ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Soluzioni Deboli di Equazioni Differenziali Stocastiche: il Problema della Martingala di Stroock e Varadhan

Tesi di Laurea in Analisi Stocastica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
DANIELE RUSSO

Sessione autunnale
Anno Accademico 2021/2022

Indice

Sommario

In questa tesi si definisce il problema della martingala, fondamentale in quanto la sua esistenza e unicità della soluzione coincidono con l'esistenza e unicità delle soluzioni deboli delle SDE. Nel Capitolo 1 vengono richiamate alcune nozioni di topologia negli spazi metrici, in particolare la nozione di tightness e il Teorema di Prokhorov. Nel Capitolo 2 vengono introdotte le equazioni differenziali stocastiche, con cenni a risultati di esistenza e unicità forte. Nel Capitolo 3 viene definito il problema della martingala, viene dimostrata la sua equivalenza con il problema delle soluzioni deboli; infine, vengono enunciati e dimostrati importanti risultati di esistenza e unicità.

Introduzione

Il problema della martingala nasce nell'ambito della ricerca di una soluzione debole per la SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,$$

che consiste nel considerare il moto browniano W come parte della soluzione. L'idea nasce dal fatto che se X_t è una soluzione debole e f è sufficientemente regolare, la semplice applicazione della formula di Ito mostra che, posto

$$\mathscr{L}f(s,x) := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(s,x)\partial_i\partial_j f(x(s)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(s,x)\partial_i f(x(s)),$$

il processo

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{L}f(s, X.)\, ds$$

è una martingala.
E' quindi lecito chiedersi se valga anche il viceversa, e sotto certe ipotesi (continuità e limitatezza dei coefficienti) ciò è vero: questo approccio è conosciuto in letteratura come "problema della martingala", ed è stato introdotto nel 1969 da Daniel W. Stroock e S. N. Srinivasa Varadhan con un articolo dal titolo "Diffusion Processes with Continuous Coefficients", I e II ([S-V]); la sua forza principale, specialmente alla luce del fatto che per la maggior parte delle applicazioni le SDE si considerano su un orizzonte temporale finito, queste ipotesi sono più deboli di quelle che servono per l'esistenza e unicità forte (lipschitzianità e crescita lineare dei coefficienti). La formulazione di Stroock-Varadhan ha inoltre il vantaggio di permettere l'utilizzo di argomenti di convergenza debole ai fini dell'esistenza, mentre l'unicità risulta equivalente all'unicità in legge della soluzione, e nell'ultimo approccio che mostriamo (Teorema 3.5.6) questa risulta garantita dalla risolubilità di un'equazione parabolica. L'importanza di questa teoria risiede inoltre nel fatto che l'approccio debole serve non solo a garantire una soluzione anche laddove si dimostra la non esistenza di una soluzione forte (come nel noto esempio di Tanaka, cfr. [K-S], Esempio 3.5), ma può anche garantire, se vale anche l'unicità traiettoria per

traiettoria, l'esistenza forte stessa (Lemma 21.17 in [K]). Le soluzioni deboli sono inoltre sufficienti a costruire processi diffusivi, come quelli che modellizzano il rumore in fisica o quelli studiati in teoria del controllo (cfr. [R-W2], V). Un'altra applicazione molto importante è in finanza (ad esempio, il noto modello di Black&Scholes, cfr. [P]).
Altri approcci nella ricerca di tali soluzioni esistono ma portano a risultati più modesti (si veda per esempio la sezione 5.3 in [K-S], in cui si mostra un risultato per $\sigma \equiv 1$).
Per gli argomenti di convergenza debole cui accennavamo sono necessari approfondimenti di topologia negli spazi metrici (cfr. [R-W1],[D-S]) e in particolare la nozione di tightness e il Teorema di Prokhorov; questo filone acquisisce estrema rilevanza anche in teoria del trasporto ottimale (cfr. [V], I).

Capitolo 1

Preliminari: compattezza in spazi metrici

Diamo in questo capitolo alcuni elementi di teoria su spazi di Lusin e spazi polacchi che culminerà con il teorema di Prokhorov. Quest'ultimo, insieme al noto teorema di Ascoli-Arzelà, servirà a dare un'importante caratterizzazione dei sottoinsiemi relativamente compatti di un insieme di misure. Di conseguenza otterremo importanti proprietà di convergenza debole da sfruttare nello studio del problema della martingala.

Teorema 1.1 (Stone-Weierstrass, cfr. [D-S], IV.6.16)**.** *Dato J spazio di Hausdorff compatto, sia A una sottoalgebra di $C(J)$ che contiene le funzioni costanti e che separa i punti di J, cioè per ogni $x \in J$ esistono f e $g \in A$ tali che $f(x) \neq g(x)$. Allora A è denso in $C(J)$.*

Questa scelta di J è standard in analisi funzionale, in quanto i compatti Hausdorff verificano importanti proprietà topologiche, tra cui per esempio il Teorema di Uryshon (Teorema 19 in [D-S], I.6). Un esempio che risulterà utile in seguito è lo spazio metrizzabile $J = [0,1]^{\mathbb{N}}$.

Definizione 1.2. Dato J spazio di Hausdorff compatto, denotiamo con $\mathrm{Pr}(J)$ l'insieme delle misure di probabilità su $(J, \mathscr{B})$. Un elemento $\mu \in \mathrm{Pr}(J)$ si dice regolare se per ogni $B \in \mathscr{B}(J)$,

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compatto}, K \subset B\}.$$

Teorema 1.3 (di Rappresentazione di Riesz, cfr. [D-S], IV.6.3)**.** *Sia $\phi : C(J) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare crescente tale che $\phi(1) = 1$. Allora esiste un'unica misura regolare*

$\mu \in Pr(J)$ *tale che*

$$\phi(f) = \mu(f) = \int_J f\, d\mu.$$

Vediamo ora un'estensione delle successioni che caratterizzi la topologia anche per spazi non metrizzabili.

Definizione 1.4. Un insieme D si dice diretto se è parzialmente ordinato e ogni suo sottoinsieme S ha un limite superiore (che per definizione può non appartenere a S).

Definizione 1.5. Sia X uno spazio topologico. Si dice successione generalizzata una famiglia $\{x_\alpha : \alpha \in D\} \subseteq X$ con D diretto. Diciamo che $x_\alpha \to x$ se per ogni aperto A di X contente x esiste $\alpha_0 \in D$ tale che $x_\alpha \in A$ per ogni $\alpha \geq \alpha_0$.

A differenza delle successioni su $\mathbb{N}$, quelle generalizzate permettono di identificare una topologia: in questo caso infatti, continuità topologica e continuità per successioni coincidono (a differenza del caso classico, in cui la continuità topologica implica la continuità per successioni ma non viceversa, cfr. [D-S], I).
Definiamo la topologia $C(J)$ (o debole*) di $C(J)^*$ scegliendo, per ogni $\phi_0 \in C(J)^*$, la base di intorni, al variare di $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $f_i \in C(J)$,

$$\{\phi \in C(J)^* : |\phi(f_i) - \phi_0(f_i)| < \varepsilon,\ \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Diciamo inoltre che una successione generalizzata ϕ_α di elementi di $C(J)^*$ converge a $\phi \in C(J)^*$ se $\phi_\alpha(f) \to \phi(f)$ per ogni $f \in C(J)$. Questa convergenza, in accordo con la Definizione 1.5, descrive proprio la topologia scelta, in quanto $\phi_\alpha(f) \to \phi(f)$ vuol dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $\alpha_0 \in D$ tale che $|\phi_\alpha(f) - \phi(f)| < \varepsilon$ per ogni $\alpha \geq \alpha_0$.

Teorema 1.6 (Alaoglu, cfr. [D-S], V.4.2)**.** *La palla unitaria*

$$\{\phi \in C(J)^* : \|\phi\| \leq 1\},$$

dove

$$\|\phi\| := \sup_{\|f\| \leq 1} |\phi(f)|$$

è compatta nella topologia $C(J)$.

