \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ si ha :

$$\int \mathbb{E}(u_t^2)dt = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e_k^2)(t_k - t_{k-1}). \tag{2.4}$$

Sia $u \in \Lambda^2$ un processo semplice e adattato della forma (2.3) si definisce

$$\int u_s dB_s = \sum_{k=1}^{n} e_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}). \tag{2.5}$$

2.8.2 Proprietà dell'integrale stocastico

Per ogni $u, v \in \Lambda^2$ semplici, l'integrale stocastico verifica le seguenti proprietà:

1. Linearità:
$$\int (au_t + bv_t)dB_t = a \int u_t dB_t + b \int v_t dB_t \quad a, b \in \mathbb{R}$$

2. Additività:
$$\int_a^c u_t dB_t + \int_c^b u_t dB_t = \int_a^b u_t dB_t \quad 0 \leq a < c < b$$

3. Media nulla:
$$\mathbb{E}\Big(\int u_s dB_s \Big) = 0$$

$$\mathbb{E}\Big(\int_a^b u_s dB_s \int_b^c v_s dB_s \Big) = 0$$

4. Isometria di Itô:

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_a^b u_s dB_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_a^b u_s^2 ds\right)$$

Dimostrazione. Le proprietà 1, 2, 3 sono immediata conseguenza della definizione (2.5) e del fatto che gli e_k sono $\mathcal{F}_{k-1}$-misurabili.
L'isometria di Itô si dimostra come segue: sia u della forma (2.5), ponendo $t_0 = a$ e $t_n = b$ si ha:

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_a^b u_t dB_t\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^n \int_{t_k-1}^{t_k} e_k dB_t\right)^2\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(\left(\int_{t_k-1}^{t_k} e_k dB_t\right)^2\right) + 2\sum_{h<k} \mathbb{E}\left(\int_{t_k-1}^{t_k} dB_t \int_{t_h-1}^{t_h} e_h dB_t\right),$$

per la proprietà della media nulla i termini della seconda somma sono nulli allora:

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left({e_k}^2 (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}({e_k}^2)\mathbb{E}(B_{t_k} - B_{t_k-1})^2$$

$$= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}({e_k}^2)(t_k - t_{k-1})$$

il risultato segue dalla (2.4).

□

Di seguito viene estesa la nozione di integrale stocastico.
Sia u_t un generico processo in Λ^2, si costruisce una successione $(u^{(n)})_n$ di processi stocastici semplici di Λ^2 che approssimi u, nel senso che:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \mathbb{E}\left(\left(u_t - u_t^{(n)}\right)^2\right)dt = \lim_{n\to\infty}\left\|u-u^{(n)}\right\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} = 0.$$

I risultati derivati sono : $(u^{(n)})_n$ è una successione di Cauchy in $L^2(\Omega\times[0,T])$ e per l'isometria di It$\hat{o}$ la successione degli integrali stocastici:

$$I_n = \int_0^T u_t^{(n)} dB_t$$

è di Cauchy in $L^2(\Omega)$ che è uno spazio metrico completo, quindi la successione $(I_n)_n$ è convergente in $L^2(\Omega)$. Per definizione si pone:

$$\int_0^T u_t dB_t = \lim_{n\to\infty} I_n$$

che definisce l'integrale stocastico per processi $u \in \Lambda^2$.

Proposizione 2.8.1. *Le proprietà dell'integrale stocastico definito per processi semplici, valgono per ogni processo u,v* $\in \Lambda^2$.

Osservazione 5. Si osserva che se f è una funzione reale deterministica $\mathcal{B}-$ *misurabile* ed $f \in L^2(\mathbb{R})$, allora per ogni $T > 0$ è definito l'integrale stocastico:

$$\int_0^T f(t)dB_t.$$

2.8.3 Rappresentazioni integrali del moto Browniano frazionario

Si vogliono introdurre alcune rappresentazioni del moto Browniano frazionario ottenute mediante integrali stocastici.
Sia $B = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un moto Browniano definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, F, F_t, \mathbb{P})$.

Proposizione 2.8.2. *Sia* $\{B_H(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *un moto Browniano frazionario standard con* $0 < H < 1$*, si definisce la sua* rappresentazione media mobile*:*

$$B_H(t) = \frac{1}{c_H}\int_{\mathbb{R}}((t-r)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-r)_+^{H-\frac{1}{2}})dB(r) \tag{2.6}$$

$$c_H = \left(\int_0^\infty \left((1+r)^{H-\frac{1}{2}} - r^{H-\frac{1}{2}}\right)^2 dr + \frac{1}{2H}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} \tag{2.7}$$

Capitolo 3

Topologia di Skorohod e convergenza debole

Per lo studio dell'approssimazione del moto Browniano frazionario con passeggiate aleatorie pesate occorrerà pensare al processo approssimante $X_{H,N}$, come ad un processo cadlag definito sullo spazio di Skorohod.
Occorre definire lo spazio in cui si opera che non sarà C, in quanto non è adatto alla descrizione di processi che contengono salti. Proprio per questo si introdurrà lo studio dello spazio D, con relativa topologia di Skorohod, e si studierà la convergenza debole in questo spazio [9].

3.1 Misure in spazi metrici

Sia S uno spazio metrico e sia $\mathcal{S}$ la σ-algebra generata dagli insiemi aperti, la più piccola σ-algebra contenente tutti gli insiemi aperti, su cui è definita una misura di probabilità $\mathbb{P}$ σ-additiva tale che $\mathbb{P}(S) = 1$.
Se le misure di probabilità $\mathbb{P}_n$ e $\mathbb{P}$ soddisfano la convergenza:

$$\int_S f d\mathbb{P}_n \longrightarrow \int_S f d\mathbb{P},$$

per ogni funzione limitata, reale continua f su S, allora si dice che $\mathbb{P}_n$ *converge debolmente* a $\mathbb{P}$ e si scrive:

$$\mathbb{P}_n \Longrightarrow \mathbb{P}.$$

Si iniziano a studiare, tramite i seguenti teoremi, alcune proprietà delle misure di probabilità definite su $(S, \mathcal{S})$.

Teorema 3.1.1. *Data una misura finita $\mathbb{P}$ in uno spazio metrico S, la misura di ogni boreliano è l'estremo superiore delle misure dei chiusi in esso contenuti e l'estremo inferiore di quelle degli aperti che lo contengono.*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{P}$ la misura di probabilità ed $\mathcal{S}$ la classe dei boreliani A per i quali per ogni $\epsilon > 0$ esistono un chiuso F ed un aperto G con le proprietà:

- $F \subset A \subset G$,
- $\mathbb{P}(G - F) < \epsilon$.

Si denota con $\rho(x, y)$ la metrica su S e la distanza $\rho(x, A)$ con:

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) | y \in A\}.$$

La classe $\mathcal{S}$ è visibilmente chiusa per passaggio al complementare, e contiene i chiusi dal momento che ogni chiuso A è limite della successione decrescente di aperti $\{\rho(x, A) > \frac{1}{n}\}$. Basta dunque provare che essa è chiusa per unione numerabile per dedurne che consta di tutti i boreliani.

Supposto $A_n \in \mathcal{S}$ e preso $\epsilon > 0$, per ogni n esistono un chiuso F_n e un aperto G_n tali che $F_n \subset A_n \subset G_n$ e $\mathbb{P}(G_n - F_n) < \epsilon \frac{1}{2^n}$.
Ponendo $H = \bigcup_n F_n$ per un intero q opportuno l'insieme chiuso $F = \bigcup_{k \leq q} F_k$ verificherà la relazione $\mathbb{P}(H - F) < \epsilon$. Dunque l'insieme $G = \bigcup_n G_n$ ed inoltre:

$$\mathbb{P}(G - F) \leq \mathbb{P}(G - H) + \mathbb{P}(H - F)$$

è maggiorata da:

$$\sum_n \mathbb{P}(G_n - F_n) + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

□

Il teorema precedente implica che la misura di probabilità $\mathbb{P}$ è determinata dai valori di $\mathbb{P}(F)$ con F insiemi chiusi.
Di seguito si danno delle definizioni per lo spazio metrico S.

Definizione 3.1. Lo spazio S è definito *separabile* se esso contiene un sottoinsieme denso e numerabile.

Definizione 3.2. Una base per la topologia di S è una classe di insiemi aperti tale che ogni suo sottoinsieme aperto è unione di alcuni membri della classe.

Definizione 3.3. Un ricoprimento aperto di A è una classe di insiemi aperti la cui unione contiene A.

Definizione 3.4. Un insieme A è discreto se per ogni punto di A esiste una sfera che non contiene altri punti di A, in altre parole, se ogni punto di A è isolato nella relativa topologia. Se S è discreto, prendendo la distanza tra i punti distinti uguale ad 1 si definisce una metrica equivalente a quella originaria.

Si denotano con $S(x, \epsilon)$ le sfere aperte con centro x e raggio ϵ:

$$S(x, \epsilon) = \{y|\ \rho(x, y) < \epsilon\}.$$

Proposizione 3.1.2. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) *S è separabile;*

ii) *S ha una base numerabile;*

iii) *ogni ricoprimento aperto di ogni sottoinsieme di S ha un sottoricoprimento numerabile.*

Definizione 3.5. Un insieme A è definito *compatto* se ogni ricoprimento aperto di A contiene un sottoricoprimento finito.

Definizione 3.6. Una ϵ-rete è un insieme di punti $\{x_k\}$ con la proprietà che per ogni x in A esiste un x_k tale che $\rho(x, x_k) < \epsilon$.

Definizione 3.7. Un insieme A è totalmente finito se, per ogni ϵ positivo, ha una ϵ-rete finita.

Definizione 3.8. Un insieme A è completo se ogni sequenza fondamentale in A converge ad un punto di A.

Proposizione 3.1.3. *Per un arbitrario insieme A in S, le condizioni seguenti sono equivalenti:*

i) *la chiusura di A (A^-) è compatta;*

ii) *ogni ricoprimento aperto numerabile di A^- ha un sottoricoprimento finito;*

iii) *ogni sequenza in A ha una sottosequenza convergente ad un limite, che necessariamente appartiene a A^-;*

iv) A è totalmente finito e A^- è completa.

La nozione di *strettezza* (tightness) negli spazi metrici risulta importante sia nella teoria della convergenza debole sia nelle sue applicazioni.

Definizione 3.9. Una misura di probabilità $\mathbb{P}$ su $(S, \mathcal{S})$ è tesa (tight) se per ogni ϵ positivo esiste un insieme compatto K (3.5) tale che vale $\mathbb{P}(K) > 1 - \epsilon$. Chiaramente $\mathbb{P}$ è tesa (tight) se e solo se ha un supporto σ-compatto. Il supporto di una misura di probabilità è il sottoinsieme di S i cui punti hanno la proprietà secondo cui ogni loro intorno ha misura positiva, mentre un insieme si dice σ-compatto se può essere rappresentato come un unione numerabile di insiemi compatti.

Dal teorema (3.1.1), si ha che $\mathbb{P}$ è tesa(tigh) se e solo se $\mathbb{P}(A)$ è, per ogni A in $\mathcal{S}$, l'estremo superiore di $\mathbb{P}(K)$ sui sottoinsiemi compatti K di A.
Il risultato del teorema seguente, che vale ad esempio nel caso Euclideo, è molto utile.

