

ACCADEMIA DEGLI STUDI
UNIVERSITA' DI BOLOGNA

SCUOLA DI INGEGNERIA
SEDE DI FORLÌ

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE
CLASSE L-9

Numerical integration errors in deep space orbit determination

TEST DI VARI INTEGRATORI NUMERICI PER DETERMINAZIONE ORBITE SATELLITI MEDICEI

TESI DI LAUREA TRIENNALE

CANDIDATO:
Luca Parlanti

RELATORE:
Paolo Tortora

CORRELATORE:
Marco Zannoni

SUPERVISORE:
Andrea Magnanini

15 Dicembre 2022

Indice

1	<u>LE LUNE DI GIOVE</u>	3
1.1	Caratteristiche del sistema e dei satelliti medicei	3
1.2	Missioni spaziali nel sistema di Giove	7
2	<u>PROBLEMA KEPLERIANO</u>	9
2.1	Introduzione	9
2.2	Soluzione analitica	11
2.2.1	Integrali primi del moto	11
2.2.2	Equazione parametrica della traiettoria	12
2.2.3	Forma e descrizione orbita	13
2.2.4	Orientazione orbita	15
2.2.5	Anomalia eccentrica	17
2.2.6	Soluzione dell'equazione di Keplero	19
2.2.7	Coefficienti di Lagrange	22
2.3	Codici per risoluzione analitica del problema kepleriano e confronto con soluzione numerica	24
2.3.1	L'integrazione numerica nella determinazione orbitale	25
2.3.2	Codice per "Two body problem test"	28
3	<u>N-BODY PROBLEM</u>	32
3.1	Descrizione problema	32
3.2	Sistema di riferimento (r,t,n)	34
3.3	Codice per risoluzione numerica n-body problem e calcolo degli errori	35
3.3.1	Confronto di diversi integratori	38
3.3.2	Effetto del timestep	41
3.3.3	Effetto della tolleranza relativa	45
3.3.4	Effetto della tolleranza assoluta	47
4	<u>CONCLUSIONI</u>	49
5	<u>BIBLIOGRAFIA</u>	50
6	<u>LISTA DELLE FIGURE</u>	51

Numerical integration errors in deep space orbit determination

Test di vari integratori numerici per previsione orbite satelliti medicei

Abstract

Il seguente progetto di tesi è stato sviluppato durante il periodo di tirocinio svolto all'interno del "Laboratorio di Radio Scienza ed Esplorazione Planetaria", ideato dai professori Paolo Tortora e Marco Zannoni. Il titolo di suddetta esperienza, da cui prende il nome il presente elaborato, è stato "Numerical integration errors in deep space orbit determination". Lo scopo del sopraccitato laboratorio è stato quello di studiare in modo approfondito il problema kepleriano dei due corpi, per poi passare ad un'analisi del problema dei tre corpi e successivamente a n corpi (con particolare attenzione alle orbite dei satelliti medicei di Giove). Lo studio è stato affiancato a un costante utilizzo della piattaforma di programmazione Matlab per l'elaborazione e la stesura di codici per il calcolo di traiettorie orbitali ed errori numerici. Infatti il fulcro del lavoro è stato proprio il confronto di vari integratori e degli errori numerici derivanti dall'integrazione.

Nel primo capitolo viene introdotto il sistema Gioviiano, vengono presentati i satelliti medicei, delineate le caratteristiche fisiche fondamentali e i principali motivi che ci portano ad avere particolare interesse nel conoscere lo sviluppo orbitale di tale sistema.

Nel secondo capitolo della tesi, dopo una dettagliata descrizione teorica del problema dei due corpi (trattato nella Sezione 2.2), viene presentato un codice per la rappresentazione di orbite kepleriane e il calcolo dei relativi errori commessi dal metodo numerico rispetto a quello analitico (Sezione 2.3).

In seguito, nel capitolo 3, il problema è stato esteso a più corpi dotati di massa ed a tal proposito viene proposto un codice per la rappresentazione delle orbite descritte nel tempo da n corpi, date le condizioni iniziali, e il calcolo dei rispettivi errori nel sistema di riferimento (r,t,n) .

In merito a ciò vengono infine testati nella Sezione 3.2 diversi integratori per cercare quello con le migliori performance e sono poi analizzati alcuni parametri in input al problema per verificare sotto quali condizioni l'integratore lavora meglio.

Questo progetto è solo la base per un più completo lavoro che permetta di tenere in considerazione tutti i parametri e i disturbi in gioco, considerando quindi i corpi come corpi dotati di un proprio volume e una propria distribuzione di massa e non come oggetti puntiformi.

1 LE LUNE DI GIOVE

1.1 Caratteristiche del sistema e dei satelliti medicei

Giove è il quinto pianeta del Sistema Solare per vicinanza al Sole e di gran lunga il primo per massa. Esso appartiene alla famiglia dei giganti gassosi, in quanto oltre a un nucleo solido, la sua parte esterna è composta soprattutto da elio ed idrogeno, proprio come una stella. Se osserviamo alcune foto di Giove quello che vediamo non è la sua superficie, ma i banchi di nubi che lo avvolgono.

Le caratteristiche fisiche di Giove sono riportate nella seguente tabella:



Massa (kg)	$1.89819 \cdot 10^{27}$
Raggio polare (km)	$6.6854 \cdot 10^4$
Raggio equatoriale (km)	$7.1492 \cdot 10^4$
Raggio medio (km)	$6.9173 \cdot 10^4$
g superficiale media ($\frac{m^2}{s}$)	23.12
Densità media ($\frac{kg}{m^3}$)	$1.326 \cdot 10^3$

Figura 1: Immagine di Giove e valori di caratteristiche fisiche

Giove come tutti i pianeti non è perfettamente sferico, anzi rispetto ad essi è molto più schiacciato, con la classica forma prossima ad uno sferoide oblato. Questo si rispecchia in un valore elevato di J_2 , pari a 0.014736, il quale è indice di una distorsione della sfericità del campo gravitazionale gioviano.

Esso possiede anche un esteso campo magnetico, molto maggiore rispetto a quello terrestre, il cui asse è inclinato di 10 gradi rispetto all'asse di rotazione del pianeta. L'orbita di Giove intorno al Sole è descritta dai seguenti parametri orbitali:

Oggetto	Valore
Semiassse maggiore (km)	$7.7841 \cdot 10^8$
Eccentricità	0.0484
Velocità angolare media ($gradi/gg$)	0.083
Periodo (gg)	4333.2
Inclinazione ($gradi, eclittica$)	1.30

Giove possiede un elevato numero di satelliti naturali (circa 79). I maggiori, i satelliti medicei o galileiani (Io, Europa, Ganimede e Callisto), sono stati scoperti nel Gennaio del 1610 da Galileo Galilei e furono i primi oggetti individuati in orbita attorno a un oggetto che non fosse la Terra o il Sole. La scoperta che il centro del moto di tali satelliti non è la Terra bensì Giove, è stato uno dei maggiori punti a favore della teoria copernicana (o eliocentrica) del moto planetario.

Andiamo a vedere più nel dettaglio questi corpi.

Io è il più vicino dei quattro a Giove ed è l'unico privo di segni di ghiaccio sulla superficie. In contrasto, la vicinanza al pianeta lo rende di particolare interesse: le forze di maree agenti su di esso generano ed alimentano spettacolari fenomeni vulcanici. Le prime immagini della superficie, catturate dalla missione Voyager nel 1979, documentarono che l'interno di Io era sconvolto da fenomeni convettivi. Oltre alla presenza di vulcani, sono stati documentati anche getti di lava e di gas, soprattutto nelle zone a basse latitudini e lungo la congiungente Io-Giove.

Io, inoltre, possiede un'atmosfera rarefatta, dovuta ai gas rilasciati dai vulcani (specialmente diossido di zolfo).

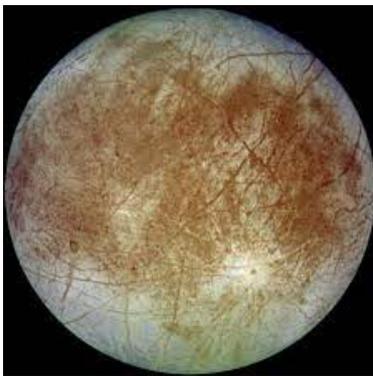


Massa (kg)	$8.9319 \cdot 10^{22}$
Raggio medio (km)	$1.821 \cdot 10^3$
Semiasse maggiore (km)	$4.218 \cdot 10^5$
g superficiale ($\frac{m^2}{s}$)	1.79
Densità media ($\frac{kg}{m^3}$)	$3.528 \cdot 10^3$
Periodo (gg)	1.7691
Inclinazione ($gradi$)	0.05
Eccentricità	0.0041

Figura 2: Immagine di Io e valori di caratteristiche fisiche e orbitali

Europa è il secondo per vicinanza a Giove e il primo delle cosiddette lune ghiacciate. Esso è coperto dal ghiaccio, contaminato da altri elementi presenti in modeste quantità, come zolfo e silicati; la peculiarità di questo satellite è la possibile presenza di oceani di acqua liquida al di sotto della crosta di ghiaccio. Tale scenario è tutt'ora in fase di verifica, anche grazie ai futuri dati e alle immagini della missione JUICE. Anche questo sarebbe effetto delle forze mareali che dissipando energia all'interno del satellite permetterebbero lo scioglimento del ghiaccio. La superficie è caratterizza-

ta da diverse spaccature che indicano un'attività geologica importante e una crosta attiva. L'analisi delle aree intorno a queste linee ha mostrato che rispetto ad esse è in atto uno scivolamento delle placche. Lo studio di tali cambiamenti può fornire un'ulteriore prova dell'esistenza di un oceano sotto il ghiaccio. Europa ha una grande importanza per lo studio di mondi abitabili al di fuori della Terra, in quanto possiede diverse caratteristiche per lo sviluppo della vita organica. Esso inoltre possiede una sottile atmosfera composta anche da ossigeno, sebbene quest'ultimo non è frutto di attività biologica.



Massa (<i>kg</i>)	$4.800 \cdot 10^{22}$
Raggio medio (<i>km</i>)	$1.561 \cdot 10^3$
Semiasse maggiore (<i>km</i>)	$6.711 \cdot 10^5$
g superficiale ($\frac{m^2}{s}$)	1.314
Densità media ($\frac{kg}{m^3}$)	$3.014 \cdot 10^3$
Periodo (<i>gg</i>)	3.5511
Inclinazione (<i>gradi</i>)	0.47
Eccentricità	0.0094

Figura 3: Immagine di Europa e valori di caratteristiche fisiche e orbitali

Ganimede è il terzo dei quattro satelliti galileiani per vicinanza a Giove, e il più grande di tutto il Sistema Solare. La sua ridotta densità mostra come buona parte della sua massa sia dovuta al ghiaccio; si stima infatti che esso componga circa la metà del totale. La maggiore lontananza dal pianeta comporta una minore importanza degli effetti mareali agenti su di esso, rispetto a quelli già descritti su Io ed Europa. Essi non sono comunque trascurabili e si pensa che almeno in passato abbiano contribuito all'evoluzione del satellite. Anche Ganimede, come Europa, possiede una tenue atmosfera composta da ossigeno, prodotta dalle radiazioni incidenti sulla superficie ghiacciata, le quali in certe quantità permettono all'ossigeno di separarsi dall'idrogeno. La presenza di un campo magnetico proprio di Ganimede suggerisce l'esistenza di un nucleo di ferro, con un raggio minore della metà di quello del satellite. Tale campo è immerso nel ben più vasto campo magnetico di Giove ed interagisce con esso.



Massa (kg)	$1.4818 \cdot 10^{23}$
Raggio medio (km)	$2.631 \cdot 10^3$
Semiasse maggiore (km)	$1.0704 \cdot 10^6$
g superficiale ($\frac{m^2}{s}$)	1.43
Densità media ($\frac{kg}{m^3}$)	$1.942 \cdot 10^3$
Periodo (gg)	7.1545
Inclinazione ($gradi$)	0.20
Eccentricità	0.0011

Figura 4: Immagine di Ganimede e valori di caratteristiche fisiche e orbitali

Callisto è il più distante dei satelliti galileiani da Giove e di conseguenza quello che risente meno delle forze di marea. Esso ha la peculiarità di avere una superficie con una presenza massiccia di crateri, prevalentemente composta da ghiaccio. E' considerato molte volte il satellite gemello di Ganimede, anche se ci sono molte differenze tra i due, in particolare Callisto ha una storia geologica meno significativa, privo di fenomeni tettonici di una certa importanza. E' stata ipotizzata la presenza di un oceano al di sotto di una spessa crosta ghiacciata ed un nucleo formato da roccia e ghiaccio, dove quest'ultimo si dirada più ci avviciniamo al centro del satellite.



Massa (kg)	$1.07593 \cdot 10^{23}$
Raggio medio (km)	$2.410 \cdot 10^3$
Semiasse maggiore (km)	$1.8827 \cdot 10^6$
g superficiale ($\frac{m^2}{s}$)	1.235
Densità media ($\frac{kg}{m^3}$)	$1.834 \cdot 10^3$
Periodo (gg)	16.689
Inclinazione ($gradi$)	2.21
Eccentricità	0.0074

Figura 5: Immagine di Callisto e valori di caratteristiche fisiche e orbitali

Come si può notare dalle tabelle in Figura (2), Figura (3) e Figura (4), i periodi orbitali dei primi tre sono prossimi ai rapporti 1:2:4. Questo principio è chiamato risonanza di Laplace, dal nome del noto matematico che ne studiò le proprietà già alla fine del 1700, ed è stato oggetto di studio per molti tra matematici, fisici ed astronomi. Una delle discussioni riguardo ad essa è come si sia formata. Le teorie principali al riguardo sono due: la prima prevede un'origine successiva alla creazione dei tre satelliti galileiani, per cui la risonanza di Laplace sarebbe il punto di arrivo dell'evoluzione orbitale delle tre lune di Giove, a causa delle maree; la seconda, invece, afferma che essa si sarebbe instaurata già al momento della nascita dei tre satelliti. Storicamente la teoria evolutiva è stata formulata per prima (nel 1979), mentre successivamente sono usciti alcuni articoli che ipotizzavano un'origine primordiale. La conoscenza dell'evoluzione attuale della risonanza di Laplace potrebbe essere molto utile, in quanto fornirebbe supporto o meno alle teorie di origine della risonanza tra Io, Europa e Ganimede. Se infatti la risonanza stesse diventando più profonda, allora un'evoluzione dovuta a espansioni mareali sarebbe maggiormente plausibile, mentre un allontanamento della risonanza potrebbe concordare con un'origine primordiale, anche se in realtà non escluderebbe l'altra teoria.

1.2 Missioni spaziali nel sistema di Giove

Le missioni spaziali che per ora sono giunte nel sistema di Giove sono: Pioneer 10 nel 1973, Pioneer 11 nel 1974, Voyager 1 e Voyager 2 nel 1979, Ulysses nel 1992, Cassini nel 2000 e New Horizons nel 2007; tutte queste hanno compiuto solo degli incontri ravvicinati con Giove, alcune di queste perché dovevano giungere a pianeti più esterni (Cassini era diretto verso Saturno e New Horizons verso Plutone). La missione Galileo del 1995 è l'unica entrata in orbita intorno al pianeta, insieme alla missione Juno (in orbita attorno a Giove dal 2016 e tutt'ora attiva). La prossima importante missione che approderà nel sistema gioviano sarà la missione JUICE (il cui lancio è programmato per Agosto 2023 e l'arrivo in orbita attorno a Giove è previsto per il 2031).

Quest'ultima ha come obiettivo principale l'osservazione delle lune ghiacciate di Giove (Europa, Callisto e Ganimede), ma affronterà anche una lunga fase dedicata al pianeta stesso. I dati raccolti durante la missione, inoltre, permetteranno, come anticipato in precedenza, di approfondire le conoscenze relative all'origine e allo sviluppo della condizione di risonanza di Laplace in cui si trovano Io, Europa e Ganimede.