L'insieme identificato dalle ipotesi del Teorema di Rappresentazione di Riesz è quindi chiuso in un compatto, ovvero l'insieme degli elementi regolari di $\Pr(J)$ è compatto nella topologia $C(J)$. Se adesso dimostriamo che ogni elemento di $\Pr(J)$ è regolare, $\Pr(J)$ risulterà compatto.

Teorema 1.7. *Ogni elemento di* $\Pr(J)$ *è regolare.*

Dimostrazione. Definiamo $\mathscr{A}$ l'insieme degli elementi $B_j \in \mathscr{B}(J)$ tali che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un compatto $K \subseteq B$ e un aperto $G \supseteq B$ tali che

$$\mu(B_j \setminus K) < \varepsilon, \quad \mu(G \setminus B_j) < \varepsilon.$$

La tesi è vera se $\mathscr{A} = \mathscr{B}(J)$. Dimostriamo intanto che $\mathscr{A}$ è una σ-algebra. Se $B \in \mathscr{A}$, anche $B^c \in \mathscr{A}$ in quanto K^c è aperto, G^c è compatto (essendo chiuso in un compatto) e vale

$$\begin{aligned} \mu(B^c \setminus G^c) &= \mu(G \setminus B) < \varepsilon, \\ \mu(K^c \setminus B^c) &= \mu(B \setminus K) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Supponiamo ora $B_1, B_2 \in \mathscr{A}$ e consideriamo $B := B_1 \cap B_2$. Per $i = 1, 2$, possiamo scegliere K_i compatto e G_i aperto tali che

$$\mu(B_i \setminus K_i) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \mu(G_i \setminus B_i) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Adesso, $K := K_1 \cap K_2$ è ancora compatto, $G := G_1 \cap G_2$ è ancora aperto e

$$\begin{aligned} \mu(B \setminus K) &\leq \mu(B_1 \setminus K_1) + \mu(B_2 \setminus K_2) < \varepsilon, \\ \mu(G \setminus B) &\leq \mu(G_1 \setminus B_1) + \mu(G_2 \setminus B_2) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sia infine $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di insiemi e poniamo $B := \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Di nuovo, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere un compatto $K_n \subseteq B_n$ e un aperto $G_n \supseteq B_n$ tali che

$$\begin{aligned} &\mu(B_n \setminus K_n) < \varepsilon 2^{-n-1}, \\ &\mu(G_n \setminus B_n) < \varepsilon 2^{-n}. \end{aligned}$$

Ora, $G := \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ è aperto e

$$\mu(G \setminus B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus B_n) < \varepsilon.$$

D'altro canto, per $L := \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ (che invece non è più compatto), vale

$$\mu(B \setminus L) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_i \setminus K_n) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Essendo μ una misura finita, esiste N tale che per $K := \cup_{n \le N} K_n$ (che è compatto), vale $\mu(K) > \mu(L) - \frac{1}{2}\varepsilon$, e quindi

$$\mu(B \setminus K) < \mu(B \setminus L) + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Per dimostrare che $\mathscr{A} = \mathscr{B}(J)$ basta ora verificare che $\mathscr{A}$ contiene tutti i chiusi. Sia quindi $F \subseteq J$ chiuso. Essendo J compatto, anche F lo è, perciò la prima condizione della regolarità è banalmente verificata scegliendo $K = F$.
D'altronde, siccome J è uno spazio metrico con distanza ρ, si può scrivere

$$F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n,$$

dove

$$G_n := \left\{ x \in J : \rho(x, F) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Perciò, ragionando come prima, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere $N \in \mathbb{N}$ tale che, definito $G := \cap_{n \le N} G_n$, vale

$$\mu(G \setminus F) = \mu \left(\bigcap_{n \le N} G_n \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \right) < \varepsilon,$$

dunque ogni chiuso è regolare. $\square$

Teorema 1.8. *$C(J)$ è separabile e $Pr(J)$ è metrizzabile nella topologia $C(J)$.*

Dimostrazione. Siccome J è separabile possiamo considerare un sottoinsieme $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denso numerabile. Definiamo, per $x \in J$ e $k \in \mathbb{N}$,

$$h_k(x) := \rho(x, x_k),$$

dove ρ è una metrica su J. Queste funzioni separano punti di J; infatti ogni x o è uguale a un certo x_k, e allora gli altri punti della successione avranno distanza positiva da x, oppure si può esprimere come punto limite di una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, perciò possiamo trovare $x_{n_{j_1}}, x_{n_{j_2}}$ che hanno distanza diversa da x. Sia ora A l'insieme di funzioni della forma

$$q \cdot Id + \sum q(k_1, \dots, k_r; n_1, \dots n_r) h_{k_1}^{n_1} \dots h_{k_r}^{n_r},$$

dove q e $q(\cdot)$ sono coefficienti razionali. Per quanto detto prima, la chiusura di A è un'algebra contenente funzioni costanti e funzioni che separano punti di J; per il teorema di Stone-Weierstrass, quindi, A è denso in $C(J)$. Essendo A numerabile per costruzione, $C(J)$ è separabile. Sia quindi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme denso di $C(J)$; consideriamo il funzionale

$$\begin{aligned} F : \Pr(J) &\to V := \Pi_{n\in\mathbb{N}} \left[-\|f_n\|, \|f_n\|\right] \\ \mu &\mapsto (\mu(f_i))_{i\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Definito U l'insieme dei funzionali lineari $\phi : C(J) \to \mathbb{R}$, per il Teorema di Rappresentazione di Riesz, l'immersione

$$\begin{aligned} T : \Pr(J) &\to U \\ \mu &\mapsto (f \mapsto \mu(f)). \end{aligned}$$

è iniettiva, da cui, per densità, anche F lo è. Per lo stesso motivo, per ogni successione generalizzata $\{\mu_\alpha\} \in \Pr(J)$,

$$\mu_\alpha(f) \to \mu(f) \;\; \forall f \in C(J) \Leftrightarrow \mu_\alpha(f_n) \to \mu(f_n) \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ciò significa che F è un omeomorfismo e che dunque $\Pr(J)$ con la topologia $C(J)$ è metrizzabile in quanto omeomorfo a un sottoinsieme di V che lo è.

□

1.1 Spazi polacchi e di Lusin

Definizione 1.1.1. Si dice spazio polacco uno spazio metrico completo separabile.

Definizione 1.1.2. Si dice spazio di Lusin uno spazio topologico omeomorfo a un sottoinsieme di Borel di uno spazio metrico compatto.

Teorema 1.1.3. *Lo spazio* $\big(C([0,\infty);\mathbb{R}^n), \rho\big)$*, con*

$$\rho(\omega_1, \omega_2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\big\{1, \max_{t\in[0,n]} |\omega_1(t) - \omega_2(t)|\big\},$$

è uno spazio polacco.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per $C([0,\infty))$; il passaggio al caso multidimensionale è pressoché immediato.
Vediamo prima che $C([0,l])$ è completo con la metrica del sup. Se $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, per ogni $x \in [0,l]$, $\{w_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi esiste il limite puntuale ω. Resta

solo da dimostrare che $\omega_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega$ uniformemente, cosa che garantisce la continuità di ω e quindi la completezza. Ma questo è vero in quanto, essendo $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy, per ogni ε esiste N tale che $|\omega_n(x) - \omega_m(x)| < \varepsilon$ per ogni n, m e per ogni x; si conclude notando che

$$|\omega_m(x) - \omega(x)| = \lim_{n\to\infty} |\omega_n(x) - \omega_m(x)|.$$

Sia ora $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy rispetto a ρ. Per ogni $l \in \mathbb{R}$ vale

$$\max_{t\in[0,l]} |\omega_n(t) - \omega_m(t)| \le 2^l \rho(\omega_n, \omega_m),$$

perciò $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy anche secondo la metrica del sup di $C([0,l])$ che è completo, da cui $\omega_n \to \omega$ in $C([0,l])$ per ogni l, cioè $\omega \in C([0,\infty))$. Resta solo da dimostrare che si ha convergenza anche nella metrica ρ. Scelgo N tale che