Teorema 3.1.4. *Se S è separabile e completo, allora ogni misura di probabilità su $(S, \mathcal{S})$ è tesa (tight).*

Dimostrazione. Partendo dal fatto che S è separabile, per ogni n esiste una sottosuccessione $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ di $\frac{1}{n}$ -sfere aperte che ricoprono S. Si sceglie i_n tale che valga:

$$\mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{i \leq i_n} A_{n_i}\Bigg) > 1 - \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Dall'ipotesi di completezza, l'insieme totalmente limitato $\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{i \leq i_n} A_{n_i}$ ha chiusura compatta K (3.5). Dato che vale $\mathbb{P}(K) > 1 - \epsilon$ allora il teorema è dimostrato. $\square$

3.2 Convergenza debole in spazi metrici

Se h è *un'applicazione misurabile* di S in un altro spazio metrico S', con la metrica ρ' e la σ-algebra $\mathcal{S}'$ di insiemi di Borel, allora ogni misura di probabilità $\mathbb{P}$ su $(S, \mathcal{S})$ induce su $(S', \mathcal{S}')$ un'unica misura di probabilità $\mathbb{P}h^{-1}$, definita da $\mathbb{P}h^{-1}(A) = \mathbb{P}(h^{-1}(A))$ per $A \in \mathcal{S}'$.
Si ha bisogno di condizioni sotto le quali $\mathbb{P}_n \Longrightarrow \mathbb{P}$ implica $\mathbb{P}_n h^{-1} \Longrightarrow \mathbb{P}h^{-1}$. Una di queste condizioni è che h sia continua, allora $f(h(x))$ è continua e limitata su S ogni volta che $f(y)$ è continua e limitata su S', così data la relazione $\mathbb{P}_n \Longrightarrow \mathbb{P}$ si ha :

$$\int f(h(x))\mathbb{P}_n(dx) \longrightarrow \int f(h(x))\mathbb{P}(dx)$$

che sotto opportune trasformazioni di integrali diventa:

$$\int f(y)\mathbb{P}_n h^{-1}(dy) \longrightarrow \int f(y)\mathbb{P}h^{-1}(dy).$$

Precedentemente si è visto che $\mathbb{P}_n \Longrightarrow \mathbb{P}$ implica $\mathbb{P}_n h^{-1} \Longrightarrow \mathbb{P}h^{-1}$ se h è un'applicazione continua di S in S', ma si può indebolire l'ipotesi di continuità, supponiamo che h sia misurabile.
Sia D_h l'insieme di discontinuità di h.

Teorema 3.2.1. *Se* $\mathbb{P}_n \Longrightarrow \mathbb{P}$ *e* $\mathbb{P}(D_h) = 0$, *allora* $\mathbb{P}_n h^{-1} \Longrightarrow \mathbb{P}h^{-1}$

Dimostrazione. Si prova che se F fosse sottoinsieme chiuso di S', allora si ha:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n h{-}1(F) \leq \mathbb{P}h^{-1}(F).$$

Da $\mathbb{P}_n \Longrightarrow \mathbb{P}$ si ha che:

$$\limsup_n \mathbb{P}_n(h^{-1}F) \leq \limsup_n \mathbb{P}_n((h^{-1}F)^{-}) \leq \mathbb{P}((h^{-1}F)^{-}).$$

Quindi è sufficiente provare $\mathbb{P}((h^{-1}F)^{-1}) = \mathbb{P}(h^{-1}F)$, che segue dall'assunzione di $\mathbb{P}(D_h) = 0$ e dal fatto che $(h^{-1}F)^{-} \subset D_h \cup (h^{-1}F)$.

□

Di seguito mostro due immediati corollari che discendono dal teorema precedente.
Per un elemento casuale X di S, $h(X)$ è un elemento casuale di S' se assumo h misurabile.

Corollario 3.2.2. *Se* $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ *e* $\mathbb{P}\{X \in D_h\} = 0$*, allora:*

$$h(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} h(X).$$

Corollario 3.2.3. *Se* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ *e se* h *è continua in* a*, allora:*

$$h(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(a).$$

3.3 Spazio di Skorohod

Una funzione **cadlag** è una funzione di variabile reale che è in ogni punto continua da destra e possiede limite sinistro finito. Queste funzioni sono molto importanti nello studio dei processi stocastici che ammettono traiettorie con discontinuità di prima specie.
Considero con $D = D[0,1]$ lo spazio di funzioni x su $[0,1]$ che sono funzioni cadlag; per queste valgono le seguenti condizioni:

i) per $0 \leq t < 1 \quad \exists\, x(t+) = \lim_{s \downarrow t} x(s)$ e $x(t+) = x(t)$;

ii) per $0 < t \leq 1 \quad \exists\, x(t-) = \lim_{s \uparrow t} x(s)$.

Una funzione x ha discontinuità di prima specie in t se $x(t-)$ e $x(t+)$ esistono ma sono differenti. Le discontinuità di un elemento di D sono di prima specie, il requisito $x(t) = x(t+)$ è una normalizzazione conveniente. Naturalmente lo spazio C, è un sottoinsieme di D.
Per $x \in D$ e $T_0 \subset [0,1]$ si considera:

$$w_x(T_0) = \{\sup |x(s) - x(t)| \quad | \quad s,t \in T_0\}$$

Una funzione continua su $[0,1]$ è uniformemente continua.
Il lemma seguente dà un analogo del modulo di continuità per gli elementi di D.

Lemma 3.3.1. *Per ogni x in D e per ogni ϵ positivo, esistono punti $t_0, t_1, \ldots, t_r$ tali che:*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1$$

e

$$w_x[t_{i-1}, t_i[< \epsilon \qquad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Sia τ l'estremo superiore degli t in $[0,1]$, per i quali l'intervallo $[0,t)$ può essere decomposto in sottointervalli finiti $[t_{i-1},t_i)$ che soddisfano la precedente relazione (3.1). Da $x(0)=x(0+)$, si ha $\tau>0$, mentre da $x(\tau-)$ esiste un intervallo $[0,\tau)$ che può essere a sua volta decomposto.

$\square$

Da questo lemma si deduce che ci possono essere al massimo un numero finito di punti t in cui il salto $|x(t)-x(t-)|$ supera un determinato numero positivo e da questo segue che x è limitato:

$$\sup_t |x(t)| < \infty. \tag{3.2}$$

In particolare x ha al massimo una quantità numerabile di discontinuità e può essere uniformemente approssimato da funzioni semplici costanti su intervalli, in modo che x è Borel misurabile.
L'equivalente nello spazio D del modulo di continuità definito nello spazio delle funzioni continue è dato da:

$$w_x^{'}(\delta) = \inf_{t_i} \max_{0<i\leq r} w_x[t_{i-1},t_i[\qquad 0<\delta<1 \tag{3.3}$$

dove l'estremo inferiore si estende sull'insieme $\{t_i\}$ di punti che soddisfano:

$$\begin{cases} 0=t_0<t_1<\ldots<t_r=1 & \\ t_i-t_{i-1}>\delta & i=1,2,\ldots,r. \end{cases} \tag{3.4}$$

Il lemma (3.3.1) è equivalente alla seguente asserzione:

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0} w_x^{'}(\delta) = 0 \qquad \forall x\in D. \tag{3.5}$$

Anche se x non appartiene a D, la definizione di $w_x^{'}$ ha senso.
L'intervallo $[0,1)$ può essere diviso, per ogni $\delta < \frac{1}{2}$, in sottointervalli $[t_{i-1}, t_i)$ con $\delta < t_i - t_{i-1} \leq 2\delta$, e si ottiene:

$$w_x^{'}(\delta) \leq w_x(2\delta) \qquad \text{se} \quad \delta < \frac{1}{2}.$$

3.4 Topologia di Skorohod

Due funzioni x e y sono vicine l'una all'altra, nella topologia uniforme usata in C, se il grafico di $x(t)$ può essere portato sul grafico di $y(t)$ con una perturbazione uniformemente piccola delle ordinate, con l'ascissa fissa.
Considerando lo spazio D, si potrà introdurre nella definizione di distanza una piccola deformazione uniforme della scala dei tempi. La seguente topologia, ideata da Skorohod, è basata su questa idea.
Denoto con Λ la classe delle applicazioni continue strettamente crescenti di $[0,1]$ su se stesso. Se $\lambda \in \Lambda$, allora $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(1) = 1$.
Per x ed y in D, si definisce $d(x,y)$ l'estremo inferiore delle ϵ positive per cui esiste in Λ un λ tale che:

$$\sup_t |\lambda(t) - t| \leq \epsilon \tag{3.6}$$

e

$$\sup_t |x(t) - y(\lambda(t))| \leq \epsilon \tag{3.7}$$

Dalla condizione 3.2 si vede che la metrica $d(x,y)$ è finita considerando $\lambda(t) = t$.

Chiaramente $d(x, y) \geq 0$ e, si può dimostrare con facilità $d(x, y) = 0$ che implica che per ogni t o $x(t) = y(t)$ o $x(t) = y(t-)$; a loro volta le relazioni ottenute implicano $x = y$.
Se λ appartiene a Λ, così anche λ^{-1}, $d(x, y) = d(y, x)$ seguono da:

$$\sup_t |\lambda^{-1}(t) - t| = \sup_t |\lambda(t) - t|$$

e

$$\sup_t |x(\lambda^{-1}(t)) - y(t)| = \sup_t |x(t) - y(\lambda(t))|.$$

Se λ_1 e λ_2 appartengono a D, questo vale anche per la loro composizione $\lambda_2 \circ \lambda_1$.
In questo modo si prova che d è una metrica. Questa metrica definisce la topologia di Skorohod. La distanza uniforme tra x ed y può essere definita come l'estremo inferiore delle ϵ positive, per cui vale:

$$\sup_t |x(t) - y(t)| \leq \epsilon.$$

Gli elementi x_n di D convergono ad un limite x nella topologia di Skorohod se e solo se esistono funzioni λ_n in Λ tali che:

$$\lim_n x_n(\lambda_n(t)) = x(t)$$

uniformemente in t e

$$\lim_n \lambda_n(t) = t$$

uniformemente in t. Se x_n tende uniformemente ad x, allora c'è convergenza nella topologia di Skorohod considerando $\lambda_n(t) = t$.

Si ha la convergenza puntuale di $x_n(t)$ a $x(t)$ dove:

$$x_n = I_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})} \quad \text{e} \quad x = I_{[0,\frac{1}{2})} \tag{3.8}$$

solo per i $t \neq \frac{1}{2}$.

Dalla seguente diseguaglianza:

$$|x_n(t) - x(t)| \leq |x_n(t) - x(\lambda^{-1}(t))| + |x(\lambda^{-1}(t) - x(t))|$$

segue che la convergenza di Skorohod implica la convergenza $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ per punti di continuità t di x, e se x è uniformemente continua su tutto $[0,1]$, allora la convergenza di Skorohod implica convergenza uniforme.
Lo spazio D è separabile, ma non è completo con la metrica d sopra enunciata, perchè se $x_n = I_{[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$ allora vale:

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \tag{3.9}$$

e quindi $\{x_n\}$ è fondamentale nella metrica d, anche se non è convergente.
Si introdurrà in D un'altra metrica d_0, la quale è equivalente a d ma con cui D è completo. La completezza facilita la caratterizzazione degli insiemi compatti. L'idea nella definizione di d_0 è quella di richiedere che il tempo di deformazione λ, che interviene nella definizione di d, sia vicina alla funzione identità in un senso più forte rispetto a quello della relazione (3.6). Ciò significa che la pendenza $\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}$ di ogni corda è vicina ad 1 o che il suo logaritmo è vicino a 0.

Se λ è una funzione non decrescente su $[0,1]$ con $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(1) = 1$, si considera:

$$\|\lambda\| = \sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|.$$

Sia $d_0(x, y)$ l'estremo inferiore degli ϵ positivi per i quali Λ contiene alcune λ tali che:

$$\|\lambda\| \leq \epsilon \tag{3.10}$$

e

$$\sup_t \left| x(t) - y(\lambda(t)) \right| \leq \epsilon. \tag{3.11}$$

Da (3.9) risulta che $d_0(x, y)$ è finita, considerando $\lambda(t) = t$, e risulta una metrica dalle seguenti relazioni:

$$\left\| \lambda^{-1} \right\| = \|\lambda\|$$

e

$$\|\lambda_2 \lambda_1\| \leq \|\lambda_1\| + \|\lambda_2\| . \tag{3.12}$$

Di seguito si mostra che d e d_0 sono metriche equivalenti e che D è uno spazio completo con la metrica d_0.
Si noti che se x_n è definito con $I_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})}$ allora si ha:

$$d_0(x_n, x_m) = \min\left\{ 1, \left| \log \frac{m}{n} \right| \right\} \qquad m, n > 3.$$

Se $d_0(x,y) < \epsilon$, allora le relazioni (3.10), (3.11) valgono per alcuni $\lambda \in \Lambda$. Con $\epsilon < \frac{1}{4}$ e partendo da $\lambda(0) = 0$ si ha:

$$\log(1-2\epsilon) < -\epsilon \leq \log\frac{\lambda(t)}{t} \leq \log(1+2\epsilon)$$

che porta a $|\lambda(t) - t| \leq 2\epsilon$. Da ciò discende che vale:

$$d(x,y) \leq 2d_0(x,y) \qquad \text{se } \ d_0(x,y) < \frac{1}{4}. \tag{3.13}$$

Lemma 3.4.1. *Se la metrica $d(x,y) < \delta^2$, dove $0 < \delta < \frac{1}{4}$, allora si ha che la metrica $d_0(x,y)$ soddisfa:*

$$d_0(x,y) \leq 4\delta + w_x^{'}(\delta). \tag{3.14}$$

Dimostrazione. Si scelgono t_i che soddisfano la (3.4) e la relazione:

$$w_x[t_{i-1}, t_i) < w_x^{'}(\delta) + \delta \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{3.15}$$

