

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Energia gravitazionale in astrofisica

Tesi di laurea

Presentata da:

Claudia Crastolla

Relatore:

**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

III Appello
Anno Accademico 2021-2022

Introduzione

L'energia potenziale gravitazionale è l'energia posseduta da un corpo a causa della sua posizione all'interno di un campo gravitazionale.

Si tratta di un concetto della meccanica classica estremamente utile nell'analisi di svariati sistemi astrofisici, che molte volte riguardano corpi massivi in interazione. Le loro interconnessioni innescano una gamma di meccanismi spettacolari, dalla nascita delle stelle alle corone di luce attorno ai buchi neri supermassivi.

In questa trattazione, sarà data una definizione di energia potenziale partendo dal modello della gravità Newtoniana, e verranno illustrati - molto brevemente, e senza entrare troppo nei dettagli - alcuni fenomeni astrofisici nei quali l'interazione gravitazionale tra corpi (e dunque il concetto di energia gravitazionale) gioca un ruolo fondamentale.

In particolare, verrà introdotto il concetto di buco nero, per poi accennare alla fisica dell'accrescimento caratteristica dei nuclei galattici attivi. In seguito, verrà esposto il teorema del Viriale in forma scalare, se ne accennerà il ruolo nella catastrofe gravotermica riguardante gli ammassi globulari, e quello nella nascita di nuove stelle tramite l'instabilità di Jeans. Infine, verrà trattata la curva di rotazione delle galassie a spirale, e si parlerà del ragionamento che ha portato all'intuizione della materia oscura, di cui l'Universo è pervaso.

Indice

1	Teoria del potenziale	1
1.1	Le leggi della dinamica e la gravitazione universale	1
1.2	Energia gravitazionale	2
1.3	Sistemi a simmetria sferica	3
1.4	Buchi neri e processi di accrescimento	5
2	La nascita delle stelle	7
2.1	Sistemi autogravitanti e teorema del Viriale	7
2.2	L'instabilità di Jeans	9
2.3	La nascita delle stelle	10
3	La scoperta della materia oscura	13
3.1	Curva di rotazione delle galassie a spirale	13

Capitolo 1

Teoria del potenziale

La massa delle galassie è soprattutto contenuta nelle stelle. Considerando che una galassia contiene in media $\sim 10^{11}$ stelle, calcolarne il potenziale gravitazionale sembrerebbe una vera sfida! Tuttavia, con le dovute semplificazioni, è possibile costruire dei modelli piuttosto semplici che ben rispecchiano la realtà delle osservazioni.

Verrà derivata un'espressione per il potenziale gravitazionale a partire dalle leggi della dinamica e dalla legge del quadrato inverso di Newton. In seguito, saranno enunciati i teoremi di Newton per i sistemi a simmetria sferica, e definite alcune proprietà di tali sistemi, che descrivono efficacemente ciò che si osserva nei corpi astrofisici. Infine, sfruttando la teoria sopraccitata, verrà esposto il concetto di buco nero e del suo scopo come motore dei nuclei galattici attivi (AGN), nei quali grandi quantità di energia gravitazionale vengono convertite in radiazione elettromagnetica con ottima efficienza.

1.1 Le leggi della dinamica e la gravitazione universale

Le leggi di Newton, o i tre principi della dinamica, furono introdotte da Sir Isaac Newton nel 1687, nella sua **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**, e costituiscono le vere e proprie fondamenta su cui è basata la dinamica. Gli enunciati delle tre leggi sono:

- **Principio di inerzia:** Se la somma delle forze che agiscono su un corpo è nulla, allora il corpo in quiete rimarrà in quiete, ed il corpo in moto continuerà a muoversi di moto rettilineo uniforme.
- **Principio di proporzionalità:** La forza agente su un corpo è direttamente proporzionale all'accelerazione, con stessi accelerazione e verso, e direttamente proporzionale alla massa:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (1.1)$$

- **Principio di azione e reazione:** Se un corpo A esercita una forza su un corpo B , allora il corpo B esercita sempre su A una forza uguale e contraria.

Formulata da Newton e pubblicata nei *Principia* fu anche la **legge di gravitazione universale**, la quale afferma che due corpi nell'Universo si attraggono con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza:

$$\mathbf{F} = G \frac{m_1 m_2}{\mathbf{r}^2}, \quad (1.2)$$

in cui $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot M^2}{kg^2}$ è la costante di gravitazione universale.

1.2 Energia gravitazionale

Il concetto di energia potenziale gravitazionale, o semplicemente **energia gravitazionale**, si può ricavare direttamente dalle leggi di Newton e dalla legge di gravitazione universale.