$$\sum_{l>N} \frac{1}{2^l} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ed N' tale che se $n > N'$,

$$\max_{t\in[0,N]} |\omega(t) - \omega_n(t)| < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Si ottiene

$$\rho(\omega, \omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\bigl\{1, \max_{t\in[0,n]} |\omega - \omega_n|\bigr\} < N \max_{[0,N]} |\omega(t) - \omega_n(t)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Per la separabilità si fa la stessa cosa: vediamo prima che $C([0,l])$ è separabile. Scegliamo $\omega \in C([0,l])$; in particolare, ω è uniformemente continua. Perciò per ogni ε possiamo scegliere n tale che $|\omega(x) - \omega(y)| < \varepsilon$ per $|x - y| < \frac{l}{n}$. Costruiamo quindi una poligonale v tale che

$$v\left(\frac{lk}{n}\right) = \omega\left(\frac{lk}{n}\right) \qquad \forall k = 0, \ldots, n,$$

e che quindi soddisfa

$$\max_{t\in[0,l]} |v(t) - \omega(t)| \le \varepsilon.$$

Adesso scegliamo una nuova poligonale h tale che

$$h\left(\frac{lk}{n}\right) \in \mathbb{Q} \ \text{ e } \ \left|h\left(\frac{lk}{n}\right) - v\left(\frac{lk}{n}\right)\right| < \varepsilon.$$

In questo modo

$$\max_{t\in[0,l]} |\omega(t) - h(t)| < 2\varepsilon$$

e chiaramente l'insieme delle poligonali che assumono valori razionali nei nodi $\left(\frac{lk}{n}\right)_{k=0,\dots,n}$ è numerabile.
Scegliamo quindi $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso in $C([0,l])$ per ogni l: con lo stesso argomento di prima si dimostra che per ogni $\omega \in C([0,\infty))$ esiste una sottosuccessione $\{q_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ che converge anche secondo ρ, da cui $C([0,\infty))$ è separabile. $\square$

La teoria che stiamo costruendo si trasferisce quindi al contesto delle SDE nello studio dello spazio delle traiettorie.
Il teorema che segue permette di costruire uno spazio ausiliario che darà in seguito un'importante proprietà di metrizzabilità.

Teorema 1.1.4. *Uno spazio topologico è polacco se e solo se è omeomorfo a un sottoinsieme G_δ (cioè intersezione numerabile di aperti) di uno spazio metrico compatto. In particolare, ogni spazio polacco è uno spazio di Lusin.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima implicazione che è quella di cui abbiamo bisogno: sia S polacco e sia $J = [0,1]^N$. Data ρ metrica di S, consideriamo la nuova metrica $\hat{\rho} := \frac{\rho}{1+\rho}$, sotto cui S continua a essere completo e separabile; inoltre $0 \le \hat{\rho} \le 1$. Scegliamo quindi un sottoinsieme denso $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e definiamo

$$\begin{aligned} F : S &\to J \\ x &\mapsto (\hat{\rho}(x, x_i))_{i\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che S è omeomorfo a $F(S)$, cioè (essendo entrambi spazi metrici), per ogni successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S$ e per ogni $s \in S$,

$$s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s \iff \hat{\rho}(s_n, x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{\rho}(s, x_k) \ \forall k.$$

L'implicazione $\Rightarrow$ è immediatamente vera per la continuità di $\hat{\rho}$. Viceversa, siccome per ogni k

$$\hat{\rho}(s_n, s) \le \hat{\rho}(s_n, x_k) + \hat{\rho}(x_k, s),$$
$$\limsup_{n\to\infty} \hat{\rho}(s_n, s) \le \lim_{n\to\infty} \hat{\rho}(s_n, x_k) + \hat{\rho}(s, x_k) = 2\hat{\rho}(s, x_k).$$

Ma adesso, per densità, possiamo far tendere x_k a s tramite una sottosuccessione e quindi ottenere $\hat{\rho}(s_n, s) \to 0$.
Adesso scegliamo $x \in S$ e consideriamo una metrica d su J. Siccome F^{-1} è continua in $F(x)$, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che $d(F(x), F(y)) < \delta(\varepsilon)$ implica $\hat{\rho}(x, y) < \varepsilon$. In particolare scegliamo

$$\varepsilon = (2n)^{-1} \ \text{e} \ \delta = \min(\delta(\varepsilon), \varepsilon).$$

La palla $B_d(F(x),\delta)$ ha d-diametro $\leq \frac{1}{n}$ (dato che $\delta < \varepsilon$) e $(F(S)\cap B_d(F(x),\delta))^{-1}$ ha $\hat{\rho}$-diametro $\leq \frac{1}{n}$ (dato che $\delta < \delta(\varepsilon)$). Adesso fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e $y \in \overline{F(S)}$; chiamiamo U_n l'insieme degli $y \in \overline{F(S)}$ che hanno un intorno $N_{y,n}$ di diametro $\leq \frac{1}{n}$ tale che il $\hat{\rho}$-diametro di $S \cap F^{-1}(N_{y,n})$ sia $\leq \frac{1}{n}$. Per quanto appena visto, $F^{-1}(U_n) \supset S$ (in quanto per ogni elemento di S esiste un intorno nell'immagine tramite F di quel tipo).
Mostriamo che U_n è aperto in $\overline{F(S)}$. Scegliamo quindi di nuovo $y \in U_n$; è immediato che se si sceglie $z \in \overline{F(S)}$ sufficientemente vicino a y nella d-metrica si può considerare $N_{z,n} = N_{y,n}$, e quindi U_n è aperto in $\overline{F(S)}$.
Supponiamo ora $y \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ (in particolare $y \in \overline{F(S)}$; Per ogni n scegliamo un punto y_n di $F(S)$ in $\cap_{k\leq n} N_{y,k}$. In questo modo, $d(y, y_n) \leq \frac{1}{n}$ e quindi $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Inoltre, per $r \geq n$, $y_r, y_n \in N_{x,n}$, perciò $\hat{\rho}(F^{-1}(y_n), F^{-1}(y_r)) < \frac{1}{n}$ e quindi $\{F^{-1}(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $(S,\hat{\rho})$ che è completo. Dunque esiste un certo $x_0 \in S$ tale che $F^{-1}(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ in S. Essendo F un omeomorfismo, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x_0)$ in J e quindi, per unicità del limite, si deve avere $y = F(x_0) \in S$ e di conseguenza $F(S) = \cap_n U_n$. Essendo inoltre U_n aperto in $\overline{F(S)}$, $U_n = \overline{F(S)} \cap V_n$, con V_n aperto in J. Riassumendo,

$$F(S) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \overline{F(S)} \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n\right).$$

Ma adesso, siccome

$$\overline{F(S)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ y \in J : d(y, \overline{F(S)}) < \frac{1}{n} \right\},$$

cioè $F(S)$ si scrive come intersezione di aperti e in particolare è Borel, pertanto S è di Lusin. $\square$

Caratterizziamo la topologia $C_b(S)$ su uno spazio di Lusin S esattamente come abbiamo fatto con la $C(J)$ (ovviamente scegliendo $f \in C_b(J)$); in particolare, $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in D} \subseteq S$ converge a ϕ nella topologia $C_b(S)$ se $\phi_\alpha(f) \to \phi(f)$ per ogni $f \in C_b(S)$.

