ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Principio del massimo per operatori lineari ellittici

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Vittorio Martino

Presentata da:
Riccardo Barbieri

Anno Accademico 2021-2022

Indice

Capitolo 1

Introduzione

All'interno di questa tesi vogliamo andare ad analizzare il principio del massimo per operatori ellittici.
Partiremo dunque con analizzare il caso dell'operatore di Laplace Δ e attraverso le formule di media riusciremo a dimostrare che vale il principio del massimo forte e il principio del massimo debole. Vedremo anche quali possono essere alcune delle sue applicazioni, come la disuguaglianza di Harnack, che ci permette di dare una stima dell'estremo superiore della funzione che stiamo considerando, su un aperto limitato e connesso, con una costante moltiplicativa e l'estremo inferiore della funzione.
Il teorema di Liouville, il quale asserisce che una funzione armonica e limitata, su tutto lo spazio in cui è definita, sarà costante e infine, il teorema fondamentale dell'algebra, che assicura l'esistenza delle radici di una funzione polinomiale a variabili complesse.
Estenderemo poi al caso più generico degli operatori lineari ellittici differenziali, ovvero operatori ottenuti tramite la combinazione lineare di una funzione di classe C^2, delle sue derivate prime e seconde, e dei coefficienti, che soddisfano l'ipotesi di ellitticità e di limitatezza nell'insieme di definizione.
Anche per gli operatori lineari ellittici differenziali dimostreremo il principio del massimo debole e il principio del massimo forte, utilizzando per quest'ultimo il lemma di Hopf.
Proporremo un'ulteriore applicazione per gli operatori lineari ellittici differenziali, ovvero quella dell'unicità delle soluzioni per problemi di Dirichlet.
Restringendoci al caso unidimensionale, il principio del massimo asserisce che, presa una funzione u convessa, di classe C^2 (in modo da poter derivare fino al secondo ordine), da un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, raggiunge il massimo sul bordo di I. Nello specifico, il principio del massimo "forte" afferma che se la funzione raggiunge il massimo in un punto interno dell'intervallo, allora la funzione necessariamente sarà costante; il principio del massimo "debole" asserisce invece che la funzione assume il suo massimo sul bordo dell'intervallo.
Un esempio classico, è quello di

$$f(x) = x^4,$$

definita da A=[-1,1] in $\mathbb{R}$. Si dimostra essere una funzione di classe C^2 e altrettanto facilmente si verifica che la sua derivata seconda $12x^2 \geq 0 \ \forall \ x \in I$, e ciò implica che f(x) è una funzione convessa. Il massimo della funzione f(x) viene infatti assunto nei punti (-1,1) e (1,1), ovvero il bordo dell'intervallo I.

1.1 Definizioni

Elencheremo di seguito alcune definizioni e notazioni che saranno utili durante tutti i teoremi presenti all'interno della tesi. Abbiamo deciso di concentrarle tutte nel primo capitolo in modo da rendere poi più fluida la lettura della parte principale della tesi.

Denotiamo con $\mathbb{R}^+$, l'insieme $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}\ t.c\ x > 0\}$.
Preso un sottinsieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, indichiamo la chiusura di Ω con $\overline{\Omega}$.
Presi $k \in \mathbb{N}$ e un aperto Ω, diremo che $f \in C^k\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ se $\exists M \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, con $\overline{\Omega} \subset M$, tale che $f \in C^k(M, \mathbb{R})$.

Definizione 1.1.1 (Palla in $\mathbb{R}^n$)**.** Preso un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, definiamo palla in $\mathbb{R}^n$, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n, \text{tali che } \|x - x_0\| \leq r,\ \text{con } r \in \mathbb{R}^+\}$.

Definizione 1.1.2 (Insieme limitato)**.** Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Diremo che Ω è un insieme limitato se esiste una palla $B \in \mathbb{R}^n$ tale che $\Omega \subset B$.

Definizione 1.1.3 (Divergenza)**.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale, con $F(x) = (F_1(x), \cdots,\ F_1(x))$.
Si definisce divergenza di F la funzione continua da Ω in $\mathbb{R}^n$

$$divF(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x) \tag{1.1}$$

Definizione 1.1.4 (Corona circolare)**.** Dato $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$, con $r_2 < r_1$ e preso $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si definisce corona circolare in $\mathbb{R}^n$, l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $r_2 \leq \|x - x_0\| \leq\ r_1$.

Definizione 1.1.5 (Laplaciano)**.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Si chiama Laplaciano di u la funzione:

$$\begin{aligned} \Delta u :&\Omega \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \Delta u &= div(\nabla u(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Definizione 1.1.6 (Funzione armonica)**.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Si dice che u è una funzione armonica se $\Delta u(x) = 0\ \forall x \in \Omega$.