Se abbiamo una distribuzione di massa $\rho(\mathbf{x}')$, questa esercita una forza gravitazionale $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ su un punto materiale m_s nella posizione \mathbf{x} . Considerando i piccoli contributi dovuti ai volumetti $\delta^3 \mathbf{x}'$ in \mathbf{x}' :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= G m_s \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \delta m(\mathbf{x}') = \\ &= G m_s \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}', \end{aligned} \quad (1.3)$$

possiamo sommarli per ottenere la forza totale agente su m_s :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (1.4)$$

Si definisce il **potenziale gravitazionale** $\Phi(\mathbf{x})$ come:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3 \mathbf{x}'. \quad (1.5)$$

Notando che:

$$\nabla_x \left(\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}, \quad (1.6)$$

possiamo scrivere \mathbf{F} come:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla_x \int \frac{G \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3 \mathbf{x}' = -\nabla \Phi. \quad (1.7)$$

Conoscere Φ è molto utile, poiché, in molte situazioni, il miglior modo per ottenere \mathbf{F} è di calcolare il potenziale e poi farne il gradiente.

Analizzando la divergenza della (1.4):

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = G \int \nabla_x \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}', \quad (1.8)$$

troviamo che il termine $\nabla_x \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right)$ è nullo per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$. Dunque, ogni contributo all'integrale dell'equazione (1.8) viene dal punto $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, e possiamo restringere il volume di integrazione ad una piccola sfera di raggio h centrata in quel punto.

Siccome, per h sufficientemente piccolo, la densità sarà quasi costante all'interno del volume, possiamo portare il termine $\rho(\mathbf{x}')$ fuori dall'integrale. I termini rimanenti possono essere riorganizzati in questo modo:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -G \rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|=h} \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot d^2 \mathbf{S}'}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \quad (1.9)$$

se applichiamo il teorema della divergenza¹. Ora, sulla sfera $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = h$ abbiamo $d^2\mathbf{S}' = (\mathbf{x}' - \mathbf{x})hd^2\Omega$, in cui $d^2\Omega$ è un piccolo elemento di angolo solido. L'equazione (1.9) diventa dunque:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int d^2\Omega = -4\pi G\rho(\mathbf{x}). \quad (1.10)$$

Dall'equazione (1.7) per $\nabla \cdot \mathbf{F}$, otteniamo l'**equazione di Poisson**, che correla direttamente il potenziale Φ con la densità ρ :

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.11)$$

I campi vettoriali che possono essere descritti come gradienti di un potenziale, come quello gravitazionale, sono detti **conservativi**. Essi hanno una proprietà molto vantaggiosa: il lavoro compiuto non dipende dal cammino, ma solo dalla posizione dei punti di partenza e di arrivo. In questo contesto, il lavoro è definito soltanto dall'**energia gravitazionale** di una distribuzione di massa $\rho(\mathbf{x})$. Si può ottenere l'energia gravitazionale a partire dalle seguenti considerazioni. Supponiamo che una parte della massa sia già presente nel sistema, cosicché la densità ed il potenziale siano rispettivamente $\rho(\mathbf{x})$ e $\Phi(\mathbf{x})$. Se ora portiamo una piccola massa δm dall'infinito alla posizione \mathbf{x} , il lavoro svolto è $\delta m\Phi(\mathbf{x})$. Dunque, se aggiungiamo un piccolo incremento di densità $\delta\rho(\mathbf{x})$, il cambiamento in energia potenziale che ne risulta è:

$$\delta W = \int \delta\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}. \quad (1.12)$$

Secondo l'equazione di Poisson, la modifica risultante nel potenziale $\delta\Phi(\mathbf{x})$ deve soddisfare $\nabla^2(\delta\Phi) = 4\pi G(\delta\rho)$; dunque:

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G} \int \Phi \nabla^2(\delta\Phi) d^3\mathbf{x}. \quad (1.13)$$

Applicando il teorema della divergenza, si può riscrivere questa espressione come:

$$\delta W = \frac{1}{4\pi G} \int \Phi \nabla(\delta\Phi) \cdot d^2\mathbf{S} - \frac{1}{4\pi G} \int \nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) d^3\mathbf{x}, \quad (1.14)$$

in cui l'integrale di superficie risulta essere nullo, e poiché $\nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) = \frac{1}{2}\delta(|\nabla\Phi|^2)$, possiamo scrivere:

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi G} \delta \left(\int |\nabla\Phi|^2 d^3\mathbf{x} \right). \quad (1.15)$$

Sommando tutti i contributi δW , otteniamo una semplice espressione per per l'energia gravitazionale:

$$W = -\frac{1}{8\pi G} \int |\nabla\Phi|^2 d^3\mathbf{x}. \quad (1.16)$$

Applicando nuovamente il teorema della divergenza e sostituendo $4\pi G\rho$ a $\nabla^2\Phi$, otteniamo l'espressione alternativa per l'energia gravitazionale:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}. \quad (1.17)$$

1.3 Sistemi a simmetria sferica

¹Permette di convertire integrali di superficie in integrali di volume: $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} d^3\mathbf{x} = \int_S \mathbf{F} \cdot d^2\mathbf{S}$.

In astrofisica, abbiamo spesso a che fare con oggetti che trovano una buona approssimazione nei sistemi a simmetria sferica.