Proposizione 1.1.5. *Sia $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di misure di probabilità su uno spazio polacco S. Sono condizioni equivalenti:*

(i) $P_n \xrightarrow{d} P$*;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_S f(x)\,dP_n(x) = \int_S f(x)\,dP(x)$ *per ogni $f \in C_b(S)$ uniformemente continua;*

(iii) $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$ *per ogni $F \subset S$ chiuso;*

(iv) $\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G)$ *per ogni $G \subset S$ aperto;*

(v) $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$ *per ogni* $A \in \mathscr{B}$ *tale che* $P(\partial A) = 0$.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) è immediato per definizione. Dimostriamo ora (ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia $F \subset S$ chiuso. Consideriamo

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0, \\ 1-t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

e definiamo $f_k(x) := \varphi(kd(x,F))$. Chiaramente $f_k(x) \geq \mathbb{1}_F(x)$ e $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \mathbb{1}_F(x)$ per ogni $x \in S$. Perciò, siccome le f_k sono uniformemente continue, vale

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} P_n(F) &= \limsup_{n\to\infty} \int_S \mathbb{1}_F(x)\, dP_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_S f_k(x)\, dP_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_S f_k(x)\, dP_n(x) = \int_S f_k(x)\, dP(x), \end{aligned}$$

da cui, al limite per $k \to \infty$, si ottiene (iii). (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) si ottiene passando al complementare; infatti, prendendo $G = F^c$ aperto,

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(F^c) = 1 - \limsup_{n\to\infty} P_n(F) \geq 1 - P(F) = P(F^c).$$

Mostriamo (iii) $\Rightarrow$ (i). Se si prova

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(x)\, dP_n(x) = \int_S f(x)\, dP(x)$$

per funzioni a valori in $(0,1)$, la stessa uguaglianza vale per funzioni in $C_b(S)$, in quanto se f è limitata da M e $\mu = P, P_n$

$$\int_S f(x)\, d\mu(x) = M \int_S \frac{f^+(x)}{M}\, d\mu(x) - M \int_S \frac{f^-(x)}{M}\, d\mu(x).$$

Sia quindi $0 < f(x) < 1$. Vale

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k} P\left(\left\{x; \frac{i-1}{k} \leq f(x) < \frac{i}{k}\right)\right\} &\leq \int_S f(x)\, dP(x) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} P\left(\left\{x; \frac{i-1}{k} \leq f(x) < \frac{i}{k}\right\}\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ora, ponendo $F_t = \{x; \frac{i}{k} \le f(x)\}$, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} P\left(\left\{x; \frac{i-1}{k} \le f(x) < \frac{i}{k}\right\}\right) = \sum_{i}^{k} \frac{i}{k} P(F_{i-1} \setminus F_i) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i+1}{k} P(F_i \setminus F_{i+1})$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k} P(F_i),$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che

$$\sum_{i=0}^{k-1} (i+1) P(F_i \setminus F_{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} P(F_i),$$

che è vero in quanto

$$\begin{aligned} P(F_0) + \cdots + P(F_{k-1}) &= P(F_0 \setminus F_1) + P(F_1) + P(F_1) + \cdots + P(F_{k-1}) \\ &= P(F_0 \setminus F_1) + 2P(F_1 \setminus F_2) + 2P(F_2) + P(F_2) + \ldots P(F_{k-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) P(F_i \setminus F_{i+1}). \end{aligned}$$

Analogamente, siccome

$$\sum_{i=1}^{k} P\left(\left\{x; \frac{i-1}{k} \le f(x) < \frac{i}{k}\right\}\right) = 1,$$

il membro di sinistra della (1.1) è uguale a $\sum_{t=0}^{k-1} \frac{P(F_t)}{k} - \frac{1}{k}$. Riassumendo,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_S f(x)\, dP_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{P_n(F_t)}{k} \le \sum_{i=0}^{k-1} \frac{P(F_t)}{k} \le \frac{1}{k} + \int_S f(x)\, dP(x),$$

dove la seconda disuguaglianza deriva da (iii). Essendo k arbitrario,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_S f(x)\, dP_n(x) \le \int_S f(x)\, dP(x),$$

da cui, sostituendo f con $1 - f$,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_S f(x)\, dP_n(x) \ge \int_S f(x)\, dP(x),$$

per cui necessariamente

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(x)\, dP_n(x) = \int_S f(x)\, dP(x).$$

Mostriamo ora (iii) $\Leftrightarrow$ (v). Assumendo (iii) e di conseguenza (iv), se $P(\partial A) = 0$,

$$P(A) = P(\mathring{A}) \leq \liminf_{n\to\infty} P_n(\mathring{A}) \leq \limsup_{n\to\infty} P_n(\bar{A}) \leq P(\bar{A}) = P(A),$$

perciò le disuguaglianze sono in realtà uguaglianze e quindi $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$. Ora assumiamo (v) e consideriamo F chiuso. Definiamo $F_\delta = \{x; d(x,F) \leq \delta\}$. Chiaramente

$$A_\delta := \{x; d(x,F) = \delta\} \supset \partial F_\delta;$$

siccome gli A_δ sono disgiunti, l'insieme dei δ tali che $P(A_\delta) > 0$ è al massimo numerabile (altrimenti P non sarebbe una misura finita). Perciò possiamo costruire una successione $\{\delta_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ tale che $\delta_l \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$ e $P(A_{\delta_t}) = 0$ e di conseguenza $P(\partial F_{\delta_t}) = 0$. Siccome per ogni n vale che $P_n(F_{\delta_l}) \geq P_n(F)$, $\limsup_{n\to\infty} P_n(F_{\delta_l}) \geq \limsup_{n\to\infty} P_n(F)$ e quindi

$$P(F) = \lim_{l\to\infty} P(F_{\delta_l}) = \lim_{l\to\infty} \lim_{n\to\infty} P_n(F_{\delta_t}) \geq \limsup_{n\to\infty} P_n(F).$$

□

Osservazione 1.1.6. E' facile verificare che i punti (i), (iii) e (iv) della Proposizione 1.1.5 continuano a essere equivalenti sostituendo le successioni con le successioni generalizzate; si può definire infatti, data $\{x_\alpha\}_{\alpha\in D}$ successione generalizzata, si possono definire

$$\limsup x_\alpha := \lim_{\alpha\in D} \sup_{\beta\geq\alpha} x_\beta = \inf_{\alpha\in D} \sup_{\beta\geq\alpha} x_\beta$$

e

$$\liminf x_\alpha := \lim_{\alpha\in D} \inf_{\beta\geq\alpha} x_\beta = \sup_{\alpha\in D} \inf_{\beta\geq\alpha} x_\beta.$$

La dimostrazione è perciò quasi identica.

Teorema 1.1.7. *Sia S uno spazio di Lusin. Per $\mu \in \Pr(S)$ sia $\hat{\mu}$ l'estensione di μ a un elemento di $Pr(J)$ con $\hat{\mu}(J \setminus S) = 0$. Allora la funzione*

$$F : \Pr(S) \to \Pr(J)$$
$$\mu \mapsto \hat{\mu}.$$

definisce un omeomorfismo tra $\Pr(S)$ *nella topologia* $C_b(S)$ *e* $\{\nu \in \Pr(J) : \nu(S) = 1\} \subset \Pr(J)$ *nella topologia* $C_b(J)$.

Dimostrazione. L'obiettivo è mostrare che se $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in D} \subseteq \Pr(S)$ è una successione generalizzata e $\mu \in \Pr(S)$, allora

$$\mu_\alpha(f) \to \mu(f) \ \forall f \in C_b(S) \Longleftrightarrow \hat{\mu}_\alpha(f) \to \hat{\mu}(f) \ \forall f \in C_b(J).$$

Che la prima condizione implichi la seconda è ovvio in quanto la restrizione a S di ogni elemento di $C_b(J)$ è automaticamente in $C_b(S)$. Per il viceversa, sfruttiamo l'osservazione 1.1.6. Se F è un chiuso di S, allora è della forma $S \cap K$ dove K è un chiuso di J. Si ha

$$\limsup \mu_\alpha(F) = \limsup \hat{\mu}_\alpha(Y) \leq \hat{\mu}(Y) = \mu(F),$$

da cui la tesi. □

Siccome $\Pr(J)$ è metrizzabile per il Teorema 1.8, una conseguenza importante è che anche $\Pr(S)$ lo è, perciò si può tornare a lavorare con le successioni anziché le successioni generalizzate, come vediamo nella sezione che segue.