Dalla classe Λ si sceglie un λ tale che:

$$\sup_t |x(t) - y(\mu(t))| = \sup_t |x(\mu^{-1}(t)) - y(t)| < \delta^2 \tag{3.16}$$

e

$$\sup_t |\mu(t) - t| < \delta^2. \tag{3.17}$$

Si vuole definire in Λ un λ che è vicino a μ ma non ha come μ corde con pendenze lontane da 1. Dato che la composizione $\mu^{-1}\lambda$ fissa i t_i ed il suo incremento, t e $\mu^{-1}\lambda(t)$ rimangono sempre nello stesso sottointervallo $[t_{i-1}, t_i)$. Dalle relazioni (3.15) e (3.16) si ha:

$$|x(t) - y(\lambda(t))| \leq |x(t) - x(\mu^{-1}\lambda(t))| + |x(\mu^{-1}\lambda(t)) - y(\lambda(t))|$$

$$< w_x^{'}(\delta) + \delta + \delta^2 < 4\delta + w_x^{'}(\delta).$$

Questo è sufficiente per dimostrare la relazione $\|\lambda\| \leq 4\delta$. Sia λ in accordo con μ a t_i, con la relazione (3.17) e la disuguaglianza $t_i - t_{i-1} > \delta$, si ha:

$$|(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})) - (t_i - t_{i-1})| < 2\delta^2 < 2\delta(t_i - t_{i-1}).$$

Dal carattere poligonale di λ, ne segue che:

$$|\lambda(t) - \lambda(s) - (t - s)| \leq 2\delta|t - s|$$

vale per ogni s e t, quindi si ha:

$$\log(1 - 2\delta) \leq \log\frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \leq \log(1 + 2\delta)$$

da $\delta < \frac{1}{4}$ e da questo segue la tesi $\|\lambda\| \leq 4\delta$.

$\square$

Teorema 3.4.2. *Le metriche d e d_0 sono equivalenti.*

Dimostrazione. Si indica una d-sfera aperta con $S_d(x, \epsilon)$ e una d_0-sfera aperta con $S_{d_0}(x, \delta)$. Il risultato segue dalla relazione (3.13) secondo cui all'interno di un arbitrario $S_d(x, \epsilon)$ si può trovare un $S_{d_0}(x, \delta)$. Il lemma precedente (3.4.1) implica che se vale:

$$\delta < \frac{1}{4}, \quad 4\delta + w_x^{'}(\delta) < \epsilon \tag{3.18}$$

allora $S_d(x, \delta^2) \subset S_{d_0}(x, \epsilon)$. Dati x e ϵ, si può dalla relazione (3.5) trovare una δ che soddisfa la (3.18). All'interno di una d_0-sfera si può trovare una d-sfera con stesso centro. Pertanto d e d_0 sono metriche equivalenti.

□

Teorema 3.4.3. *Lo spazio D è completo nella metrica d_0.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che ogni sequenza d_0-fondamentale contiene una sottosequenza convergente secondo d_0. Se $\{x_k\}$ é una sequenza d_0-fondamentale, contiene una sottosequenza $\{y_n\} = \{x_{k_n}\}$ tale che:

$$d_0(y_n, y_{n+1}) < \frac{1}{2^n}. \tag{3.19}$$

Si vuole dimostrare che $\{y_n\}$ è d_0 convergente a qualche limite.
Dalla disequazione precendente, Δ contiene un μ_n tale che:

$$\sup_t |y_n(t) - y_{n+1}(\mu_n(t))| < \frac{1}{2^n} \tag{3.20}$$

e

$$\|\mu_n\| < \frac{1}{2^n}. \tag{3.21}$$

Questo implica, per $m \geq 1$, che:

$$\sup_t |\mu_{n+m+1}\mu_{n+m} \dots \mu_{n+1}\mu_n(t) - \mu_{n+m} \dots \mu_{n+1}\mu_n(t)| =$$

$$= \sup_s |\mu_{n+m+1}(s) - s| \leq \frac{1}{2^{n+m}}$$

Per n fissato le funzioni:

$$\mu_{n+m} \dots \mu_{n+1}\mu_n(t) \tag{3.22}$$

sono quindi uniformemente fondamentali con $m \longrightarrow \infty$. Quindi la funzione (3.22) converge uniformemente al limite:

$$\lambda_n(t) = \lim_m \mu_{n+m} \dots \mu_{n+1}\mu_n(t). \tag{3.23}$$

La funzione λ_n deve essere continua e non decrescente e deve soddisfare le relazioni:

- $\lambda_n(0) = 0$;
- $\lambda_n(1) = 1$.

Se proviamo che $\|\lambda_n(t)\|$ è finito, ne segue che λ_n è strettamente crescente e quindi appartiene a Λ.

Dalla relazione (3.12), si ha:

$$\left| \log \frac{\mu_{n+m} \dots \mu_{n+1}\mu_n(t) - \mu_{n+m} \dots \mu_{n+1}\mu_n(s)}{t-s} \right| \leq \|\mu_{n+m} \dots \mu_{n+1}\mu_n\|$$

$$\leq \|\mu_n\| + \|\mu_{n+1}\| + \dots + \|\mu_{n+m}\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Considerando $m \longrightarrow \infty$ nel primo membro della precedente disequazione, troviamo che $\|\lambda_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, in particolare $\|\lambda_n\|$ è finito e λ_n appartiene a Λ. Dalla relazione (3.23) risulta valida l'equazione $\lambda_n = \lambda_{n+1}\mu_n$, quindi con la (3.20) si ha:

$$\sup_t |y_n(\lambda_n^{-1}(t)) - y_{n+1}(\lambda_{n+1}^{-1}(t))| = \sup_s |y_n(s) - y_{n+1}(\mu_n(s))| < \frac{1}{2^n}.$$

Di conseguenza le funzioni $y_n(\lambda_n^{-1}(t))$, i cui elementi di D sono uniformemente fondamentali, convergono quindi uniformemente al limite della funzione $x(t)$. È facile mostrare che x deve essere un elemento di D, e valendo:

$$\sup_t |y_n(\lambda_n^{-1}(t)) - x(t)| \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|\lambda_n\| \longrightarrow 0$$

si ha che $d_0(y_n, x) \longrightarrow 0$, questo completa la dimostrazione del teorema (3.4.3). □

3.4.1 Compattezza in D

Si vuole affrontare ora il problema della caratterizzazione di sottoinsiemi relativamente compatti di D. Assumendo il modulo di $w'_x(\delta)$ definito dalla relazione (3.3) si ha un analogo del Teorema di Arzelà-Ascoli.

Teorema 3.4.4. *Un insieme A ha chiusura compatta nella topologia di Skorohod se e solo se valgono:*

i)

$$\sup_{x \in A} \sup_t |x(t)| < \infty \tag{3.24}$$

ii)

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w'_x(\delta) = 0 \tag{3.25}$$

Dimostrazione. Per provare la sufficienza delle due condizioni, dato che D è completo, è sufficiente mostrare che A risulta totalmente finito rispetto alla metrica d_0. Il primo passo è dimostrare che A è totalmente finito rispetto alla metrica d.
Assumendo un ϵ positivo, si sceglie un intero k tale che verifica:

$$\frac{1}{k} < \epsilon$$

e

$$w'_x\left(\frac{1}{k}\right) < \epsilon \quad \forall x \in A.$$

Si consideri H una $\epsilon - rete$ nell'intervallo lineare $[-\alpha, \alpha]$ dove α è definita da:

$$\alpha = \sup_{x \in A} \sup_t |x(t)|$$

e si consideri B un insieme finito di y appartenentia D, il quale assume su ognuno degli intervalli $\left[\frac{(u-1)}{k}, \frac{u}{k}\right)$ un valore costante di H e soddisfa la condizione $y(1) \in H$ Una volta dimostrato che B è una $2\epsilon - rete$ rispetto alla metrica d, si assume un η positivo scegliendo δ $(0 < \delta < \frac{1}{4})$ in modo da verificare:

$$4\delta + w_x^{'}(\delta) < \eta \quad \forall x \in A$$

e si sceglie un ϵ tale che $0 < 2\epsilon < \delta^2$. Secondo il lemma (3.4.1), B risulta una η-rete per A rispettando la metrica d_0, allora A è totalmente finito e, dall'ipotesi che D è d_0-completo, la chiusura di A è compatta. Dopo aver dimostrato la sufficienza delle condizioni (3.4.4), si nota che il teorema differisce da quello di Arzelà-Ascoli in quanto entrambe le condizioni:

- $$\sup_{x \in A} < \infty$$
- $$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in A} w_x^{'}(\delta) = 0$$

implicano la condizione (3.25). È facile mostrare che la condizione (3.24) è verificata se valgono per ogni valore di t le condizioni (3.4.1).
Di seguito si mostra la necessità della condizione (3.25). Assumendo come ipotesi la relazione (3.5), $w_x^{'}(\delta)$ va a zero per ogni x. Si vuole dimostrare che $w_x^{'}(\delta)$ è superiormente semicontinua in x per ogni δ, cercando un η per cui la condizione $d(x, y) < \eta$ implica:

$$w_y^{'}(\delta) < w_x^{'}(\delta) + \epsilon.$$

Questo verifica la convergenza uniforme sugli insiemi compatti, la relazione (3.25) e quindi conclude la prova del teorema.

Gli insiemi finito-dimensionali hanno in D lo stesso ruolo che hanno in C. Per i punti $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$, si definisce la proiezione naturale $\pi_{t_1,\ldots,t_k}$ da D ad $\mathbb{R}^k$ tale che:

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}(x) = (x(t_1), \ldots, x(t_k)).$$

Le proiezioni π_0 e π_1 sono ovunque continue.
Supponendo che $0 < t < 1$, se i punti x_n convergono ad x nella topologia di Skorohod e x è continua in t allora per la (3.8) si ha:

$$x_n(t) \longrightarrow x(t).$$

Supponendo invece che x sia discontinua in t, se λ_n è un elemento di Λ che è lineare su $[0,t]$ e $[t,1]$ e soddisfa:

$$\lambda_n(t) = t - \frac{1}{n},$$

e se $x_n(s) \equiv x(\lambda_n(s))$ allora x_n converge a x nella topologia di Skorohod ma non si ha la convergenza:

$$x_n(t) \longrightarrow x(t).$$

Dalle precedenti considerazioni si ottiene la seguente proposizione.

Proposizione 3.4.5. *Se $0 < t < 1$ allora π_t è continua in t se e solo se x è continua in t.*

Con $\pi_{t_1 \dots t_k}$ misurabili, si definiscono gli insiemi finito-dimensionali come insiemi della forma $\pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} H$ con $H \in \mathcal{R}^k$. Ogni insieme finito-dimensionale appartiene a $\mathcal{D}$ dalla definizione di misurabilità.
Se T_0 è un sottoinsieme di $[0,1]$, si considera $\mathcal{F}_{T_0}$ la classe di insiemi $\pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} H$, dove k è arbitrario e t_i sono i punti arbitrari di T_0 ed $H \in \mathcal{R}^k$, allora $\mathcal{F}_{T_0}$ è un'algebra. Sia $\mathcal{D}$ la σ-algebra degli insiemi di Borel per la topologia di Skorohod, se $\mathbb{P}$ è una misura di probabilità su $(D, \mathcal{D})$ le sue distribuzioni finito-dimensionali sono le misure:

$$\mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1, \dots, t_k}.$$

Se T_0 contiene 1 ed è denso in $[0,1]$, allora la misura di probabilità $\mathbb{P}$ è completamente determinata dalle sue distribuzioni finito-dimensionali per i punti in T_0.

3.5 Convergenza debole in D

Dimostrare la convergenza debole in spazi funzionali dimostrando la convergenza debole delle distribuzioni di dimensione finita, è la tecnica usata in C che va adattata allo spazio D.
Dal momento che D è separabile e completo sotto la metrica d_0, una famiglia di misure di probabilità definita su $(D, \mathcal{D})$ è relativamente compatta se e solo se è tesa (tight). D'altra parte, il fatto che le proiezioni naturali non sono continue complica le cose.