Newton trovò due risultati molto importanti che ci permettono di calcolare il potenziale gravitazionale di ogni distribuzione di materia a simmetria sferica con grande semplicità. Tali risultati sono conosciuti come **teoremi di Newton**, e verranno adesso esposti e commentati brevemente:

- **Primo Teorema di Newton:** la forza gravitazionale esercitata da un guscio sferico avente densità uniforme su una particella posta al suo interno è nulla.

Un corollario importante di questo teorema è che il potenziale gravitazionale all'interno di un guscio sferico vuoto è costante, poiché $\nabla\Phi = -F = 0$. Dunque, ricorrendo alla (1.4), è possibile calcolare il potenziale $\Phi(\mathbf{r})$ per qualsiasi \mathbf{r} all'interno del guscio. La posizione più conveniente per calcolare il potenziale è proprio il centro del guscio, cosicché tutti i punti sulla sfera siano alla stessa distanza R , ed il risultato immediato per Φ è:

$$\Phi = -\frac{GM}{R} \quad (1.18)$$

- **Secondo Teorema di Newton:** un guscio sferico di massa M , avente densità uniforme, esercita su una particella esterna una forza gravitazionale pari a quella di una particella puntiforme di massa M posta nel suo centro.

Dai due teoremi di Newton possiamo facilmente ricavare l'attrazione gravitazionale di una distribuzione di massa a simmetria sferica su un punto materiale a distanza r dal centro. Questa è unicamente determinata dalla massa all'interno di r :

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}\mathbf{e}_r, \quad (1.19)$$

dove

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr'. \quad (1.20)$$

Una proprietà importante di una distribuzione sferica di materia è la sua **velocità circolare** $v_c(r)$, definita come velocità di una particella di test in un'orbita circolare con raggio r . Una volta ottenuti $\Phi(r)$ o $F(r)$, possiamo facilmente valutare la v_c da:

$$v_c^2 = r \frac{d\Phi}{dr} = r|\mathbf{F}| = \frac{GM(r)}{r}. \quad (1.21)$$

La v_c di una galassia a spirale prende il nome di **curva di rotazione**. Se la v_c può essere misurata, questa fornisce informazioni molto importanti sul potenziale gravitazionale, e dunque sulla distribuzione di massa della galassia. Il concetto di curva di rotazione verrà ripreso nei prossimi capitoli.

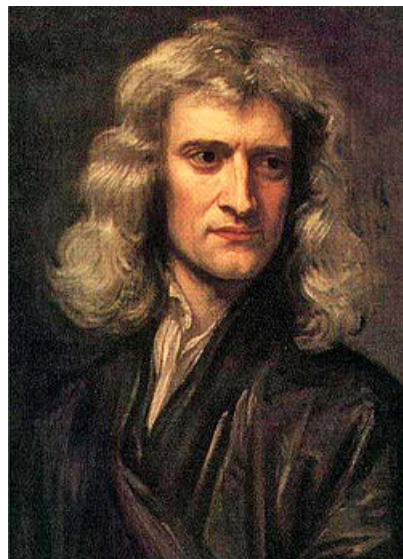


Figura 1.1: Sir Isaac Newton (1643 - 1727)

Un altro concetto importante nella teoria del potenziale è quello di *velocità di fuga*, definita come:

$$v_e = \sqrt{2|\Phi|}. \quad (1.22)$$

Una stella nella posizione \mathbf{r} può svincolarsi dal campo gravitazionale rappresentato da Φ se ha una velocità almeno pari alla velocità di fuga $v_e(\mathbf{r})$; infatti, solo in quel caso l'energia cinetica (positiva) posseduta dalla stella sorpasserebbe il valore assoluto della sua energia gravitazionale (negativa).

Un caso particolare, dal punto di vista fisico, si ha quando $v_e \geq c$, poiché in tal caso siamo in presenza di un **buco nero**.

1.4 Buchi neri e processi di accrescimento

Nel 1796, l'astronomo francese Pierre Simon Laplace si pose questa domanda: com'è fatto un oggetto che richiede una velocità di fuga maggiore a quella della luce? Se tale oggetto esistesse, qualunque cosa nell'Universo conosciuto, che sia nei suoi dintorni, dovrebbe cadervi dentro senza possibilità di svincolarsi. Così venne concepito il concetto di **buco nero**, il cui aggettivo "nero" viene proprio dal fatto che è capace di trattenere la luce.

La velocità di fuga di una massa m si trova comparando la sua energia cinetica con quella gravitazionale dovuta al campo gravitazionale prodotto da M :

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \quad (1.23)$$

Da cui si deriva la *velocità di fuga* che il punto deve avere per svincolarsi dal campo di M :

$$v_e = \sqrt{2|\Phi|} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (1.24)$$

Sostituendo a v_e la velocità della luce, a partire dalle precedenti considerazioni sulla velocità di fuga richiesta da un buco nero, si può calcolare il **raggio di Schwarzschild**:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (1.25)$$

Ogni oggetto massivo nell'Universo possiede il proprio raggio di Schwarzschild, e se tale oggetto è più piccolo del proprio raggio di Schwarzschild, allora è, per definizione, un buco nero.