1.2 Il Teorema di Prokhorov

Definizione 1.2.1. Sia Ω uno spazio di probabilità. Un insieme $H \subseteq \Pr(\Omega)$ si dice tight se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K_\varepsilon \subseteq \Omega$ tale che

$$\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon \ \ \forall \mu \in H.$$

Teorema 1.2.2 (Prokhorov). *Sia S uno spazio di Lusin. Se H è tight, allora è relativamente compatto. Inoltre, se S è polacco vale anche il viceversa.*

Dimostrazione. Sia J il compatto metrizzabile del Teorema 1.1.4. Siccome $\Pr(J)$ e $\Pr(S)$ sono metrizzabili, la relativa compattezza è equivalente alla relativa compattezza sequenziale. Inoltre, siccome $\Pr(J)$ è compatto nella topologia $C(J)$, ogni suo sottoinsieme è relativamente compatto (chiuso in un compatto è compatto), e in particolare lo è anche nella topologia $C_b(J)$. Consideriamo una successione $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$; a meno di considerare una sottosuccessione, esiste $\nu \in \Pr(J)$ tale che $\hat{\mu}_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \nu$. Se dimostriamo che $\nu(S) = 1$, allora per il Teorema 1.1.7 $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \nu$ anche in $\Pr(S)$ da cui la tesi; ma questo è vero in quanto, per la Proposizione 1.1.5,

$$\nu(K_\varepsilon) \geq \limsup_{n\to\infty} \hat{\mu}_n(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon,$$

cioè, riassumendo, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K_\varepsilon \subseteq S$ tale che $\nu(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$, da cui $\nu(S) = 1$. Dimostriamo l'altra implicazione. Sia (S, ρ) polacco e consideriamo un sottoinsieme denso $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $V \subseteq \Pr(S)$ compatto nella topologia $C_b(S)$ e fissiamo $\varepsilon > 0$.
Per ogni $r \in \mathbb{N}$ definiamo gli aperti

$$G_r^n := \bigcup_{j\leq n} B_\rho\left(x_j, \frac{1}{r}\right).$$

E' immediato che $G_r^n \nearrow S$ per $n \to \infty$. Per questo motivo esiste N tale che $\mu(G_r^n) > 1 - \varepsilon 2^{-r}$ per ogni $n > N$. Dunque

$$U_r^n := \{\mu \in V : \mu(G_r^n) > 1 - \varepsilon 2^{-r}\} \nearrow V \text{ per } n \to \infty.$$

Mostriamo che gli U_r^n sono aperti studiando i complementari. Sia $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $(U_r^n)^c$ convergente debolmente a $\mu \in \Pr(S)$. Siccome i G_r^n sono aperti, per la Proposizione 1.1.5,

$$\liminf_{k\to\infty} \mu_k(G_r^n) \geq \mu(G_r^n),$$

da cui

$$\mu(G_r^n) \leq 1 - \varepsilon 2^{-r},$$

cioè $\mu \in (U_r^n)^c$ che è quindi chiuso.
Ora, dato che gli U_r^n formano un ricoprimento aperto di V che è compatto, e costituiscono inoltre una successione monotona al variare di n, deve esistere $n(r)$ tale che $V = U_r^{n(r)}$. In particolare,

$$\mu(G_r^{n(r)}) > 1 - \varepsilon 2^{-r} \quad \forall \mu \in V.$$

Poniamo adesso

$$K := \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \overline{G_r^{n(r)}}^S.$$

Per definizione $\mu(K) > 1 - \varepsilon$; vediamo che è compatto. Siccome K è chiuso in S e quest'ultimo è completo, anche K lo è. Inoltre

$$K = \bigcap_{r=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{j\leq n(r)} B_\rho\left(x_j, \frac{1}{r}\right)}^S \subseteq \bigcup_{j\leq n(r)} B_\rho\left(x_j, \frac{2}{r}\right),$$

cioè K è totalmente limitato. E' noto (cfr. [D-S], I.6.15) che un insieme completo e totalmente limitato è compatto, e questo chiude la dimostrazione. $\square$

Le ultime proprietà che ci serviranno più avanti sono garantite dal Teorema di Ascoli-Arzelà. Poniamo

$$\Omega_n := C([0,\infty); \mathbb{R}^n)$$

e introduciamo una notazione: dati $\delta > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_n$, definiamo

$$\Delta(\delta, N; \omega) := \sup\{|\omega(s) - \omega(t)| : s, t \in [0, N], |s - t| < \delta\}.$$

Richiamiamo il noto Teorema di Ascoli-Arzelà (cfr. [D-S], IV.6.7).

Teorema 1.2.3 (Ascoli-Arzelà). *Un sottoinsieme Γ di Ω_n è relativamente compatto se e solo se valgono le seguenti condizioni*

(i)

$$\sup\{|\omega(0)| : \omega \in \Gamma\} < \infty; \tag{1.2}$$

(ii) *per ogni $N \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\omega \in \Gamma} \Delta(\delta, N, \omega) = 0. \tag{1.3}$$

Lemma 1.2.4. *Sia $H \subset Pr(\Omega_n)$. H è relativamente compatto se e solo se valgono*

(i)

$$\lim_{a \to \infty} \sup_{\mu \in H} \mu\{\omega \in \Omega_n : |\omega(0)| > a\} = 0; \tag{1.4}$$

(ii) *Per ogni $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\mu \in H} \{\omega \in \Omega_n : \Delta(\delta, N; \omega) > \varepsilon\} = 0. \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Per la (1.4), per ogni $\eta > 0$ esiste $a > 0$ tale che

$$\sup_{\mu \in H} \mu(\{\omega \in \Omega_n : |\omega(0)| > a\}) < \eta,$$

cioè per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme

$$A := \{\omega \in \Omega_n : |\omega(0)| \leq a\}$$

è tale che

$$\mu(A) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall \mu \in H.$$

Analogamente, per la (1.5) possiamo scegliere $\delta = \delta(k, N)$ tale che, definito

$$A_{k,N} := \left\{ \omega \in \Omega_n : \Delta(\delta, N; \omega) \leq \frac{1}{k} \right\},$$

allora

$$\mu(A_{k,N}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+N+1}} \quad \forall \mu \in H.$$

Poniamo

$$\Gamma := A \cap \bigcap_{k,N} A_{k,N}.$$

E' immediato dalla definizione di A che Γ rispetta la (1.2). Osserviamo inoltre che per ogni $\delta(k,N)$

$$\Delta(\delta, N; \omega) \leq \frac{1}{k}$$

per ogni $\omega \in A_{k,N}$, quindi Γ verifica la (1.3): per il teorema di Ascoli-Arzelà è relativamente compatto. Adesso calcoliamo

$$\mu(\Gamma^c) = \mu\left(A^c \cup \bigcup_{k,N} A^c_{k,N}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{N+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un compatto $\overline{\Gamma}$ contenuto in Ω_n tale che

$$\mu(\overline{\Gamma}) \geq \mu(\Gamma) > 1 - \varepsilon.$$

Dal Teorema di Prokhorov si ha perciò la tesi. $\square$

Capitolo 2

Equazioni differenziali stocastiche

Ricordiamo che $\Omega_n = C([0,\infty);\mathbb{R}^n)$.

Definizione 2.1. Diciamo che $\mathscr{P}_{\Omega_n}$ è la σ-algebra previsible su $(0,\infty)\times\Omega_n$ associata alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)_{t\geq t_0}$ se ogni processo stocastico adattato a $\mathscr{F}_t$ continuo a sinistra e con limite finito da destra è $\mathscr{P}_{\Omega_n}$-misurabile.

Definizione 2.2. Una funzione $\mathscr{P}_{\Omega_n}$-misurabile su $(0,\infty)\times\Omega_n$ è chiamata funzionale previsible.

Ogni processo continuo e adattato ad una certa filtrazione $\mathscr{F}_t$ è previsible rispetto a $\mathscr{F}_t$. In particolare, se

$$\begin{aligned} b &: (0,+\infty)\times\Omega_n \to \mathbb{R}^n, \\ \sigma &: (0,+\infty)\times\Omega_n \to M_{n\times d}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

sono tali che $b(t,x) = \tilde{b}(t,x(t))$, $\sigma(t,x) = \tilde{\sigma}(t,x(t))$ per certi

$$\begin{aligned} \tilde{b} &: (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \\ \tilde{\sigma} &: (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n \to M_{n\times d}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

misurabili, allora b e σ sono previsibile. Per semplicità di notazione, useremo comunque b,σ al posto di $\tilde{b},\tilde{\sigma}$.

