

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

DETERMINAZIONE DELLA MASSA IN ASTROFISICA

Tesi di laurea

Relatore:
Chiar.mo Prof.
MARCELLA BRUSA

Presentata da:
SIMONE BORZAGA

Sessione **IV**
Anno Accademico **2021-2022**

Indice

1	Introduzione	1
2	La massa in astrofisica	1
3	Leggi di Keplero	2
	3.1 Massa del Sole	3
	3.2 Stelle binarie	3
4	Limite di Jeans	6
5	Limite di Chandrasekhar	7
6	Diagramma H-R e Relazione massa-luminosità	9
7	Massa delle galassie	10
	7.1 Curva di rotazione delle galassie a spirale	11
	7.2 Massa viriale delle galassie ellittiche	13
8	Conclusioni	15

1 Introduzione

In astrofisica, la determinazione della massa degli oggetti celesti è una delle più difficili da effettuare. A volte si possono utilizzare metodi esatti in cui la massa viene ricavata dalle leggi fondamentali della fisica, altre volte è necessario utilizzare metodi basati su leggi empiriche, calibrate attraverso le osservazioni.

La conoscenza di tale grandezza fisica permette lo studio del moto dei corpi, di ricavarne la densità, la struttura e predire l'evoluzione di oggetti come nubi di gas, pianeti, stelle, buchi neri o galassie, in quanto è una grandezza onnipresente nelle equazioni che usiamo per descrivere la natura.

La lista di oggetti astrofisici e di metodi per ricavarne la massa sarebbe molto lunga ma, data la brevità richiesta da questo elaborato, gli argomenti toccati sono pochi e soggetti alle dovute approssimazioni.

In questo elaborato si intende discutere, dopo aver definito brevemente la massa, alcuni metodi per la sua determinazione negli oggetti astrofisici. In particolare definire la massa di oggetti in interazione gravitazionale attraverso le leggi di Keplero, la massa delle stelle attraverso leggi empiriche come la relazione massa-luminosità, limiti di massa per nubi di gas attraverso il limite di Jeans, limiti di massa per stelle nane bianche attraverso il limite di Chandrasekhar e infine la massa delle galassie a spirale e ellittiche attraverso rispettivamente le curve di rotazione e il teorema del viriale.

2 La massa in astrofisica

La massa è una proprietà intrinseca della materia e una grandezza fondamentale della fisica che misura la quantità di materia contenuta in un corpo. Più rigorosamente, in base al secondo principio della dinamica, si definisce la *massa inerziale* come la resistenza o l'inerzia di un corpo al cambiamento del suo stato di moto, ovvero alla sua accelerazione causata da una forza agente su di esso.

Infatti, la seconda legge di Newton afferma che maggiore è la massa di un oggetto, maggiore sarà la forza necessaria per accelerarlo:

$$F = ma \tag{1}$$

da cui:

$$a = \frac{F}{m} \tag{2}$$

La massa di un corpo però ha anche un'altra caratteristica completamente diversa dall'inerzia, ossia la capacità di esercitare una forza gravitazionale su qualunque altro corpo dotato di massa, attirandolo a sé. Perciò tramite la legge di gravitazione universale, anch'essa formulata da Isaac Newton, si definisce la *massa gravitazionale*:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (3)$$

dove G è la costante di gravitazione universale, m_1 e m_2 sono le masse gravitazionali e r è la distanza tra esse. Quindi un corpo dotato di massa gravitazionale attrae ogni altro corpo con una forza proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato delle distanze.

Nonostante la massa inerziale e la massa gravitazionale descrivano due proprietà distinte della materia, gli esperimenti hanno dimostrato che sono sempre proporzionali con la stessa costante di proporzionalità, quindi hanno lo stesso valore.

Nella meccanica classica la massa è una proprietà invariante della materia indipendente dalle condizioni di moto, ciò non è più vero per corpi con velocità confrontabili con la velocità della luce per i quali bisogna fare ricorso alla meccanica relativistica. In questi casi la massa di un corpo è legata alla sua energia e al sistema di riferimento in cui la si osserva. Gli oggetti di cui si determina la massa in questo elaborato non raggiungono tali velocità quindi la relatività può essere trascurata.

3 Leggi di Keplero

Il modo migliore per stimare le masse degli oggetti è sfruttare la loro interazione gravitazionale. Le leggi formulate da Keplero forniscono la spiegazione dinamica dei moti planetari utilizzando appunto la forza di gravitazione universale.