3.5.1 Distribuzioni finito-dimensionali

Per una misura di probabiltà $\mathbb{P}$ su $(D, \mathcal{D})$, $T_{\mathbb{P}}$ consiste dei punti $t \in [0, 1]$ per i quali, secondo la **Proposizione 3.4.5**, la proiezione π_t è continua, ad eccezione dei punti che formano un insieme di misura di probabilità $\mathbb{P}$ nulla. I punti 0 ed 1 appartengono sempre a $T_{\mathbb{P}}$.
Se $0 < t < 1$ allora $t \in T_{\mathbb{P}}$ se e solo se $\mathbb{P}(J_t) = 0$ dove:

$$J_t = \{x | x(t) \neq x(t-)\} \tag{3.26}$$

è l'insieme delle x che sono discontinue in t. Richiamando la **Proposizione 3.4.5** per $0 < t < 1$ la proiezione π_t risulta continua ad x se e solo se x è continua in t.

Proposizione 3.5.1. *$T_{\mathbb{P}}$ contiene 0 ed 1 ed i suoi complementi in $[0, 1]$ sono al più numerabili.*

Dimostrazione. Un elemento di D presenta al massimo un'infinità numerabile di salti. Si vuole dimostrare che vale $\mathbb{P}(J_t) > 0$ per al più un'infinità numerabile di t. Sia $J_t(\epsilon)$ l'insieme delle x aventi in t un salto $|x(t) - x(t-)|$ maggiore di ϵ. Per ϵ e δ fissati ci possono essere al massimo punti t in quantità numerabile, per i quali vale $\mathbb{P}(J_t(\epsilon)) \geq \delta$, poiché se la disuguaglianza vale per una sequenza di punti distinti $t_1, t_2, \dots,$ allora l'insieme del $\limsup_n J_{t_n}(\epsilon)$ avrà misura almeno δ e quindi non sarà vuoto, in contraddizione al fatto che per ogni x i salti possono superare ϵ solo in un numero finito di punti. Per un fissato ϵ, quindi $\mathbb{P}(J_t(\epsilon))$ è maggiore di 0 per t al più in quantità numerabile. Dato che vale:

$$\mathbb{P}(J_t(\epsilon)) \uparrow \mathbb{P}(J_t) \quad \text{con} \quad \epsilon \downarrow 0,$$

allora la tesi è dimostrata.

$\square$

Prima di introdurre il teorema seguente occorre fare delle considerazioni: si suppone che valga:

$$\mathbb{P}_n \Longrightarrow \mathbb{P} \tag{3.27}$$

dove $\mathbb{P}_n$ e $\mathbb{P}$ sono misure di probabilità su $(D, \mathcal{D})$.
Dal teorema (3.2.1) si ha che:

$$\mathbb{P}_n \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} \Longrightarrow \mathbb{P} \pi^{-1}_{t_1 \dots t_k}$$

vale se tutti i t_i appartengono a $T_{\mathbb{P}}$.
In generale l'implicazione precedente non segue dalla (3.27) se alcuni t_i non appartengono a $T_{\mathbb{P}}$.
Se $\mathbb{P}$ è concentrata su $I_{[0,\frac{1}{2})}$ e $\mathbb{P}_n$ è concentrata su $I_{[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$ allora vale:

$$\mathbb{P}_n \Longrightarrow \mathbb{P}$$

mentre non vale:

$$\mathbb{P}_n \pi^{-1}_{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \mathbb{P} \pi^{-1}_{\frac{1}{2}}$$

Teorema 3.5.2. *Se $\{\mathbb{P}_n\}$ è tesa (tight) e se vale la relazione $\mathbb{P}_n\pi^{-1}_{t_1\ldots t_k} \Longrightarrow \mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1\ldots t_k}$, per tutti i $t_1,\ldots,t_k$ appartenenti a $T_{\mathbb{P}}$, allora:*

$$\mathbb{P}_n \Longrightarrow \mathbb{P}$$

Dimostrazione. Per la strettezza (tightness), ogni sottosuccessione $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ contiene una sottosuccessione $\{\mathbb{P}_{n''}\}$ che converge debolmente ad un limite $\mathbb{Q}$. È sufficiente mostrare, con il teorema seguente, che $\mathbb{Q}$ coincide sempre con $\mathbb{P}$.

Teorema 3.5.3. *Vale la relazione $\mathbb{P}_n \Longrightarrow \mathbb{P}$ se e solo se ogni sottosuccessione $\{\mathbb{P}_{n'}\}$ contiene una sottosuccessione $\{\mathbb{P}_{n''}\}$ per cui vale:*

$$\{\mathbb{P}_{n''}\} \Longrightarrow \mathbb{P}$$

Se $t_1,\ldots,t_k$ appartengono all'intersezione $T_{\mathbb{P}} \cap T_{\mathbb{Q}}$, si ha:

$$\mathbb{P}_{n''}\pi^{-1}_{t_1\ldots t_k} \Longrightarrow \mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1\ldots t_k}$$

dalle ipotesi, e la relazione:

$$\mathbb{P}_{n''}\pi^{-1}_{t_1\ldots t_k} \Longrightarrow \mathbb{Q}\pi^{-1}_{t_1\ldots t_k}$$

dalla convergenza $\mathbb{P}_{n''} \Longrightarrow \mathbb{Q}$. Allora si ottiene:

$$\mathbb{P}\pi^{-1}_{t_1\ldots t_k} = \mathbb{Q}\pi^{-1}_{t_1\ldots t_k} \quad t_1,\ldots,t_k \in T_{\mathbb{P}} \cap T_{\mathbb{Q}}. \tag{3.28}$$

Dato che $T_{\mathbb{P}}$ e $T_{\mathbb{Q}}$ contengono tutti i punti di $[0,1]$ tranne al più un'infinità numerabile, lo stesso vale per la loro intersezione $T_{\mathbb{P}} \cap T_{\mathbb{Q}}$. Tale intersezione risulta densa e contiene 1. Quindi in base al teorema:

Teorema 3.5.4. *Se T_0 contiene 1 ed è denso in $[0,1]$ allora $\mathcal{F}_{T_0}$ genera $\mathcal{D}$.*

si ha che $\mathcal{D}$ è generato da insiemi finito-dimensionali basati sui punti dell'intersezione $T_{\mathbb{P}} \cap T_{\mathbb{Q}}$. Si ottiene $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ dalla relazione (3.28), questo completa la dimostrazione.

□

La strettezza (tightness) in D viene dimostrata usando il seguente teorema che è l'analogo di quello relativo allo spazio C. Si prenda $\{\mathbb{P}_n\}$ una sequenza di misure di probabilità definite su $(D, \mathcal{D})$.

Teorema 3.5.5. *La sequenza $\{\mathbb{P}_n\}$ è stretta (tight) se e solo se sono valide queste condizioni:*

1. *per ogni η positivo, esiste un a tale che:*

$$\mathbb{P}_n\{x : \sup_t |x(t)| > a\} \leq \eta \quad n \geq 1$$

2. *per ogni ϵ e η positivi, esiste un $\delta (0 < \delta < 1)$ e un intero n_0 tale che:*

$$\mathbb{P}_n\{x : w_x^{'}(\delta) \geq \epsilon\} \leq \eta \quad n \geq n_0$$

Dimostrazione. La dimostrazione è completamente analoga a quella dello spazio C. □

Capitolo 4

Approssimazione del moto Browniano frazionario con passeggiate aleatorie pesate

Si espongono qui i risultati di un lavoro di Lindstrom [11] che studia l'approssimazione del moto Browniano frazionario con passeggiate aleatorie dove gli incrementi della passeggiata aleatoria frazionaria sono definite come una somma ponderata di incrementi di una passeggiata casuale di Bernoulli. Verrà studiato l'approssimazione per i valori dell'esponente di Hurst $0 < H < 1$ e si vuole dimostrare il seguente teorema:

Teorema 4.0.6. *Per ogni numero reale H, $0 < H < 1$ i processi $c_H X_{H,N}$, che rappresentano l'approssimazione della camminata casuale con:*

$$c_H = \left(\int_0^\infty \left((1+u)^{H-\frac{1}{2}} - u^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 du + \frac{1}{2H} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\Gamma(2H+1) sin(\pi H)}}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} \tag{4.1}$$

ed $X_{H,N} : \Omega_N \times T_N^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, convergono debolmente in $D([0,\infty))$ al moto Browniano frazionario con indice di Hurst H.

Prima di dimostrare il teorema precedente ed andarlo ad analizzare per i casi in cui:

- $H > 1/2$
- $H < 1/2$

occorrerà servirsi di alcune notazioni utili per la dimostrazione, e successivamente introdurrò un teorema che è alla base del **Teorema 4.0.6**.

4.1 Notazioni

Per ogni numero naturale N considero le seguenti notazioni:

- $\forall\ t \in T_N \quad w_N(t)$ sono variabili casuali indipendenti che assumono i valori -1 ed 1 con probabilità $\frac{1}{2}$;
- B_N camminata casuale di Bernoulli definita dagli incrementi $\Delta B_N(t)$ tali che:

$$\Delta B_N(t) = \sqrt{\Delta t_N} w_N(t);$$

- $\Delta t_N = \frac{1}{N}$;
- $T_N = \{k\Delta t_N | k \in \mathbb{Z}\}$;
- T_N^+ rappresenta il sottoinsieme dei numeri positivi di T_N;
- per le somme sugli elementi di T_N si usa la seguente convenzione:

$$\sum_{r=s}^{t} = f(s) + f(s + \Delta t) + \ldots + f(t - \Delta t_N);$$

- $B_t = \sum_{r=0}^{t} \Delta B_r$ camminata casuale convergente al moto Browniano frazionario;

- la costante K_H è definita:

$$K_H = \begin{cases} -(H-\frac{1}{2})\zeta(\frac{3}{2}-H) & H < \frac{1}{2} \\ 1 & H \geq \frac{1}{2} \end{cases} \tag{4.2}$$

  con $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ quando $s > 1$;

- $\Delta X_{H,N}$, definita somma ponderata di incrementi della passeggiata aleatoria B_N, è data da:

$$\Delta X_{H,N}(s) = K_H \Delta t_N^{H-\frac{1}{2}} \Delta B_N(s) +$$

$$+ \sum_{r=-\infty}^{s} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t_N \Delta B_N(r).$$

Da adesso in poi si tralascerà la dipendenza da H e da N dalle notazioni precedenti. Dato che lo scopo è quello di capire le dinamiche del moto Browniano frazionario, ho definito X specificando i suoi incrementi dati da $\Delta X(s)$. Altra notazione importante riguarda la definizione di $X(t)$ mediante l'espressione:

$$X(t) = \sum_{s=1}^{t} \Delta X(s) = \sum_{s=0}^{t} K_H \Delta t^{H-\frac{1}{2}} \Delta B_s +$$

$$+ \sum_{s=0}^{t} \sum_{r=-\infty}^{s} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t \Delta B_r.$$

Cambiando l'ordine della sommatoria ottengo:

$$X(t) = K_H \Delta t^{H-\frac{1}{2}} B_t + \sum_{r=0}^{t} \sum_{s=r+\Delta t}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t \Delta B_r + \tag{4.3}$$

$$+ \sum_{r=-\infty}^{0} \sum_{s=0}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t \Delta B_r.$$

L'idea è quella di semplificare l'espressione per $X(t)(4.3)$ sostituendo le somme:

$$\sum (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t$$

con gli integrali corrispondenti:

$$\int (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds$$

e poi eseguire l'integrazione.

Questa procedura è semplice per il caso $H > \frac{1}{2}$ mentre nel caso $H < \frac{1}{2}$ uno dei due integrali diverge e per questo occorrerà prestare molta attenzione.