Definizione 1.1.7 (Volume della palla unitaria)**.** Denotiamo con ω_n
il volume della palla unitaria $B_1(0)$, dove

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \tag{1.3}$$

con Γ la funzione di Eulero definita da $(0,+\infty)$ in $\mathbb{R}$ come

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} \mathrm{d}t.$$

Presi $R \in \mathbb{R}^+$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, indicheremo poi il volume della palla $B_R(x_0)$ come

$$Vol\left(B_R\left(x_0\right)\right) = R^n \omega_n.$$

Definizione 1.1.8 (Varietà di $\mathbb{R}^n$ di classe C^k)**.** Presi $n,d \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice varietà o sottovarietà di classe C^k, di dimensione d se:

$$\forall\ x_0 \in M\ \exists\ U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto},\ x_0 \in U\ e \text{ una funzione } F \in C^k\left(U, \mathbb{R}^{n-d}\right)\ t.c.$$

1. $M \cap U = \{x \in \mathbb{R}^n,\ F(x) = 0\}$
2. $rk\ J\left(F\left(x\right)\right) = n - d\ \forall x \in M \cap U$

Dove con $rk\ J\left(F\left(x\right)\right)$ si intende il rango della Jacobiana di F

Definizione 1.1.9 (Aperto regolare)**.** Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto, con $n \geq 2$, Ω si dice aperto regolare se:

1. Ω è limitato
2. $Int\left(\overline{\Omega}\right) = \Omega$
3. $Fr\left(\Omega\right)$ è una (n-1) varietà di classe $C^{(k)}, k \geq 1$

Definizione 1.1.10 (Normale esterna)**.** Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$, aperto regolare e sia $x_0 \in \partial\Omega$. Un vettore $\nu \in \mathbb{R}^n, \|\nu\| = 1$ si dice normale esterna ad Ω in x_0 se:

1. ν è ortogonale a $\partial\Omega$ *in* x_0, cioè $<\nu, h>= 0\ \forall h \in T_{x_0}\partial\Omega$.
2. $\exists\delta > 0:\ \forall\ t \in (0,\delta)$ vale

$$\begin{cases} x_0 + t\nu & \notin \Omega \\ x_0 - t\nu & \in \Omega \end{cases}$$

Dove con $T_{x_0}\partial\Omega$ si intende lo spazio tangente al bordo di Ω nel punto x_0.

Definizione 1.1.11 (Cammino in $\mathbb{R}^n$)**.** Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, definiamo cammino su Ω l'applicazione continua

$$\begin{aligned} \gamma : [a,b] &\to \Omega \\ t &\mapsto \gamma(t) = \left(x_1(t), \cdots,\ x_n(t)\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Definizione 1.1.12 (Insieme connesso per archi)**.** Preso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice connesso per archi se $\forall\ x,y \in \Omega\ \exists\ \gamma : [a,b] \to \Omega$ cammino, tale che $\gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y$.

Definizione 1.1.13 (Distanza)**.** Sia (X,d) uno spazio metrico, con d una distanza su di esso, siano $A, B \subset X,\ A, B \neq \emptyset$, definiamo la distanza di A da B

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y), x \in A,\ y \in B\}.$$

1.2 Teoremi ausiliari

Di seguito inseriamo una serie di teoremi che saranno necessari per le dimostrazioni all'interno della tesi ma che, non essendo centrali per l'argomento trattato, enunceremo solamente senza dimostrare.
Il teorema della divergenza è stato tratto da [4], mentre il secondo teorema da [3]

Teorema 1.1 (Teorema della divergenza)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare e $\nu \in \mathbb{R}^n$ normale esterna. Sia $F \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ campo vettoriale.*
Allora

$$\int_\Omega divF\,(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} < F, \nu > \mathrm{d}s$$

(dove con ds si intende l'elemento d'area (n-1)-dimensionale di $\partial\Omega$)

Teorema 1.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$.*

1. *Se $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo locale per f, allora*

$$\begin{cases} \nabla f\,(x_0) = 0 \\ H_f\,(x_0) \text{ semidefinita negativa} \end{cases}$$

2. *Se $x_0 \in \Omega$ è un punto di minimo locale per f, allora*

$$\begin{cases} \nabla f\,(x_0) = 0 \\ H_f\,(x_0) \text{ semidefinita positiva} \end{cases}$$

(dove con $H_f\,(x_0)$ indichiamo la matrice Hessiana di f, calcolata nel punto x_0).