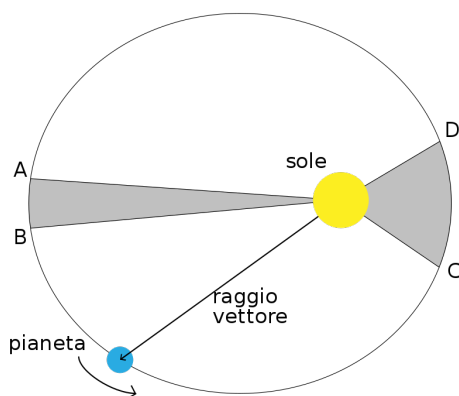


Figura 1: Illustrazione dell'orbita ellittica di un pianeta

Le tre leggi affermano che:

1. Le orbite dei pianeti sono ellittiche e il Sole occupa uno dei due fuochi.
2. I pianeti in rivoluzione attorno al Sole spazzano aree uguali in tempi uguali.
3. Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta intorno al Sole è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita.

3.1 Massa del Sole

Una applicazione delle suddette leggi di Keplero sui movimenti dei pianeti è la determinazione della massa del Sole dall'osservazione delle orbite planetarie. In particolare, nelle condizioni in cui entrambi possono essere considerati come puntiformi, la massa del pianeta è trascurabile rispetto a quella del Sole e si possono trascurare le interazioni con altri corpi, dalla terza legge si può ricavare la massa della nostra stella.

Infatti dalla legge dei periodi:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_\odot + m)} \quad (4)$$

dove P è il periodo di rivoluzione, a è il semiasse maggiore dell'orbita, G è la costante di gravitazione universale e M_\odot e m sono la massa del sole e del pianeta.

Dato che $M_\odot \gg m$:

$$M_\odot = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} \quad (5)$$

Chiaramente questo metodo si può generalizzare a qualsiasi oggetto legato gravitazionalmente ad un altro con massa molto minore, di cui si riesca ad osservare l'orbita e il periodo orbitale. Perciò si può determinare la massa di qualsiasi corpo del sistema solare che abbia un satellite naturale (o attorno a cui si riesca a inviare un satellite artificiale), un buco nero attorno a cui orbita una stella o, come vedremo più nel dettaglio, per un sistema di stelle binario.

3.2 Stelle binarie

I sistemi binari sono composti da due stelle legate dalla reciproca attrazione gravitazionale, in orbita ellittica attorno ad un centro di massa comune. Essi rivestono un ruolo importante in astrofisica, in quanto il calcolo delle loro orbite fornisce l'unico metodo diretto per poter determinare le masse stellari. La massa di altre stelle è stimata attraverso la relazione massa-luminosità (vedi Cap. 6) che è valida solo per stelle di sequenza principale e dev'essere calibrata tramite l'osservazione delle stelle binarie.

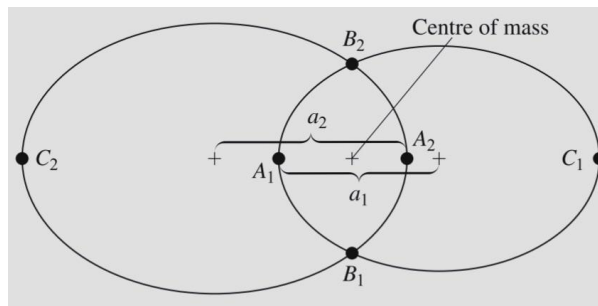


Figura 2: Le componenti del sistema binario si muovono attorno al centro di massa. A_1 e A_2 , come B e C , indicano la posizione delle stelle in un dato tempo.

Le stelle binarie si classificano in base al metodo di scoperta:

1. Le binarie visuali hanno le componenti abbastanza separate affinché si possa fare un'osservazione diretta.
2. Le binarie astrometriche hanno solo una componente visibile, ma il suo moto proprio mostra che esiste una seconda componente invisibile.
3. Le binarie spettroscopiche sono scoperte tramite cambiamenti periodici del loro spettro.
4. Le binarie fotometriche sono scoperte tramite cambiamenti di luminosità causate dalle eclissi reciproche.

Vedremo che dall'osservazione delle binarie visuali e delle binarie spettroscopiche si può ricavare una buona stima della massa delle componenti.

Binarie visuali

Consideriamo una *binaria visuale* e assumiamo che la componente più luminosa sia stazionaria e l'altra le orbiti attorno. Osservando il sistema per un tempo sufficiente si può determinare l'orbita relativa della componente secondaria. Le osservazioni delle binarie visuali danno però solo la proiezione dell'ellisse orbitale relativa al piano del cielo.

Tuttavia, misurando la deviazione della primaria dal fuoco dell'orbita relativa proiettata, si può determinare l'orientamento dell'orbita reale. Sapendo questo la massa totale del sistema può essere calcolata dalla terza legge di Keplero.