Dopo il lancio, che avverrà da Kourou, Guinea francese, nell'Aprile 2023, il satellite (come mostrato in Figura (6)), effettuerà un primo fly-by con la Terra (Agosto 2024), un fly-by con Venere (Agosto 2025) e altri due fly-by con la Terra (Settembre 2026 e Gennaio 2029), prima di dirigersi verso il sistema di Giove, attorno a cui l'ingresso in

orbita è previsto per Luglio 2031.

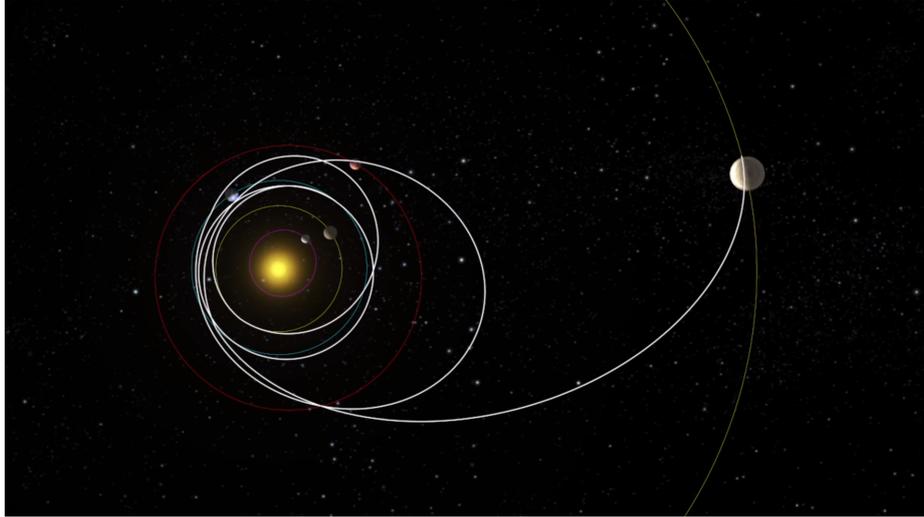


Figura 6: Traiettoria missione Juice per raggiungere il sistema di Giove

Durante la prima fase della missione entrerà in orbita attorno a Giove, sfruttando un gravity assist con Callisto, poi lo spacecraft effettuerà due fly-by con Europa; successivamente verranno effettuati diversi fly-by con Callisto, rimanendo comunque in orbita intorno a Giove, per un periodo di circa 200 giorni. Gli undici mesi che seguiranno saranno sfruttati per permettere a JUICE di lasciare l'orbita intorno a Giove e immettersi nella sfera di influenza di Ganimede.

La sonda studierà, grazie a strumentazioni ad alta precisione e risoluzione, la conformazione della superficie delle tre lune ghiacciate, cercando di identificare e mappare i minerali sulla superficie di Ganimede, comprendere la formazione di alcune delle complesse morfologie di Europa e Callisto e trovare molecole organiche (elementi costitutivi della vita) su ciascuna delle superfici lunari come segni della loro potenziale abitabilità. Un laser-altimetro integrato completerà questi dati mappando le forme 3D delle caratteristiche sulle lune. Inoltre alcuni dati provenienti dalle misurazioni del satellite potranno essere utili per avere un'ottica più precisa sulle orbite dei quattro satelliti medicei, in modo da comprendere l'origine dello stato di risonanza e quindi la sua evoluzione futura.

Per questi motivi è utile avere integratori efficienti al massimo e che permettano una conoscenza precisa delle orbite delle lune di Giove per la corretta esecuzione delle future missioni che, come JUICE, orbiteranno nel sistema gioviano.

2 PROBLEMA KEPLERIANO

2.1 Introduzione

Si definisce satellite un qualunque oggetto, naturale o artificiale, orbitante attorno a un corpo celeste. La Terra stessa è un esempio di satellite, in quanto orbita attorno al Sole, come la Luna attorno alla Terra. I satelliti artificiali seguono le stesse leggi fisiche dei corpi celesti, seguendo traiettorie determinate principalmente dall'interazione gravitazionale col corpo attorno a cui si muovono. Nel caso di satelliti artificiali, la massa di questi ultimi è generalmente molto minore di quella del corpo celeste. Per questo motivo per uno studio iniziale si semplifica il problema considerando il moto di un corpo di massa m rispetto a un corpo di massa M , dove m è trascurabile rispetto ad M . Entrambe le masse sono considerate puntiformi, ovvero i corpi sono ridotti a punti materiali, mentre per un'analisi più approfondita bisognerebbe considerarli come corpi rigidi, con distribuzione di massa non omogenea e diversi gradi di libertà. Inoltre si tiene conto dell'ipotesi che non ci siano altri corpi nello spazio e non ci siano altre forze in gioco se non l'attrazione gravitazionale tra i due corpi. Questo problema è detto problema kepleriano (o problema dei due corpi ristretto), ed è un caso particolare del problema dei due corpi. La soluzione del problema dei due corpi, che venne posto e risolto da Newton, fornisce la posizione e la velocità di due corpi, le cui masse sono note, che si muovono sotto l'azione della loro mutua forza di attrazione gravitazionale, quando sono note le posizioni e le velocità che assumono ad un certo istante. Tale problema è d'importanza basilare per due motivi principali: innanzitutto esso è l'unico problema di dinamica gravitazionale del quale si abbia una soluzione completa e generale; secondariamente molti problemi pratici riguardanti il moto orbitale di un qualsiasi veicolo spaziale possono essere trattati in modo approssimato con il problema ristretto dei due corpi.

Consideriamo un sistema di riferimento concentrico e solidale con il corpo celeste di massa M , il cui moto è supposto tale da poter considerare il sistema inerziale. La necessità di conoscere il momento rispetto a cui si esprimono le coordinate di un corpo celeste ha portato nel 1984 all'introduzione di un'epoca di riferimento, detta J2000, che identifica il mezzogiorno UT del 1° gennaio 2000 relativo al calendario gregoriano.

Il sistema di riferimento J2000 (rappresentato in Figura ()) è uno dei sistemi di riferimento più utilizzati per esprimere le effemeridi dei corpi celesti. E' inerziale e i suoi assi sono così definiti:

- *asse x*: corrisponde all'intersezione tra il piano equatoriale terrestre e l'eclittica (il piano definito dall'orbita che descrive la Terra attorno al Sole) ed è diretto verso il punto Υ .

- *asse z*: corrisponde alla normale al piano equatoriale terrestre all'epoca J2000.
- *asse y*: viene calcolato di conseguenza in modo da ottenere una terna levogira.

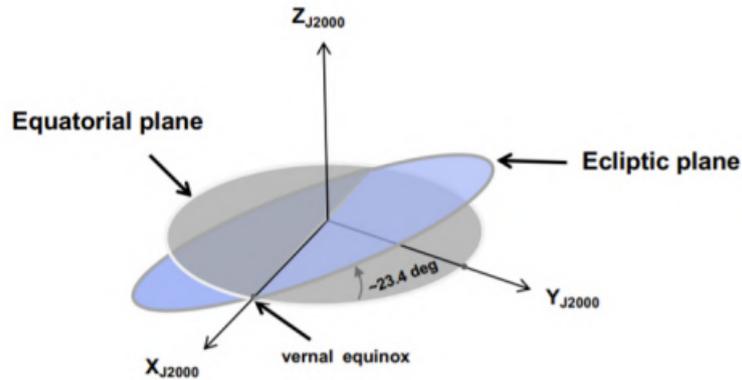


Figura 7: Sistema di riferimento J2000. E' evidenziata l'inclinazione dell'asse terrestre rispetto all'eclittica, pari a 23.4°

Sia, quindi, \vec{r} il raggio vettore che individua la posizione del corpo di massa m nel sistema di riferimento scelto (come illustrato in Figura (8)).

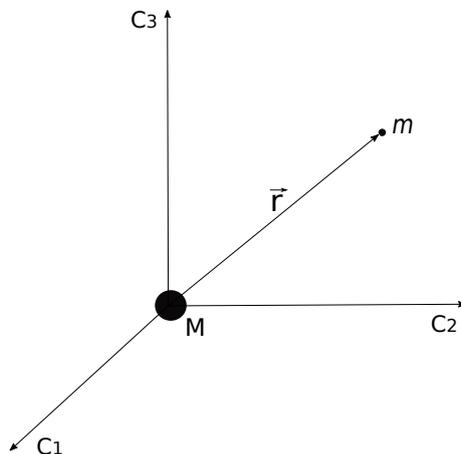


Figura 8: Sistema di riferimento inerziale per problema kepleriano

Indicheremo con \hat{r} il suo versore. Per la Legge di Gravitazione Universale, la forza gravitazionale che agisce sul satellite è:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{GMm}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{12} \quad (1)$$

dove $G = 6.67259 \cdot 10^{-11}$ è la costante di gravitazione universale (nel caso in cui le misure siano in metri il valore diventa $G = 6.67259 \cdot 10^{-20}$) e $\mu = GM$ è detto parametro gravitazionale. Il meno davanti alla formula è dovuto al fatto che si tratta di una forza attrattiva e quindi agisce in verso opposto al versore \hat{r} . Combinando questa equazione con la seconda legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$ si ottiene l'equazione fondamentale dell'astrodinamica:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (2)$$

Questa equazione esprime l'accelerazione del corpo orbitante in funzione della posizione di quest'ultimo rispetto al corpo celeste attorno a cui si muove. Integrando questa equazione una volta possiamo ottenere la velocità del corpo, e integrando ulteriormente anche la posizione \vec{r} in funzione del tempo e tracciare quindi l'orbita descritta. Per fare ciò, però, abbiamo bisogno delle condizioni iniziali \vec{r}_0 e \vec{v}_0 . Infatti è un'equazione differenziale del secondo ordine, e per il Teorema di Cauchy abbiamo bisogno di 6 condizioni al contorno (3 per la posizione e 3 per la velocità). Se le condizioni iniziali sono tutte note all'istante iniziale, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione. Per il problema ristretto dei due corpi esiste anche una soluzione analitica del problema, che ci permette di determinare l'orbita descritta e di conoscere la posizione e la velocità del satellite in ogni tempo $t > t_0$. Quello che faremo, quindi, sarà trovare la soluzione analitica e confrontarla con quella numerica ottenuta dall'integrazione dell'equazione fondamentale dell'astrodinamica. In seguito proveremo vari integratori implementandoli su Matlab e cercheremo di determinare quali forniscono errori minori (soluzioni quindi più vicine a quella analitica).

2.2 Soluzione analitica

2.2.1 Integrali primi del moto

Innanzitutto ricaviamo gli integrali primi del moto, cioè quantità che rimangono costanti durante tutto il moto del corpo. Premoltiplicando vettorialmente entrambi i membri della (2) per \vec{r} , otteniamo:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}) = 0 \quad (3)$$

Ovvero:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{cost.} \quad (4)$$

dove \vec{h} è il momento della quantità di moto per unità di massa e costituisce il primo integrale primo del moto. Essendo dato dalla moltiplicazione di \vec{r} per \vec{v} , si può già determinare a partire dalle condizioni iniziali (\vec{r}_0 e \vec{v}_0).

Poiché $\vec{r} \times \vec{v}$ identifica la normale al piano, \vec{h} costante implica che la normale al piano non cambia direzione. In altre parole abbiamo un moto piano.

Inoltre si può dimostrare che, definito r come il modulo del vettore \vec{r} :

$$h = r\omega^2 = \text{cost.} \quad (5)$$

dove ω è la velocità angolare con cui il raggio vettore \vec{r} ruota rispetto all'SdR scelto. Questo significa che quando r aumenta, ω diminuisce (e viceversa).

Ora, invece, premoltiplichiamo vettorialmente i membri della (2) per \vec{h} in modo analogo a quanto fatto precedentemente con \vec{r} , ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \left(-\hat{r} - \frac{\vec{h}}{\mu} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = 0 \quad (6)$$

Ovvero:

$$\vec{e} = -\hat{r} - \frac{\vec{h}}{\mu} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \text{cost.} \quad (7)$$

Il vettore \vec{e} si chiama eccentricità, ed essendo costante è il secondo integrale primo del moto (o integrale primo di Hamilton).

A questo punto abbiamo 6 parametri scalari (3 componenti di \vec{h} e tre componenti di \vec{e}), ma non risolvono il moto in quanto sono ortogonali ($\vec{h} \cdot \vec{e} = 0$), e quindi sono solo 5 i parametri indipendenti. Questi 5 parametri permettono di identificare forma e orientamento nello spazio dell'orbita, ma ci servirà un sesto parametro per trovare $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$ all'istante $t \neq t_0$.

2.2.2 Equazione parametrica della traiettoria

Ricaviamo innanzitutto un'equazione che permetta di definire la traiettoria del corpo e quindi la forma dell'orbita. \vec{h} ci dà il piano del moto, mentre \vec{e} ci dà la forma della traiettoria sul piano. Premoltiplicando scalarmente la formula di \vec{e} (7) per \vec{r} si ricava:

$$r(1 + \hat{r} \cdot \vec{e}) = \frac{h^2}{\mu} \quad (8)$$

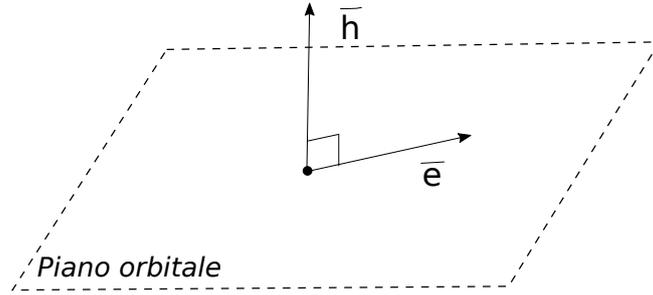


Figura 9: Rappresentazione piano orbitale con i vettori \bar{h} ed \bar{e}

Definito θ^* come l'angolo formato nel piano tra \vec{e} (fisso) ed \vec{r} (che ruota), detto anomalia vera, e definendo anche il semilato retto $p = \frac{h^2}{\mu}$, possiamo scrivere:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\theta^*} \quad (9)$$

Questa è l'equazione parametrica della traiettoria. Poiché p, h ed e sono costanti, è evidente che r varia solo con $\cos\theta^*$, di periodo 2π .

In particolare questa equazione rappresenta una conica, in cui il corpo centrale attorno a cui il satellite orbita occupa uno dei due fuochi. Una conica è definita come il luogo dei punti per i quali è costante la distanza da un punto (fuoco) e da una retta (direttrice). Le coniche vengono definite in base all'eccentricità:

- $e = 0 \rightarrow r = p = \text{cost.}$ (circonferenza)
- $0 < e < 1 \rightarrow$ oscillazione r tra minimo e massimo (traiettoria ellittica)
- $e = 1 \rightarrow$ parabola (quando $\cos(\theta^*) = -1$, r va a ∞)
- $e > 1 \rightarrow$ iperbole

2.2.3 Forma e descrizione orbita

In generale i satelliti, quando sono in orbita stabile attorno a un pianeta, seguono traiettorie ellittiche. Per poter studiare questo tipo di orbite dobbiamo prima definire due diversi sistemi di riferimento:

- Sistema di riferimento orbitale $(\hat{e}, \hat{p}, \hat{h})$: fisso nel tempo e noto date le condizioni iniziali \vec{r}_0, \vec{v}_0

- Sistema di riferimento intrinseco $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{h})$: ruota con \vec{r} attorno ad \vec{h}

I due sistemi hanno un asse in comune (\hat{h}), e quindi il secondo è ruotato di un angolo

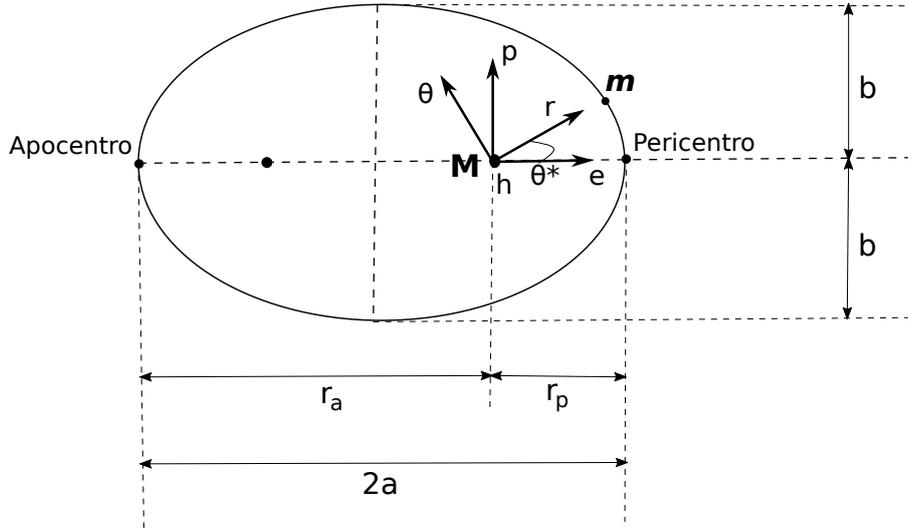


Figura 10: Analisi orbita ellittica e sistemi di riferimento

θ^* rispetto al primo. Se $\theta^* = 0$, allora i due SdR coincidono.