Alcuni buchi neri sono capaci di trasferire molta energia gravitazionale al materiale nella loro orbita, che viene con grande efficienza convertita in energia cinetica, energia termica (tramite la viscosità del fluido orbitante) ed infine in radiazione elettromagnetica. Tali buchi neri, posti al centro delle cosiddette galassie attive, costituiscono i motori dei **nuclei galattici attivi** (AGN), le più luminose tra le fonti persistenti di radiazione elettromagnetica nell'Universo.



Figura 1.2: Raffigurazione artistica di un AGN, presa dal web. La sfera "scura" al centro rappresenta il buco nero con diametro due volte il proprio raggio di Schwarzschild. Attorno al buco nero, osserviamo il disco di accrescimento luminoso. In questa immagine è presente anche una **corona**, fonte di raggi X che può estendersi per molti milioni di chilometri dal buco nero.

Capitolo 2

La nascita delle stelle

Il concetto del viriale è estremamente importante in dinamica stellare, in quanto permette di derivare proprietà fisiche fondamentali dei sistemi stellari autogravitanti, talvolta molto difficili da analizzare.

Il teorema del Viriale, nella sua forma più generale, è un'equazione tensoriale che può essere ricavata analizzando l'evoluzione del sistema tramite le Collisionless Boltzmann Equations, e integrando le equazioni di Jeans ricavate dalle CBE con il metodo dei momenti; la descrizione dettagliata del teorema esula dallo scopo di questa trattazione.

Verrà presentato il teorema del Viriale ridotto alla forma scalare, ne saranno descritte le proprietà generali, e verranno illustrati alcuni sistemi fisici che possono essere studiati considerando la condizione di virializzazione, come il fenomeno della catastrofe gravotermica negli ammassi globulari, e poi i collassi nelle nubi molecolari che danno inizio all'evoluzione stellare.

2.1 Sistemi autogravitanti e teorema del Viriale

In un generico sistema di riferimento inerziale S_0 , le equazioni differenziali del problema ad N-corpi, con $N \geq 2$, sono:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = -G \sum_{j=1; j \neq i}^N m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{r_{ij}^3}, \quad r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

Un sistema a N-corpi si dice **autogravitante** se la forza totale per la quale le N particelle si muovono è determinata dalle loro stesse masse tramite l'equazione (3.1).

Per un sistema così definito, vale l'identità di Lagrange-Jacobi:

$$\frac{\dot{I}}{2} = 2K + W = E + K = 2E - W, \quad (2.2)$$

In cui K è l'energia cinetica del sistema:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|v_i\|^2, \quad (2.3)$$

W è l'energia gravitazionale:

$$- \frac{G}{2} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (2.4)$$

e I è il momento d'inerzia polare:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i ||x_i||^2. \quad (2.5)$$

Il teorema del viriale correla l'energia cinetica totale di un sistema autogravitante dovuta ai moti delle parti che lo costituiscono con l'energia gravitazionale W del sistema. Se la relazione prevista dal teorema del Viriale è soddisfatta, allora il sistema è all'equilibrio. Per definizione, tale sistema è **virializzato** se nel sistema di riferimento del centro di massa S_{CM} :

$$2K + W = 0. \quad (2.6)$$

Se un sistema autogravitante è virializzato, allora l'energia totale (nel centro di massa) non può essere positiva; in altre parole, si ha necessariamente che:

$$E' \leq 0, \quad (2.7)$$

poiché per l'identità di Jacobi, $K = -E$ e $W = 2E$.

Un esempio di applicazione del teorema del Viriale è il caso del collasso del nucleo in un sistema ad N-corpi, rilevante per gli **ammassi globulari**, gli unici sistemi stellari che abbiano abbastanza collisionalità per rilassarsi termicamente¹.