La massa delle singole componenti può essere determinata dall'osservazione del moto di entrambe relativamente al centro di massa. Infatti, dalla definizione di centro di massa:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (6)$$

dove a_1 e a_2 sono i semiassi maggiori delle orbite della stella primaria e secondaria e m_1 e m_2 sono le loro masse. Sapendo che il semiasse maggiore dell'orbita relativa è dato da:

$$a = a_1 + a_2 \quad (7)$$

e sostituendo (6) e (7) nella terza legge di Keplero si può ricavare la massa della prima stella:

$$m_1 = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}{P^2G(1 + \frac{a_1}{a_2})} \quad (8)$$

e dalla (6) anche la massa della seconda.

Binarie spettroscopiche

Le *binarie spettroscopiche* appaiono come una singola stella anche nei telescopi più potenti, ma i loro spettri mostrano delle variazioni a intervalli regolari. Lo spostamento Doppler delle righe spettrali è direttamente proporzionale alla velocità radiale e la separazione delle righe è maggiore quando una componente si avvicina e l'altra si allontana dall'osservatore. Il periodo in cui variano le righe è il periodo orbitale delle stelle. La velocità osservata è legata alla velocità reale da:

$$v = v_0 \sin i \quad (9)$$

dove l'inclinazione i è l'angolo tra la linea di vista e la normale al piano orbitale.

Considerando una binaria dove le componenti si muovono in orbita circolare attorno al centro di massa, possiamo scrivere il raggio delle orbite a_1 e a_2 . Riprendendo la definizione di centro di massa $m_1a_1 = m_2a_2$ e scrivendo $a = a_1 + a_2$, si ottiene:

$$a_1 = \frac{am_2}{m_1 + m_2} \quad (10)$$

La velocità orbitale vera è data da:

$$v_{0,1} = \frac{2\pi a_1}{P} \quad (11)$$

Dalla (9) la velocità orbitale osservata è:

$$v_1 = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P} \quad (12)$$

Sostituendo in (10), si ottiene:

$$v_1 = \frac{2\pi a}{P} \frac{m_2 \sin i}{m_1 + m_2} \quad (13)$$

Risolviendo per a e sostituendo nella terza legge di Keplero, si ottiene la *funzione di massa*:

$$\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{v_1^3 P}{2\pi G} \quad (14)$$

Se una componente della binaria spettroscopica è così debole che le sue linee spettrali non possono essere osservate, solo P e v_1 sono osservabili. In questo caso né la massa delle componenti né la massa totale possono essere determinate.

Se invece le linee spettrali di entrambe le componenti possono essere osservate, anche v_2 è conosciuto. Perciò da (12) si ha:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad (15)$$

e dalla definizione di centro di massa:

$$m_1 = \frac{m_2 v_2}{v_1} \quad (16)$$

che sostituito in (13), determina i valori di $m_2 \sin^3 i$ e $m_1 \sin^3 i$. Le masse effettive non possono perciò essere determinate senza sapere l'inclinazione dell'orbita.

Relazioni più realistiche possono essere derivate nel caso di orbite ellittiche e/o nel caso di pianeti extrasolari dove una massa è molto più piccola dell'altra.

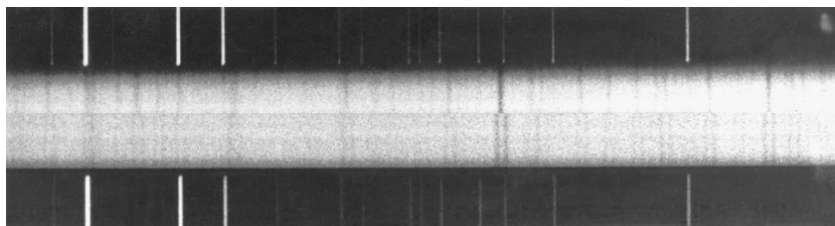


Figura 3: Spettro della binaria spettroscopica κ Arietis. Nello spettro superiore le linee spettrali sono singole, in quello inferiore sono doppie.

4 Limite di Jeans

Le stelle sono sfere di gas che si formano a causa del collasso di nubi di mezzo interstellare. Il criterio di Jeans fornisce la massa minima che una nube molecolare deve possedere, per un dato valore di temperatura e densità, per iniziare a contrarsi e dare origine a una stella, mediante il collasso gravitazionale. Se la massa della nube supera un valore critico la forza di gravità prevale sulla pressione del gas e, in presenza di fluttuazioni di densità, determina il collasso.

Questo valore critico è determinato dalla *massa di Jeans* che risulta tanto più piccola tanto è più fredda o densa la nube:

$$M_j = \left(\frac{2.5kT}{G\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

dove k è la costante di Boltzmann, T la temperatura, G la costante di gravitazione universale, μ la massa media di una particella e ρ la densità della nube.