4.2 CASO $H > \frac{1}{2}$

Iniziamo la dimostrazione del **Teorema 4.0.6** per il caso $H > \frac{1}{2}$, ricordando che la costante K_H è 1, dalla relazione (4.2) si ottiene:

$$X(t) = \Delta t^{H-\frac{1}{2}} B_t + \sum_{r=0}^{t} \sum_{s=r+\Delta t}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t \Delta B_r +$$

$$+ \sum_{r=-\infty}^{0} \sum_{s=0}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t \Delta B_r.$$

Quando $H > \frac{1}{2}$ non abbiamo problemi con la convergenza e se si considera il termine di errore $\epsilon_N(r,t)$:

$$\epsilon_N(r,t) = \sum_{s=r+\Delta t}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t - \int_{r+\Delta t}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds$$

si ha che:

$$\sum_{s=r+\Delta t}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t = \int_{r+\Delta t}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds + \epsilon_N(r,t) =$$

$$= (t-r)^{H-\frac{1}{2}} \Delta t^{H-\frac{1}{2}} + \epsilon_N(r,t).$$

In modo analogo con $\delta_N(r,t)$:

$$\delta_N(r,t) = \sum_{s=0}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t - \int_{0}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds$$

si ha:

$$\sum_{s=0}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta_t = \int_{0}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds + \delta_N(r,t) =$$

$$= (t-r)^{H-\frac{1}{2}} - (-r)^{H-\frac{1}{2}} + \delta_N(r,t).$$

Le considerazioni precedenti portano a riscrivere $X(t)$ con la seguente espressione :

$$X(t) = \sum_{r=0}^{t} ((t-r)^{H-\frac{1}{2}} + \epsilon_N(r))\Delta B_r +$$

$$+ \sum_{r=-\infty}^{0} ((t-r)^{H-\frac{1}{2}} - (-r)^{H-\frac{1}{2}} + \delta_N(r))\Delta B_r =$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{t} ((t-r)^{H-\frac{1}{2}} - (-r)_+^{H-\frac{1}{2}})\Delta B_r + \sum_{r=0}^{t} \epsilon_N(r,t)\Delta B_r + \sum_{r=-\infty}^{0} \delta_N(r,t)\Delta B_r.$$

Si vuole provare che X converge debolmente al moto Browniano frazionario. Questo è provato dal **Teorema di Konstantopoulos**, che sarà esposto nella sotto sezione seguente.

4.2.1 Teorema di Konstantopoulos

Konstantopoulos nel lavoro 'Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums' [10] studia l'approssimazione al moto Browniano frazionario con parametro di Hurst $H > \frac{1}{2}$.
I processi di approssimazione sono basati su una sequenza stazionaria di variabili casuali $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ ottenute dalle somme pesate di variabili indipendenti $\{w_k, k \in \mathbb{Z}\}$, che assumono i valori -1 ed 1 con probabilità $\frac{1}{2}$, tali che:

$$X_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k} w_k \tag{4.4}$$

I coefficienti $\{a_k\}$ sono deterministici e la sequenza $\{X_j\}$ può essere dipendente a lungo raggio. Si ricorda che il moto Browniano frazionario è definito come un processo gaussiano continuo $B_H = \{B_H(t), t \geq 0\}$ con incrementi stazionari tali che valgono:

$$\mathbb{E}B_H(t) = 0, \quad \mathbb{E}B_H^2(t) = Lt^{2H}$$

dove L è il parametro di varianza ed H il coefficiente di Hurst.
Si denota il moto Browniano frazionario con varianza L e coefficiente di Hurst H con $FBM(H, L)$. H è l'indice di auto-similarità.
Introduco il cammino casuale:

$$S_0 = 0, \qquad S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N \quad N = 1, 2, \ldots$$

dove $\{X_j\}$ è definito da (4.4) e si definisce il processo riscalato:

$$Z_{N,H} = \frac{1}{N^H} \sum_{j=1}^{[Nt]} X_j, \quad t \in [0, \infty). \tag{4.5}$$

La condizione principale sui coefficienti $\{a_k\}$ è data da:

$$V_N^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_{k+1} + \ldots + a_{k+N})^2 \sim LN^{2H} \quad \textit{con } N \longrightarrow \infty \tag{4.6}$$

che rende il processo $\{Z_{N,H}\}$ dipendente a lungo raggio e asintoticamente H-autosimilare.
Si introduce la dipendenza a lungo raggio tramite le relazioni (4.4) e (4.5). Nella teoria delle serie temporali, $\{X_N\}$ è detto un processo stazionario lineare.

Un primo risultato nel lavoro di Konstantopoulos è dato dal **Teorema 4.2.1** che riguarda il limite della successione dei processi $\{Z_{N,H}\}$. Esso mostra che il limite di $\{Z_{N,H}\}$ è dato dal moto Browniano frazionario, con varianza L e coefficiente di Hurst H, se e solo se vale la relazione (4.6), che come si vedrà successivamente (4.9) risulta essere una condizione sulla varianza.
Si ricorda che per limite di $\{Z_{N,H}\}$ si intende la convergenza debole delle loro misure di probabilità indotte sullo spazio $D([0,\infty))$. Dal momento che il moto Browniano frazionario ha traiettoria continua allora si può trattare D come uno spazio dotato della metrica definita da:

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min\left\{1, \sup_{0 \le t \le k} |x(t) - y(t)|\right\} \; x, y \in D[0,\infty). \tag{4.7}$$

Dato che:

$$\mathbb{E}w_0 = 0, \quad \mathbb{E}w_0^2 = 1 \tag{4.8}$$

e dato che:

$$0 < \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^2 < \infty$$

ci si assicura che $\{X_j, j \in \mathbb{Z}\}$ sono quadrato integrabili.
Le somme infinite in (4.4) convergono quasi certamente per il Teorema di Kolmogorov e Khinchin [12]. Si osserva inoltre che vale:

$$S_N = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_{-k+1} + \ldots + a_{-k+N}) w_k, \quad V_N^2 = \mathbb{E} S_N^2 \qquad \forall N \geq 0. \tag{4.9}$$

Il seguente teorema caratterizza la convergenza del processo $\{Z_{N,H}\}$ al moto Browniano frazionario.

Teorema 4.2.1. *Assunte le condizioni (4.8), si consideri $\{Z_{N,H} \geq 1\}$ la sequenza definita da (4.4), e $FBM(H, L)$ il moto Browniano frazionario con parametro di Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ e varianza $L > 0$. Con le precedenti assunzioni le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $\{Z_{N,H}\}$ *converge debolmente a* $FBM(H, L)$ *per* $N \longrightarrow \infty$

ii) $V_N^2 \sim L N^{2H}$ *per* $N \longrightarrow \infty$

4.2.2 Dimostrazione Teorema Konstantopoulos

Il teorema dà un criterio di applicazione in termini dei coefficienti $\{a_k\}$ per l'approssimazione ad un moto Browniano frazionario con parametro $H > \frac{1}{2}$.

Si inizia con il notare che per ogni t fissato, il processo $\{Z_{N,H}(t)\}$ è una combinazione lineare di una successione di variabili indipendenti casuali. I seguenti lemmi sono ausiliari per il **Teorema 4.2.1**.

Lemma 4.2.2. *Si consideri $\{b_{Ni}, N \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}\}$ una sequenza doppiamente indicizzata di numeri reali e $\{\zeta_{Ni}, N \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}\}$ una sequenza di variabili casuali tali che valgano:*

L1.

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_{Ni}^2 = 1$$

L2.

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \sup_{i \in \mathbb{Z}} |b_{Ni}| = 0$$

L3. $\forall N$ $\quad \{\zeta_{Ni}, i \in \mathbb{Z}\}$ *sono indipendenti ed identicamente distribuite con:*

$$\mathbb{E}\zeta_{N0} = 0 \quad e \quad \mathbb{E}\zeta_{N0}^2 = 1$$

L4.

$$\lim_{K \longrightarrow \infty} \sup_{N \geq 1} \mathbb{E}\{\zeta_{N0}^2, |\zeta_{N0}| > K\} = 0$$

Definendo le somme pesate:

$$z_N = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_{Ni} \zeta_{Ni}$$

allora z_N converge debolmente con $N \longrightarrow \infty$ alla distribuzione normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Dimostrazione. Per la condizione **L1.** si consideri una sequenza $\{k_N\}$ di interi positivi che aumentino all'infinito, affinché:

$$\tilde{\sigma}^2 := \sum_{i=-k_N}^{k_N} b_{Ni}^2 \longrightarrow 1 \text{ con } N \longrightarrow \infty.$$

e si definiscano le somme ponderate parziali:

$$\tilde{z}_N := \sum_{i=-k_N}^{k_N} b_{Ni}\zeta_{Ni}.$$

È facile vedere che :

$$\tilde{\sigma}_N^2 = \mathbb{E}\tilde{z}_N^2 \longrightarrow 1 \text{ e } \mathbb{E}(z_N - \tilde{z}_N^2) = \sum_{|i|>k_N} b_{Ni}^2 \longrightarrow 0 \text{ con } N \longrightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Per ogni $\epsilon > 0$ vale:

$$\mathbb{E}\sum_{-k_N}^{k_N} b_{Ni}^2\zeta_{Ni}^2 1\{|b_{Ni}\zeta_{Ni}| > \epsilon\tilde{\sigma}_N\} \longrightarrow 0 \text{ con } N \longrightarrow \infty$$

e si stima il membro sinistro come segue:

$$\mathbb{E}\sum_{-k_N}^{k_N} b_{Ni}^2\zeta_{Ni}^2 1\{|b_{Ni}\zeta_{Ni}| > \epsilon\tilde{\sigma}_N\} \leq \sum_{-k_N}^{k_N} b_{Ni}^2 \mathbb{E}\left\{\zeta_{N0}^2, |\zeta_{N0}^2| > \frac{\epsilon\tilde{\sigma}_N}{\sup_i |b_{Ni}|}\right\}. \quad (4.11)$$

Si osserva che la condizione **L2.** e la precedente relazione implica che:

$$\frac{\tilde{\sigma}_N}{\sup_i |b_{Ni}|} \longrightarrow \infty \quad \text{con} \quad N \longrightarrow \infty$$

Usando la condizione di uniforme integrabilità **L4.** si ottiene:

$$\mathbb{E}\left\{\zeta_{N0}^2, |\zeta_{N0}| > \frac{\epsilon\tilde{\sigma}_N}{\sup_i |b_{Ni}|}\right\} \longrightarrow 0 \quad \text{con} \quad N \longrightarrow \infty$$

e quindi la relazione (4.11) segue immediatamente dalle relazioni precedenti. In questo modo si mostra che $\frac{\tilde{z}_N}{\tilde{\sigma}_N}$ converge debolmente a $\mathcal{N}(0,1)$ e analogamente $\tilde{z}_N$. La convergenza alla distribuzione normale è dimostrata con il **Teorema del limite centrale di Lindeberg** (Appendice A).
La dimostrazione termina con la prova che le relazioni (4.10) implicano la convergenza a 0 in probabilità di $z_N - \tilde{z}_N$, e quindi la convergenza debole a $\mathcal{N}(0,1)$ di z_N.

$\square$

Per $k \in \mathbb{Z}$ ed $N \in \mathbb{N}$ si definisce:

$$A_{k,N}(t) = N^{-H} \sum_{j=-k+1}^{-k+[Nt]} a_j \quad \text{e} \quad \rho_N(t) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |A_{k,N}(t)| \tag{4.12}$$

e dalle relazioni (4.6) e (4.9) segue che:

$$Z_{N,H}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,N}(t) w_k \quad \text{e} \quad N^{-2H} V_N^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_{k,N}^2(1). \tag{4.13}$$

Per dimostrare il **Teorema 4.2.1** ci si serve dei seguenti lemmi:

Lemma 4.2.3. *Se vale la condizione (4.8), allora per tutti i $t \geq 0$ si ha:*

$$\rho_N^2(t) \leq tN^{1-2H} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j^2 \longrightarrow 0, \quad con \quad N \longrightarrow \infty \tag{4.14}$$

Dimostrazione. Questo segue immediatamente dalla disequazione:

$$A_{k,N}^2(t) \leq N^{-2H} (\sum_{j=-k+1}^{-k+[Nt]} |a_j|)^2 \leq N^{-2H}[Nt] \sum_{j=-k+1}^{-k+[Nt]} a_j^2 \leq N^{1-2H} t \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j^2$$

considerando $2H > 1$, e da:

$$A_{k,N}(t) = N^{-H} \sum_{j=-k+1}^{-k+[Nt]} a_j.$$

□

Lemma 4.2.4. *Assumendo che valga la ii) del* ***Teorema*** *4.2.1, per ogni fissato $t \geq, \tau \geq 0$ si ha:*

$$\mathbb{E} Z_{N,H}(\tau) Z_{N,H}(t) \longrightarrow \mathbb{E} B_H(\tau) B_H(t) \quad con \quad N \longrightarrow \infty$$

Dimostrazione. A partire dalle relazioni (4.12) e (4.13) si ha:

$$\mathbb{E}(Z_{N,H}(t) - Z_{N,H}(\tau))^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (A_{k,N}(t) - A_{k,N}(\tau))^2 = \tag{4.15}$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} A_{j,[Nt]-[N\tau]}^2(1) = \frac{([Nt] - [N\tau])^{2H}}{N^{2H}} \frac{V_{[Nt]-[N\tau]}}{([Nt] - [N\tau])^{2H}}$$

quindi dal punto *ii*) del **Teorema** 4.2.1:

$$\mathbb{E}(Z_{N,H}(t) - Z_{N,H}(\tau))^2 \longrightarrow L(t-\tau)^2 = \mathbb{E}(B_H(t) - B_H(\tau))^2 \text{ con } N \longrightarrow \infty \tag{4.16}$$

è possibile scrivere:

$$2\mathbb{E}Z_{N,H}(t)Z_{N,H}(\tau) = \mathbb{E}Z^2_{N,H}(t) + \mathbb{E}Z^2_{N,H}(\tau) - \mathbb{E}(Z_{N,H}(t) - Z_{N,H}(\tau))^2$$

$$\longrightarrow \mathbb{E}B^2_H(t) + \mathbb{E}B^2_H(\tau) - \mathbb{E}(B_H(t) - B_H(\tau))^2 = 2\mathbb{E}(B_H(t)B_H(\tau))$$

in modo che la convergenza desiderata è provata.