Nella figura sopra, il corpo di massa M è posizionato in uno dei due fuochi. Il pericentro è il punto della traiettoria più vicino ad M , mentre l'apocentro è analogamente il punto della traiettoria più lontano da M . La linea che unisce apocentro e pericentro (e contiene quindi i fuochi) è detta linea degli absidi. r_a ed r_p rappresentano rispettivamente il raggio di apocentro e il raggio di pericentro, due importanti parametri dell'orbita. a , invece, è il semiasse maggiore, mentre b è il semiasse minore. Quello che faremo ora è cercare di esprimere 6 parametri (r_p, r_a, a, b, e, p) in funzione di solo 2 parametri, ovvero a ed e .

Innanzitutto dalla (9) possiamo ricavare:

$$\begin{cases} r_{min} = r_p = \frac{p}{1+e} \text{ (ponendo } \theta^* = 0) \\ r_{max} = r_a = \frac{p}{1-e} \text{ (ponendo } \theta^* = \pi) \end{cases}$$

Tramite considerazioni geometriche sulla figura sopra, è possibile ricavare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} r_p = a(1 - e) \\ r_a = a(1 + e) \\ b = a\sqrt{1 - e^2} \\ p = a(1 - e^2) \end{cases}$$

In questo modo abbiamo espresso tutti i parametri della conica in funzione di solo 2 di essi. La forma dell'orbita può, quindi, essere descritta interamente da a ed e . Ora dovremmo definire altri tre parametri che ci permettano invece di determinare univocamente la posizione nello spazio dell'orbita.

Prima di fare ciò, però, vediamo un'equazione analoga alla (9) ma per la velocità.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\mu}{h}(e\hat{p} + \hat{\theta}) \quad (10)$$

Questa è l'equazione parametrica della velocità. L'unico parametro che varia è $\hat{\theta}$, che ruota al variare di θ^* . Da qui è immediato ricavare:

$$v_p = \frac{\mu}{h}(1 + e) \quad (\text{ponendo } \theta^* = 0)$$

$$v_a = \frac{\mu}{h}(1 - e) \quad (\text{ponendo } \theta^* = \pi)$$

E' importante notare che la velocità al pericentro è maggiore di quella all'apocentro (come ci si poteva già aspettare dalla relazione (5)).

Poiché anche la velocità è periodica con periodo 2π , com'era per la posizione, allora si può parlare di orbita. Sotto le ipotesi fatte all'inizio (problema kepleriano) un corpo di massa m si muove lungo un'orbita come quella descritta, in cui M occupa uno dei due fuochi.

2.2.4 Orientazione orbita

Torniamo ora al problema precedente, ovvero trovare 3 parametri che descrivano la posizione nello spazio dell'orbita.

Questi 3 parametri sono 3 angoli (angoli di Eulero) che mappano la rotazione dal sistema di riferimento pseudo-inerziale con origine in M ($\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3$) al sistema $\hat{e}, \hat{p}, \hat{h}$. Le possibili terne ordinate di rotazioni consecutive attorno a tre assi sono 12. Di queste sequenze si considera la terna 3-1-3, che prevede una prima rotazione attorno al terzo asse, seguita da una rotazione attorno al primo asse e successivamente un'altra attorno al terzo asse. Vediamo ora nello specifico di cosa si tratta.

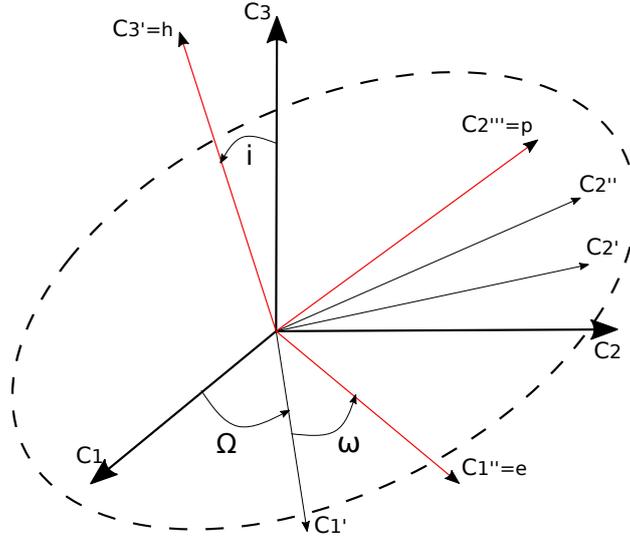


Figura 11: Rappresentazione angoli di Eulero e rispettive rotazioni

La prima rotazione, attorno all'asse \hat{C}_3 , è di un angolo Ω , detto argomento del nodo ascendente. Il nome è dovuto al fatto che questo angolo individua la semiretta che corrisponde all'intersezione del piano orbitale col piano equatoriale (\hat{C}_1, \hat{C}_2), e quindi il punto in cui il corpo nella sua orbita passa da sotto a sopra il piano equatoriale (di conseguenza dalla parte diametralmente opposta avremo il nodo discendente). La seconda rotazione, attorno all'asse \hat{C}_1' (ottenuto dalla rotazione di \hat{C}_1 di Ω), è di un angolo i , ovvero l'inclinazione del piano orbitale rispetto a quello equatoriale. Se i fosse nullo, \hat{h} corrisponderebbe a \hat{C}_3 e avremmo quindi un piano orbitale equatoriale. Se al contrario avessimo $i = \pi/2$, il piano orbitale sarebbe ortogonale a quello equatoriale e quindi avremmo un piano orbitale polare. La terza e ultima rotazione è di un angolo ω (argomento del pericentro) attorno al nuovo asse \hat{C}_3' che si ha dalla rotazione di i attorno a \hat{C}_1' . Questo angolo, come suggerisce il nome, identifica l'orientamento dell'orbita sul piano, dandoci la direzione di \hat{e} e quindi del pericentro. I limiti all'interno di cui possono variare questi angoli sono i seguenti:

$$\begin{cases} 0 < \Omega < 2\pi \\ 0 < i < \pi \\ 0 < \omega < 2\pi \end{cases}$$

Da semplici costruzioni grafiche si possono ricavare le formule per questi tre angoli. Definite h_1, h_2, h_3 le tre componenti di \vec{h} , $h_t = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ e $\hat{N} = [\cos(\Omega), \sin(\Omega), 0]$:

$$\begin{cases} \cos(\Omega) = -\frac{h_2}{h_t} \\ \sin(\Omega) = \frac{h_1}{h_t} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(i) = \frac{h_3}{h} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\omega) = \hat{N} \cdot \hat{e} \\ \sin(\omega) = (\hat{N} \times \hat{e}) \cdot \hat{h} \end{cases}$$

A questo punto, riassumendo, abbiamo 5 parametri, detti parametri orbitali lagrangiani, che ci definiscono la forma e l'orientamento nello spazio dell'orbita: a, e, Ω, i, ω . Date le condizioni iniziali (\vec{r}_0, \vec{v}_0) è possibile ricavare i due integrali primi del moto \vec{h} ed \vec{e} , e in seguito, tramite le formule ricavate in precedenza, i 5 parametri.

2.2.5 Anomalia eccentrica

Ora dobbiamo, però, identificare un sesto parametro lagrangiano, che ci permetta di identificare $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$ a ogni tempo $t \neq t_0$. Se conoscessimo $\theta^*(t)$, potremmo ricavare $\vec{r}(t)$ tramite l'equazione parametrica della traiettoria (9). Dobbiamo quindi cercare un legame tra tempo e anomalia vera.

Si può dimostrare che questo legame passa attraverso un integrale che è impossibile da risolvere. Per questo si utilizza una variabile di appoggio E , detta anomalia eccentrica: trovare i legami $t \iff E$ ed $E \iff \theta^*$ equivale a trovare il legame $\theta^* \iff t$.

Nel disegno sotto si vede chiaramente l'angolo E e il suo significato geometrico:

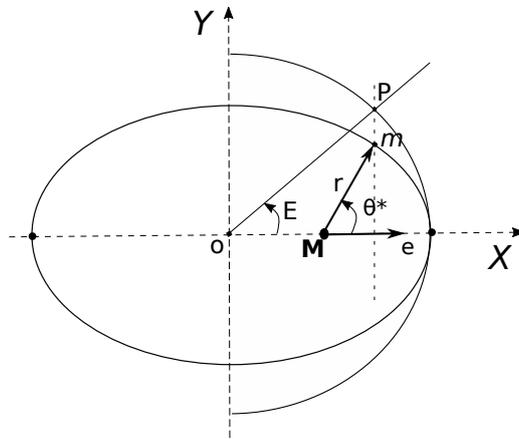


Figura 12: Significato geometrico anomalia eccentrica E

Tramite alcuni ragionamenti geometrici e ricordando la (9), si può ricavare la seguente equazione parametrica della posizione, in funzione non di θ^* ma di E :

$$r = a(1 - e \cdot \cos(E)) \quad (11)$$

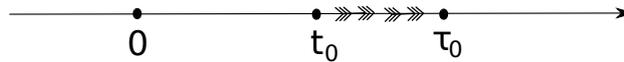
A partire da questa equazione si può poi ricavare l'equazione di Keplero, che esprime il rapporto tra l'anomalia eccentrica e il tempo:

$$t - \tau_0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(E - e \cdot \sin(E)) \quad (12)$$

dove τ_0 è detto tempo di passaggio al pericentro e rappresenta il sesto parametro lagrangiano.

Non per forza τ_0 coincide con 0 o con t_0 (tempo a cui assegno condizioni iniziali).

Asse dei tempi:



Definito τ_0 è possibile esplicitare il periodo orbitale, ovvero il tempo totale in cui un satellite compie un'intera orbita attorno al corpo centrale:

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot 2\pi \quad (13)$$

Definiamo ora l'anomalia media:

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau_0) \quad (14)$$

dove $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ è detto moto medio. In questo modo l'equazione di Keplero può essere riscritta nel modo più classico:

$$M = E - e \cdot \sin(E) \quad (15)$$

Questa, però, è un'equazione trascendente, ovvero posso solo trovare t dato E , ma non posso trovare E dato t , che è quello che ci interessa di più.

Infatti quello che ci serve è, dato un Δt a partire dal momento in cui sono date le condizioni iniziali t_0 , trovare l'angolo E percorso in quel tempo, ricondurlo al corrispondente angolo θ^* e risalire alla posizione del satellite tramite l'equazione (9). Perciò dobbiamo utilizzare qualche metodo per trovare una soluzione approssimata (con un ordine di precisione più o meno grande) dell'equazione di Keplero.

2.2.6 Soluzione dell'equazione di Keplero

Nel corso degli anni, a partire dal 1650, moltissimi scienziati e matematici cercarono di proporre modelli di soluzione, dopo che nei primi anni del secolo Keplero formulò le tre leggi del moto dei pianeti, basandosi sulle osservazioni astronomiche portate avanti qualche anno prima da Tycho Brahe.

L'equazione di Keplero non può essere risolta direttamente perché, come abbiamo detto, è un'equazione trascendente in E ed è quindi impossibile esprimere E come una funzione semplice di M .

Come descritto da H.D. Curtis in *"Orbital Mechanics for Engineering Students"* (2011) [3], consideriamo tre tecniche iterative: due producono una soluzione in serie e una fornisce una soluzione numerica.

Per quanto riguarda il primo procedimento, possiamo ottenere una soluzione tramite una serie di potenze:

$$E = M + \sum_{n=1}^N a_n e^n \quad (16)$$

dove i coefficienti a_n sono dati dalla formula:

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\text{floor}(n/2)} (-1)^k \frac{1}{(n-k)!k!} (n-2k)^{n-1} \sin[(n-2k)M] \quad (17)$$

Questa soluzione in serie, trovata da Lagrange, nonostante converga rapidamente per piccoli valori di e , sfortunatamente diverge per valori di e maggiori di 0.662743419, valore chiamato limite di Laplace dal nome del matematico francese che lo ha ricavato (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827).

Troncando la serie all'ordine $N=3$, l'equazione (16) diventa:

$$E = M + e \sin(M) + \frac{e^2}{2} \sin(2M) + \frac{e^3}{8} [3 \sin(3M) - \sin(M)] \quad (18)$$

Per valori di e piccoli si ottiene una buona approssimazione come mostrato nella Figura (13). Ovviamente aumentando il valore di N la soluzione diventa sempre più

simile a quella esatta (per esempio per $N=10$ l'equazione (16) produce una curva praticamente indistinguibile dalla soluzione esatta).

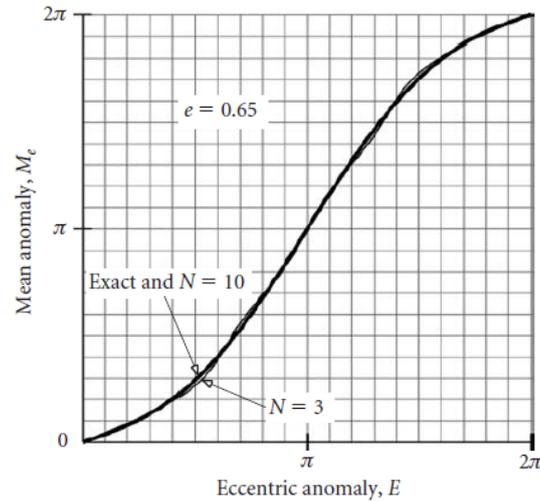


Figura 13: Confronto tra soluzione esatta e soluzione dell'equazione di Keplero con troncamento della serie infinita di Lagrange a $N=3$ e $N=10$, per un'eccentricità $e=0.65$

Se invece andiamo a considerare un caso in cui l'eccentricità ha un valore maggiore del limite di Laplace (es. $e = 0.90$), otteniamo il caso seguente:

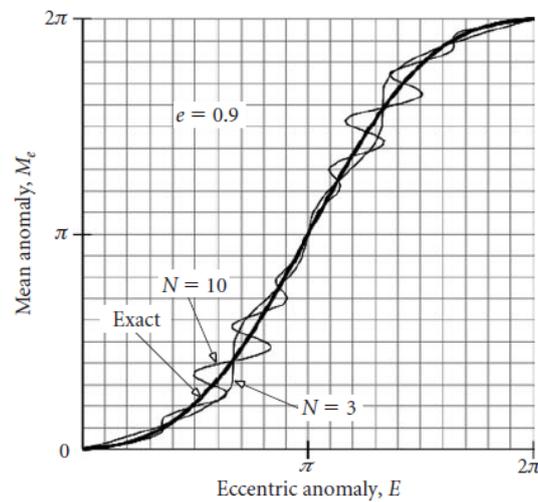


Figura 14: Confronto tra soluzione esatta e soluzione dell'equazione di Keplero con troncamento della serie infinita di Lagrange a $N=3$ e $N=10$, per un'eccentricità $e=0.90$

Un'altra serie infinita per E è data da:

$$E = M + \sum_{n=1}^N \frac{2}{n} J_n(ne) \sin(nM) \quad (19)$$

dove le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (20)$$

sono chiamate funzioni di Bessel di prima specie, dal nome dell'astronomo e matematico tedesco Friedrich Bessel (1784-1846), e sono rappresentate in Figura (15).