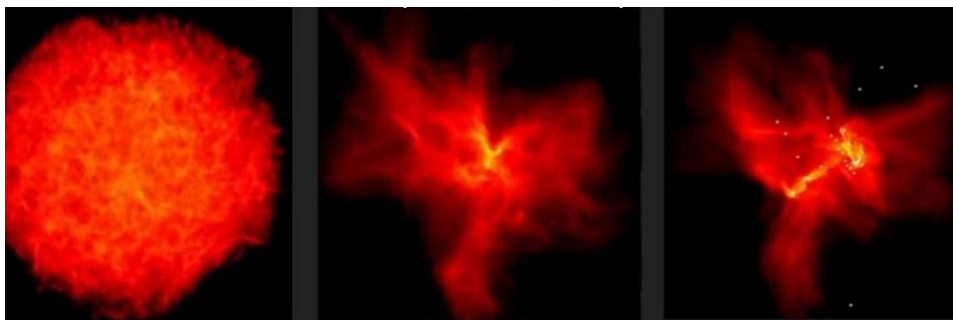


Figura 4: Collasso gravitazionale di una nube molecolare

Il collasso gravitazionale si sviluppa nella zona centrale della nube molecolare, dove la densità raggiunge i valori più elevati. Una volta iniziata la contrazione, la densità aumenta e, quindi, il valore della massa di Jeans diminuisce: di conseguenza, la nube molecolare può spezzarsi in frammenti approssimativamente di una massa solare, che a loro volta si contraggono in modo indipendente. L'aumento di densità conseguente al collasso gravitazionale porta all'innescio delle reazioni di fusione nucleare, che liberano una grande quantità di energia e provocano l'accensione della stella. C'è da specificare però che stelle con masse inferiori a $0,08 M_{\odot}$ non diventano mai abbastanza calde per innescare la fusione nucleare dell'idrogeno.

5 Limite di Chandrasekhar

Il limite di Chandrasekhar fornisce il limite superiore che può raggiungere la massa di un corpo costituito da materia degenere, come una nana bianca di carbonio-ossigeno. Il suo valore rappresenta la massa non rotante limite che può opporsi al collasso gravitazionale, sostenuta dalla pressione di degenerazione degli elettroni.

Le nane bianche infatti sono così dense che il gas all'interno del loro nucleo si trova in stato degenere. In questa condizione gli elettroni sono costretti a occupare livelli energetici sempre più alti fino a riempire tutti gli stati possibili, generando maggiore pressione e impedendo il collasso del nucleo.

La massa calcolata dall'astrofisico indiano Subrahmanyan Chandrasekhar oltre la quale la struttura non è più stabile è approssimativamente:

$$M_{Ch} \approx 1.44M_{\odot} \quad (18)$$

dove M_{\odot} è la massa solare.

Normalmente le nane bianche non raggiungono mai queste masse, ma il limite può essere superato in sistemi binari molto stretti, nel caso in cui la nana bianca aumenti gradualmente la propria massa accrescendola dalla stella compagna, tipicamente in fase di gigante/supergigante. Il trasferimento di massa è possibile quando la gigante si espande abbastanza da superare il proprio lobo di Roche permettendo alla gravità della nana bianca di strapparle il materiale. Quando la nana bianca supera la massa di Chandrasekhar collassa improvvisamente ed esplose come una supernova di tipo Ia. Questa categoria di supernove produce un picco di luminosità simile in tutte le esplosioni a causa del valore critico fissato perciò sono utilizzate come candele standard, fondamentali per la determinazione delle distanze cosmiche.