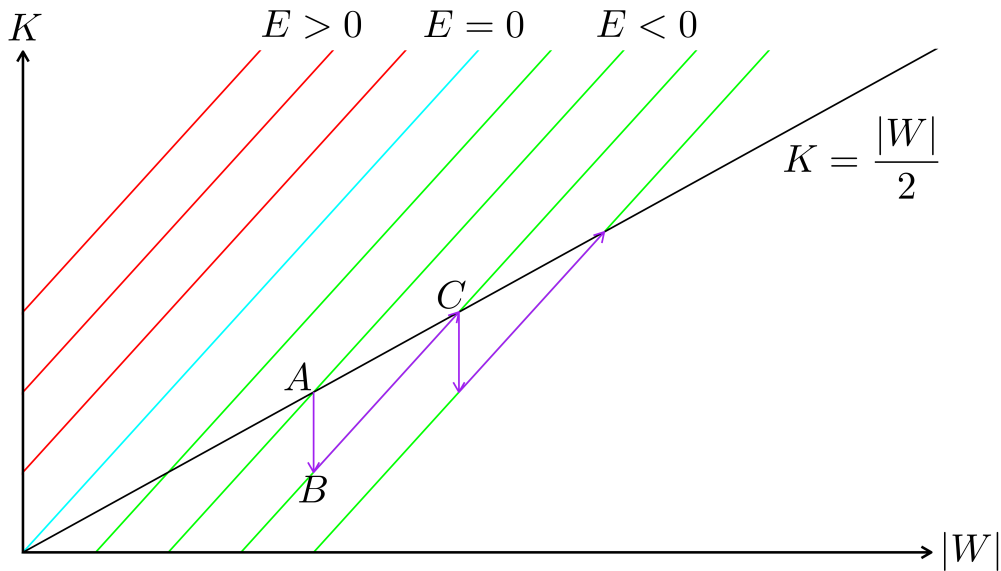


Figura 2.1: Il piano del Viriale per sistemi autogravitanti. La retta VT , in nero, rappresenta le configurazioni di equilibrio del sistema. Si nota nel grafico che soltanto configurazioni con $E \leq 0$ possono essere in equilibrio, poiché sono le uniche capaci di intersecare la retta VT . Il percorso in viola indica lo spostamento di un sistema autogravitante tra stati diversi di equilibrio. Si nota che all'aumentare della temperatura (e al diminuire dell'energia gravitazionale), l'energia totale del sistema diminuisce; per questo motivo, i sistemi autogravitanti si dicono a **calore specifico negativo**. L'immagine è un riadattamento personale da Ciotti (2021).

Gli ammassi globulari sono un sistema autogravitante, nei quali collisioni casuali tra stelle provocano una redistribuzione dell'energia cinetica. Le stelle più leggere potrebbero acquisire

¹In astrofisica, i sistemi collisionali hanno la caratteristica di ridistribuire l'energia tra gli oggetti che li compongono in un lasso di tempo relativamente breve. Se non possiedono questa caratteristica, allora si dicono non-collisionali. Le galassie e la maggior parte dei sistemi stellari sono sistemi non-collisionali, gli ammassi globulari fanno eccezione in quanto sistemi collisionali.

abbastanza energia cinetica per slegarsi dal sistema, disperdendosi nello spazio circostante. Le stelle più massive, invece, tendono a perdere energia cinetica e a "stringersi" verso il nucleo dell'ammasso, che diventa sempre più caldo e denso, e per il teorema del Viriale, meno energetico. Questo fenomeno è conosciuto come **catastrofe gravotermica**.

Si potrebbe pensare il sistema possa restringersi a tal punto da raggiungere densità elevatissime. Tuttavia, la catastrofe gravotermica si arresta quando le stelle vicine si uniscono a formare **stelle binarie**. Una stella che incontra una binaria "succhia" parte della sua energia cinetica; le orbite dei sistemi binari si restringono, ma l'energia cinetica ceduta alle stelle circostanti contrasta il collasso del nucleo. Quando le binarie diventano talmente vicine da comportarsi come stelle singole, la catastrofe gravotermica riparte e vengono a crearsi generazioni successive di stelle binarie.

La catastrofe gravotermica presenta alcune somiglianze con il collasso nelle nubi molecolari dovuto all'**instabilità di Jeans**. In effetti, la catastrofe gravotermica potrebbe essere considerata un'espressione dell'instabilità di Jeans applicata al contesto di sistemi stellari disomogenei Sormani, M. C. & Bertin, G. (2013).

2.2 L'instabilità di Jeans

A partire dal teorema del Viriale, si possono fare considerazioni di equilibrio sulle nubi molecolari, in cui avvengono i collassi che danno origine alla formazione stellare. Sir James Jeans, nel 1902, studiò per primo la natura di questi collassi, considerando gli effetti sulla nube di piccole deviazioni dall'**equilibrio idrostatico**², e diede così il nome al **criterio di instabilità di Jeans**. Se parte di una nube è instabile secondo tale criterio, questa collasserà su se stessa. Si ricorda, come premessa, che quasi tutti i sistemi astrofisici possono essere descritti con il formalismo dei fluidi.

Consideriamo una nube molecolare, ignorando la viscosità, e supponendo per essa una forma a simmetria sferica. Se tale nube è in equilibrio idrostatico, allora è possibile dimostrare che per essa vale il teorema del Viriale.

L'energia gravitazionale associata alla nube è approssimativamente:

$$W \approx -\frac{3}{5} \frac{G(M_c)^2}{R_c}, \quad (2.8)$$

in cui M_c ed R_c sono rispettivamente la massa e il raggio della nube. Se la nube interstellare è approssimata come isoterma e avente densità costante ρ , allora l'energia termica della nube può essere scritta:

$$K = \frac{3}{2} N k_b T, \quad (2.9)$$

in cui k_b è la costante di Boltzmann³.