□

Lemma 4.2.5. *Assumendo che valga la ii) del* ***Teorema*** *4.2.1, per qualche $K < \infty$ si ha:*

$$\mathbb{E}(Z_{N,H}(t) - Z_{N,H}(\tau))^2 \leq K(t-\tau)^{2H} \quad \textit{se } [Nt] > [N\tau] \tag{4.17}$$

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dalla relazione (4.15) con:

$$K = 2^{2H} \sup_{m \geq 1} \frac{V_m}{m^H} < \infty.$$

□

Usando i lemmi precedenti, senza perdere di generalità, si consideri il parametro della varianza $L = 1$ e si assume che valga la ii) del **Teorema** 4.2.1

e la condizione (4.8).

Per prima cosa si mostra che le distribuzioni finito-dimensionali di $Z_{N,H}$ convergono a quelle di un processo B_H di un moto Browniano frazionario $FBM(H,1)$ ovvero:

$(Z_{N,H}(t_1), \ldots, Z_{N,H}(t_l))$ converge in legge a $(B_H(t_1), \ldots, B_H(t_l))$, $N \longrightarrow \infty$

per una successione finita $0 \leq t_1 < \ldots < t_l$ con $l \in \mathbb{N}$. Per provarlo si usa il Teorema di Cramér-Wold [9] e si mostra che:

$$z_N = \sum_{i=1}^{l} c_i Z_{N,H}(t_i) = \sum_k \sum_{i=1}^{l} c_i A_{k,N}(t_i) w_k \tag{4.18}$$

converge a:

$$\sum_{i=1}^{l} c_i B_H(t_i) \tag{4.19}$$

per alcune costanti $c_1, \ldots, c_l$.
Per ottenere la (4.19) si usa il **Lemma**4.2.2 con $\{\zeta_{Ni} = w_i, N \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}\}$.
È chiaro che valgono **L3.** e **L4.** del **Lemma 4.2.2**. La condizione **L2.** segue immediatamente dal **Lemma 4.14**, da cui:

$$\sup_k \left| \sum_{i=1}^{l} c_i A_{k,N}(t) \right| \leq \sum_{i=1}^{l} |c_i| \rho_N(t) \longrightarrow 0 \text{ con } N \longrightarrow \infty.$$

Per provare **L1.** del **Lemma 4.2.2** si scrive:

$$\mathbb{E}z_N^2 = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} c_i c_j \mathbb{E} Z_{N,H}(t_i) Z_{N,H}(t_j) \longrightarrow \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} c_i c_j \mathbb{E} B_H(t_i) B_H(t_j) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{l} c_i B_H(t_i)\right)^2$$

con $N \longrightarrow \infty$. Quindi valgono tutte le condizioni del **Lemma 4.2.2** e z_N converge debolmente a $\sum_{i=1}^{l} c_i B_H(t_i)$.
Ora si esamina $\{Z_{N,H}\}$, prima di tutto occorre dimostrare che vale:

$$\mathbb{E}(|Z_{N,H}(t_2) - Z_{N,H}(t_1)| \cdot |Z_{N,H}(t_3) - Z_{N,H}(t_2)|) \leq K(t_3 - t_1)^{2H} \qquad (4.20)$$

per tutti $t_1 < t_2 < t_3$.
Se $[Nt_1] = [Nt_2]$ o $[Nt_2] = [Nt_3]$ allora vale la precedente disequazione in quanto la parte sinistra della disequazione risulta essere 0.
Se invece $[Nt_1] < [Nt_2] < [Nt_3]$ allora dal **Lemma 4.17** vale:

$$\mathbb{E}(|Z_{N,H}(t_2) - Z_{N,H}(t_1)| \cdot |Z_{N,H}(t_3) - Z_{N,H}(t_2)|) \leq$$
$$\leq (\mathbb{E}(Z_{N,H}(t_2) - Z_{N,H}(t_1))^2)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}(Z_{N,H}(t_3) - Z_{N,H}(t_2))^2)^{\frac{1}{2}}) \leq$$
$$\leq K(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)^H \leq K(t_3 - t_1)^{2H}$$

quindi la diseguaglianza (4.20) è provata per tutti i $t_1 < t_2 < t_3$.
La diseguaglianza (4.20), insieme alla convergenza delle distribuzioni finito-dimensionali, dà la convergenza debole della distribuzione di $\{Z_{N,H}\}$ in $D[0,T)$, con la topologia di Skorohod per $T < \infty$.
Tuttavia nel caso in esame il processo limite è continuo, pertanto la convergenza debole nella topologia di Skorohod implica la convergenza debole rispetto alla topologia uniforme $D[0,T)$ per tutti i $T < \infty$. Quindi, si è dimostrata la convergenza debole nello spazio $D[0,\infty)$ con la topologia descritta

dalla metrica (4.7).
Si può quindi mostrare che la $i)$ implica la $ii)$ del **Teorema 4.2.1**: supponendo che $Z_{N,H}$ converga a B_H allora $Z_{N,H}(1)$ converge debolmente a $\mathcal{N}(0,1)$. Dato $L_N = \mathbb{E}Z^2_{N,H}(1) < \infty$, si prenda $\hat{L}$ punto di limite di $\{L_N, N \geq 1\}$ e lo si assume finito. Allora si può trovare una sottosequenza $\{L_{N_j}, j \geq 1\} \subseteq \{L_N, N \geq 1\}$ con $L_{N_j} \longrightarrow \hat{L}$, $j \longrightarrow \infty$.
Dall'ipotesi che $Z_{N,H}$ converga a B_H vale il **Lemma 4.2.2** per Z_{N_j}, per cui si ha la convergenza di $Z_{N_j}(1)$ a $\mathcal{N}(0, \hat{L})$ che implica $\hat{L} = 1$, dove:

$$Z_N(t) = (N^H)^{-1} \sum_{j=1}^{[Nt]} X_j.$$

Per escludere che ci sia un punto di limite inifinito di $\{L_N, N \geq 1\}$, si assume $L_{N_j} \longrightarrow \infty$. Partendo dalla convergenza di $Z_{N,H}$ a B_H ed applicando il **Lemma 4.2.2** alla sequenza $\{L_{N_j}^{-\frac{1}{2}} Z_{N_j}(1), j \geq 1\}$, si ha che $L_{N_j}^{-\frac{1}{2}} Z_{N_j}(1)$ converge a $\mathcal{N}(0,1)$, ma questo risulta assurdo se si assume come ipotesi:

- $L_{N_j} \longrightarrow \infty$,
- $Z_{N_j}(1)$ converge a $N(0,1)$.

Quindi si è ottenuto che l'unico punto di limite di $\{L_N, N \geq 1\}$ è dato da $\hat{L} = 1$, ed in questo modo si ottiene la verifica del punto $ii)$ del **Teorema 4.2.1**.
Tutto il lavoro precendente permette di dimostrare che per ottenere la convergenza delle passeggiate aleatorie al moto Browniano frazionario, in accordo con il **Teorema 4.2.1**, è solo sufficiente che valga tale convergenza:

$$\mathbb{E}(c_H^2 X(t)^2) \longrightarrow t^{2H}.$$

Questo segue immediatamente dalla rappresentazione di Mandelbrot e Van Ness che definisce la passeggiata aleatoria:

$$X(t) = c_H \int_{-\infty}^{t} ((t-r)^{H-\frac{1}{2}} - (-r)_+^{H-\frac{1}{2}}) dB_r$$

dove la costante c_H è data da:

$$c_H = (\int_0^\infty ((1+u)^{H-\frac{1}{2}} - u^{H-\frac{1}{2}})^2 du + \frac{1}{2H})^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}}{\Gamma(H+\frac{1}{2})}$$

e dal seguente lemma:

Lemma 4.2.6. *Per* $\frac{1}{2} < H < 1$ *valgono:*

i)

$$\mathbb{E}((\sum_{r=0}^{t} \epsilon_N(r,t)\Delta B_r)^2) \leq (H-\frac{1}{2})^2 t \Delta t^{2H-1}$$

ii)

$$\mathbb{E}((\sum_{r=-\infty}^{0} \delta_N(r,t)\Delta B_r)^2) \leq (H-\frac{1}{2})^2 \zeta(3-2H)\Delta t^{2H}$$

Dimostrazione. Si inizia la dimostrazione per il punto i), per prima cosa si osserva che:

$$\epsilon_N(r,t) = \sum_{s=r+\Delta t}^{t} (H-\frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t - \int_{r+\Delta t}^{t} (H-\frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds > 0$$

e le sommatorie:

$$\sum_{s=r+\Delta t}^{t} (H-\frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t \quad \text{e} \quad \sum_{s=r+2\Delta t}^{t} (H-\frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t$$

rappresentano rispettivamente la somma superiore ed inferiore di Riemann per l'integrale.
In questo modo si ottiene che:

$$\mathbb{E}\Bigg(\Bigg(\sum_{r=0}^{t}\epsilon_N(r,t)\Delta B_r\Bigg)^2\Bigg) = \sum_{r=0}^{t}\epsilon_N(r,t)^2\Delta t \leq$$

$$\leq \sum_{r=0}^{t}(H-\frac{1}{2})^2\Delta t^{2H-1}\Delta t \leq (H-\frac{1}{2})^2 t\Delta t^{2H-1}$$

Passiamo ora a dimostrare il punto *ii*) del lemma, usando l'approssimazione delle somme di Riemann come nel punto precedente.
Per questo si osserva che:

$$0 \leq \delta_N(r,t) \leq (H-\frac{1}{2})(-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t$$

e quindi si ottiene:

$$\mathbb{E}\Bigg(\Bigg(\sum_{r=-\infty}^{0}\delta_N(r,t)\Delta B_r\Bigg)^2\Bigg) = \sum_{r=-\infty}^{0}\delta_N(r,t)^2\Delta t \leq \sum_{r=-\infty}^{0}(H-\frac{1}{2})^2(-r)^{2H-3}\Delta t^3$$

Sostituendo ad r il valore $-k\Delta t$ si ottiene:

$$\mathbb{E}\Bigg(\Bigg(\sum_{r=-\infty}^{0}\delta_N(r,t)\Delta B_r\Bigg)^2\Bigg) \leq \sum_{k=0}^{\infty}(H-\frac{1}{2})^2 k^{2H-3}\Delta t^{2H} =$$

$$= (H-\frac{1}{2})^2\zeta(3-2H)\Delta t^{2H}$$

□

Questi risultati ottenuti dimostrano la tesi del lemma e quindi del **Teorema 4.0.6** per il caso $H > \frac{1}{2}$.