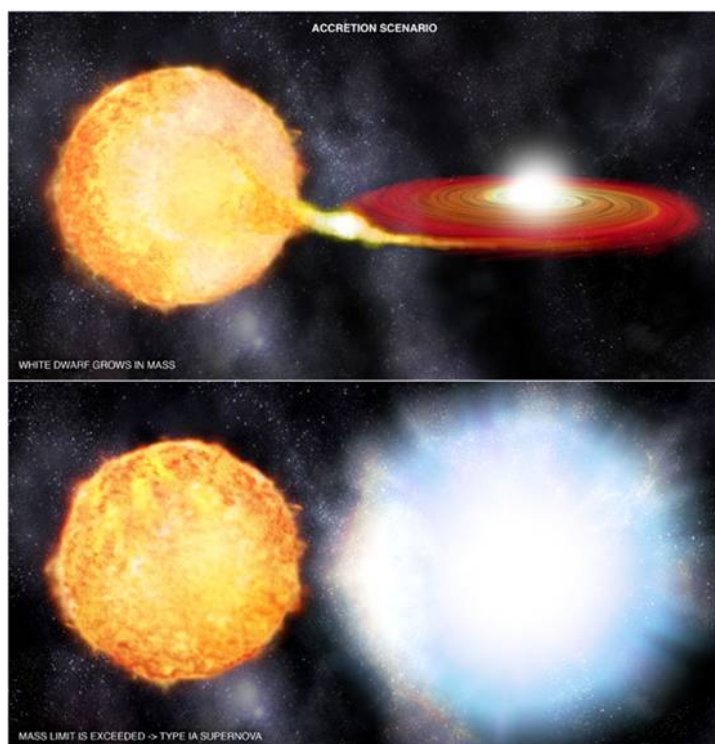


Figura 5: Sopra: Fase di accrescimento in massa della nana bianca. Sotto: Esplosione di supernova di tipo Ia.

6 Diagramma H-R e Relazione massa-luminosità

Quando non si ha un sistema binario ma una singola stella osservabile, è più complicato determinarne la massa. Non si può più fare affidamento a leggi fisiche rigorose come la terza legge di Keplero ma si utilizzano leggi empiriche, quindi derivate e calibrate dalle osservazioni delle stelle binarie.

Si utilizza quindi il diagramma di Hertzsprung-Russel (H-R), che mette in relazione la magnitudine (o luminosità) al colore (o temperatura effettiva) delle stelle osservate. In questo diagramma la maggior parte delle stelle si dispongono lungo una sequenza diagonale, detta *sequenza principale*, in cui la luminosità cresce all'aumentare della temperatura. In questa fascia sono presenti tutte le stelle che si trovano in uno stato di equilibrio idrostatico e che fondono idrogeno in elio tramite reazioni termonucleari nel nucleo.

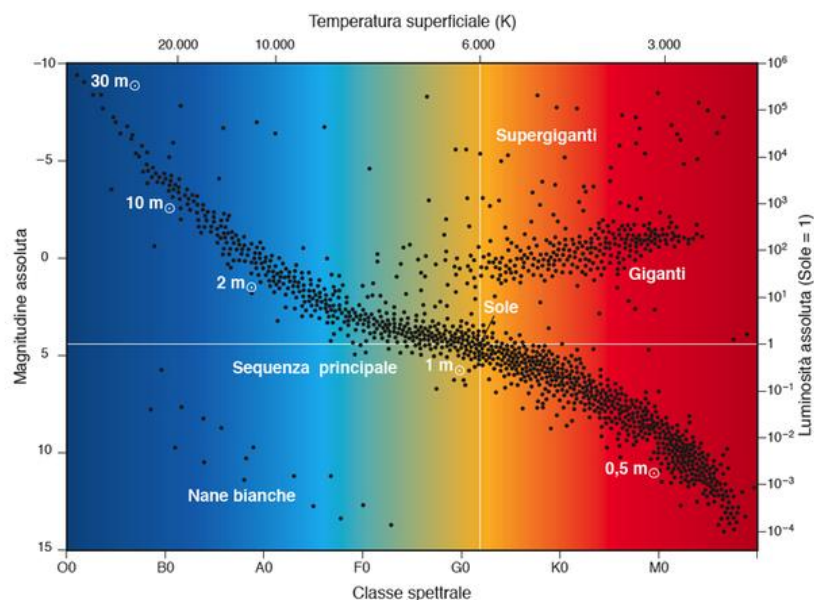


Figura 6: Il diagramma di Hertzsprung-Russel

Le osservazioni delle stelle binarie di sequenza principale mostrano che maggiore è la massa della stella, più in alto si troverà sulla sequenza principale. Infatti le stelle più massive sono intrinsecamente più luminose. Quindi la massa di una stella di sequenza principale è strettamente correlata alla sua luminosità attraverso la relazione empirica massa-luminosità, che può essere usata per stimare le masse stellari dal loro tipo spettrale:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.8} \quad (19)$$

dove L_{\odot} e M_{\odot} sono luminosità e massa del Sole.

O più in generale:

$$L \propto M^{\alpha} \quad (20)$$

dove α assume un valore tra 3 e 5 a seconda di dove ci troviamo sulla sequenza principale. Infatti la pendenza cambia agli estremi, è minore per stelle di piccola e grande massa.

La relazione tra massa e luminosità può essere anche utilizzata per calcolare il tempo di permanenza di una stella all'interno della sequenza principale, dato che tale tempo è proporzionale al rapporto M/L , cioè proporzionale alla quantità di combustibile nucleare disponibile, e inversamente proporzionale al consumo di tale carburante. Infatti:

$$t_{MS} \propto M^{1-\alpha} \quad (21)$$

Poiché la luminosità è approssimativamente proporzionale alla terza potenza e mezza della massa, se ne ricava che le stelle massicce hanno una permanenza sulla sequenza principale più corta di quelle meno massicce.