N è il numero totale di particelle contenute nella nube:

$$N = \frac{M_c}{\mu m_H}, \quad (2.10)$$

in cui M_c è la massa totale della nube, μ è la massa molecolare media e m_H è la massa dell'atomo di idrogeno.

²Stato di quiete raggiunto da un fluido quando la forza di pressione che esercita verso l'esterno e la forza gravitazionale cui è sottoposto sono bilanciate.

³Vale $k_b = 1,380649 \times 10^{-23}$, e serve come costante di conversione tra la temperatura espressa nelle unità proprie e la stessa espressa nelle unità dell'energia.

Dal teorema del Viriale, possiamo estrarre la condizione per il collasso ($-W > 2K$):

$$\frac{3}{5} \frac{GM_c^2}{R_c} > 3 \frac{k_B T M_c}{\mu m_H}, \quad (2.11)$$

e supponendo costante la densità iniziale della nube, otteniamo:

$$R_c = \left(\frac{3M_c}{4\pi\rho_0} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.12)$$

Sostituendo quest'ultima nella (2.11) otteniamo infine l'espressione per la **massa di Jeans**⁴:

$$M > \left(\frac{5k_B T}{\mu m_H G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \equiv M_J. \quad (2.13)$$

Usando la (2.12), il criterio di Jeans può anche essere espresso come il raggio minimo (**raggio di Jeans**) necessario per il collasso:

$$R_J = \left(\frac{15k_B T}{4\pi G \mu m_H \rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.14)$$

in cui ρ_0 è la densità iniziale della nube.

2.3 La nascita delle stelle

La massa di Jeans è la massa limite che un sistema gravitazionale può avere per essere in equilibrio idrostatico; oltre a tale limite, il sistema diventa instabile e collassa su se stesso, "schiacciato" dalla sua stessa gravità, in un tempo scala detto **tempo dinamico** o di **caduta libera**:

$$t_{ff} = \left(\frac{3\pi}{32} \frac{1}{G\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Il tempo di caduta libera è indipendente dal raggio iniziale della sfera, di conseguenza siamo in presenza di un **collasso omologo**: se la nube è una sfera uniforme, tutti i punti raggiungono (idealmente) il centro allo stesso istante. Inoltre, durante la fase di collasso, la temperatura del gas rimane quasi costante (la trasformazione si dice **isoterma**); questo è vero fino a quando la nube rimane trasparente alla radiazione e l'energia gravitazionale rilasciata durante il collasso può essere efficientemente irradiata.

Si potrebbe pensare, a partire da questi dati, che il collasso delle nubi per instabilità gravitazionale genererebbe stelle di massa elevatissima; tuttavia, ciò non accade. Una conseguenza importante del collasso è che, a temperatura costante, la densità aumenta di molti ordini di grandezza ed il limite di Jeans decresce. Dopo l'inizio del collasso, ogni disomogeneità iniziale nella densità della nube farà sì che sezioni individuali di essa soddisfino il limite della massa di Jeans indipendentemente e collasino localmente, producendo dei gruppi più piccoli all'interno della nube originale. La nube, dunque, subisce un processo di **frammentazione**.

Un'altra considerazione interessante è che le galassie sono riempite da stelle di massa simile a quella del Sole, come se la frammentazione non proseguisse oltre ad un certo limite. Questo

⁴Per motivi di semplificazione, si trascura la pressione esterna esercitata sulla nube dal mezzo interstellare; in tal caso, l'espressione "corretta" per la massa limite sarebbe quella di Bonnor-Ebert.

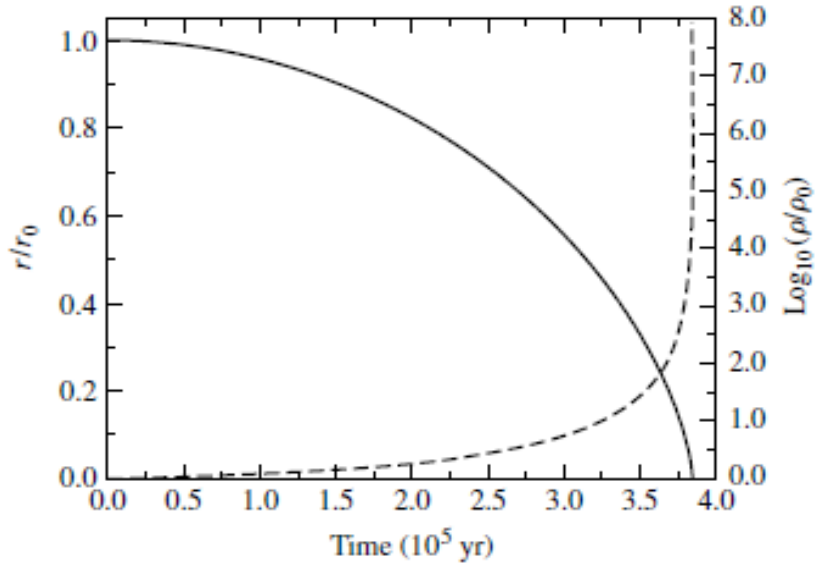


Figura 2.2: Il collasso omologo di una nube molecolare. $\frac{r}{r_0}$ è rappresentata nella linea spessa, $\log_{10}(\frac{\rho}{\rho_0})$ in quella tratteggiata. In questo esempio, la nube parte da una densità iniziale di $\rho_0 = 3 \times 10^{-17} \frac{kg}{m^3}$ e il tempo di collasso è $3.8 \times 10^5 yr$. L'immagine è presa da Carroll & Ostlie (2017).

avviene perché con l'aumentare della densità i frammenti diventano **otticamente spessi** e quindi la contrazione cambia in **adiabatica**.