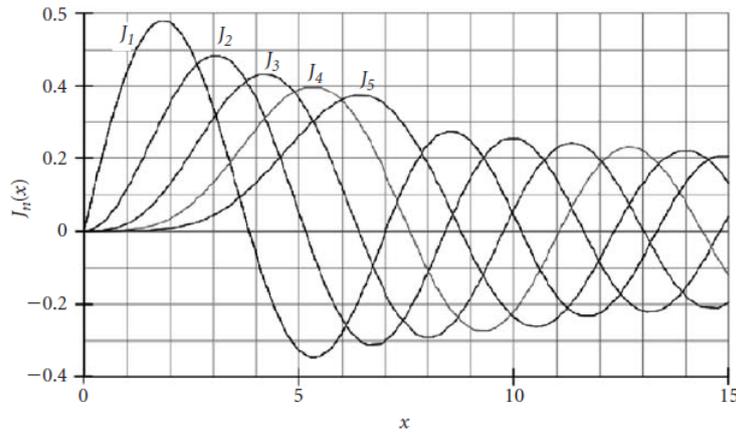


Figura 15: Funzioni di Bessel di prima specie

Considerando gli sviluppi in serie per $J_s(x)$ fino ai termini di ordine 5, possiamo ora scrivere la soluzione dell'equazione di Keplero come:

$$\begin{aligned} E &= M + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} J_s(se) \sin sM \\ &= M + e \sin M + e^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2M\right) + e^3 \left(\frac{3}{8} \sin 3M - \frac{1}{8} \sin M\right) \\ &\quad + e^4 \left(\frac{1}{3} \sin 4M - \frac{1}{6} \sin 2M\right) + \mathcal{O}(e^5) \end{aligned}$$

Diversamente dalla serie di Lagrange, la serie di funzioni di Bessel converge per valori di $e < 1$.

Vediamo ora il metodo numerico, che non presenta questo problema legato al valore limite dell'eccentricità.

Danby [4] fornisce diversi metodi numerici per la risoluzione dell'equazione di Keplero. Riscrivendo l'equazione (15) come

$$f(E) = E - e \sin E - M \quad (21)$$

possiamo usare il metodo di Newton-Raphson per trovare le radici dell'equazione non lineare $f(E) = 0$. Lo schema iterativo è il seguente:

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

dove $f'(E_i) = df(E_i)/dE_i = 1 - e \cos E_i$.

La convergenza di questo metodo è quadratica, quindi la soluzione viene trovata, a parità di tolleranza, con molte meno iterazioni rispetto al metodo precedente, che invece è lineare.

È importante sottolineare un aspetto fondamentale per il metodo numerico, ovvero la scelta di un valore iniziale E_0 adatto. Ovviamente per piccoli e abbiamo $E \approx M$, e quindi $E_0 = M$ è appropriato. Danby (1988) suggerisce che, riducendo preliminarmente M al range $0 \leq M \leq 2\pi$, l'assunzione iniziale

$$E_0 = M + \text{sign}(\sin M)ke \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (23)$$

ha una probabilità maggiore di essere corretta e aumenta la convergenza (il valore consigliato è $k = 0.85$).

2.2.7 Coefficienti di Lagrange

La soluzione dell'equazione di Keplero per trovare E dato un valore di M permette di calcolare la posizione e la velocità di un corpo in orbita ellittica ad ogni tempo t , date le condizioni iniziali \vec{r}_0 e \vec{v}_0 .

Questo processo può essere semplificato grazie all'introduzione di due funzioni f e g , tali che, purché i vettori iniziali \vec{r}_0 e \vec{v}_0 non siano paralleli, vale:

$$\vec{r}(t) = f(t, t_0)\vec{r}_0 + g(t, t_0)\vec{v}_0 \quad (24)$$

dove $f(t, t_0)$ e $g(t, t_0)$ sono detti coefficienti di Lagrange dal matematico e fisico francese Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Il procedimento per trovare f e g è il seguente:

1. A partire dai valori di \vec{r}_0 e \vec{v}_0 si calcola la componente radiale della velocità:

$$v_{r0} = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0}{r_0} \quad (25)$$

dove r_0 indica la norma di \vec{r}_0 .

2. Si calcola il reciproco del semiasse maggiore come:

$$\alpha = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu} \quad (26)$$

Il segno di α determina se la traiettoria è un'ellisse ($\alpha > 0$), una parabola ($\alpha = 0$) o un'iperbole ($\alpha < 0$).

3. Si calcola χ , detta anomalia universale, con l'algoritmo seguente:

- Si stima inizialmente: $\chi_0 = \sqrt{\mu} |\alpha| \Delta t$
- Ad ogni step si calcola:

$$f(\chi_i) = \frac{r_0 v_{r0}}{\sqrt{\mu}} \chi_i^2 C(z_i) + (1 - \alpha r_0) \chi_i^3 S(z_i) + r_0 \chi_i - \sqrt{\mu} \Delta t \quad (27)$$

e

$$f'(\chi_i) = \frac{r_0 v_{r0}}{\sqrt{\mu}} \chi_i [1 - \alpha \chi_i^2 S(z_i)] + (1 - \alpha r_0) \chi_i^2 C(z_i) + r_0 \quad (28)$$

dove $z_i = \alpha \chi_i^2$, mentre $C(z)$, $S(z)$ appartengono alla classe delle funzioni di Stumpff (dal nome dell'astronomo tedesco Karl Stumpff, 1895-1970), e vengono calcolate come:

$$S(z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{z} - \sin \sqrt{z}}{(\sqrt{z})^3} & (z > 0) \\ \frac{\sinh \sqrt{-z} - \sqrt{-z}}{(\sqrt{-z})^3} & (z < 0) \\ \frac{1}{6} & (z = 0) \end{cases}$$

$$C(z) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{z}}{z} & (z > 0) \\ \frac{\cosh \sqrt{-z} - 1}{(\sqrt{-z})^3} & (z < 0) \\ \frac{1}{2} & (z = 0) \end{cases}$$

- Si calcola $ratio_i = f(\chi_i)/f'(\chi_i)$.
- Se $|ratio_i|$ eccede la tolleranza scelta, si ricava un valore aggiornato di χ :

$$\chi_{i+1} = \chi_i - ratio_i \quad (29)$$

Si ritorna quindi al secondo step.

- Se $|ratio_i|$ è minore della tolleranza imposta, si accetta χ_i come soluzione.
4. Sostituendo i valori di $\alpha, r_0, \Delta t$ e χ ottenuti, si trovano f e g con le seguenti formule:

$$f = 1 - \frac{\chi^2}{r_0} C(\alpha\chi^2) \quad (30)$$

$$g = \Delta t - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \chi^3 S(\alpha\chi^2) \quad (31)$$

5. Si calcola \vec{r} dalla formula:

$$\vec{r} = f\vec{r}_0 + g\vec{v}_0 \quad (32)$$

6. Sostituendo i valori di α, r_0, χ e r (ovvero la norma di \vec{r} trovato sopra), si trovano \dot{f} e \dot{g} con le seguenti formule:

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu}}{rr_0} [\alpha\chi^3 S(\alpha\chi^2) - \chi] \quad (33)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{\chi^2}{r} C(\alpha\chi^2) \quad (34)$$

7. Si calcola \vec{v} dalla formula:

$$\vec{v} = \dot{f}\vec{r}_0 + \dot{g}\vec{v}_0 \quad (35)$$

Il vantaggio di questo procedimento è che utilizzando le funzioni f e g si può ovviare al fatto di dover trasformare da un sistema di coordinate sul piano orbitale a un Sdr 3D più generale.

2.3 Codici per risoluzione analitica del problema kepleriano e confronto con soluzione numerica

Implementando su Matlab i due procedimenti precedentemente descritti (metodo analitico classico con risoluzione dell'equazione di Keplero e metodo coi coefficienti di Lagrange), sono state scritte due funzioni che permettono di risolvere analiticamente orbite ideali kepleriane. Entrambe richiedono in ingresso le condizioni iniziali \vec{r}_0 e \vec{v}_0 , il tempo finale t al quale si vuole avere la posizione del corpo orbitante e il vettore massa m contenente le masse dei due corpi.

Queste due function (chiamate '*Twobodyorbit*' e '*Lagrange_orbit_time*') sono state inserite in un codice più ampio (chiamato '*Error_2body*') per il confronto tra soluzione numerica e soluzione analitica. Questo confronto è stato poi utilizzato per dimostrare che l'errore ottenuto integrando in avanti fino a t_{finale} e poi indietro fino a t_0 è simile all'errore tra soluzione numerica e analitica. Vediamo meglio di cosa si tratta.

2.3.1 L'integrazione numerica nella determinazione orbitale

L'integrazione numerica di equazioni differenziali è un processo fondamentale nella determinazione delle orbite. Moltissime missioni spaziali richiedono una precisione dell'ordine di pochi centimetri. Un esempio potrebbe essere la stessa missione Juice, illustrata nella Sezione 1.2.

Le performance dei metodi numerici è spesso testata nell'analisi di orbite kepleriane, per le quali, come abbiamo visto, abbiamo una soluzione analitica che possiamo quindi confrontare con quella numerica. Lo studio di questi metodi è svolto all'interno di un ampio range di parametri, come ad esempio lo step d'integrazione o l'ordine dei metodi multistep.

Il confronto tra la soluzione analitica e quella di integrazione numerica del problema kepleriano è noto come "two-body problem test". Questo test serve per validare un metodo di stima dell'errore numerico che poi utilizzeremo in un caso di n-body dove non esiste una soluzione analitica.

Altri esempi di missioni in cui le precisioni richieste sono di questo ordine di grandezza sono le missioni GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) e GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer), le quali misurazioni necessitano di una precisione di determinazione orbitale dell'ordine di pochi centimetri. La missione GRACE consiste nell'interazione tra due satelliti gemelli (GRACE-1,2) e ha permesso, fin dal suo lancio avvenuto in Russia il 16 Marzo 2002, di sviluppare un modello ad alta definizione tempo variante del campo gravitazionale terrestre. Il suo funzionamento si basa sul fatto che quando il primo satellite incontra una regione di spazio con un campo gravitazionale più intenso o meno intenso rispetto al satellite gemello che lo segue, esso sarà soggetto ad una accelerazione o decelerazione, con conseguente variazione di distanza tra i due satelliti. La misura di questa variazione di distanza ci fornisce dati sull'intensità del campo gravitazionale in quella zona.

Per quanto riguarda i metodi numerici, invece, l'equazione fondamentale dell'astrodinamica (2) rappresenta un'espressione per l'accelerazione del corpo m in orbita attorno ad M . Integrando numericamente tale espressione è quindi possibile ricavare la velocità e la posizione di m ad ogni tempo t .

Poiché si tratta di un'equazione differenziale ordinaria, servono delle condizioni iniziali per risolvere il problema.

Inoltre è necessario un modello di forza noto per poter calcolare l'accelerazione ad ogni epoca. Questo modello altro non è che la formulazione classica della forza gravitazionale tra due o più corpi. Nelle pagine seguenti vedremo come scrivere l'accelerazione di un corpo soggetto alla forza gravitazionale di altri due o più corpi.

Date le condizioni iniziali, \vec{r}_0 e \vec{v}_0 , l'integratore numerico calcola \vec{r} e \vec{v} ad ogni iterazione, salvando poi i risultati in due vettori: il primo (per esempio \mathbf{t}) contiene i tempi a cui sono state calcolate le posizioni e le velocità del corpo, il secondo (per

esempio \mathbf{f}) contiene \vec{r} e \vec{v} calcolati a ogni tempo del vettore \mathbf{t} .

Il vettore contenente la posizione e la velocità del corpo orbitante al tempo t è detto *state vector*.

Facciamo un esempio:

$$[\mathbf{t}, \mathbf{f}] = \text{ode45}(\text{'fun_to_integrate'}, [\mathbf{t_initial} \ \mathbf{t_final}], f_0);$$

La riga di codice appena scritta impone l'integrazione (tramite l'integratore ode45, che vedremo tra poco) della funzione 'fun_to_integrate', da un tempo iniziale $\mathbf{t_initial}$ a un tempo finale $\mathbf{t_final}$, partendo da un vettore f_0 , contenente le condizioni iniziali. In output fornisce un vettore \mathbf{t} con tutti i tempi da $\mathbf{t_initial}$ a $\mathbf{t_final}$ a cui sono stati calcolati \vec{r} e \vec{v} , che invece sono riportati nella matrice \mathbf{f} , la quale avrà in ogni riga un vettore formato dalle posizioni e le velocità dei diversi corpi (e del baricentro del sistema). In particolare la prima riga di \mathbf{f} si riferirà al tempo t_0 , la seconda al tempo $t_0 + h$ e così via, dove h dipende dal metodo utilizzato o dallo stepsize prefissato.

Nel caso di problema kepleriano, f_0 è un vettore colonna del tipo:

$$f_0 = [0 ; 0 ; 0 ; \vec{r}_0(1) ; \vec{r}_0(2) ; \vec{r}_0(3) ; 0 ; 0 ; 0 ; \vec{v}_0(1) ; \vec{v}_0(2) ; \vec{v}_0(3)]$$

dove $[0 ; 0 ; 0 ; \dots ; 0 ; 0 ; 0 ; \dots]$ rappresentano le componenti del primo corpo, che avendo massa $M \gg m$ è considerato coincidente col baricentro e fermo.

La funzione 'fun_to_integrate', invece, nel caso di problema dei due corpi è chiamata 'accel_2body_3D' ed è strutturata in modo da costruire, partendo da \mathbf{f} ad ogni iterazione, un vettore:

$$dfdt = [v1x ; v1y ; v1z ; v2x ; v2y ; v2z ; vGx ; vGy ; vGz ; \\ a1x ; a1y ; a1z ; a2x ; a2y ; a2z ; aGx ; aGy ; aGz]$$

dove le accelerazioni sono date dalle seguenti formule:

$$\left\{ \begin{array}{l} a1x = G * m(2) * (r2x - r1x)/r12 \\ a1y = G * m(2) * (r2y - r1y)/r12 \\ a1z = G * m(2) * (r2z - r1z)/r12 \\ a2x = G * m(1) * (r1x - r2x)/r12 \\ a2y = G * m(1) * (r1y - r2y)/r12 \\ a2z = G * m(1) * (r1z - r2z)/r12 \\ aGx = 0 \\ aGy = 0 \\ aGz = 0 \end{array} \right.$$

con r_{12} distanza tra i due corpi.

Ogni riga del vettore \mathbf{f} , analogamente, sarà del tipo:

$$\mathbf{f} = [0 ; 0 ; 0 ; \vec{r}(1) ; \vec{r}(2) ; \vec{r}(3) ; 0 ; 0 ; 0 ; \vec{v}(1) ; \vec{v}(2) ; \vec{v}(3)]$$

dove anche qui gli zeri rappresentano che il corpo M rimane fermo nel baricentro non risentendo dell'influenza di m .

Per quanto riguarda il metodo di integrazione, ne sono stati testati diversi. I metodi testati sono:

- ode45: utilizza una formula esplicita di Runge-Kutta (4,5) denominata formula di Dormand-Prince.
- ode78: utilizza una formula esplicita di Runge-Kutta (7,8)
- ode113: utilizza il metodo di Adams-Bashforth-Moulton PECE.
- ode89: è un'implementazione della coppia Runge-Kutta 9(8) "più robusta" proposta in un articolo da Verner J.H., professore al Dipartimento di Matematica alla Simon Fraser University di Burnaby, Canada.

Vediamo più nel dettaglio in cosa consistono questi metodi.

1. RUNGE-KUTTA:

I metodi di Runge-Kutta (spesso abbreviati con "RK") sono una famiglia di metodi iterativi discreti utilizzati nell'approssimazione numerica di soluzioni di equazioni differenziali ordinarie (ODE).