7 Massa delle galassie

Di grande importanza in astrofisica è anche la determinazione della massa delle galassie, fondamentale per la cosmologia e lo studio della formazione e dell'evoluzione dell'universo. I metodi per stimare la massa delle galassie variano a seconda del tipo di galassia, determinato attraverso la classificazione morfologica di Hubble. Esse sono divise in galassie ellittiche, lenticolari, a spirale, a spirale barrate e irregolari. In questa sezione si analizzano un metodo empirico per stimare la massa delle galassie a spirale e un metodo approssimato per stimare la massa delle galassie ellittiche.

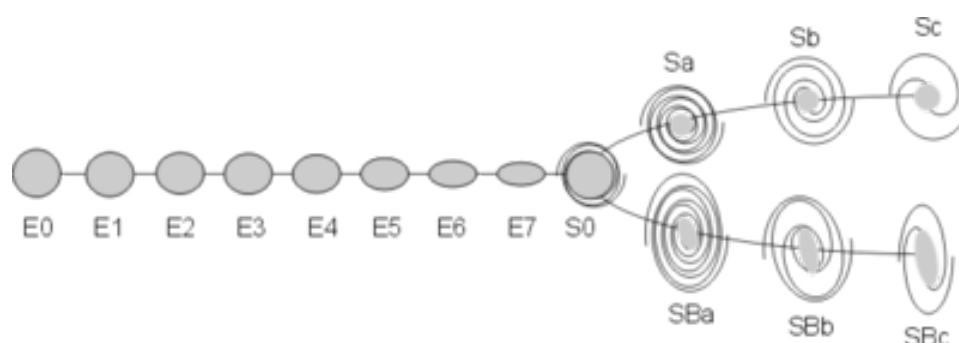


Figura 7: Classificazione di Hubble delle galassie

7.1 Curva di rotazione delle galassie a spirale

Le galassie a spirale sono formate da un bulge centrale, da un sottile disco di gas e stelle, da bracci a spirale, nei quali avviene la formazione stellare, e da un alone circostante. Si possono dividere in due sottoclassi, normali e barrate, a seconda della forma del bulge.

In questa tipologia di galassie la distribuzione della massa può essere studiata attraverso la curva di rotazione, cioè l'andamento della velocità di rotazione della materia in funzione della distanza dal centro della galassia. Dal punto di vista teorico la curva di rotazione può essere divisa nelle tre regioni tipiche di una galassia a spirale.

Per il *bulge* si assume un modello sferico con distribuzione di massa omogenea in funzione del raggio:

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}r^3 \quad (22)$$

dove $\bar{\rho}$ è la densità media. Uguagliando accelerazione gravitazionale e centripeta:

$$\frac{v^2(r)}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (23)$$

e inserendo (22) si ottiene:

$$v^2(r) = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}r^2 \implies v(r) \propto r \quad (24)$$

perciò la velocità di rotazione nel bulge cresce linearmente col raggio.

Nel *disco sottile* si assume una densità di massa superficiale $\sigma(r)$ costante da cui, svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$v(r) \propto \text{cost} \quad (25)$$

la velocità è indipendente dal raggio, si ha una rotazione differenziale e la curva di rotazione è piatta.

Nelle regioni esterne dell'*alone*, a grandi distanze dal centro galattico, la massa può essere considerata come un punto:

$$\frac{GM_{gal}}{r^2} = \frac{v^2(r)}{r} \quad (26)$$

quindi:

$$v(r) \propto r^{-\frac{1}{2}} \quad (27)$$

la velocità segue un regime Kepleriano e in teoria la curva di rotazione dovrebbe avere una caduta nelle regioni più esterne.

La curva di rotazione reale di una galassia si costruisce attraverso l'osservazione delle nubi di idrogeno neutro HI presenti nelle diverse regioni galattiche. In particolare si osserva lo spostamento per effetto Doppler della riga a 21 cm prodotta per inversione di

spin dell'elettrone e si determina la velocità di rotazione della regione attraverso:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v(r)}{c}. \quad (28)$$