Ipotesi 2.3. Per $t_0 \geq 0$, W è un moto Browniano su $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geq t_0},P)$, Z è $\mathscr{F}_{t_0}$-misurabile e b,σ sono previsible.

Sotto l'Ipotesi 2.3, chiamiamo equazione differenziale stocastica (SDE) l'espressione

$$X_t = Z + \int_{t_0}^{t} b(s,X.)\,ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s,X.)\,dW_s \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

dove si ha (avendo posto $|\sigma|^2 = \mathrm{tr}(\sigma\sigma^T)$)

$$\int_{t_0}^{t} (|b(s, X.)| + |\sigma(s, X.)|^2)\, ds < \infty \quad P-\text{q.c.}, \ \ \forall t > 0 \tag{2.2}$$

oppure si considera l'equazione verificata solo fino a un certo istante, che si può definire come

$$T := \inf\left\{ t \geq t_0 : \int_{t_0}^{t} (|b(s, X.)| + |\sigma(s, X.)|^2)\, ds = \infty \right\}, \tag{2.3}$$

o lo si fissa a priori $< T$. La (2.1) può essere riscritta in una forma più compatta:

$$dX_t = b(t, X.)dt + \sigma(t, X.)dW_t, \quad X_0 = Z. \tag{2.4}$$

Osserviamo che siccome

$$\mathrm{tr}\, \sigma\sigma^T = \sum_{i,j=1}^{n} |\sigma_{ij}|^2,$$

la (2.3) equivale serve per definire l'integrale stocastico in (2.1) in quanto

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(\sigma\sigma^T)(s, X.)\, ds < \infty \Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} |\sigma_{ij}(s, X.)|^2\, ds < \infty \quad i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots d,$$

ovvero $\sigma \in L^2_W([0, T])$.

Definizione 2.4. Diciamo che

$$(Z, W, \mathbb{F})$$

è un set-up se

- $(W_t)_{t \geq t_0}$ è un moto Browniano d-dimensionale definito su uno spazio $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con filtrazione $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geq t_0}$ che verifica le ipotesi usuali;
- $Z \in m\mathscr{F}_{t_0}$ è una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.5. Diciamo che X è soluzione della SDE di coefficienti b, σ relativa al set-up $(Z, W, \mathbb{F})$ e scriviamo

$$X \in \mathrm{SDE}(b, \sigma, Z, W, \mathbb{F})$$

se vale la (2.1) quasi certamente.

A seconda di come scegliere il set-up si possono dare più definizioni di soluzione. Per semplicità di notazione scegliamo $t_0 = 0$.

Definizione 2.6. Diciamo che la SDE (2.1) è esatta se per ogni set-up $(Z, W, \mathbb{F})$ esiste esattamente una $X \in \mathrm{SDE}(b, \sigma, Z, W, \mathbb{F})$, a meno di indistinguibilità.

Indichiamo con $\mathscr{F}^{W,Z} = (\mathscr{F}_t^{W,Z})_{t\geq 0}$ la filtrazione standard di Z e W, cioè il minimo ampliamento della filtrazione generata da Z e W che soddisfa le ipotesi usuali.
Può risultare comodo costruire la soluzione direttamente sulla filtrazione generata da un moto Browniano fissato a priori (e dalla variabile aleatoria di partenza); questo si può fare se la SDE è risolubile in senso forte.

Definizione 2.7. Si dice che una SDE è risolubile in senso forte se per ogni set-up $(Z, W, \mathbb{F})$ esiste $X \in \mathrm{SDE}(b, \sigma, Z, W, \mathscr{F}^{W,Z})$; in questo caso si dice che X è soluzione forte della SDE di coefficienti b, σ.

Se il fine è però quello di descrivere un certo processo diffusivo come un rumore bianco o un processo di controllo, è sufficiente che ci sia anche un moto Browniano qualsiasi rispetto al quale si possa trovare una soluzione, cioè basta che la SDE sia risolubile in senso debole.

Definizione 2.8. Si dice che una SDE è risolubile in senso debole se per ogni distribuzione μ su $\mathbb{R}^N$ esistono un set-up $(Z, W, \mathbb{F})$ con $Z \sim \mu$ e $X \in \mathrm{SDE}(b, \sigma, Z, W, \mathbb{F})$, che viene detta soluzione debole della SDE a coefficienti b, σ.

Ovviamente se esiste una soluzione forte esiste anche una soluzione debole (basterà scegliere un set-up); inoltre, per definizione, la soluzione di una SDE esatta è in particolare una soluzione forte.
Si possono dare due diverse nozioni di unicità debole.

Definizione 2.9. Diciamo che vale l'unicità in legge per la SDE (2.1) se, per ogni $X \in \mathrm{SDE}(b, \sigma, Z, W, \mathbb{F})$ e $\widetilde{X} \in \mathrm{SDE}(b, \sigma, \widetilde{Z}, \widetilde{W}, \widetilde{\mathbb{F}})$, con $Z = \widetilde{Z}$ in legge, allora $X = \widetilde{X}$ in legge.

Definizione 2.10. Diciamo che vale l'unicità traiettoria per traiettoria per la SDE (2.1) se per ogni $X \in \mathrm{SDE}(b, \sigma, Z, W, \mathbb{F})$ e $\widetilde{X} \in \mathrm{SDE}(b, \sigma, Z, W, \widetilde{\mathbb{F}})$ soluzioni deboli (in questo caso nello stesso spazio e rispetto allo stesso moto Browniano, ma potenzialmente con filtrazioni diverse), vale

$$P(\{X_t = \widetilde{X}_t;\ \ \forall\, 0 \leq t < \infty\}) = 1. \tag{2.5}$$

Definizione 2.11. Diciamo che vale l'unicità in senso forte quando vale l'unicità traiettoria per traiettoria rispetto allo stesso set-up (quando cioè, rispetto alla definizione precedente, anche le filtrazioni coincidono).

Ci mettiamo ora nel caso in cui $b(t, X.) = b(t, X_t)$, $\sigma(t, X.) = \sigma(t, X_t)$ (abbiamo visto che la SDE continua ad essere ben definita) e consideriamo la SDE definita fino ad un tempo $T < \infty$.

Definizione 2.12. Si dice che la SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = Z,$$

verifica le ipotesi standard se

i) $Z \in L^2(\Omega, P)$ e $Z \in m\mathscr{F}_0$;

ii) b, σ sono localmente lipschitziane in x uniformemente rispetto a t, cioè per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una costante K_n tale che

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K_n|x - y|^2 \tag{2.6}$$

per $|x|, |y| \leq n$, $t \in [0, T]$;

iii) b, σ hanno crescita al più lineare in x, cioè

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2) \quad x \in \mathbb{R}^N, t \in [0, T] \tag{2.7}$$

per una certa costante K.

Enunciamo un classico teorema di esistenza e unicità forte; per la dimostrazione si veda [P], Teorema 9.11.

Teorema 2.13. *Una SDE che verifica le ipotesi standard ammette una soluzione forte nello spazio $\mathcal{A}_c$ dei processi $(X_t)_{t\in[0,T]}$ continui, $\mathscr{F}_t$-adattati e tali che*

$$[|X|]_T^2 := E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right]$$

è finito. Tale soluzione è unica in senso forte e soddisfa

$$[|X|]_t^2 \leq C(1 + E[|Z|^2])e^{Ct}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

con C costante che dipende solo da K e T.