Scrivendo l'accelerazione come: $\mathbf{a}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r})/m$ questi metodi RK sono descritti dalle equazioni:

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{a}(t_0 + c_i h, \mathbf{r}_0 + c_i h \mathbf{v}_0 + h^2 \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} \mathbf{k}_j) \quad (36)$$

$$\hat{\mathbf{r}}(t_0 + h) = \mathbf{r}_0 + h \mathbf{v}_0 + h^2 \sum_{i=0}^s \hat{b}_i \mathbf{k}_i \quad (37)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(t_0 + h) = \mathbf{v}_0 + h \sum_{i=0}^s \hat{b}_i \mathbf{k}_i \quad (38)$$

I coefficienti $c_i, a_{ij}, k_i, b_i, \hat{b}_i, \hat{b}_i$ descrivono il tipo di metodo RK.

Le componenti \mathbf{k}_i sono le valutazioni della funzione computate ad ogni step

integrativo. La variabile s rappresenta il numero di queste valutazioni ed è definita per ogni specifico metodo RK.

Per esempio ode45 utilizza 6 stage per calcolare una soluzione con accuratezza di ordine 4 e una di ordine 5. Usa la differenza tra le due per stimare l'errore della soluzione di ordine 5.

2. ADAMS-BASHFORTH-MOULTON:

A differenza del metodo RK, che è un metodo single-step, questo è un metodo lineare multistep.

I metodi multistep cercano di aumentare l'efficienza del calcolo utilizzando le informazioni degli step precedenti, invece di scartarle. I metodi multistep lineari, in particolare, utilizzano combinazioni lineari di questi valori.

Per esempio il metodo Adams-Bashforth 2-step utilizza la seguente formula:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{3}{6}h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2}h \cdot f(t_n, y_n) \quad (39)$$

dove dato y_0 , se y_1 non è noto, può essere calcolato con un metodo 1-step.

Approccio *predictor-corrector*:

- Predictor: stima della soluzione del passo successivo con un metodo esplicito
- Corrector: rifinitura della soluzione approssimata, solitamente con un metodo implicito

L'approccio PECE (Predictor-Evaluate-Corrector-Evaluate) chiama la funzione 2 volte per step.

In particolare ode113 è un metodo esplicito e implicito lineare multistep PECE di Adams-Bashforth-Moulton.

Utilizza un singolo step per calcolare una soluzione di ordine da 1 a 13.

Usa una formula di ordine 13 per stimare l'errore della soluzione.

2.3.2 Codice per "Two body problem test"

Come detto in precedenza, il codice *'Error_2body'* confronta l'errore numerico con quello analitico. Innanzitutto il codice integra in avanti, calcolando quindi posizioni e velocità da $t_{initial}$ a t_{final} ; poi, partendo dai valori di \vec{r} e \vec{v} trovati in corrispondenza di t_{final} , integra indietro fino a $t_{initial}$, arrivando a trovare dei valori di \vec{r}_0 e \vec{v}_0 diversi da quelli da cui eravamo partiti, a causa dell'errore numerico. Sottraendo poi il vettore contenente le posizioni calcolate a ogni timestep integrando avanti con il corrispondente vettore delle posizioni ottenute dall'integrazione indietro, si ottiene una stima dell'andamento dell'errore nell'intervallo considerato.

Per fare ciò è necessario che i vettori **t** e **t_backward** contengano gli stessi tempi in modo che **f** e **f_backward** contengano le valutazioni di posizione e velocità agli stessi tempi e possano quindi essere sottratti tra loro riga per riga per un confronto diretto. Per questo motivo all'interno dell'integratore non viene inserito un vettore tspan contenente solo due elementi [$t_{initial}$ t_{final}], bensì un vettore del tipo $Time = [t_{initial} : timestep : t_{final}]$.

In questo modo l'integratore restituisce la soluzione valutata ai tempi contenuti nel vettore $Time$. Tuttavia, il risolutore non esegue un passo preciso in ogni punto specificato in tspan. Al contrario, il risolutore utilizza i propri passaggi interni per calcolare la soluzione, quindi valuta la soluzione nei punti richiesti in tspan.

Per poter confrontare **f** e **f_backward** è inoltre importante che uno dei due venga invertito, in modo che entrambi i vettori vadano da t_{final} a $t_{initial}$ (o viceversa) e che possano quindi essere sottratti componente per componente.

Questo procedimento di integrazione avanti e indietro appena descritto è eseguito dalle seguenti linee di codice:

```
% initial condition must be passed to ode in a column vector:
f0=[r0(1,:);r0(2,:);r0(3,:);r0(4,:);rG0';
    v0(1,:);v0(2,:);v0(3,:);v0(4,:);vG0'];
%Time vector:
t_initial=input('Inserire t_iniziale: ');
t_final=input('Inserire t_finale: ');
Time=t_initial:360:t_final; %where we have taken timestep=360s
Timeback=t_final:-360:t_initial;
%Set ode options:
options = odeset('RelTol', 3e-14, 'AbsTol', 1e-18);
%Integration forward and backward:
[t,f]=ode45('accel_nbody_3D',Time,f0,options);
[andata, y] = size(f);
f0_indietro = f(andata, :);
[tback,f_back] = ode45('accel_nbody_3D',Timeback, f0_indietro, options);
```

In seguito il codice calcola con uno dei due metodi analitici descritti sopra \vec{r} e \vec{v} ad ogni tempo t del vettore **t**, salvandoli in due matrici **R** e **V**, per poi sottrarre componente per componente le colonne delle matrici **f** ed **R**, come mostrato nelle seguenti righe di codice:

```

%R analitico ed Erel

[Rtot,Vtot]=Lagrange_orbit_time(r01,v01,timevector(length(timevector)),m);
%Rtot=Twobodyorbit(r01,v01,timevector(length(timevector)),m);

for i=1:andata
    %R(i,:)=Twobodyorbit(r01,v01,t(i),m);
    [R(i,:),V(i,:)]=Lagrange_orbit_time(r01,v01,t(i),m);
end

E_rel_x=((f(:,4)-R(:,1))./norm(f(:,4)))./2;
E_rel_y=((f(:,5)-R(:,2))./norm(f(:,5)))./2;
E_rel_z=((f(:,6)-R(:,3))./norm(f(:,6)))./2;

```

Utilizzando quindi questo codice è possibile dimostrare che gli errori numerici ottenuti integrando avanti e indietro (E_{num}) sono dello stesso ordine di grandezza degli errori relativi (E_{rel}) tra i valori delle posizioni trovati col metodo numerico e quelli trovati col metodo analitico. Di seguito è riportato un esempio in cui è stata integrata l'orbita di Io attorno a Giove (considerato fermo nel baricentro) per 1 anno. I tre grafici riportano l'andamento degli errori (E_{num} in nero ed E_{rel} in rosso) e la tabella i rispettivi valori stimati in $t_{finale} = 1 \text{ year}$:

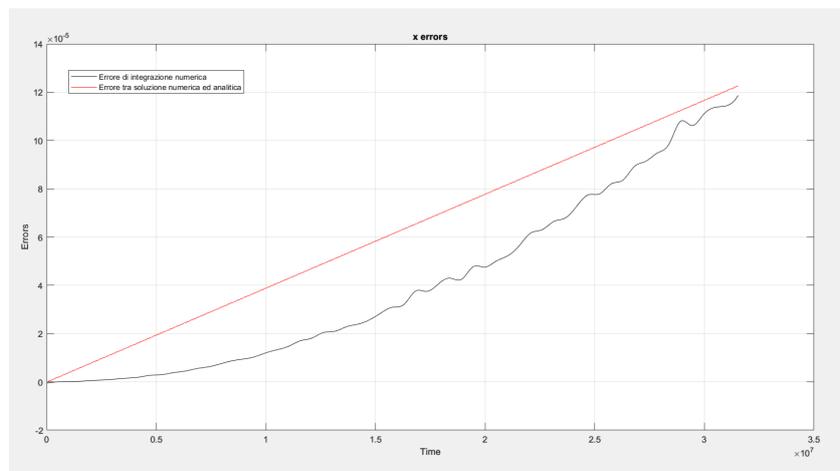


Figura 16: Confronto errore numerico e relativo, componente x

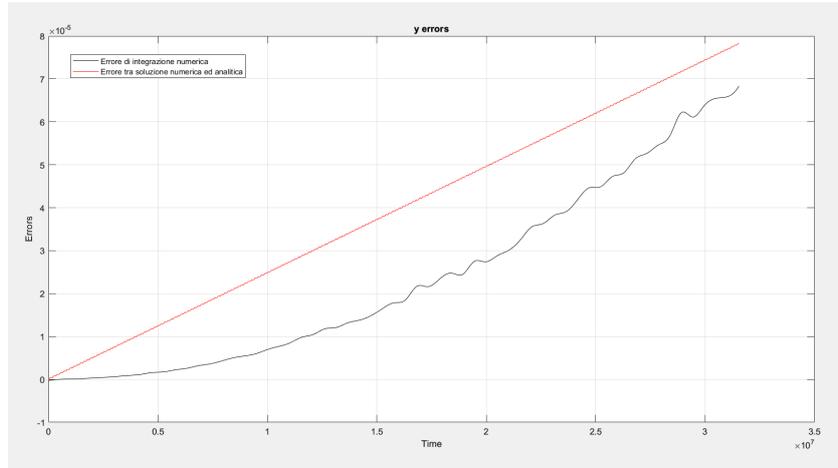


Figura 17: Confronto errore numerico e relativo, componente y

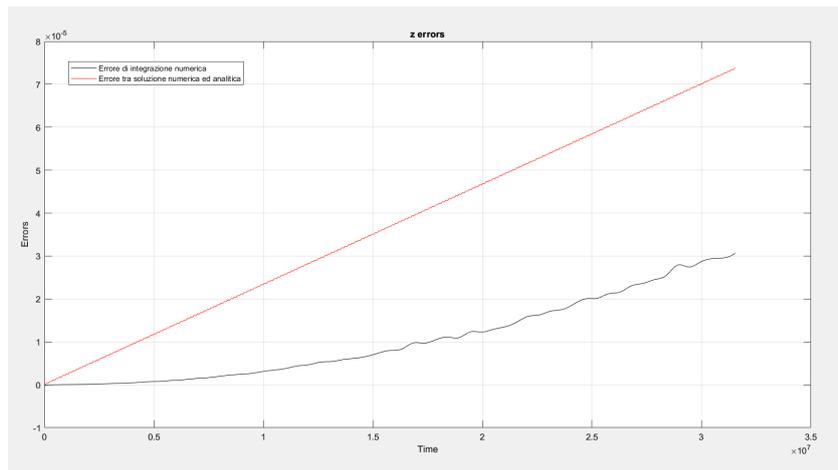


Figura 18: Confronto errore numerico e relativo, componente z

	X	Y	Z
E_{rel}	0.000122764970	0.000078224922	0.000073717883
E_{num}	0.000119838951	0.000068997091	0.000030962095

Tabella 1: Valori numerici degli errori dopo 1 anno

3 N-BODY PROBLEM

3.1 Descrizione problema

Progredendo nello studio orbitale, si passa da due corpi a studiare il moto di n-corpi nello spazio, il cosiddetto problema di n-corpi, appunto.

Per semplicità consideriamo tre corpi, le equazioni del moto per n-corpi possono facilmente essere ricavate da quelle per un *three-body system*.

Le forze gravitazionali in figura possono essere scritte come:

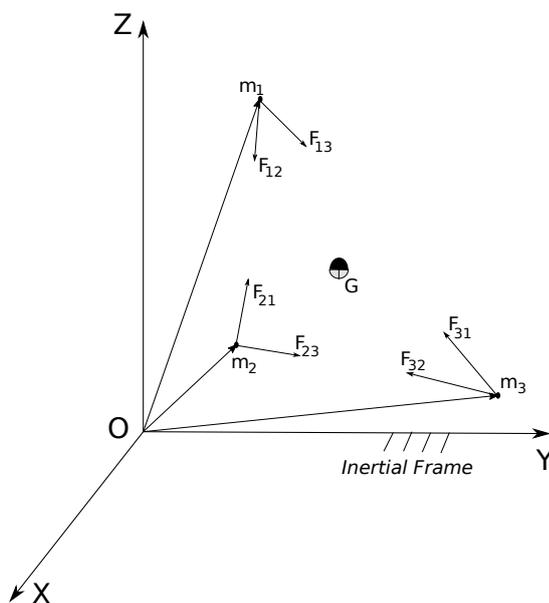


Figura 19: Sistema di riferimento per three-body problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} \\ \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31} = \frac{Gm_1m_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \\ \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32} = \frac{Gm_2m_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} \end{array} \right.$$

Relativamente a un sistema di riferimento inerziale le accelerazioni dei corpi sono:

$$a_i = \ddot{r}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (40)$$

dove r_i è il vettore posizione del corpo i .

L'equazione del moto per il corpo 1 è:

$$\vec{a}_1 = \frac{Gm_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} + \frac{Gm_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\|^3} \quad (41)$$

Per i corpi 2 e 3, analogamente:

$$\vec{a}_2 = \frac{Gm_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} + \frac{Gm_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{\|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\|^3} \quad (42)$$

$$\vec{a}_3 = \frac{Gm_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\|^3} + \frac{Gm_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\|^3} \quad (43)$$

Le velocità e le posizioni sono legate alle accelerazioni dalle derivate:

$$\frac{dv_i}{dt} = a_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (44)$$

$$\frac{dr_i}{dt} = v_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (45)$$

Poiché non ci sono forze esterne agenti sul sistema, l'accelerazione del centro di massa è nulla:

$$\vec{a}_G = 0 \quad (46)$$

Date le condizioni iniziali \vec{r}_0 e \vec{v}_0 dobbiamo integrare l'equazione (44) per trovare \vec{v}_i in funzione del tempo e sostituendo i risultati ottenuti nell'equazione (45) otteniamo \vec{r}_i in funzione del tempo.

In poche parole il procedimento risolutivo è lo stesso descritto precedentemente per due corpi, ma in questo caso avremo 3 corpi e nessuno di essi, in generale, coincidente con il baricentro. Quindi avremo:

$$f_0 = [\vec{r}_0(1, :); \vec{r}_0(2, :); \vec{r}_0(3, :); \vec{r}_G; \vec{v}_0(1, :); \vec{v}_0(2, :); \vec{v}_0(3, :); \vec{v}_G] \quad (47)$$

dove:

$$\vec{r}_0 = [r_{1x}, r_{1y}, r_{1z}; r_{2x}, r_{2y}, r_{2z}; r_{3x}, r_{3y}, r_{3z}] \quad (48)$$

$$\vec{v}_0 = [v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}; v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}; v_{3x}, v_{3y}, v_{3z}] \quad (49)$$

sono le matrici contenenti rispettivamente le posizioni e le velocità dei tre corpi all'istante iniziale. Di conseguenza nell'equazione integranda avremo:

$$f = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_G, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_G]' \quad (50)$$

Una volta scritto un codice per il calcolo delle posizioni e le velocità dei tre corpi, si è quindi sviluppato un codice più ampio che potesse prendere in considerazione sistemi di n corpi, con n compreso tra 2 e 5. Tale codice è presentato nella sezione seguente.

3.2 Sistema di riferimento (r,t,n)

Le direzioni x,y,z rispetto al sistema di riferimento inerziale J2000 non hanno uno stretto legame con la dinamica dei corpi in studio.

Scegliamo quindi di rappresentare gli errori di integrazione in un sistema di riferimento coerente con il moto orbitale: scegliamo come asse \hat{r} la direzione radiale dei corpi rispetto a Giove, asse \hat{n} il prodotto vettoriale tra il vettore posizione e il vettore velocità del corpo rispetto a Giove ed infine \hat{t} come il prodotto vettoriale tra i nuovi assi X e Z.

In formule:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (51)$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{|\vec{r} \times \vec{v}|} \quad (52)$$

$$\hat{t} = \hat{n} \times \hat{r} \quad (53)$$

dove \vec{r} e \vec{v} sono rispettivamente la posizione e la velocità del corpo rispetto al baricentro del sistema.