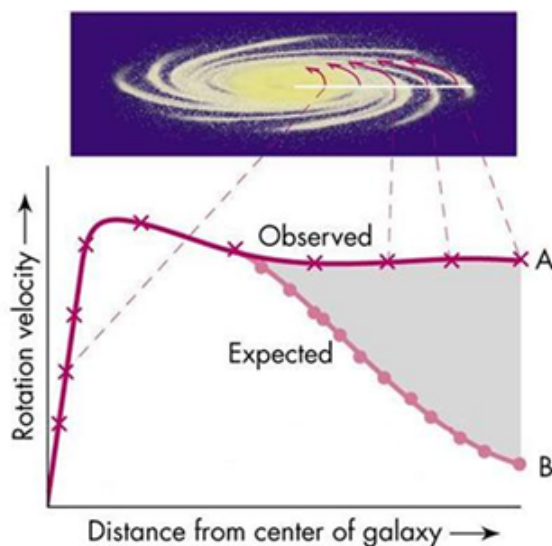


Figura 8: Curva di rotazione della Via Lattea

Dalle osservazioni attraverso questo metodo si nota che la curva di rotazione reale non rispecchia quella teorica nelle regioni più esterne. Ad un certo punto si vede come la curva diventi piatta nonostante la caduta Kepleriana attesa allontanandosi dal disco di stelle. Sembra che la massa stia aumentando, nonostante il gas e le stelle diminuiscano. Questa massa mancante viene spiegata per mezzo della materia oscura, cioè un tipo di materia composta da particelle che sono gravitazionalmente rilevanti ma radiativamente elusive.

Inoltre, considerando le stelle presso la periferia di una galassia spirale, con velocità orbitali osservate normalmente di 200km/s, se la galassia fosse composta solo da materia visibile queste stelle abbandonerebbero la galassia in breve tempo, dato che le loro velocità orbitali sono quattro volte più grandi della velocità di fuga dalla galassia. Dato che non si osservano galassie che si stiano disperdendo in questo modo, al loro interno deve trovarsi massa di cui non si tiene conto quando si calcola tutta quella visibile.

La massa di una qualsiasi galassia a spirale di cui si osserva la curva di rotazione può essere calcolata entro un certo raggio attraverso (23), tenendo conto che la maggior parte di essa è composta da materia oscura. Ulteriori prove dell'esistenza della materia oscura provengono da effetti di lenti gravitazionali in punti dove non sono visibili masse.

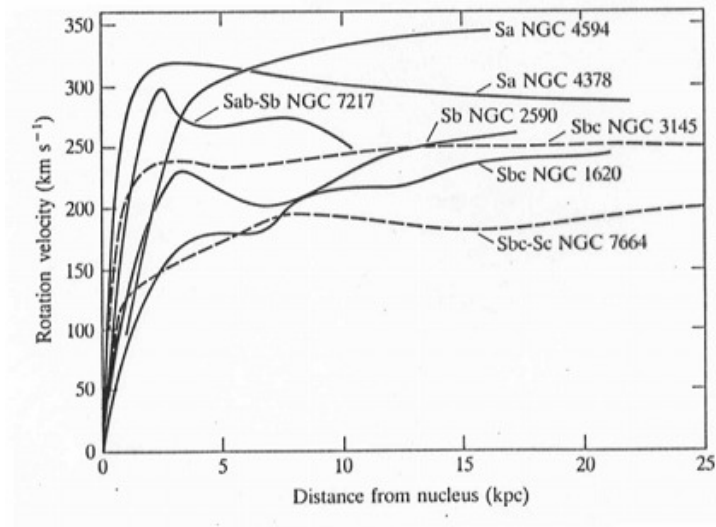


Figura 9: Tipiche curve di rotazione di galassie a spirale

7.2 Massa viriale delle galassie ellittiche

Le galassie ellittiche appaiono dalle osservazioni come ellissi senza particolari caratteristiche strutturali a parte la loro eccentricità, in base a cui sono classificate. A differenza delle galassie a spirale, le ellittiche hanno poco gas e polvere e la formazione stellare è praticamente assente, perciò sono formate soprattutto da stelle vecchie.

Per determinare la massa di questi oggetti non si può fare affidamento alla curva di rotazione, data la scarsa presenza di gas freddo, ma bisogna utilizzare un metodo più semplice e approssimativo. Si considera la galassia ellittica un sistema autogravitante all'equilibrio dinamico che obbedisce al teorema del viriale:

$$2T = -U \quad (29)$$

con T energia cinetica e U energia potenziale.

A differenza delle galassie a spirale la cinematica delle galassie ellittiche si esprime attraverso un valore chiamato dispersione di velocità σ , che esprime la dispersione statistica delle velocità delle stelle attorno a un valore medio. Nelle galassie a spirale ha un valore trascurabile rispetto al moto ellittico ordinato sul piano orbitale attorno al centro della galassia. Mentre nelle galassie ellittiche non è presente un piano orbitale ed è il moto disordinato e la dispersione di velocità a prevalere.