Capitolo 2

Laplaciano

2.1 Formule di media

Il seguente teorema è stato tratto da [2]

Teorema 2.1 (Formule di Media). *Sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ armonica con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora presi $R \in \mathbb{R}^+$ e $x_0 \in \Omega$, per ogni palla $B_R(x_0) \subset \Omega$ avremo:*

$$u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}s \tag{2.1}$$

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{B_R(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Partiamo dal dimostrare il primo caso (2.1).
Sia u armonica e utilizziamo il teorema della divergenza (1.1) sulla palla $B_\rho = B_\rho(x_0)$ con $\rho \in (0, R)$ e $x_0 \in \Omega$. Otteniamo che

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,\mathrm{d}s = \int_{B_\rho} \Delta u(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.3}$$

Introduciamo le coordinate radiali $r = \|x - y\|$ e angolari $\omega = \frac{x-y}{r}$, e scriviamo $u(x) = u(y + r\omega)$, avremo, facendo un cambio di variabile,

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,\mathrm{d}s = \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial r}(y + \rho\omega)\,\mathrm{d}s$$

per il teorema di Fubini possiamo spezzare in due diversi integrali

$$= \rho^{n-1} \int_{\|\omega\|=1} \frac{\partial u}{\partial r}(y + \rho\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

essendo $u \in C^2(\Omega, R)$ possiamo portare fuori la derivata dall'integrale

$$= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\|\omega\|=1} u(y + \rho\omega) \, \mathrm{d}\omega$$

cambiamo nuovamente variabile e torniamo alle coordinate iniziali

$$= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u(x) \, \mathrm{d}s \right]$$

segue dall'equazione (2.3) che

$$= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u(x) \, \mathrm{d}s \right] = 0$$

Questo implica che la quantità tra parentesi è costante rispetto a ρ.
Di conseguenza $\forall \rho \in (0, R)$,

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u(x) \, \mathrm{d}s = R^{1-n} \int_{\partial B_R} u(x) \, \mathrm{d}s$$

e siccome per la continuità di u abbiamo che

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u(x) \, \mathrm{d}s = n\omega_n u(x_0)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} R^{1-n} \int_{\partial B_R} u(x) \, \mathrm{d}s &= \lim_{\rho \to 0} R^{1-n} \int_{\partial B_R} u(x) \, \mathrm{d}s \\ &= \lim_{\rho \to 0} \rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u(x) \, \mathrm{d}s \\ &= n\omega_n u(x_0) \end{aligned}$$

Da cui la nostra tesi.
Per il secondo caso (eq (2.2)), scriviamo l'equazione (2.1) nella forma

$$n\omega_n \rho^{n-1} u(x_0) = \int_{\partial B_\rho} u(x) \, \mathrm{d}s, \ \textit{con } \rho \leq R$$

e integriamo rispetto a ρ da 0 a R ottenendo:

$$\int_0^R n\omega_n \rho^{n-1} u(x_0) \, \mathrm{d}\rho = \int_0^R \left(\int_{\partial B_\rho} u(x) \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\rho$$

e quindi

$$\omega_n R^{n-1} u\left(x_0\right) = \int_{B_R(x_0)} u\left(x\right) \mathrm{d}x.$$

□

Lemma 2.2. *Sia $u \in C^0\left(\Omega, \mathbb{R}\right)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso, tale che soddisfi le formule di media (2.2) per ogni palla $B_r\left(y\right) \subset \Omega$ con $r \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \Omega$. Allora soddisfa il principio del massimo, ovvero se $\exists\ x_0 \in \Omega$ con*

$$u\left(x_0\right) = \sup_{x \in \Omega} u\left(x\right), \tag{2.4}$$

allora u è costante. In particolare se Ω é limitato e $u \in C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ allora

$$u\left(x\right) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u\left(y\right) \ \ \forall x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Supponiamo che

$$u\left(x_0\right) = \sup_{x \in \Omega} u\left(x\right) := M.$$

Definiamo ora

$$\Omega^M = \left\{y \in \Omega : u\left(y\right) = M\right\} \neq 0.$$

Sia $y \in \Omega^M$ e $r \in \mathbb{R}^+$ con $B_r\left(y\right) \subset \Omega$. Visto che valgono le formule di media possiamo applicarle al nostro caso e ottenere

$$0 = u\left(y\right) - M \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(y)} \left(u\left(x\right) - M\right) \mathrm{d}x$$

Siccome M è l'estremo superiore di u, avremo che $u\left(x\right) \leq M$, e di conseguenza

$$\int_{B_r(y)} \left(u\left(x\right) - M\right) \mathrm{d}x \leq 0$$

che implica

$$\int_{B_r(y)} \left(u\left(x\right) - M\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Dunque $u\left(x\right) = M\ \forall x \in B_r\left(y\right)$ e perciò Ω^M contiene, assieme ad y, tutte le palle $B_r\left(y\right) \in \Omega$. Essendo chiuso per definizione dovrà coincidere con Ω, siccome Ω è per ipotesi connesso. Quindi $u\left(x\right) = M\ \forall x \in \Omega$.