La matrice di rotazione dal nuovo sistema di riferimento al vecchio è costruita come:

$$R = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

3.3 Codice per risoluzione numerica n-body problem e calcolo degli errori

Il suddetto codice, prendendo in input le posizioni e le velocità dei corpi all'istante iniziale, fornisce in output la posizione e la velocità di ogni corpo dopo il tempo di integrazione scelto Δt . Per il calcolo dell'errore in questo caso, non potendosi basare su un confronto tra soluzione analitica e soluzione numerica, come fatto nel caso del problema kepleriano, si è adottato il metodo di integrazione avanti e indietro illustrato precedentemente per il caso dei due corpi e che abbiamo dimostrato fornire errori verosimili.

Questo script richiede in input:

- $t_{initial}$ e t_{final} , ovvero gli estremi tra cui si vuole integrare il problema
- stepsize da utilizzare
- m , ovvero il vettore contenente le masse degli n corpi
- \vec{r}_0 , ovvero la matrice contenente le posizioni iniziali degli n corpi rispetto al baricentro del sistema
- \vec{v}_0 , ovvero la matrice contenente le velocità iniziali degli n corpi
- l'integratore da utilizzare, selezionabile tramite il comando *menu* che permette di scegliere tra gli integratori presenti nel codice ed elencati precedentemente.

In output invece fornisce:

- Due grafici che rappresentano le orbite degli n corpi nello spazio nel tempo di integrazione, con i rispettivi punti di inizio ($t_{initial}$) e di fine (t_{final}).
- n grafici (uno per ogni corpo) che rappresentano gli errori nel sistema di riferimento (x,y,z) dei corpi
- n grafici (uno per ogni corpo) che rappresentano gli errori nel sistema di riferimento (r,t,n) dei corpi
- I valori numerici relativi alle posizioni in x,y,z degli n corpi
- I valori degli errori numerici a $t=t_{final}$ per ogni corpo

- I valori di eccentricità e e semiasse maggiore a per ogni corpo

E' importante sottolineare che, poiché il valore di G è stato posto uguale a $G=6.67259e-20$, i valori delle posizioni iniziali vanno inseriti in km e le velocità in km/s.

Vediamo ora un esempio.

Per il seguente test (e per tutti quelli che saranno presentati in seguito) sono stati forniti in input le posizioni e le velocità di Giove, Io, Europa e Ganimede rispetto al baricentro del sistema (che è interno a Giove) al tempo $t_0='12-FEB-2032\ 23:07:00.0000\ ET'$. Questi dati sono forniti da SPICE, che prende le misure dal sistema di riferimento J2000 introdotto nella Sezione 2.1.

Inoltre in questo caso è stato utilizzato come integratore il metodo *ode113*, con uno stepsize fisso di 3600s da 0 a $t_{final}=31536000$ (ovvero integrando per un anno).

In output otteniamo:

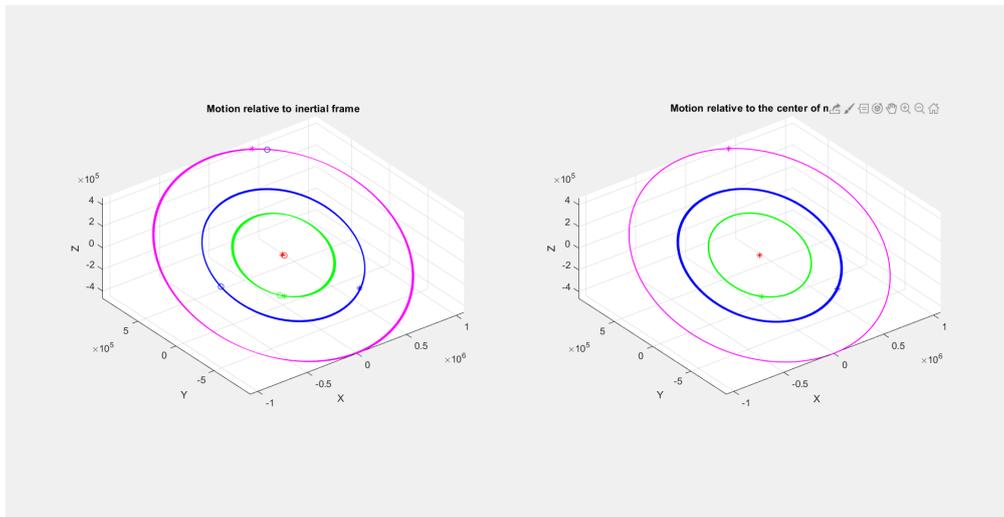


Figura 20: Rappresentazione orbite

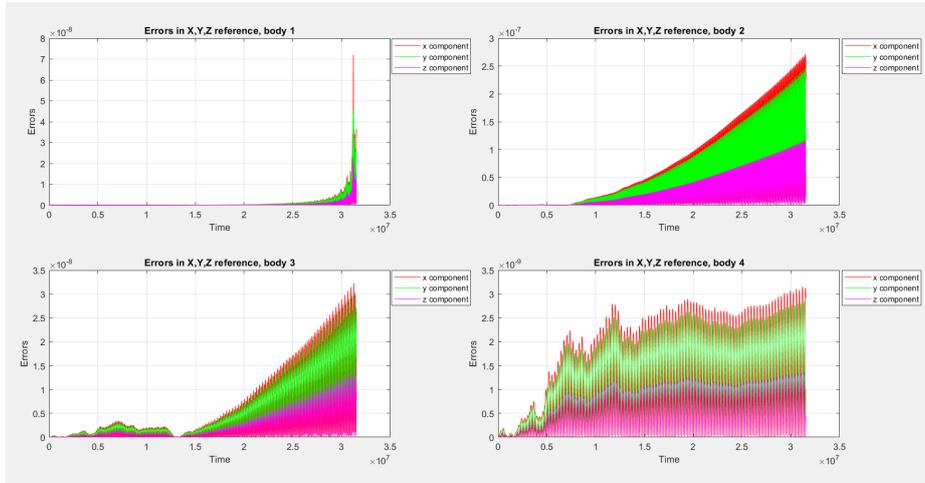


Figura 21: Errori 4 corpi nel sistema di riferimento x,y,z

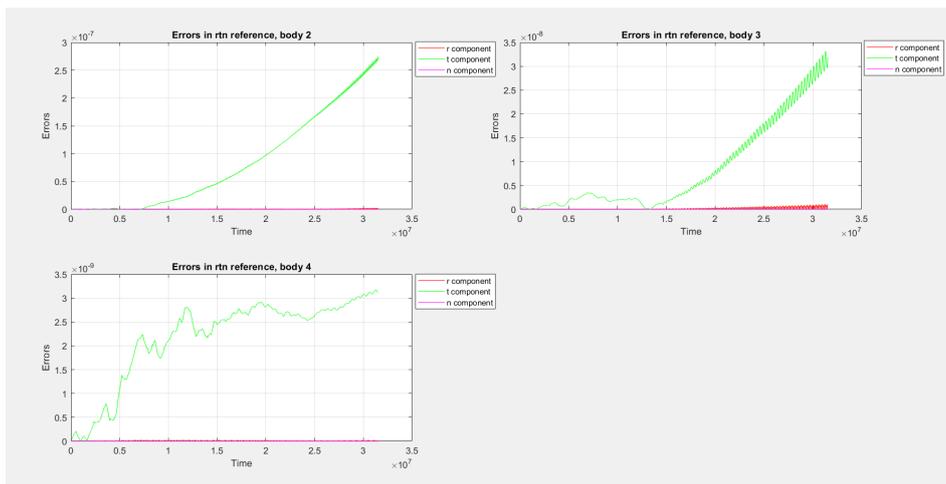


Figura 22: Errori 4 corpi nel sistema di riferimento r,t,n

Per quanto riguarda l'immagine relativa agli errori in x,y,z (Figura (21)), come scritto a legenda sono rappresentati in rosso gli errori lungo la coordinata x, in verde quelli in y e in magenta quelli in z. Gli andamenti degli errori presentano oscillazioni di corto periodo dovuti alla dinamica delle orbite dei corpi. Infatti per Io, che ha un periodo orbitale minore, le oscillazioni sono più fitte rispetto ad Europa e quelle di Europa sono più fitte rispetto al grafico di Ganimede.

La prima osservazione da fare è che si tratta di errori relativamente piccoli in confronto alle misure dei raggi che sono dell'ordine di centinaia di migliaia di km e che

risultano essere dopo un anno:

1. $\vec{r}_{Io} = (-256586.721 \text{ km}, -283783.480 \text{ km}, -139154.156 \text{ km})$
2. $\vec{r}_{Europa} = (-662060.365 \text{ km}, -38175.990 \text{ km}, -26246.715 \text{ km})$
3. $\vec{r}_{Ganimede} = (482534.577 \text{ km}, 869978.950 \text{ km}, 425373.902 \text{ km})$

Trasformando gli errori dal riferimento x,y,z al riferimento r,t,n, grazie a ragionamenti matematici e geometrici sui principali parametri orbitali, si ottengono i grafici in Figura (22). La cosa più interessante riguardo agli errori in r,t,n è che la componente che diverge di più è quella in \hat{t} (in verde). Questo è dovuto al fatto che \hat{t} rappresenta la direzione del moto e per questo è la componente su cui si accumulano il maggior numero di errori.

Per questo motivo i confronti che faremo in seguito saranno basati sulla componente t dell'errore, che essendo la maggiore è quella che vorremmo limitare maggiormente.

3.3.1 Confronto di diversi integratori

Si possono testare vari integratori per vedere quali funzionano meglio e sotto quali condizioni.

Il codice prevede la scelta di uno dei seguenti integratori:

- ode45
- ode113
- ode78
- ode89

Nelle seguenti immagini sono riportati i test relativi agli errori nel sistema di riferimento r,t,n per le orbite di Io, Europa e Ganimede attorno a Giove, utilizzando gli integratori sopra elencati.

I test sono stati fatti tutti con uno stepsize pari a 360s, per un periodo di tempo di 10 anni.

Le opzioni sulle tolleranze sono state poste:

```
options = odeset('RelTol', 3e - 14, 'AbsTol', 1e - 18);
```

Ode45:

Body	Err_x	Err_y	Err_z	Err_r	Err_t	Err_n
"Io"	2.0602e-05	1.1815e-05	5.3007e-06	1.0765e-07	2.4333e-05	1.1222e-10
"Europa"	6.2806e-06	3.9545e-06	1.9317e-06	1.5513e-07	7.6673e-06	1.3291e-10
"Ganimede"	6.0934e-07	2.1069e-07	9.0481e-08	2.2988e-09	6.5105e-07	5.4586e-11

Figura 23: Errori con ode45 per 10 anni

Ode113:

Body	Err_x	Err_y	Err_z	Err_r	Err_t	Err_n
"Io"	3.3911e-08	1.9544e-08	8.772e-09	8.7332e-11	4.0111e-08	1.0103e-12
"Europa"	4.8941e-09	3.2099e-09	1.5684e-09	5.3839e-12	6.0592e-09	2.6502e-12
"Ganimede"	7.5048e-09	2.6489e-09	1.1392e-09	2.7291e-11	8.0396e-09	3.188e-13

Figura 24: Errori con ode113 per 10 anni

Ode78:

Body	Err_x	Err_y	Err_z	Err_r	Err_t	Err_n
"Io"	0.00010078	5.7824e-05	2.5942e-05	5.0408e-07	0.00011905	5.6138e-10
"Europa"	3.2776e-05	2.0727e-05	1.0123e-05	7.2934e-07	4.0071e-05	5.907e-10
"Ganimede"	4.8083e-07	1.8815e-07	8.1575e-08	2.0751e-08	5.2232e-07	2.4524e-10

Figura 25: Errori con ode78 per 10 anni

Ode89:

Body	Err_x	Err_y	Err_z	Err_r	Err_t	Err_n
"Io"	7.6942e-08	4.4125e-08	1.9796e-08	4.0418e-10	9.0878e-08	8.7032e-14
"Europa"	2.4485e-08	1.544e-08	7.5406e-09	5.8417e-10	2.9906e-08	1.3333e-12
"Ganimede"	1.0956e-09	3.716e-10	1.5857e-10	1.1895e-11	1.1677e-09	4.9395e-13

Figura 26: Errori con ode89 per 10 anni

E' evidente che gli integratori con le migliori performance sono ode89 e ode113. Andiamo quindi a vedere come si comportano i due integratori in termini di errori in t. Per il seguente test si è integrato con stepsize di 360s per un t_{final} variabile con un ciclo for $t_{final} = 7884000 : 7844000 : 441504000$ (ovvero $t_{final_1} = 3$ mesi, $t_{final_2} = 6$ mesi e così via fino all'ultimo $t_{final_n} = 14$ anni).

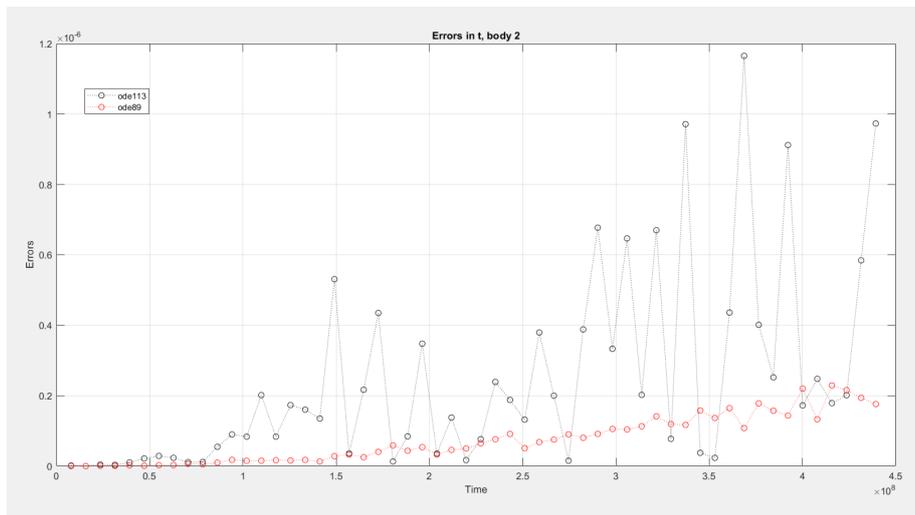


Figura 27: Errori con ode113 e ode89 per 14 anni, Io

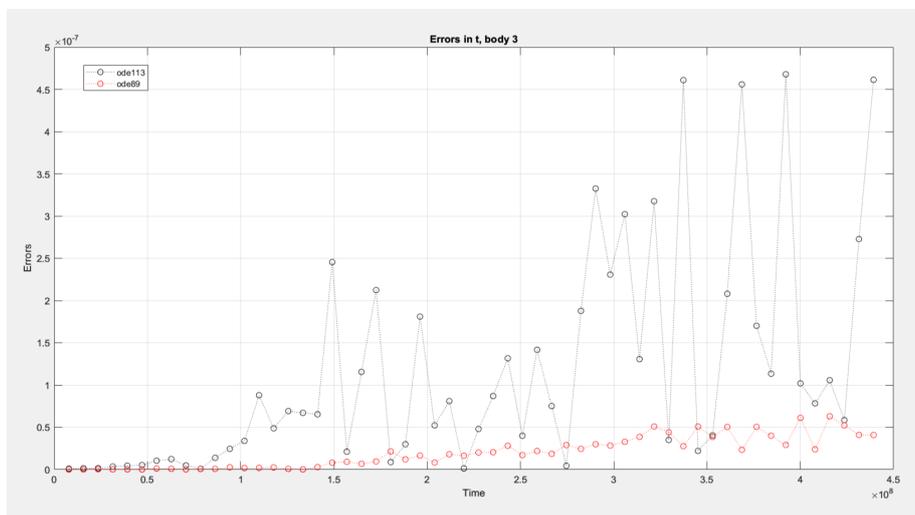


Figura 28: Errori con ode113 e ode89 per 14 anni, Europa

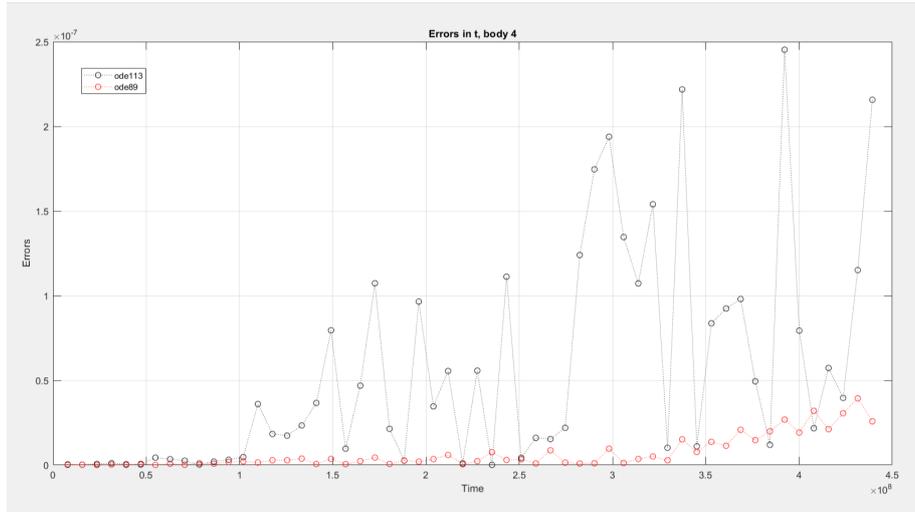


Figura 29: Errori con ode113 e ode89 per 14 anni, Ganimede

Come si può facilmente notare, oltre ad avere un andamento molto più regolare rispetto ad ode113, gli errori con ode89 sono quasi sempre minori di quelli ottenuti con ode113.