Ciò rivela l'esistenza di un valore minimo per la massa dei frammenti prodotti, la quale dipende dai punti in cui il collasso passa da essere predominantemente isoterma ad essere predominantemente adiabatico.

Questo valore può essere trovato facendo delle considerazioni circa i limiti sulla luminosità totale di un frammento. Per il teorema del Viriale, l'energia che viene liberata dalla nube durante il collasso è:

$$\Delta E = \frac{3}{10} \frac{GM_J^2}{R_J}, \quad (2.16)$$

e la luminosità dovuta all'energia gravitazionale è pari a:

$$L_{ff} \approx \frac{\Delta E}{t_{ff}} \approx G^{\frac{3}{2}} \left(\frac{M_J}{R_J} \right)^{\frac{5}{2}}. \quad (2.17)$$

Se la nube fosse otticamente spessa e in equilibrio termodinamico, l'energia sarebbe emessa come radiazione di **corpo nero**. Durante il collasso, il processo del rilascio di energia è meno efficiente di quello di un corpo nero ideale⁵. Possiamo dunque esprimere la luminosità irradiata tramite l'equazione di Stefan-Boltzmann:

$$L_{rad} = 4\pi R^2 e \sigma T^4, \quad (2.18)$$

in cui viene introdotto il fattore di efficienza e , compreso tra zero ed uno.

Uguagliando le due luminosità ($L_{eff} = L_{rad}$) e riordinando, otteniamo:

⁵Per definizione, la luminosità di qualsivoglia corpo reale ad una data temperatura non può essere maggiore di quella del corpo nero di pari temperatura e superficie radiante.

$$M_J = \left(\frac{4\pi}{G^{\frac{3}{2}}} R_J^{\frac{9}{2}} e \sigma T^4 \right)^{\frac{2}{5}}. \quad (2.19)$$

Ora, possiamo usare la (2.12) per eliminare il raggio, e poi la (2.13) per scrivere la densità in termini della massa di Jeans. Arriviamo infine ad una stima di quando gli effetti adiabatici diventano importanti, espressa in termini della minima massa di Jeans ottenibile:

$$M_{J_{min}} = 0,03 \left(\frac{T^{\frac{1}{4}}}{e^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{9}{4}}} \right) M_{\odot}. \quad (2.20)$$

Se prendiamo $\mu \approx 1$, $e \approx 0.1$ e $T \approx 1000K$ al momento in cui gli effetti adiabatici cominciano ad essere significativi, $M_J \approx 0.5M_{\odot}$. In conclusione, possiamo osservare che la frammentazione cessa quando i segmenti della nube originale cominciano a raggiungere gli ordini di grandezza della massa solare, e che tale stima è relativamente insensibile ad altre scelte ragionevoli per T , e e μ .

Capitolo 3

La scoperta della materia oscura

Nel primo capitolo è stato presentato il concetto di velocità circolare, che prende il nome di **velocità di rotazione** se applicata a galassie a spirale.

La curva di rotazione fornisce informazioni sul potenziale gravitazionale di un oggetto, che a sua volta racchiude informazioni sulla sua **massa**.

Storicamente, misurazioni della curva di rotazione della nostra galassia hanno portato alla concezione di **materia oscura**, che costituisce gran parte della massa dell'Universo.

Considerando le distribuzioni di massa di una galassia a spirale, ne saranno ricavate approssimativamente la curva di rotazione, e verrà mostrato come la teoria non rispecchi le osservazioni a meno dell'introduzione della materia oscura nel sistema.

3.1 Curva di rotazione delle galassie a spirale

Consideriamo una galassia a spirale in una situazione di equilibrio, ed una massa di test m ad una certa distanza dal suo centro. Si ricorda l'espressione per la velocità circolare definita nel capitolo 1:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{|\Phi|}. \quad (3.1)$$

Poiché essa dipende dal potenziale generato dalla distribuzione di massa, la curva di rotazione varia a seconda dell'area specifica della galassia analizzata.

Per quanto riguarda la curva di rotazione delle galassie a spirale, è bene distinguere alcuni regimi di densità differenti con le rispettive velocità circolari che generano:

- **Massa puntiforme M:** Il caso più semplice. Il potenziale in tal caso è:

$$\Phi(r) = \frac{GM}{r}, \quad (3.2)$$

e la velocità di rotazione:

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (3.3)$$

La curva di rotazione con proporzionalità $\propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ è anche detta **curva Kepleriana**.