□

2.2 Principio del Massimo

In questa sezione e nella sezione (2.3) useremo le dimostrazioni fornite da [1]

Corollario 2.2.1 (Principio del massimo forte). *Sia $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ armonica con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Se $\exists\ x_0 \in \Omega$ con*

$$u(x_0) = \sup_{x \in \Omega} u(x) \quad o \quad u(x_0) = \inf_{x \in \Omega} u(x), \tag{2.5}$$

allora u è costante in Ω.

Proponiamo ora due versioni della dimostrazione del principio del massimo debole, una tramite le formule di media e una sfruttando quelle che vengono denite funzioni ausiliarie.

Corollario 2.2.2 (Principio del massimo debole). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $u \in C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ armonica. Allora $\forall x \in \Omega$*

$$\min_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y) \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Se così non fosse, u assumerebbe il suo max/min (che essendo u continua sulla chiusura di Ω, per il teorema di Weierstrass, corrispondono rispettivamente con sup/inf) in un punto interno ad Ω, quindi dovrebbe essere costante per il corollario precedente (2.2.1) □

Corollario 2.2.3 (Principio del massimo debole). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$, tale che $\Delta u(x) \geq 0$ in Ω. Allora*

$$\sup_{\Omega} u(x) = \max_{\partial\Omega} u(x) \tag{2.7}$$

(Visto che u è continua fino al bordo e Ω è limitato, la chiusura $\overline{\Omega}$ è un compatto e quindi il sup di u su Ω coincide con il max di u su $\overline{\Omega}$)

Dimostrazione. Consideriamo per primo il caso in cui abbiamo

$$\Delta u(x) > 0 \ in\ \Omega$$

Di conseguenza u non può assumere un massimo interno per un qualche $x_0 \in \Omega$, siccome per quel massimo avremmo

$$u_{x^i x^j}(x_0) \leq 0 \ \forall\ i, j = 1, \ldots, n,$$

dove $u_{x^i x^j}(x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(x) \ \ \forall\ i, j = 1, \ldots, n,$
e quindi anche

$$\Delta u(x_0) \leq 0.$$

Consideriamo ora il caso più generale in cui $\Delta u(x) \geq 0$ e consideriamo la funzione ausiliaria

$$v(x) = e^{x^1}.$$

che soddisfa

$$\Delta v(x) = v(x) > 0 \; \forall \; x \in \Omega.$$

Per ogni $\epsilon > 0$ avremo quindi

$$\Delta(u(x) + \epsilon v(x)) > 0 \; in \; \Omega,$$

e dal caso studiato all'inizio ne deduciamo che

$$\sup_{\Omega}(u(x) + \epsilon v(x)) = \max_{\partial\Omega}(u(x) + \epsilon v(x)).$$

Essendo u e v continue fino al bordo di Ω vale che

$$\max_{\partial\Omega}(u(x) + \epsilon v(x)) = \max_{\partial\Omega} u(x) + \epsilon \max_{\partial\Omega} v(x),$$

quindi

$$\sup_{\Omega} u(x) + \epsilon \inf_{\Omega} v(x) \leq \max_{\partial\Omega} u(x) + \epsilon \max_{\partial\Omega} v(x),$$

e siccome questo vale $\forall\epsilon > 0$ otteniamo la nostra tesi. □

2.3 Applicazioni

Teorema 2.3 (Disuguaglianza di Harnack). *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un aperto e $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ armonica.*
Allora $\forall$ sottinsieme $\Omega' \subset \Omega$ connesso per archi $\exists\; c \in \mathbb{R}$ con $c = c(n, \Omega, \Omega')$ tale che

$$\sup_{\Omega'} u(x) \leq c \inf_{\Omega'} u(x) \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Presi $x_0 \in \Omega$ *e* $r \in \mathbb{R}^+$ consideriamo prima il caso particolare in cui $\Omega' = \mathring{B}_r(x_0)$, supponendo r abbastanza piccolo affinché $B_{4r}(x_0) \subset \Omega$.
Siano $y_1, y_2 \in B_r(x_0)$. Per le formule di media (2.2) otteniamo

$$u(y_1) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(y_1)} u(y)\,\mathrm{d}y$$

siccome $u(x) \geq 0$ e $B_r(y_1) \subset B_{2r}(x_0)$

$$\leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_{2r}(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}y$$

moltiplichiamo e dividiamo per 3^n

$$= \frac{3^n}{\omega_n (3r)^n} \int_{B_{2r}(x_0)} u(y)\, \mathrm{d}y$$

siccome $u \geq 0$ e $B_{2r}(x_0) \subset B_{3r}(y_2)$, applicando nuovamente le formule di media

$$= \frac{3^n}{\omega_n (3r)^n} \int_{B_{3r}(y_2)} u(y)\, \mathrm{d}y$$

$$= 3^n u(y_2),$$

e poiché vale $\forall\ y_1, y_2 \in B_r(x_0)$ e siccome u è continua, avremo che