3.3.2 Effetto del timestep

Assodato che tra quelli testati ode89 è l'integratore che fornisce gli errori minori nel tempo, vediamo come variano le sue performance al variare di alcuni parametri in modo da identificare le migliori condizioni in cui poterlo utilizzare.

Iniziamo analizzando come variano gli errori al variare dello stepsize scelto.

Come detto in precedenza, infatti, per poter confrontare gli errori facendo la differenza tra i valori di \vec{r} presenti nelle righe delle matrici \mathbf{f} e $\mathbf{f_backward}$, bisogna che esse abbiano stesse dimensioni e valutino \vec{r} agli stessi tempi. Per fare ciò dobbiamo appunto utilizzare un *tspan* discretizzato inserendo un timestep che faccia in modo che l'integratore ci fornisca la valutazione ai tempi ottenuti suddividendo il vettore $[t_{initial} \ t_{final}]$ in un numero di intervalli definiti appunto dal timestep scelto ($Time = t_{initial} : timestep : t_{final}$). Testando ode89 con diversi timestep (60s, 120s, 360s, 600s), i risultati ottenuti per gli errori in t (integrando per 10 anni) sono i seguenti:

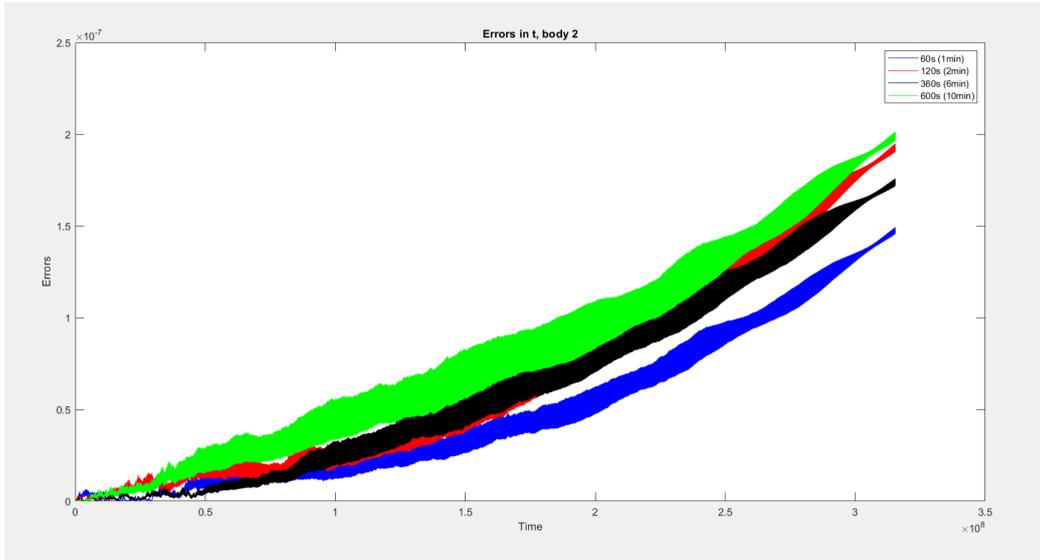


Figura 30: Errori in t con diversi timestep, Io

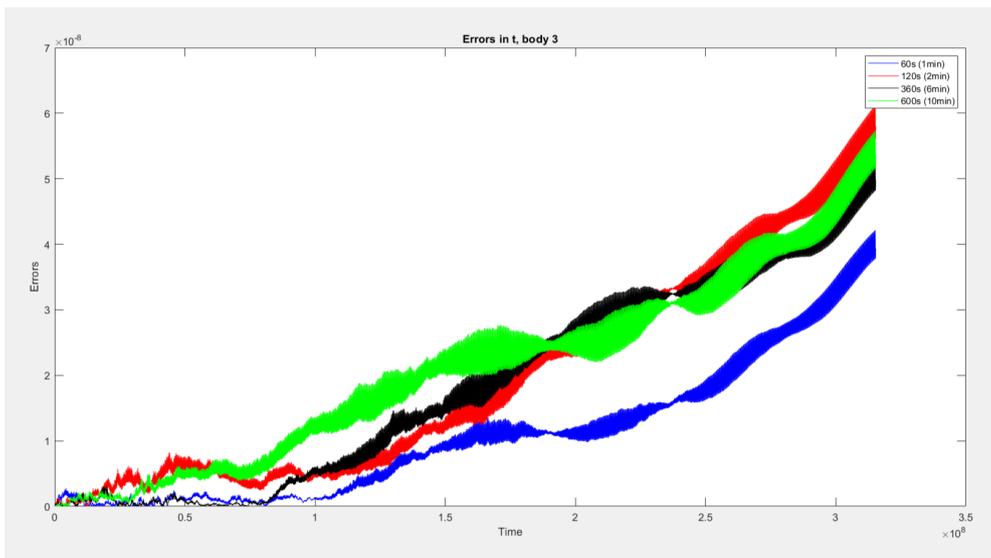


Figura 31: Errori in t con diversi timestep, Europa

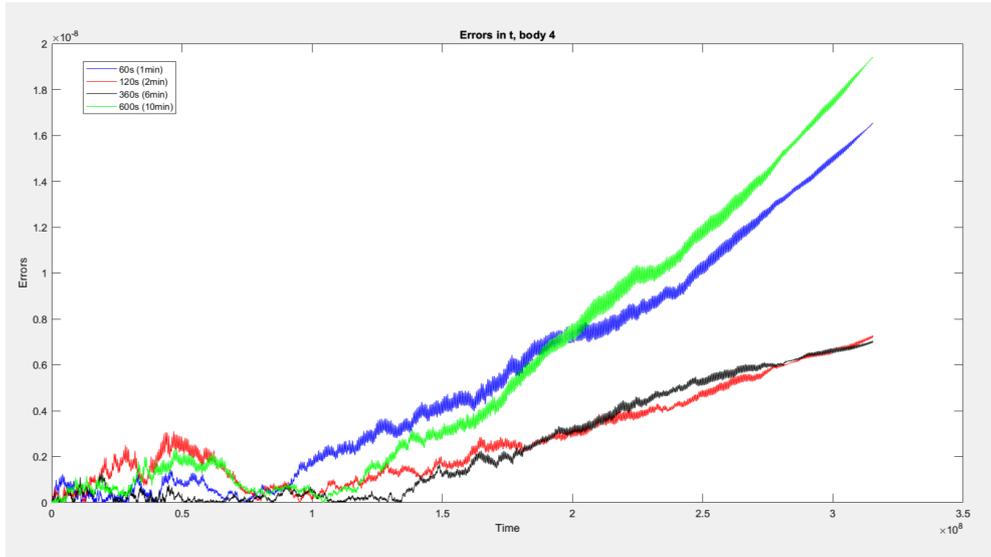


Figura 32: Errori in t con diversi timestep, Ganimede

I risultati numerici su tutti gli errori sono invece riportati nelle seguenti tabelle:

Stepsize 60s:

Body	Err_x	Err_y	Err_z	Err_r	Err_t	Err_n
"Io"	1.2385e-07	7.0977e-08	3.1841e-08	6.9914e-10	1.4626e-07	7.1752e-13
"Europa"	3.2349e-08	2.0091e-08	9.8183e-09	1.0459e-09	3.931e-08	1.9994e-12
"Ganimede"	1.5442e-08	5.4142e-09	2.328e-09	1.9059e-11	1.6529e-08	5.8201e-13

Stepsize 120s:

Body	Err_x	Err_y	Err_z	Err_r	Err_t	Err_n
"Io"	1.6184e-07	9.2803e-08	4.1633e-08	8.6165e-10	1.9115e-07	1.1815e-12
"Europa"	4.7491e-08	2.9853e-08	1.4583e-08	1.2165e-09	5.7945e-08	1.6344e-12
"Ganimede"	6.7346e-09	2.3377e-09	1.0046e-09	1.5823e-11	7.1992e-09	8.0664e-13

Stepsize 360s:

Body	Err_x	Err_y	Err_z	Err_r	Err_t	Err_n
"Io"	1.4597e-07	8.3674e-08	3.7537e-08	8.0414e-10	1.7239e-07	7.9105e-13
"Europa"	4.0792e-08	2.5608e-08	1.2509e-08	1.0758e-09	4.9748e-08	2.22e-12
"Ganimede"	6.5205e-09	2.2668e-09	9.7416e-10	1.1861e-11	6.9716e-09	6.3905e-13

Stepsize 600s:

Body	Err_x	Err_y	Err_z	Err_r	Err_t	Err_n
"Io"	1.671e-07	9.5745e-08	4.2951e-08	9.5627e-10	1.9731e-07	5.7129e-13
"Europa"	4.4054e-08	2.7415e-08	1.3398e-08	1.3762e-09	5.357e-08	1.3566e-12
"Ganimede"	1.8119e-08	6.3461e-09	2.7284e-09	1.5585e-11	1.9391e-08	6.9184e-13

Secondo i risultati ottenuti, il timestep migliore per Io ed Europa è quello minore, ovvero 60s, mentre per Ganimede, che ha un'orbita più grande rispetto agli altri due e quindi una dinamica più lenta, si ottengono risultati migliori con un timestep più grande, 360s.

Se proviamo a inserire come timestep i tre periodi orbitali dei tre satelliti (in secondi), otteniamo un andamento degli errori meno oscillatorio, come mostrato nelle figura sottostante, che mostra come per esempio usando come timestep i periodi orbitali di Io, Europa e Ganimede (che si ricordano essere in risonanza 1:2:4), gli errori per esempio di Io presentino un andamento privo di oscillazioni di corto periodo, in quanto andiamo ad annullare l'effetto della dinamica dovuta al corto periodo orbitale dei corpi. Prendendo infatti timestep pari al periodo orbitale di uno dei tre corpi andiamo a valutare posizione e velocità del corpo sempre a un numero finito di orbite, ovvero sempre dallo stesso lato dell'orbita.

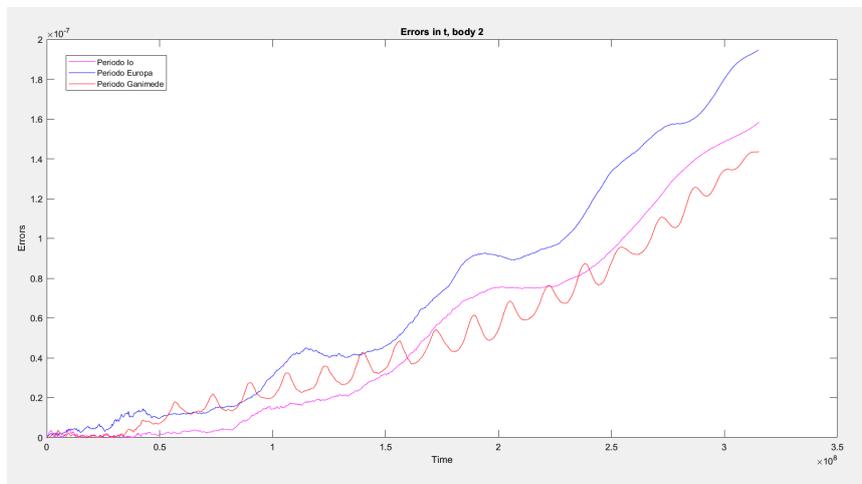


Figura 33: Errori per Io con timestep pari ai tre periodi orbitali di Io, Europa e Ganimede

3.3.3 Effetto della tolleranza relativa

Proviamo ora, usando sempre `ode89`, a vedere come si modificano gli errori variando la `Reltol` inserita nelle opzioni di comando dell'integratore tramite `odeset`.

Questa tolleranza misura l'errore relativo alla grandezza di ciascuna componente della soluzione. In parole povere, controlla il numero di cifre corrette in tutte le componenti della soluzione, ad eccezione di quelle inferiori alla tolleranza assoluta `AbsTol`. Ad ogni passo, il solutore ODE stima l'errore locale e nell' i -esima componente della soluzione. Per avere successo, il passaggio deve avere un errore accettabile, come determinato dalle tolleranze di errore relative e assolute:

$$|e(i)| \leq \max(\text{RelTol} * \text{abs}(y(i)), \text{AbsTol}(i)) \quad (54)$$

Usiamo per questo test un timestep di 360s, che è risultato essere il migliore per Ganimede e il secondo più affidabile per Io ed Europa (in termini di errori in t). Come `Reltol` usiamo $5e - 13$ (in verde), $1e - 13$ (in rosso) e $1e - 14$ (in blu).

In realtà quando inseriamo `Reltol = 1e - 14`, il sistema imposta automaticamente la tolleranza al valore $2.22045e - 14$, che risulta quindi essere in questo caso il valore minimo che si può utilizzare.