- **Sfera omogenea con densità costante:** In tal caso,

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad (3.4)$$

Observed vs. Predicted Keplerian

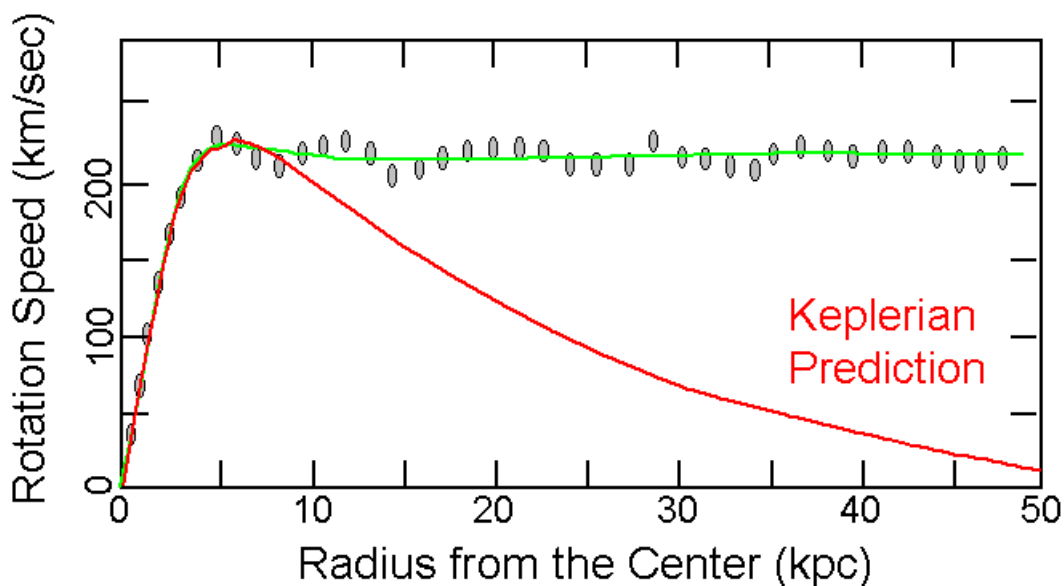


Figura 3.1: L'immagine rappresenta la curva di rotazione di una galassia a spirale. Sono riportati i valori predetti della curva sulla base del solo materiale nel disco, insieme con quelli effettivamente osservati; la discrepanza è manifesta. Il grafico appartiene al Prof. Richard Pogge della Ohio State University.

il potenziale dunque risulta essere:

$$\Phi = \frac{4}{3}G\pi r^2\rho, \quad (3.5)$$

e la corrispondente velocità di rotazione:

$$v_c = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho r}. \quad (3.6)$$

Nel caso della galassia a spirale, abbiamo il nucleo centrale (o bulge), approssimabile ad una sfera omogenea, a cui possiamo associare come velocità di rotazione quella descritta dall'espressione (3.6). Per quanto riguarda il disco sottile, si considera una densità superficiale $\sigma(r)$, cui corrisponde una velocità di rotazione costante. Lontano dal nucleo, si considera il sistema come un punto di massa posto nel centro della galassia, e si prevede una scia Kepleriana della curva che si estenda per lunghe distanze.

Le curve di rotazione osservate, tuttavia, non presentano il tratto Kepleriano a grandi r , ma piuttosto un andamento piatto.

L'astronoma Vera Rubin, che nel 1970 studiava le curve di rotazione delle galassie a spirale, ebbe l'intuizione che le stelle delle galassie sono immerse in un enorme alone di materia invisibile, chiamata **materia oscura**. La materia oscura non interagisce elettromagneticamente con sé stessa o con la materia ordinaria, e non è quindi capace di emettere luce. Tuttavia, essa può interagire con la materia ordinaria tramite energia gravitazionale, e i risultati sulla curva di rotazione sono uno tra i vari indizi della sua attività. Infatti, la sua curva di rotazione avrebbe valore pressoché costante, in accordo con le osservazioni.

Bibliografia

Appunti personali del corso di Astrofisica Extragalattica, presieduto dal prof. Luca Ciotti nell'A.A. 2020-2021

Binney J., Tremaine S., 1987, *Galactic Dynamics*. Princeton series in astrophysics, Princeton University Press, https://books.google.it/books?id=E_6vQgAACAAJ

Carroll B. W., Ostlie D. A., 2017, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2 edn. Cambridge University Press, [doi:10.1017/9781108380980](https://doi.org/10.1017/9781108380980)

Ciotti L., 2021, *Introduction to Stellar Dynamics*. Cambridge University Press, [doi:10.1017/9780511736117](https://doi.org/10.1017/9780511736117)

Sormani, M. C. Bertin, G. 2013, *Gravothermal catastrophe: The dynamical stability of a fluid model*, *A&A*, 552, A37