$$\sup_{B_r(x_0)} u(x) \leq 3^n \inf_{B_r(x_0)} u(x)$$

il che conclude il caso particolare.
Per un sottinsieme arbitrario $\Omega' \subset \Omega$ scegliamo $r > 0$ con

$$r < \frac{1}{4} \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega),$$

dove con *dist(A,B)* si intende la definizione (1.1.13). Siccome Ω' è limitato e connesso per archi, esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che presi due qualsiasi punti $y_1, y_2 \in \Omega'$, per la definizione (1.1.12), posso collegarli tramite un cammino γ. Essendo γ chiuso per definizione e contenuto in un insieme limitato, sarà di conseguenza compatto e dunque esiste un ricoprimento finito, perciò può essere ricoperto con al più k palle di raggio r con centro in Ω'. Unendo la disequazione ottenuta nel caso particolare per tutte le palle che coprono il cammino otteniamo

$$u(y_1) \leq 3^{kn} u(y_2).$$

Quindi abbiamo la tesi posto $c = 3^{kn}$. □

Teorema 2.4 (Teorema di Liouville)**.** *Sia $u \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una funzione armonica e limitata, ovvero $\exists\ M \in \mathbb{R}^+$ t.c. $|u(x)| \leq M\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n$. Allora u è costante.*

Dimostrazione. Presi $x_1, x_1 \in \mathbb{R}^n$, dalle formule di media (2.2), $\forall r > 0$,

$$\begin{aligned} u(x_1) - u(x_2) &= \frac{1}{\omega_n r^n} \left(\int_{B_r(x_1)} u(x)\, \mathrm{d}x - \int_{B_r(x_2)} u(x)\, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n} \left(\int_{B_r(x_1) \setminus B_r(x_2)} u(x)\, \mathrm{d}x - \int_{B_r(x_2) \setminus B_r(x_1)} u(x)\, \mathrm{d}x \right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Per ipotesi $\exists\, M \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$$|u(x)| \leq M$$

e siccome deve valere $\forall\, r \in \mathbb{R}^+$, possiamo far tendere $r \to \infty$ e otteniamo

$$\frac{1}{\omega_n r^n} Vol\left(B_r(x_1) \setminus B_r(x_2)\right) \to 0,$$

e analogalmente

$$\frac{1}{\omega_n r^n} Vol\left(B_r(x_2) \setminus B_r(x_1)\right) \to 0,$$

questo implica che il lato destro dell'equazione (2.9) converge a 0 per $r \to \infty$.
Di conseguenza avremo $u(x_1) = u(x_2)$ e siccome x_1 *e* x_2 sono arbitrari abbiamo che u deve essere costante. □

Definizione 2.3.1 (Funzione olomorfa)**.** Una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da un aperto Ω del piano complesso a valori complessi si dice <u>olomorfa</u> se $\forall\, z \in \Omega$ esiste finito il limite complesso

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Osservazione 1. *Possiamo scrivere f in termini della sua parte reale u e di quella immaginaria v.*

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Osservazione 2. *Per ogni funzione olomorfa si dimostrano valere le formule di Cauchy-Reimann*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Di conseguenza, se supposti u,v di classe $C^2(\Omega, \mathbb{R})$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, si trova, sfruttando il teorema si Schwarz, che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ovvero $\Delta u(x,y) = 0$ in Ω e in modo analogo si dimostra anche che $\Delta v(x,y) = 0$.

Corollario 2.4.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, con $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Supposto che u,v siano di classe $C^2(\Omega, \mathbb{R})$, allora la parte reale u e la parte immaginaria v di f saranno armoniche su Ω*

Corollario 2.4.2 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Sia f una funzione polinomiale su $\mathbb{C}$ del tipo $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, con $n \geq 1$, allora $\exists\, \alpha \in \mathbb{C}$* t.c.*$f(\alpha) = 0$.*

Dimostrazione. Essendo f polinomiale sarà ovviamente olomorfa. Se per assurdo supponiamo che non esista $\alpha \in \mathbb{C}$ $t.c. f(\alpha) = 0$, allora la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ sarà ancora olomorfa in $\mathbb{C}$, e di conseguenza la sua parte reale e immaginaria saranno armoniche per il corollario (2.4.1).
Ma g sarà anche limitata su $\mathbb{C}$ in quanto

$$g(z) \to 0 \ per \ |z| \to \infty,$$

di conseguenza per il teorema di Liouville (2.4), applicato alla parte reale e alla parte immaginaria di g, avremo che $g(z) = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, dove a e b son i valori costanti della parte reale e immaginaria di g, quindi di conseguenza anche g sarà costante, il che è assurdo. $\square$

Capitolo 3

Operatori ellittici

L'argomento affrontato e le dimostrazioni proposte in questo capitolo, sono stati tratti dal testo [1]