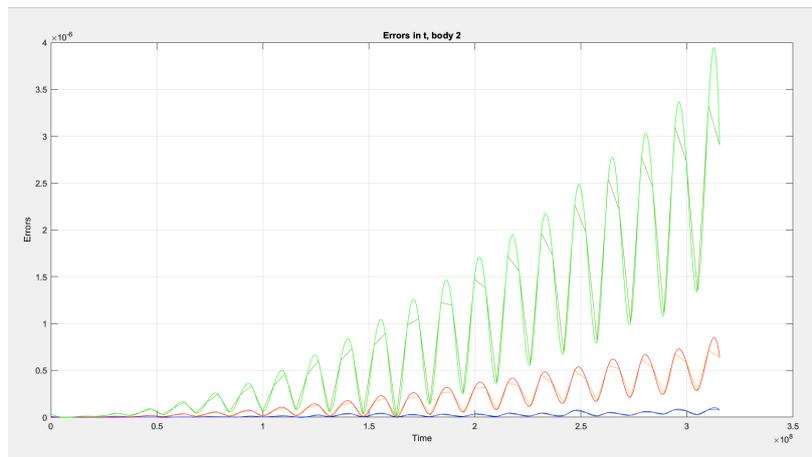


Figura 34: Errori in t con diversi `Reltol`, Io

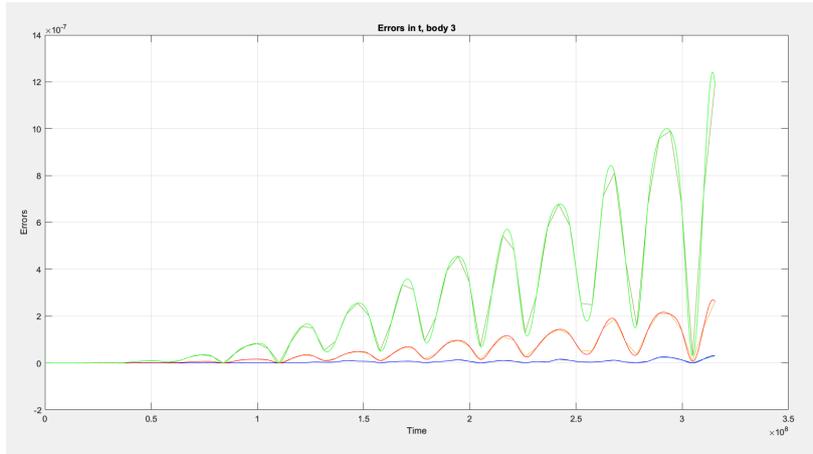


Figura 35: Errori in t con diversi Reltol, Europa

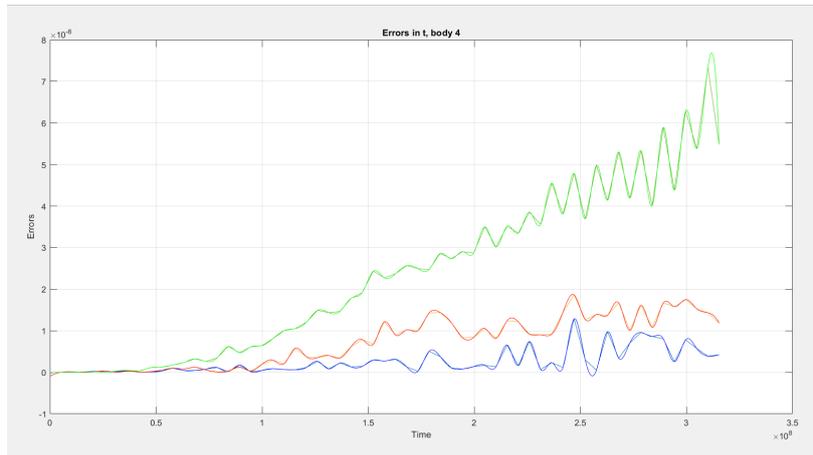


Figura 36: Errori in t con diversi Reltol, Ganimede

E' evidente che utilizzando la tolleranza minima (linea blu), pari appunto a $2.22045e - 14$, gli errori (in entrambi i sistemi di riferimento, x,y,z e r,t,n) diminuiscono notevolmente rispetto ai casi in cui la tolleranza relativa è stata presa di un ordine di grandezza superiore.

Si può però notare che per Io gli errori per le tre diverse tolleranze rimangono circa uguali per quasi un anno, nel caso di Europa coincidono per poco più di un anno, mentre per Ganimede fino a circa 3 anni, *Reltol* minima non è l'unica migliore soluzione, ma è quasi equivalente a $Reltol = 1e - 13$ (linea rossa); la curva relativa a tolleranza $5e - 13$ invece diverge dopo quasi un anno e mezzo.

3.3.4 Effetto della tolleranza assoluta

Ora proviamo invece a mantenere costante la tolleranza relativa (pari a quella minima) e a variare *Abstol* (sempre tramite *odeset*). Questa tolleranza è una soglia al di sotto della quale il valore della soluzione diventa irrilevante. Se la soluzione $|y|$ è minore di *AbsTol*, allora il risolutore non ha bisogno di ottenere alcuna cifra corretta in $|y|$. Per questo motivo, il valore di *AbsTol* dovrebbe tenere conto della scala delle componenti della soluzione.

Testiamo l'andamento dell'errore per *Abstol* pari a: $1e - 12$ (nero), $1e - 14$ (rosso), $1e - 16$ (verde), $1e - 18$ (blu), $1e - 20$ (giallo).

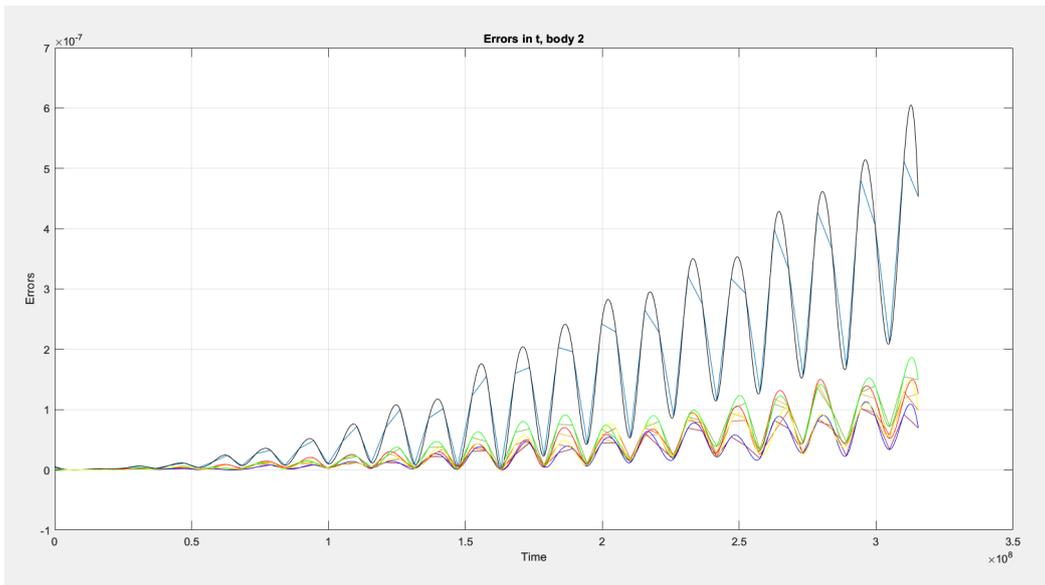


Figura 37: Errori in t con diversi *Abstol*, I_0

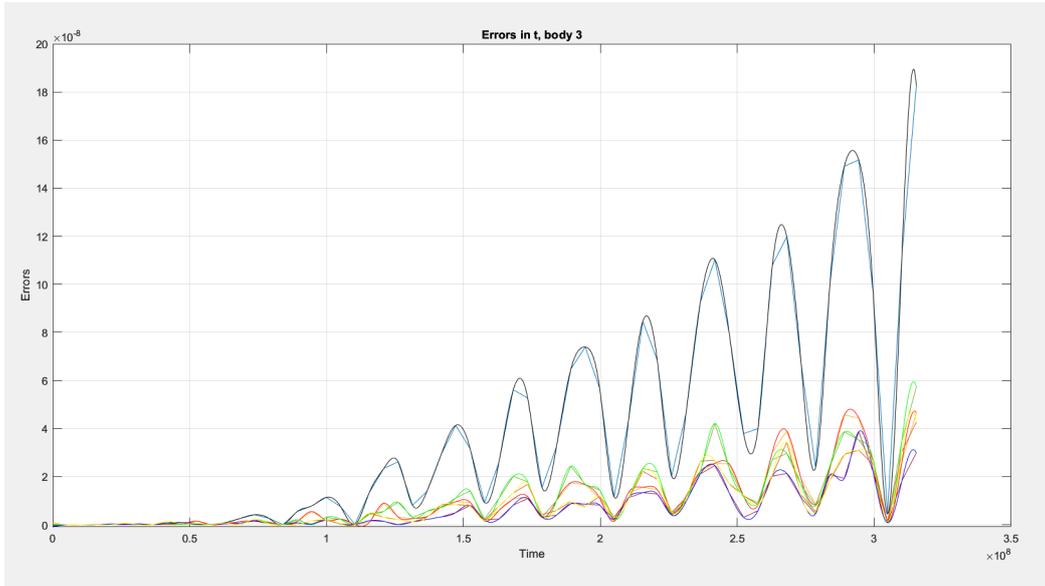


Figura 38: Errori in t con diversi Abstol, Europa

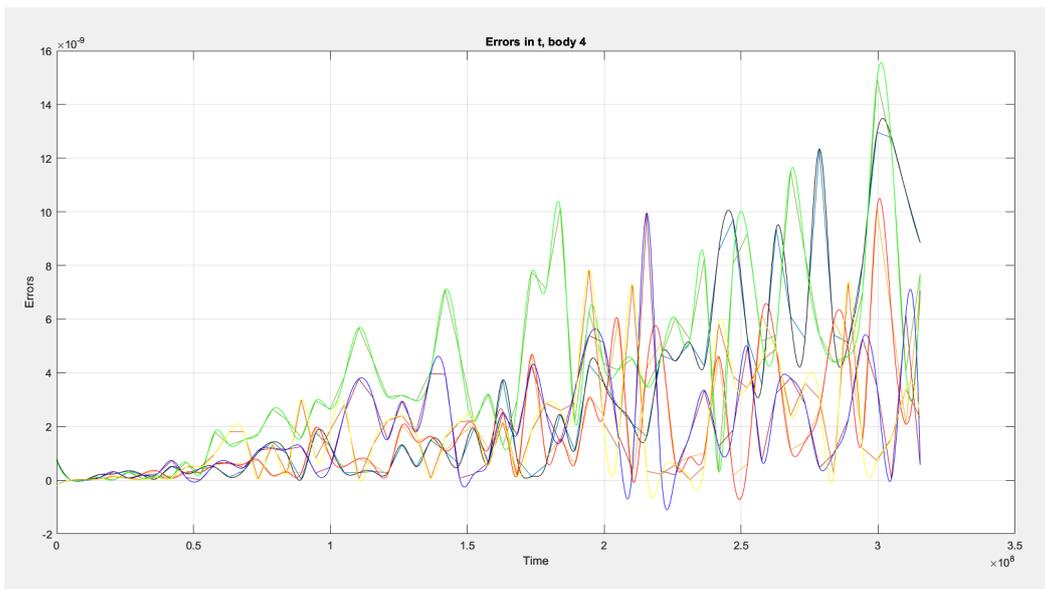


Figura 39: Errori in t con diversi Abstol, Ganimede

Dai risultati si vede chiaramente che per quanto riguarda Io ed Europa, il caso leggermente migliore è quello rappresentato in blu ($Abstol = 1e - 18$). Per Ganimede, invece, è molto più complicato determinare la tolleranza migliore da utilizzare.

4 CONCLUSIONI

Grazie alla base teorica introdotta nei primi capitoli di questo progetto, è stato sviluppato un codice per l'analisi degli errori di integrazione numerica nello studio del moto di n corpi, in particolare per i satelliti galileiani di Giove.

Il codice presentato è stato testato e ha permesso di capire che tra gli integratori utilizzati, ode89 è quello con le migliori performance. Infatti è quello che nel tempo mantiene gli errori più bassi (come mostrato nelle Figure (27),(28),(29)).

In seguito, associato che \hat{t} è la componente di errore che diverge maggiormente (poiché rappresenta proprio la direzione del moto) e che ode89 è l'integratore migliore per questo tipo di problema, è stata fatta un'analisi relativa agli input di tale integratore per capire sotto quali condizioni le performance fossero migliori.

Quest'analisi ha portato a concludere che, relativamente allo stepsize da inserire tra $t_{initial}$ e t_{final} per poter calcolare l'errore integrando avanti e indietro, per Io ed Europa gli errori minori si hanno utilizzando 60s, mentre per Ganimede gli errori si riducono usando uno step di 120s/360s.

Passando poi allo studio delle tolleranze *Reltol* ed *Abstol* da inserire nel comando *odeset* per preimpostare le opzioni di integrazione, si è notato che l'errore diminuisce notevolmente al diminuire di *Reltol* (Figure (34)(35)(36)), fino un valore minimo imposto dal sistema pari a $Reltol = 2.22045e - 14$ sotto il quale non possiamo scendere per questioni dovute alla precisione di macchina, che infatti è esattamente due ordini di grandezza più piccola, ovvero $eps = 2.22045e - 16$. Riguardo ad *Abstol*, invece, abbiamo notato che è difficile stabilire un valore ottimale da utilizzare per Ganimede, in quanto, utilizzando diversi ordini di grandezza da $1e - 12$ a $1e - 20$, l'andamento degli errori varia notevolmente nel tempo (Figura (39)). Per Io ed Europa risulta essere leggermente migliore il caso per $Abstol = 1e - 18$.

Il progetto presentato è la base per un più profondo studio orbitale che tenga conto dei disturbi dovuti a J_2 e J_{22} e che prenda in considerazione anche le armoniche sferiche di Giove (non considerando quindi i corpi come punti materiali ma come corpi rigidi con una propria distribuzione di massa non omogenea e volume non perfettamente sferico). Il codice presentato permette però comunque lo studio di diversi integratori e delle loro performance modificando i parametri in ingresso.

Riferimenti bibliografici

- [1] Moore H., Bassetti M., *Matlab per l'ingegneria*, Gennaio 2008.
- [2] Murray C.D., Dermott, S.F., *Solar System Dynamics*, 1999, pp. 32-42
- [3] Curtis H.D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*, Maggio 2011
- [4] Verner J. H., *Numerically Optimal Runge–Kutta Pairs with Interpolants*, Aprile 2009
- [5] Danby J.M.A., *Fundamentals of Celestial Mechanics*, 1988
- [6] Dirkx, Dominic, et al., *On the contribution of PRIDE-JUICE to Jovian system ephemerides*, Planetary and Space Science 147, 2017, pp. 14-27.

Elenco delle figure

1	Immagine di Giove e valori di caratteristiche fisiche	3
2	Immagine di Io e valori di caratteristiche fisiche e orbitali	4
3	Immagine di Europa e valori di caratteristiche fisiche e orbitali	5
4	Immagine di Ganimede e valori di caratteristiche fisiche e orbitali	6
5	Immagine di Callisto e valori di caratteristiche fisiche e orbitali	6
6	Traiettoria missione Juice per raggiungere il sistema di Giove	8
7	Sistema di riferimento J2000. E' evidenziata l'inclinazione dell'asse terrestre rispetto all'eclittica, pari a 23.4°	10
8	Sistema di riferimento inerziale per problema kepleriano	10
9	Rappresentazione piano orbitale con i vettori h ed e	13
10	Analisi orbita ellittica e sistemi di riferimento	14
11	Rappresentazione angoli di Eulero e rispettive rotazioni	16
12	Significato geometrico anomalia eccentrica E	17
13	Confronto tra soluzione esatta e soluzione dell'equazione di Keplero con troncamento della serie infinita di Lagrange a $N=3$ e $N=10$, per un'eccentricità $e=0.65$	20
14	Confronto tra soluzione esatta e soluzione dell'equazione di Keplero con troncamento della serie infinita di Lagrange a $N=3$ e $N=10$, per un'eccentricità $e=0.90$	20
15	Funzioni di Bessel di prima specie	21
16	Confronto errore numerico e relativo, componente x	30
17	Confronto errore numerico e relativo, componente y	31
18	Confronto errore numerico e relativo, componente z	31
19	Sistema di riferimento per three-body problem	32
20	Rappresentazione orbite	36
21	Errori 4 corpi nel sistema di riferimento x,y,z	37
22	Errori 4 corpi nel sistema di riferimento r,t,n	37
23	Errori con ode45 per 10 anni	39
24	Errori con ode113 per 10 anni	39
25	Errori con ode78 per 10 anni	39
26	Errori con ode89 per 10 anni	39
27	Errori con ode113 e ode89 per 14 anni, Io	40
28	Errori con ode113 e ode89 per 14 anni, Europa	40
29	Errori con ode113 e ode89 per 14 anni, Ganimede	41
30	Errori in t con diversi timestep, Io	42
31	Errori in t con diversi timestep, Europa	42
32	Errori in t con diversi timestep, Ganimede	43

33	Errori per Io con timestep pari ai tre periodi orbitali di Io, Europa e Ganimede	44
34	Errori in t con diversi Reltol, Io	45
35	Errori in t con diversi Reltol, Europa	46
36	Errori in t con diversi Reltol, Ganimede	46
37	Errori in t con diversi Abstol, Io	47
38	Errori in t con diversi Abstol, Europa	48
39	Errori in t con diversi Abstol, Ganimede	48