La dispersione di velocità di una galassia ellittica può essere stimata misurando le velocità radiali dei singoli oggetti. Osservando una riga in assorbimento, il suo allargamento Doppler sarà dato dalla sovrapposizione dei contributi di velocità radiale delle singole stelle sulla linea di vista. La dispersione di velocità aumenta proporzionalmente con il potenziale gravitazionale, quindi con la massa. Stimato il suo valore può essere

usato poi per derivare la massa della galassia tramite il teorema del viriale.

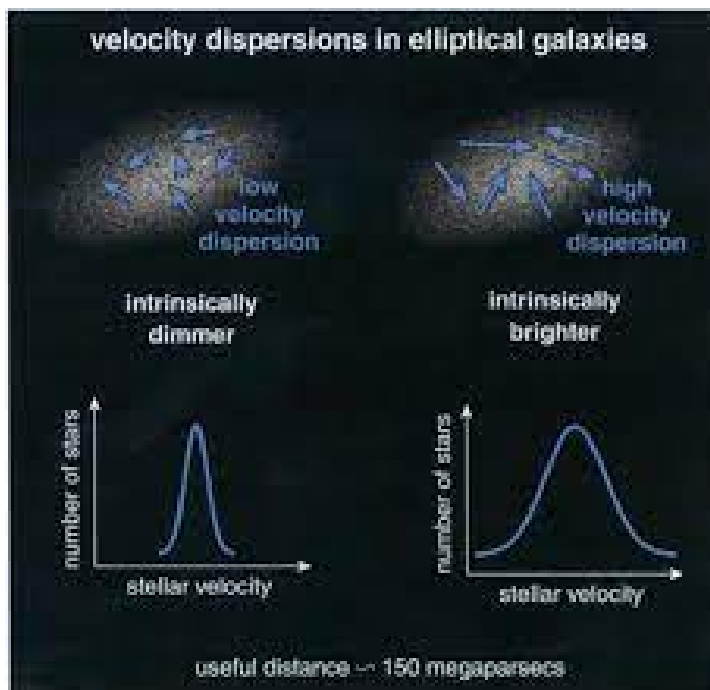


Figura 10: Dispersioni di velocità nelle galassie ellittiche

L'energia cinetica delle stelle della galassia è data da:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 \quad (30)$$

Non è però possibile conoscere le velocità reali delle singole stelle, è necessario perciò fare delle assunzioni. Si suppone che la distribuzione di velocità delle stelle sia isotropa, quindi uguale in tutte le direzioni a quella osservata lungo la linea di vista:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \approx 3 \langle v_r^2 \rangle \quad (31)$$

e che la massa delle stelle sia sempre la stessa, perciò:

$$T = \frac{3}{2} M_{tot} \langle v_r^2 \rangle \quad (32)$$

Utilizzando la dispersione di velocità σ trovata al posto della velocità radiale v_r e applicando il teorema del viriale abbiamo:

$$3M_{tot} \langle \sigma^2 \rangle = -U \quad (33)$$

e considerando la galassia sferica con energia potenziale gravitazionale:

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM_{tot}^2}{R} \quad (34)$$

si ottiene infine:

$$M_{tot} = \frac{5R}{G} \langle \sigma^2 \rangle \quad (35)$$

dove R è il raggio effettivo della galassia, definito come il raggio entro il quale viene emessa metà della luminosità della galassia. Questo metodo è utilizzabile anche per gli ammassi di galassie, nonostante sia ricavato tramite una serie di assunzioni e approssimazioni che non sempre sono valide.

8 Conclusioni

Nonostante la massa sia uno dei requisiti necessari per applicare le leggi che dominano gli oggetti celesti, la sua determinazione rimane fra le più difficili. I metodi esposti in questo breve elaborato sono per lo più approssimativi e permettono di ottenere solo stime dei valori reali della massa dei corpi studiati, soggette inoltre alle incertezze delle altre grandezze necessarie per ricavarle.

In conclusione, misure dirette della massa in astrofisica sono quasi impossibili da ottenere, ma attraverso il miglioramento dei metodi conosciuti e degli strumenti di misura utilizzati si possono ottenere per certo valori sempre più raffinati.

Bibliografia e sitografia

Kartunnen H., Fundamental Astronomy, Springer, 2016

Slide e appunti del corso di Astronomia, Prof. Cimatti A.

Appunti del corso di Astrofisica extragalattica, Prof. Ciotti L.

Dispense di Processi di radiazione e MHD, Ceccotti E.

<https://www.treccani.it/enciclopedia>

<https://www.astronomiamo.it/DivulgazioneAstronomica/>

<https://www.youmath.it>

<https://it.wikipedia.org/>

<http://www.brera.inaf.it/covino/DVG/planetv/1/L2603S.html>