3.1 Introduzione

In questo capitolo ci occuperemo di operatori lineari ellittici differenziali ed estenderemo i risultati ottenuti nel **Capitolo 2** per il Laplaciano, ad opertatori del tipo:

$$Lu\left(x\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\left(x\right)u_{x^{i}x^{j}}\left(x\right)+\sum_{i=1}^{n}b^{i}\left(x\right)u_{x^{i}}\left(x\right)+c\left(x\right)u\left(x\right), \tag{3.1}$$

dove richiediamo le seguenti condizioni:

1. u sia una funzione di classe $C^{2}\left(\Omega,\mathbb{R}\right)$, dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^{n}$ con $n\in\mathbb{N}$
2. **Simmetria**: $a^{ij}\left(x\right)=a^{ji}\left(x\right)\ \forall\ i,j=1,\ldots,\ n$ e $\forall\ x\in\Omega$
3. **Ellitticità**: $\exists\lambda\in\mathbb{R}^{+}$ con
$$\lambda\|\xi\|^{2}\leq\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}\left(x\right)\xi^{i}\xi^{j}\quad\forall x\in\Omega\ e\ \xi\in\mathbb{R}^{n} \tag{3.2}$$
In particolare la matrice $\left(a^{ij}\left(x\right)\right)_{i,j=1\ldots n}$ è definita positiva per ogni x, e il più piccolo autovalore è maggiore o uguale a λ.
4. **Limitatezza dei coefficienti**: $\exists K\in\mathbb{R}$ con
$$|a^{ij}\left(x\right)|,|b^{i}\left(x\right)|,|c\left(x\right)|\leq K\ \forall\ i,j\ e\ \forall\ x\in\Omega.$$

Andiamo ora a dimostrare il principio del massimo per le soluzioni dell'equazione

$$Lu\left(x\right)=0.$$

3.2 Principio del massimo debole

In questo capitolo, ogni volta che considereremo un operatore ellittico L, supporremo che sia un operatore definito come in (3.1) e che soddisfi le condizioni 2,3 e 4.

Teorema 3.1. *Sia L un operatore ellittico con $c(x) \equiv 0$. Sia poi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ tale che soddisfi in Ω*

$$Lu(x) \geq 0,$$

ovvero

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, u_{x^i x^j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\, u_{x^i}(x) \geq 0.$$

Allora avremo che:

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x). \tag{3.3}$$

(Per il caso $Lu(x) \leq 0$ otteniamo un risultato analogo per l'estremo inferiore).

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso

$$Lu(x) > 0.$$

Siccome, per il teorema (1.2), per un punto di massimo interno $x_0 \in \Omega$ di u dobbiamo avere

$$u_{x^i}(x_0) = 0 \textit{ per } i = 1, \ldots, n,$$

e

$$\left(u_{x^i x^j}(x_0)\right)_{i,j=1,\ldots,\ n} \text{ semidefinita negativa,}$$

di conseguenza, dalla condizione di ellitticità,

$$Lu(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0)\, u_{x^i x^j}(x_0) \leq 0,$$

per cui un massimo interno non si può raggiungere.
Tornando al caso generale $Lu(x) \geq 0$, consideriamo la funzione ausiliaria

$$v(x) = e^{\alpha x^1}, \textit{ per } \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Allora avremo

$$\begin{aligned} Lv(x) &= a^{11}(x) \frac{\partial^2 e^{\alpha x^1}}{\partial (x^1)^2} + b^1(x) \frac{\partial e^{\alpha x^1}}{\partial x^1} \\ &= \left(\alpha^2 a^{11}(x) + \alpha b^1(x)\right) e^{\alpha x^1} \end{aligned}$$

Siccome Ω e i coefficienti b^i sono limitati, e i coefficienti soddisfano $a^{ii}(x) \geq \lambda$, abbiamo, per un α sufficientemente grande,

$$Lv(x) > 0,$$

e applicando quello che abbiamo già dimostrato a $u(x) + \epsilon v(x)$ otteniamo

$$L(u(x) + \epsilon v(x)) > 0,$$

e la tesi segue come nella dimostrazione del Corollario (2.2.3).
Il caso $Lu(x) \leq 0$ si può ricondurre al caso precedente considerando $-u$. $\square$

Possiamo ora andare ad indebolire le ipotesi del teorema precedente, supponendo non più $c(x) \equiv 0$ ma $c(x) \leq 0$.