4.3 CASO $H < \frac{1}{2}$

Anche in questo caso si inizia dall'espressione che definisce la passeggiata casuale $X(t)$:

$$X(t) = K_H \Delta t^{H-\frac{1}{2}} B_t + \sum_{r=0}^{t} \sum_{s=r+\Delta t}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t \Delta B_r + \tag{4.21}$$

$$+ \sum_{r=-\infty}^{0} \sum_{s=0}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t \Delta B_r$$

ma occorre essere molto più attenti perchè uno degli integrali risulta divergere.
Si lavora sul termine:

$$\sum_{s=r+\Delta t}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t$$

che può essere riscritto nella seguente forma:

$$\sum_{s=r+\Delta t}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t =$$

$$= \sum_{s=r+\Delta t}^{\infty} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t - \sum_{s=t}^{\infty} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t.$$

Sostituendo r ed s rispettivamente con $N\Delta t$ e $k\Delta t$:

$$\sum_{s=r+\Delta t}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t = \sum_{k=N+1}^{\infty} (H - \frac{1}{2})(k\Delta t - N\Delta t)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t =$$

$$= (H - \frac{1}{2}) \Delta t^{H-\frac{1}{2}} \zeta(\frac{3}{2} - H) = -K_H \Delta t^{H-\frac{1}{2}}$$

e andando ad usare il risultato della relazione (4.21) si ottiene:

$$X(t) = \sum_{r=0}^{t} \sum_{s=t}^{\infty} -(H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t \Delta B_r +$$

$$+ \sum_{r=-\infty}^{0} \sum_{s=0}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t \Delta B_r.$$

Dall'espressione precedente si nota che i limiti presentano meno problemi, quindi si è ottenuto una forma più semplice da studiare in modo da approssimarlo con integrali.
Se si considera il termine di errore $\tilde{\epsilon}_N(r,t)$ dato da :

$$\tilde{\epsilon}_N(r,t) = \sum_{s=t}^{\infty} -(H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t - \int_t^{\infty} -(H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds$$

e ricordando che $H < \frac{1}{2}$ allora si ottiene:

$$\sum_{s=t}^{\infty} -(H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t = \int_t^{\infty} -(H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds + \tilde{\epsilon}_N(r,t) =$$

$$= [-(s-r)^{H-\frac{1}{2}}]_{s=t}^{s=\infty} + \tilde{\epsilon}_N(r,t)$$

$$= (t-r)^{H-\frac{1}{2}} + \tilde{\epsilon}_N(r,t).$$

Allo stesso modo se considero l'errore $\tilde{\delta}_N(r,t)$ dato da:

$$\tilde{\delta}_N(r,t) = \sum_{s=0}^{t} -(H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t - \int_0^{t} -(H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds$$

si ottiene:

$$\sum_{s=0}^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} \Delta t = \int_0^{t} (H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds - \tilde{\delta}_N(r,t) =$$

$$= [(s-r)^{H-\frac{1}{2}}]_{s=0}^{s=t} - \tilde{\delta}_N(r,t) = (t-r)^{H-\frac{1}{2}} - (-r)^{H-\frac{1}{2}} - \tilde{\delta}_N(r,t).$$

Con le considerazioni precedenti si ottiene l'espressione di $X(t)$ data da:

$$X(t) = \sum_{r=0}^{t}((t-r)^{H-\frac{1}{2}} + \tilde{\epsilon}_N(r,t))\Delta B_r +$$

$$+ \sum_{r=-\infty}^{0}((t-r)^{H-\frac{1}{2}} - (-r)^{H-\frac{1}{2}} - \tilde{\delta}_N(r,t))\Delta B_r =$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{t}((t-r)^{H-\frac{1}{2}} - (-r)_+^{H-\frac{1}{2}})\Delta B_r$$

$$+ \sum_{r=0}^{t}\tilde{\epsilon}_N(r,t)\Delta t - \sum_{r=-\infty}^{0}\tilde{\delta}_N(r,t)\Delta B_r.$$

Per dimostrare la convergenza debole di $c_H X(t)$ al moto Browniano frazionario non si può usare il teorema di Konstatopoulos (4.2.1), in quanto questo vale solo per il valore $H > \frac{1}{2}$.
Tuttavia si osserva che il primo termine di $X(t)$ converge in legge all'integrale dato da:

$$\int_{r=-\infty}^{t}((t-r)^{H-\frac{1}{2}} - (-r)_+^{H-\frac{1}{2}})dB_r$$

mentre con il lemma seguente si mostra che i termini di errore vanno uniformemente a zero.
Usando la rappresentazione di Mandelbrot (4.1) data dalla costante c_H si ha la verifica del **Teorema 4.0.6** per il caso $H < \frac{1}{2}$.

Lemma 4.3.1. *Per ogni H, $0 < H < \frac{1}{2}$, esiste una costante $K_H \in \mathbb{R}_+$(indipendente da N e da t) tale che:*

$$\left| X(t) - \sum_{r=-\infty}^{t} ((t-r)^{H-\frac{1}{2}} - (-r)_+^{H-\frac{1}{2}})\Delta B_r \right| \leq K_H \Delta t^H$$

Dimostrazione. Per dimostrare il lemma è sufficiente mostrare che ci sono due costanti C_H e D_H entrambe appartenenti a $\mathbb{R}_+$ tali che:

$$\left| \sum_{r=0}^{t} \tilde{\epsilon}_N(r,t)\Delta B_r \right| \leq C_H \Delta t^H$$

$$\left| \sum_{r=-\infty}^{0} \tilde{\delta}_N(r,t)\Delta B_r \right| \leq D_H \Delta t^H$$

Si inizia ad analizzare il termine di errore $\tilde{\epsilon}_N(r,t)$. Dalla sua definizione si ha:

$$\tilde{\epsilon}_N(r,t) = \sum_{s=t}^{\infty} -(H-\frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t - \int_t^{\infty} -(H-\frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds.$$

Considerando la sommatoria:

$$\sum_{s=t}^{\infty} -(H-\frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t$$

questa risulta essere una somma superiore di Riemann per l'integrale:

$$\int_t^{\infty} -(H-\frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}} ds$$

mentre la sommatoria:

$$\sum_{s=t+\Delta t}^{\infty} -(H-\frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t$$

risulta essere la sommatoria inferiore di Riemann, ottenendo così:

$$0 \leq \tilde{\epsilon}_N(r,t) \leq -(H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t.$$

Ricordando che vale la relazione $|\Delta B_r| = \Delta t^{\frac{1}{2}}$ si ottiene:

$$\left| \sum_{r=0}^{t} \tilde{\epsilon}_N(r,t)\Delta B_r \right| \leq -(H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t^{\frac{3}{2}}.$$

Se sostituisco a t ed r rispettivamente $K\Delta t$ e $k\Delta t$ posso riscrivere la precedente sommatoria come:

$$\sum_{k=0}^{K-1} -(H - \frac{1}{2})(K-k)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t^H \leq -(H - \frac{1}{2})\zeta(\frac{3}{2} - H)\Delta t^H$$

completando così lo studio del primo termine di errore.
Facendo le stesse considerazioni per il termine di errore $\tilde{\delta}_N$ si ottiene:

$$\tilde{\delta}_N(r,t) = \sum_{s=0}^{t} -(H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t - \int_0^t -(H - \frac{1}{2})(s-r)^{H-\frac{3}{2}}ds$$

e nuovamente la sommatoria risulta essere la somma superiore di Riemann

permettendo di scrivere:

$$0 \leq \tilde{\delta}_N(r,t) \leq -(H - \frac{1}{2})(-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t.$$

Sostituendo ad r il valore $-k\Delta t$ si ottiene:

$$\mathbb{E}\left| \sum_{r=-\infty}^{0} \tilde{\delta}_N(r,t)\Delta B_r \right| \leq \sum_{r=-\infty}^{0} -(H - \frac{1}{2})(-r)^{H-\frac{3}{2}}\Delta t^{\frac{3}{2}}$$

$$\leq -(H-\frac{1}{2})\Delta t^H \sum_{k=0}^{\infty} k^{H-\frac{3}{2}} = -(H-\frac{1}{2})\zeta(\frac{3}{2}-H)\Delta t^H.$$

$\square$

La verifica del lemma precedente, permette di dimostrare il teorema principale (4.0.6) anche nel caso $H < \frac{1}{2}$.

Appendice

Per ogni n si considera la serie doppiamente indicizzata:

$$\zeta_{n1}, \ldots, \zeta_{nk_n}$$

di variabili casuali indipendenti con media 0 e varianza finita $\sigma^2_{n_k}$. Inoltre si considera:

$$S_n = \zeta_{n1} + \ldots + \zeta_{nk_n}$$

con varianza data da:

$$s^2_n = \sigma^2_{n1} + \ldots + \sigma^2_{n_k}.$$

Si denota con $\mathcal{N}$ una variabile casuale distribuita secondo la distribuzione normale con media 0 e varianza 1. Sotto tali premesse di seguito si studia il **Teorema di Lindeberg**:

Teorema .0.2. *Se vale* $\forall \epsilon > 0$*:*

$$\frac{1}{s^2_n} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\{|\zeta_{nk}| \geq \epsilon s_n\}} \zeta^2_{nk} d\mathbb{P} \longrightarrow 0 \quad per \quad n \longrightarrow \infty \tag{22}$$

allora si ha:

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}$$

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che vale:

$$\mathbb{E}\left\{ f\left(\frac{S_n}{s_n}\right)\right\} \longrightarrow \mathbb{E}\{f(\mathcal{N})\} \tag{23}$$

per ogni funzione f continua e limitata avente derivate di ogni ordine limitate e continue. Si fissa una funzione f e si definisce una funzione g Borel misurabile come segue:

$$g(h) = \sup_x |f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \frac{1}{2}f''(x)h^2|. \tag{24}$$

Esiste una costante K, dipendente solo da f, tale che:

$$g(h) \leq K \min\{h^2, |h|^3\}, \tag{25}$$

allora si ha:

- $g(h) \leq Kh^2$ per h grande,
- $g(h) \leq K|h|^3$ per h vicino a 0.

Dalla definizione di $g(h)$ (24) segue:

$$|[f(x+h_1) - f(x+h_2)] - [f'(x)(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}f''(x)(h_1^2 - h_2^2)]| \leq g(h_1) + g(h_2). \tag{26}$$

Se tutti gli ζ_{nk} sono distribuiti con distribuzione normale allora si ha:

$$\mathbb{E}\left\{f\left(\frac{S_n}{s_n}\right)\right\} = \mathbb{E}\{f(\mathcal{N})\},$$

invece se si sostituisce ζ_{nk} con variabili η_{nk}, distribuite con distribuzione normale con media 0 e varianza σ_{nk}^2:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\{f(s_n^{-1}(\zeta_{n1}+\ldots+\zeta_{nk_n}))\},\\
&\mathbb{E}\{f(s_n^{-1}(\zeta_{n1}+\ldots+\zeta_{nk_n-1}+\eta_{nk_n}))\},\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathbb{E}\{f(s_n^{-1}(\zeta_{n1}+\eta_{n2}+\ldots+\eta_{nk_n}))\},\\
&\mathbb{E}\{f(s_n^{-1}(\eta_{n1}+\ldots+\eta_{nk_n}))\}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Il primo membro di questa sequenza rappresenta $\mathbb{E}\left\{f\left(\frac{S_n}{s_n}\right)\right\}$ e l'ultimo rappresenta $\mathbb{E}\{f(\mathcal{N})\}$.

L'idea della dimostrazione è quella di mostrare che poiché ogni membro risulta vicino al successivo, allora anche il primo membro della sequenza risulterà vicino all'ultimo.