Per un risultato più generale si veda il Teorema 11.2 in [R-W2], V. Sottolineiamo però che la proprietà di lipschitzianità rimane necessaria: nel caso di coefficienti previsible, significa che esiste $K < \infty$ tale che

$$\begin{aligned}
|\sigma(t, x.) - \sigma(t, y.)| &\leq K \sup\{|x(s) - y(s)| : s \leq t\}, \\
|\sigma(t, x.) - \sigma(t, y.)| &\leq K \sup\{|x(s) - y(s)| : s \leq t\}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.1 La disuguaglianza di Burkholder-Davis-Gundy

Enunciamo e dimostriamo la disuguaglianza di Burkholder-Davis-Gundy, che risulta utile nello studio delle SDE in quanto mette in relazione il sup del modulo di una martingala con la sua variazione quadratica. Verrà utilizzata sia nella dimostrazione di un risultato di unicità forte, ma soprattutto sarà determinante nel teorema di esistenza del problema della martingala che dimostreremo nel prossimo capitolo.
Definiamo

$$\overline{M}_\infty := \lim_{t\to\infty} \sup_{s\in[0,t]} |M_s|,$$
$$\langle M\rangle_\infty := \lim_{t\to\infty} \langle M\rangle_t.$$

Osserviamo che i due limiti esistono in quanto $\overline{M}_t(\omega)$ e $\langle M\rangle_t(\omega)$ sono funzioni crescenti in t.
Richiamiamo la definizione di versione regolare della probabilità condizionata e dimostriamo due lemmi utili.

Definizione 2.1.1. Sia $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ uno spazio di probabilità e $\mathscr{G}$ una sotto-σ-algebra di $\mathscr{F}$. Si dice versione regolare della probabilità condizionata una famiglia $P(\cdot|\mathscr{G}) = (P_\omega(\cdot|\mathscr{G}))_{\omega\in\Omega}$ di misure di probabilità tale che, per ogni $A \in \mathscr{F}$,

i) $P(A|\mathscr{G})$ è una variabile aleatoria $\mathscr{G}$-misurabile.

ii) per ogni $W \in m\mathscr{G}$ limitata vale

$$E[WP(A|\mathscr{G})] = E[W\mathbb{1}_A].$$

L'esistenza di una versione regolare della probabilità condizionata non è garantita a priori; valgono però i seguenti risultati.

Teorema 2.1.2. *Sia P una misura di probabilità definita su uno spazio polacco $(\Omega, \mathscr{B})$, dove $\mathscr{B}$ è la σ-algebra di Borel. Allora, per ogni sotto σ-algebra $\mathscr{G}$ di $\mathscr{B}$ esiste una versione regolare della probabilità condizionata $P(\cdot|\mathscr{G})$.*

Teorema 2.1.3. *Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, siano X una variabile aleatoria a valori in uno spazio polacco S e $\mathscr{G}$ una sotto-σ-algebra di $\mathscr{F}$. Allora esiste una famiglia di distribuzioni $\mu_{X|\mathscr{G}} = \left(\mu_{X|\mathscr{G}}(\cdot;\omega)\right)_{\omega\in\Omega}$ tale che, per ogni $H \in \mathscr{B}$ (dove $\mathscr{B}$ è la σ-algebra dei Boreliani di S) ,*

$$\mu_{X|\mathscr{G}}(H) = E[\mathbb{1}_{\{X\in H\}}|\mathscr{G}].$$

$\mu_{X|\mathscr{G}}$ è detta versione regolare della distribuzione di X condizionata a $\mathscr{G}$.

In questo contesto, pur non essendo garantita l'esistenza di una versione regolare della probabilità condizionata, si può indicare, con un piccolo abuso di notazione,

$$P(X \in H|\mathscr{G}) = \mu_{X|\mathscr{G}}(H).$$

Per la dimostrazione di questi fatti si veda [S-V2], I.

Lemma 2.1.4. *Sia M una martingala locale continua tale che $M_0 = 0$ e sia*

$$\tau_x := \inf\{t \geq 0 : M_t = x\}.$$

Allora, dati a, b tali che $a < 0 < b$,

$$P(\tau_b < \tau_a) \leq -\frac{a}{b-a} \leq P(\tau_b \leq \tau_a).$$

Dimostrazione. Sia $\tau := \tau_a \wedge \tau_b$. Poiché M è una martingala locale e τ è ancora un tempo d'arresto,

$$E[M_{t\wedge\tau}] = E[M_0] = 0$$

per ogni $t \geq 0$. Perciò, posto

$$M_\infty^- := \liminf_{t\to\infty} M_{t\wedge\tau},$$

si ha, per il lemma di Fatou,

$$\begin{aligned} 0 = \liminf_{t\to\infty} E[M_{t\wedge\tau}] &\geq E[M_\infty^-] \\ &= aP(M_\tau = a) + bP(M_{\tau=b}) + E[M_\infty^- \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}}]. \end{aligned}$$

Poichè $M_\infty^- \in [a, b]$, in particolare

$$\begin{aligned} 0 &\geq aP(\tau_a < \tau_b) + bP(\tau_b < \tau_a) + aP(\tau = \infty) \\ &= aP(\tau_a < \tau_b) + bP(\tau_b < \tau_a) + aP(\tau_a = \tau_b) \\ &= aP(\tau_a \leq \tau_b) + bP(\tau_b < \tau_a) \\ &= a(1 - P(\tau_b < \tau_a)) + bP(\tau_b < \tau_a) \\ &= a + P(\tau_b < \tau_a)(b - a), \end{aligned}$$

da cui la prima disuguaglianza. Per la seconda, basta porre

$$M_\infty^+ := \limsup_{t\to\infty} M_{t\wedge\tau}$$

e rifare il conto in modo speculare:

$$\begin{aligned} 0 = \limsup_{t\to\infty} E[M_{t\wedge\tau}] &\leq E[M_\infty^+] \\ &\leq aP(\tau_a < \tau_b) + bP(\tau_b \leq \tau_a). \end{aligned}$$

Osserviamo che $\{\tau = \infty\} = \{\tau_a = \tau_b\}$ è vero per la continuità di M. □

Definizione 2.1.5. Una funzione $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ si dice moderata se è continua, crescente, $F(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e per ogni $\alpha > 1$ vale

$$\sup_{x>0} \frac{F(\alpha x)}{F(x)} < +\infty. \tag{2.9}$$

Lemma 2.1.6. *Siano X,Y variabili aleatorie non negative e supponiamo che esista $\beta > 1$ tale che, per ogni $\lambda, \delta > 0$,*

$$P((X > \beta\lambda) \cap (Y \leq \delta\lambda)) \leq \psi(\delta) P(X > \lambda), \tag{2.10}$$

dove ψ è una funzione tale che $\lim_{\delta\to 0} \psi(\delta) = 0$. Allora, per ogni funzione moderata F esiste una costante che dipende solo da β, ψ e F tale che

$$E[F(X)] \leq CE[F(Y)]. \tag{2.11}$$

Dimostrazione. Se $E[F(Y)] = \infty$ il lemma è banalmente vero; assumiamo perciò $E[F(Y)] < \infty$. Inoltre, siccome per ogni $a > 0$

$$P(X \wedge a > \beta\lambda) \leq P(X > \beta\lambda),$$

se la (2.10) vale per X, vale anche per $X \wedge a$, perciò per la continuità di F possiamo assumere anche $E[F(X)] < \infty$. Siccome F è moderata, per la (2.9), se $\alpha > 1$ esiste $\gamma > 0$ tale che, per ogni x,

$$F(\alpha x) \leq \gamma F(x),$$

cioè, essendo $\beta > 1$,

$$F\left(\frac{x}{\beta}\right) \geq \gamma F(x).$$

Integriamo ora la (2.10) rispetto a $F(d\lambda)$. Il membro di destra diventa

$$\begin{aligned}\psi(\delta) \int_0^\infty P(X > \lambda) F(d\lambda) &= \psi(x) \int_0^\infty E[\mathbb{1}_{\{X>\lambda\}}] F(d\lambda) \\ &= E\left[\int_0^X F(d\lambda)\right] = E[F(X)].\end{aligned}$$