Corollario 3.1.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$. Preso L un operatore ellittico con $c(x) \leq 0$, supponiamo u sia tale che soddisfi*

$$Lu(x) \geq 0 \textit{ in } \Omega.$$

Posto $u^+(x) := \max(u(x), 0)$ otteniamo

$$\sup_{\Omega} u^+(x) \leq \max_{\partial\Omega} u^+(x). \tag{3.4}$$

Dimostrazione. Definiamo $\Omega^+ := \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$. Poiché $c(x) \leq 0$ avremo, in Ω^+,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, u_{x^i x^j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\, u_{x^i}(x) \geq -c(x)\, u(x) \geq 0,$$

e dalla tesi del teorema precedente (3.1) otteniamo che

$$\sup_{\Omega^+} u(x) \leq \max_{\partial\Omega^+} u(x).$$

Per la continuità di u avremo che

$$u(x) = 0 \ \forall\ x \in \left(\partial\Omega^+ \cap \Omega\right).$$

e

$$\max_{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega} u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u(x),$$

e inoltre, siccome $\partial\Omega^+ = (\partial\Omega^+ \cap \Omega) \cup (\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega)$, avremo che

$$\max_{\partial\Omega^+} u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u^+(x).$$

Siccome

$$\sup_{\Omega} u^{+}(x) = \sup_{\Omega^{+}} u(x),$$

avremo la nostra tesi, infatti

$$\sup_{\Omega} u^{+}(x) = \sup_{\Omega^{+}} u(x) \leq \max_{\partial\Omega^{+}} u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u^{+}.$$

□

Si può dimostrare un risultato analogo per il minimo, qui di seguito lo enunceremo soltanto.

Corollario 3.1.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Preso L un operatore ellittico con $c(x) \leq 0$, supponiamo u sia tale che soddisfi*

$$Lu(x) \leq 0 \text{ in } \Omega.$$

Posto $u^{-}(x) := \min(u(x), 0)$ otteniamo

$$\inf_{\Omega} u^{-}(x) \geq \min_{\partial\Omega} u^{-}(x). \tag{3.5}$$

3.3 Principio del massimo forte

In questa sezione dimostreremo il principio del massimo forte per operatori lineari ellittici differenziali, per fare ciò utilizzeremo il **Lemma di Hopf**.

Lemma 3.2 (Hopf)**.** *Sia L un operatore ellittico e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Presa $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, supponiamo $c(x) \leq 0$ e*

$$Lu(x) \geq 0 \text{ in } \Omega,$$

e sia $x_0 \in \partial\Omega$. Assumiamo inoltre che:

1. *u sia continua in x_0.*
2. *$u(x_0) \geq 0$ se $c(x) \neq 0$.*
3. *$u(x_0) > u(x) \, \forall \, x \in \Omega$*
4. *Preso $R \in \mathbb{R}^{+}$ e $y \in \Omega$, $\exists$ una palla $\overset{\circ}{B}_R(y) \subset \Omega$ con $x_0 \in \partial B_R(y)$.*

Posto $r := \|x - y\|$, otteniamo

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x_0) > 0, \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre

$$\partial B_R(y) \cap \partial\Omega = \{x_0\}.$$

Per $0 < \rho < R$, sulla corona circolare $\mathring{B}_R(y) \backslash B_\rho(y)$, possiamo considerare la funzione ausiliaria

$$v(x) := e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{\gamma R^2}.$$

Avremo, applicando $v(x)$ ad L:

$$\begin{aligned} Lv(x) = &\left(4\gamma^2 \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\left(x^i - y^i\right)\left(x^j - y^j\right)\right. \\ &\left. -2\gamma \sum_{i=1}^{n} a^{ii}(x) + b^i(x)\left(x^i - y^i\right)\right) e^{-\gamma|x-y|^2} \\ &+ c(x)\left(e^{-\gamma|x-y|^2} - e^{-\gamma R^2}\right). \end{aligned}$$

Per un γ sufficientemente largo, dato che per ipotesi abbiamo supposto che i coefficienti di L siano limitati e dall'ipotesi di ellitticità, abbiamo

$$Lv(x) \geq 0 \ in \ \mathring{B}_R(y) \backslash B_\rho(y). \tag{3.7}$$

Dalle ipotesi (iii) e (iv)

$$u(x) - u(x_0) < 0 \ \ \forall\, x \in \mathring{B}_R(y).$$

Dunque possiamo trovare $\epsilon > 0$ con

$$u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x) \leq 0 \ \ \forall\, x \in \partial B_\rho(y). \tag{3.8}$$

Siccome $v(x) = 0$ su $\partial B_R(y)$ (3.8) continua a valere anche su $\partial B_R(y)$. D'altraparte, dall'equazione (3.7), dall'ipotesi (ii) e poiché $c(x) \leq 0$ otteniamo

$$L(u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x)) \geq -c(x)\, u(x_0) \geq 0$$

Quindi possiamo applicare il corollario pecedente (3.1.1) su $\mathring{B}_R(y) \backslash B_\rho(y)$ e ottenere

$$u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x) \leq 0 \ \ \forall\, x \in \mathring{B}_R(y) \backslash B_\rho(y).$$