Si definisce un nuovo spazio $(\mathbb{R}^{2k_n}, \mathcal{R}^{2k_n})$ introducendo le variabili casuali η_{nk} in modo che le $2k_n$-variabili date da:

$$\zeta_{n1},\ldots,\zeta_{nk_n},\eta_{n1},\ldots,\eta_{nk_n} \tag{28}$$

sono indipendenti. Se si considera:

$$\xi_{nk}=\sum_{1\le i<k}\zeta_{ni}+\sum_{k<i\le k_n}\eta_{ni} \quad \text{con} \quad 1\le k\le k_n$$

allora, data la relazione $\xi_{nk_n}+\eta_{nk_n}=S_n$ ed il fatto che $\xi_{n1}+\eta_{n1}$ ha la distribuzione di $s_n\mathcal{N}$, si ottiene:

$$\left|\mathbb{E}\left\{f\left(\frac{S_n}{s_n}\right)\right\}-\mathbb{E}\{f(\mathcal{N})\}\right|\le\sum_{k=1}^{k_n}\left|\mathbb{E}\left\{f\left(\frac{\xi_{nk}+\zeta_{nk}}{s_n}\right)-f\left(\frac{\xi_{nk}+\eta_{nk}}{s_n}\right)\right\}\right|.$$

Dall'indipendenza della sequenza (28), le tre variabili ξ_{nk}, ζ_{nk} e η_{nk} risultano indipendenti per ogni valore di k e quindi vale:

$$\mathbb{E}\left\{f'\left(\frac{\xi_{nk}}{s_n}\right)(\zeta_{nk}-\eta_{nk})\right\}=\mathbb{E}\left\{f''\left(\frac{\xi_{nk}}{s_n}\right)(\zeta_{nk}^2-\eta_{nk}^2)\right\}=0.$$

Con la relazione (26) si ha:

$$\left|\mathbb{E}\left\{f\left(\frac{S_n}{s_n}\right)\right\}-\mathbb{E}\{f(\mathcal{N})\}\right|\leq\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}\left\{g\left(\frac{\zeta_{nk}}{s_n}\right)+g\left(\frac{\eta_{nk}}{s_n}\right)\right\}.$$

L'ultimo passo della dimostrazione è far vedere che valgono:

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}\left\{g\left(\frac{\zeta_{nk}}{s_n}\right)\right\}\longrightarrow 0 \tag{29}$$

e

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}\left\{g\left(\frac{\eta_{nk}}{s_n}\right)\right\}\longrightarrow 0. \tag{30}$$

Dato $\epsilon>0$, si divide il valore atteso della relazione (29) in due integrali, ed utilizzando la disequazione (25) si ha un integrale sull'insieme $\{|\zeta_{nk}|\leq\epsilon s_n\}$ di $K|\frac{\zeta_{nk}}{sn}|^3$ e l'altro sull'insieme complementare di $K|\frac{\zeta_{nk}}{s_n}|^2$:

$$\mathbb{E}\left\{g\left(\frac{\zeta_{nk}}{s_n}\right)\right\}\leq K\epsilon\frac{\sigma_{nk}^2}{s_n^2}+K\frac{1}{s_n^2}\int_{\{}|\zeta_{nk}|\geq\epsilon s_n\}\zeta_{nk}^2d\mathbb{P}.$$

Data l'ipotesi del teorema (22) e dal fatto che vale:

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathbb{E}\left\{g\left(\frac{\zeta_{nk}}{s_n}\right)\right\}\leq K\epsilon+K\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{\{}|\zeta_{nk}|\geq\epsilon s_n\}\zeta_{nk}^2d\mathbb{P} \tag{31}$$

si ha la convergenza voluta (29). La relazione (31) è valida anche se sostituisco η_{nk} a ζ_{nk}.

Per dimostrare l'altra convergenza (30) si ha bisogno di mostrare che:

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{\{|\eta_{nk}|\geq\epsilon s_n\}}\eta_{nk}^2 d\mathbb{P} \tag{32}$$

tende a 0, per ogni ϵ positivo, ma al massimo la relazione precedente è uguale a:

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}\frac{1}{\epsilon s_n}\mathbb{E}\{|\eta_{nk}|^3\} = \frac{1}{\epsilon s_n^3}\sum_{k=1}^{k_n}\sigma_{nk}^3\mathbb{E}\{|\mathcal{N}|^3\}.$$

Con la disequazione seguente:

$$\frac{\sigma_{nk}^2}{s_n^2} \leq \epsilon^2 + \frac{1}{s_n^2}\int_{\{}|| \geq \epsilon s_n\}\zeta_{nk}^2 d\mathbb{P}$$

l'ipotesi del teorema (22) implica:

$$\max_{k\leq k_n}\frac{\sigma_{nk}}{s_n} \longrightarrow 0,$$

che a sua volta implica la convergenza:

$$\sum_{k=1}^{k_n}\frac{\sigma_{nk}^3}{s_n^3} \longrightarrow 0.$$

Allora dopo le precedenti considerazioni si ottiene la convergenza voluta (32), completando così la dimostrazione del teorema.

□

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare in primo luogo il Professor Campanino per la sua disponibilità e pazienza, per avermi accompagnato passo dopo passo nella stesura della tesi, per avermi dato delucidazioni ove io le chiedessi e per non avermi mai fatto pesare il lungo tempo dedicatomi. Lo ringrazio inoltre per avermi dato la possibilità di apprezzarlo come docente, nonchè come persona, per la gentilezza e cordialità mostratemi nello scambio continuo di vedute ed opinioni.
Un ringraziamento particolare va alla Dott.ssa Bianchi per il tempo dedicatomi, per l'entusiasmo mostratomi e per il supporto morale che mi ha permesso di non agitarmi e non perdere di vista gli obiettivi prefissatomi.
Ho sempre pensato che questo giorno tanto atteso avrebbe provocato in me una sensazione di liberazione dovuta alla conclusione di un periodo della mia vita caratterizzato da ansie e paure, ma così non è stato. Sono stata assalita, invece, da sensazioni di angoscia, insofferenza e malessere a cui non riuscivo a dare una spiegazione, ma per fortuna, anche se forse un pò tardi, l'ho trovata. La mia insofferenza, la mia non sopportazione delle altre persone, la mia voglia di solitudine erano tutte dovute alla paura del futuro, paura di quello che avrei dovuto affrontare, paura delle decisioni che avrei dovuto prendere, delle rinunce che avrei dovuto fare e paura di allontanarmi da persone a me care, che sono diventate parte integrante della mia vita, i cui nomi sono: Carlotta, Daniela, Francesco e Roberta.
L'università per me ha rappressentato una dura avventura, essermi allontanata così tanto dalla mia città d'origine non è stato facile e soprattutto dalla

mia famiglia che ha sempre rappresentato il mio punto di forza, per famiglia intendo genitori, sorella, nonni, zii e cugine.
Se penso a come tutto è iniziato, essere arrivata fin qui mi rende molto felice e fiera di me, ho dovuto affrontare sin dall'inizio della mia avventura momenti difficili, primo tra tutti la perdita di una persona molto cara che ha segnato la mia vita ma mi ha permesso di diventare più forte e la donna che sono oggi, anche se con qualche difetto.
Questi anni di studio mi hanno però anche regalato l'incontro con persone fantastiche che mi hanno accompagnato e sostenuto nei momenti del bisogno; sono una persona che ha difficoltà ad aprirsi e a fidarsi per paura di mostrare le proprie debolezze ma loro sono stati pazienti, hanno aspettato il momento in cui fossi stata davvero pronta senza forzami in alcun modo. Hanno imparato a conoscermi, hanno saputo andare oltre la mia corteccia ed il mio carattere un pò rude, se sono riusciti a conoscermi davvero significa solo una cosa: sono persone speciali. Abbiamo condiviso sia momenti di stress, nel preparare gli esami, sia momenti di gioia e spensieratezza, non potrò mai dimenticare tutto ciò e quello che hanno fatto per me. Ognuno di loro mi ha permesso di poterli avere accanto, nonostante le nostre diversità caratteriali siamo riusciti a trovare dei punti di incontro e di questo ne sono contenta.
Francesco è la persona che ho conosciuto il primo giorno di università e quella che non mi ha mai abbandonato in tutti questi anni nonostante i molti chilometri che ci separano.
Daniela è la persona con cui ho condiviso momenti spensierati caratterizzati da serate e pomeriggi rilassanti dove la principale attività era mangiare, ho trascorso con lei esperienze indimenticabili che rimaranno sempre impresse nella mia memoria. Nonostante il suo carattere poco espansivo, mi ha permesso di conoscerla e far parte della sua vita.
Roberta è la persona con cui ho avuto più discussioni, non ci siamo parlate per anni e le ho fatto, forse un pò troppo, pagare una sua mancanza ma credo di essere riuscita a ripargarla facendola entrare nel mio mondo.

L'ultima persona ma non per importanza è Carlotta, all'inizio quando l'ho conosciuta pensavo che il suo buonismo fosse qualcosa di costruito e non reale, invece dopo averla conosciuta mi sono resa conto che fa parte di lei, raramente ho conosciuto persone così genuine, le cui buone azioni scaturiscono in maniera incondizionata. Siamo persone completamente opposte caratterialmente, lei sempre solare io metereopatica, lei entusiasta per tutto io sempre acida, ma nonostante questo abbiamo imparato con gli anni a convivere e a completarci. Ho avuto il piacere di conoscerla a fondo ed ho riscontrato in lei una persona speciale, una grande amica, un sostegno ed una colonna portante nella mia vita. La cosa che mi ha colpito piacevolmente è stata quella di aver avuto la fortuna conoscere la sua famiglia con cui ho instaurato un rapporto particolare, sono riusciti con la loro presenza ed il loro affetto mostratomi ad ovviare, spesso e volentieri, alla mancanza fisica dei miei genitori dandomi quel calore e tranquillità che solo la tua vera famiglia riesce a darti, loro sono riusciti a farlo. Spero di avergli trasmesso l'affetto che nutro per loro e di essere diventata una di famiglia.
Queste quattro persone sono state i migliori compagni di viaggio che potessi desiderare, li ringrazio per la pazienza e l'impegno che li ha caratterizzati nella comprensione della mia persona, spero davvero che siano stati un minimo ripagati.
Altro ringraziamento particolare va alle persone che mi hanno permesso di poter studiare e vivere a pieno quest'avventura, i miei genitori.
Ringrazio mia madre per l'amore che non mi ha mai fatto mancare, per le parole di sostegno, per il supporto morale e per avermi fatto davvero capire che la sua priorità è la mia felicità. Abbiamo entrambe un carattere forte che spesso ci porta a scontrarci ma l'amore ed il legame che ci lega è così forte che ci permette sempre di chiarirci. Mi è stata vicina, mi ha sempre confortato anche non condividendo alcune mie scelte, per tutto questo e per essere stata così paziente in questo periodo di nervosismo ed isteria, la ringrazio.
Vorrei anche ringraziare mio padre per l'affetto che nutre per me e per la sua presenza silenziosa ma sempre costante e incondizionata, vorrei dirgli che gli

voglio bene, che per lui ci sarò sempre e lo sosterrò per ogni sua scelta. Lo ringrazio per i suoi sacrifici che mi hanno permesso di costruire le fondamenta del mio futuro.
Siamo giunti a colei che riesce sempre a strapparmi una risata, colei che per non agitarmi il giorno prima dell'esame mi parla di tutt'altro per farmi rilassare, colei che amo incondizionatamente, colei per cui andrei contro tutti e tutto pur di proteggerla, colei che cerca di farmi comprendere i miei sbagli anche se il più delle volte invano, lei è mia sorella Alessandra. Il nostro legame non è tale solo per il grado di parentela ma si è consolidato negli anni ed ha raggiunto il suo culmine dopo molti assestamenti; abbiamo imparato a conoscerci e a volerci bene, abbiamo saputo trovarci pian piano e apprezzarci come persone. Grazie per come hai saputo sostenermi.
Dopo tutti questi ringraziamenti, vorrei aggiungere quelli ad una persona che mi è stata vicina in questi ultimi anni, che ha saputo ascoltarmi, darmi dei buoni consigli e permesso di sfogarmi nei momenti di sconforto, la reputo una sorella maggiore che con dolcezza e pacatezza ha sempre cercato di calmarmi e tranquillizzarmi ove io ne avessi davvero bisogno, grazie Aurora.

Bibliografia

[1] Yuliya Mishura, (2008), *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*. Berlin: Springer.

[2] A.N.Kolmogorov, (1940), *Wienersche spiralen und einige andere interessante kurven im Hilbertschen raum*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de l'URSS, Volume XXVI.

[3] A.N.Kolmogorov, (1956), *Foundations of the Theory of Probability.* Second English Edition, New York: Chelsea Publishing Company.

[4] A.Khintchine, (1934), *Korrelationstheorie der stationären stochastichen Prozesse*. Mathematische Annalen Band 109.

[5] N.Wiener, (1923), *Differential Space*. Journal of Mathematics and Physics.

[6] A.M.Yaglom, (1958), *Correlation theory of processes with random stationary n-th increments*, Amer.Math.Soc.Transl.

[7] Wold, (1938), *A study in the analysis of stationary time series*. Almquist and Wiksell.

[8] B.B.Mandelbrot and J.W. Van Ness, (1968), *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM review,10.

[9] P.Billingsley, (1968), *Convergence of Probability Measures*. John Wiley and Sons, New York.

[10] T.Konstantopoulos and A.Sakhanenko, (2004), *Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums*, Siberian Electronic Mathematical Reports.

[11] T.Lindstrom, (2007), *A weighted random walk approximation to fractional Brownian motion.*

[12] A.N. Shiryaev, 1984, *Probability*, Berlin: Springer-Verlag.