Andando a derivare segue che

$$\frac{\partial}{\partial r}(u(x) - u(x_0) + \epsilon v(x)) \geq 0 \text{ per } x = x_0,$$

quindi per $x = x_0$,

$$\frac{\partial}{\partial r} u(x) \geq -\epsilon \frac{\partial v(x)}{\partial r} = \epsilon\left(2\gamma R e^{-\gamma R^2}\right) > 0.$$

da cui la nostra tesi $\square$

Teorema 3.3 (Principio del massimo forte). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ e L un operatore ellittico. Supponiamo $c(x) = 0$, e sia u tale che soddisfi in Ω*

$$Lu(x) \geq 0. \tag{3.9}$$

Se u assume un massimo all'interno di Ω, allora deve essere costante.
Più generalmente, nel caso $c(x) \leq 0$, se assume un massimo interno non negativo, allora u deve essere costante.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che u sia non costante ma abbia un massimo M, (≥ 0 nel caso in cui $c(x) \neq 0$) in Ω. Avremo allora

$$\Omega' := \{x \in \Omega\ : u(x) < M\} \neq \emptyset$$

e

$$\partial\Omega' \cap \Omega \neq \emptyset.$$

Scegliamo $y \in \Omega'$ che sia più vicino a $\partial\Omega'$ che a $\partial\Omega$. Sia $\mathring{B}_R(y)$ le più grande palla con centro y che sia contenuta in Ω'. Preso $x_0 \in \partial B_R(y)$ abbiamo allora

$$u(x_0) = M\ .$$

e avremo

$$u(x) < u(x_0)\ \ \forall\ x \in \Omega'$$

Essendo verificate tutte le ipotesi del lemma di Hopf (3.2) abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x_0) > 0$$

dove r è la direzione radiale alla palla in x_0, il che non è possibile per un punto di massimo interno, e ciò porta ad una contraddizione e alla dimostrazione del nostro teorema. □

3.4 Problemi di Dirichlet

In questa sezione proporremo un'applicazione del principio del massimo per operatori ellittici L, a quelli che vengono chiamati Problemi di Dirichlet.

Definizione 3.4.1 (Problema di Dirichlet). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto limitato e sia $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. Sia poi L un operatore ellittico con $c(x) \leq 0$. Prese $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ definiamo il problema di Dirichlet come:

$$(PD) \begin{cases} Lu(x) = f(x)\,,\ \forall\ x \in \Omega \\ u(x) = g(x)\,,\ \forall\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.10}$$

Diremo che u è soluzione del problema di Dirichlet (PD), se $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ e u risolve il problema di Dirichlet.

Teorema 3.4 (Unicità delle soluzioni del problema di Dirichlet)**.** *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*, aperto limitato e sia* L *un operatore ellittico con* $c(x) \leq 0$*. Prese* $f, g \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$*, siano* $u_1, u_2 \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ *soluzioni del problema di Dirichlet* (3.10).
Allora $u_1 \equiv u_2$*.*

Dimostrazione. Definiamo
$$v(x) = u_2(x) - u_1(x)$$
Avremo allora che $v \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\right)$ e inoltre, dalla definizione del problema di Dirichlet e per linearità dell'operatore L,

$$Lv(x) = Lu_2(x) - Lu_1(x) = f(x) - f(x) = 0 \ \forall\ x \in \Omega, \tag{3.11}$$

e analogalmente si dimostra che

$$v(x) = 0 \ \forall\ x \in \partial\Omega. \tag{3.12}$$

L'equazione (3.11) implica che

$$Lv(x) \leq 0 \text{ e } Lv(x) \geq 0.$$

Per il principio del massimo debole (3.1.1) avremo

$$v(x) \leq \max_{\partial\Omega} v \ \forall\ x \in \Omega.$$

Per il principio del minimo debole (3.1.2) invece, otteniamo

$$\min_{\partial\Omega} v \leq v(x) \ \ \forall\ x \in \Omega.$$

Questo implica, che
$$\min_{\partial\Omega} v \leq v(x) \leq \max_{\partial\Omega} v \ \forall\ x \in \Omega,$$
ma per l'equazione (3.12) sappiamo che

$$\min_{\partial\Omega} v = \max_{\partial\Omega} v = 0.$$

Quindi
$$v(x) = 0, \ \forall\ x \in \Omega$$

ovvero
$$u_1 \equiv u_2.$$

□

Bibliografia

[1] Jürgen Jost (2013). *Partial Differential Equations, Third Edition.* Springer

[2] David Gilbarg and Neil S.Trudinger (1983). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer Berlin, Heidelberg

[3] Ermanno Lanconelli (2000). *Lezioni di ANALISI MATEMATICA 2, prima parte.* Pitagora Editrice Bologna

[4] Ermanno Lanconelli (1997). *Lezioni di ANALISI MATEMATICA 2, seconda parte.* Pitagora Editrice Bologna