Complessivamente quindi,

$$\begin{aligned}\psi(\delta) E[F(X)] &\geq \int_0^\infty E[\mathbb{1}_{\{\frac{Y}{\delta} \leq \lambda < \frac{X}{\beta}\}}] F(d\lambda) \\ &= E\left[\left(\int_0^{\frac{X}{\beta}} F(d\lambda) - \int_0^{\frac{Y}{\delta}} F(d\lambda)\right)^+\right] \\ &\geq E\left[F\left(\frac{X}{\beta}\right)\right] - E\left[F\left(\frac{Y}{\delta}\right)\right] \\ &\geq \gamma E[F(X)] - E\left[F\left(\frac{Y}{\delta}\right)\right],\end{aligned}$$

ovvero

$$(\gamma - \psi(\delta))E[F(X)] \leq E\left[F\left(\frac{Y}{\delta}\right)\right]. \tag{2.12}$$

Siccome $\lim_{\delta\to 0}\psi(\delta) = 0$, possiamo scegliere $\delta < 1$ tale che

$$\gamma - \psi(\delta) > \frac{\gamma}{2}.$$

Inoltre, ragionando come prima, possiamo scegliere $\mu > 0$ tale che

$$F\left(\frac{x}{\delta}\right) \leq \mu F(x)$$

per ogni x. La (2.12) diventa così

$$\frac{\gamma}{2}E[F(X)] \leq \mu E[F(X)],$$

cioè

$$E[F(X)] \leq \frac{2\mu}{\gamma}E[F(Y)].$$

□

Teorema 2.1.7 (Disuguaglianza di Burkholder-Davis-Gundy)**.** *Sia F moderata. Allora esiste $c_F \leq C_F$ tale che, per ogni martingala locale continua M nulla in* 0*,*

$$c_F E[F(\langle M\rangle_\infty^{\frac{1}{2}})] \leq E[F(\overline{M}_\infty)] \leq C_F E[F(\langle M\rangle_\infty^{\frac{1}{2}})]. \tag{2.13}$$

Dimostrazione. L'idea è dimostrare che vale l'ipotesi del Lemma 2.1.6 per $X = \overline{M}_\infty$ e $Y = \langle M\rangle_\infty^{\frac{1}{2}}$.
Consideriamo $\beta > 1$, $\lambda > 0$ e δ tale che $0 < \delta < \beta - 1$; sia

$$\tau := \inf\{u \geq 0 : M_u < \lambda\}.$$

Definiamo

$$N_t := (M_{\tau+t} - M_\tau)^2 - (\langle M\rangle_{\tau+t} - \langle M\rangle_\tau).$$

N è quindi una martingala locale continua rispetto a $\widetilde{\mathscr{F}_t} := \mathscr{F}_{\tau+t}$. Consideriamo l'evento

$$H := (\overline{M}_\infty > \beta\lambda) \cap (\langle M\rangle_\infty^{\frac{1}{2}} \leq \delta\lambda).$$

Sia

$$\sigma := \inf\{u \geq 0 : |M_{\tau+u}| \geq \beta\lambda\}.$$

Siccome $\langle M \rangle_t$ è positiva e crescente, su H

$$\langle M \rangle_{\tau+\sigma} - \langle M \rangle_\tau \geq \delta^2\lambda^2,$$

mentre, siccome $\sigma < \infty$ su H,

$$(M_{\tau+\sigma} - M_\tau)^2 \geq (|M_{\tau+\sigma}| - |M_\tau|)^2 = (\beta-1)^2\lambda^2.$$

D'altro canto, poiché $(M_{\tau+t} - M_\tau) \geq 0$ per ogni t e $\langle M \rangle_{\tau+t} - \langle M \rangle_\tau < \delta^2\lambda^2$ per ogni t, ponendo

$$\tau_x := \inf\{u \geq 0 : N_u = x\},$$

si ha, sempre su H

$$\tau_{(\beta-1)^2\lambda^2 - \delta^2\lambda^2} < \tau_{-\delta^2\lambda^2}$$

e quindi, ricordando che $N_t \in m\mathscr{F}_\tau$ per ogni τ, si ha per il Lemma 2.1.4,

$$P((\overline{M}_\infty > \beta\lambda) \cap (\langle M \rangle_\infty^{\frac{1}{2}})|\mathscr{F}_t) \leq \frac{\delta^2}{(\beta-1)^2}$$

Quindi, osservando che se $\overline{M}_\infty > \beta\lambda$ allora $\tau < \infty$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
P((\overline{M}_\infty > \beta\lambda) \cap (\langle M \rangle_\infty^{\frac{1}{2}})) &= P((\overline{M}_\infty > \beta\lambda) \cap (\langle M \rangle_\infty^{\frac{1}{2}}) \cap (\tau < \infty)) \\
&= E[\mathbb{1}_{\{(\overline{M}_\infty > \beta\lambda) \cap (\langle M \rangle_\infty^{1/2}) \cap (\tau<\infty)\}}] \\
&= E[E[\mathbb{1}_{\{(\overline{M}_\infty > \beta\lambda) \cap (\langle M \rangle_\infty^{1/2})\}} \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}|\mathscr{F}_\tau]] \\
&= E[\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} E[\mathbb{1}_{\{(\overline{M}_\infty > \beta\lambda) \cap (\langle M \rangle_\infty^{1/2})\}}|\mathscr{F}_\tau]] \\
&= E[P((\overline{M}_\infty > \beta\lambda) \cap (\langle M \rangle_\infty^{\frac{1}{2}})|\mathscr{F}_\tau)\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}] \\
&\leq \frac{\delta^2}{(\beta-1)^2} P(\tau < \infty) \\
&= \frac{\delta^2}{(\beta-1)^2} P(\overline{M}_\infty > \lambda).
\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto quindi la disuguaglianza di destra del teorema; per ottenere quella di sinistra è sufficiente ripetere il procedimento scambiando $\overline{M}_\infty$ e $\langle M \rangle_\infty^{\frac{1}{2}}$. □

2.2 Unicità forte

Questo secondo teorema di unicità in senso forte vale nel caso $N = d$ (indebolendo però leggermente le altre ipotesi rispetto al risultato visto prima).
Richiamiamo il Lemma di Gronwall, la cui dimostrazione si può trovare in varie fonti, tra cui [E-K], A5.

Lemma 2.2.1 (Gronwall)**.** *Sia μ una misura di Borel su $[0,\infty)$, sia $a > 0$ e sia f una funzione boreliana che sia limitata sugli insiemi limitati e che soddisfa*

$$0 \leq f(t) \leq a + \int_{[0,t)} f(s)\, d\mu(s), \quad t > 0. \tag{2.14}$$

Allora vale

$$f(t) \leq a e^{\mu([0,t))}, \quad t \geq 0. \tag{2.15}$$

In particolare, se $b > 0$ e

$$0 \leq f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)\, ds \quad su\ t \geq 0, \tag{2.16}$$

allora

$$f(t) \leq a e^{bt}. \tag{2.17}$$

Per f continua su $(0,T) \times \mathbb{R}^d$ e $\alpha \in (0,1)$, diciamo che $f \in C_b^\alpha$ se

$$\|f\|_{C_b^\alpha} := \sup_{\substack{t\in(0,T)\\ x\in\mathbb{R}^n}} |f(t,x)| + \sup_{\substack{t\in(0,T)\\ x\in\mathbb{R}^n\\ x\neq y}} \frac{|f(t,x) - f(t,y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty, \tag{2.18}$$

mentre $f \in \mathrm{Lip}_b$ se vale la (2.18) con $\alpha = 1$.

Teorema 2.2.2. *Supponiamo che esista una costante $\mu > 0$ per cui $a = \sigma\sigma^T$ verifica la condizione di coercività*

$$\mu^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2; \quad (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{2.19}$$

Supponiamo inoltre che $b \in C_b^\alpha$ per un certo $\alpha \in (0,1)$ e $\sigma \in Lip_b$. Allora per la SDE

$$dX_t = b(t,X_t) + \sigma(t,X_t)dW_t \tag{2.20}$$

si ha unicità in senso forte.

Poniamo $\mathcal{S}_T := (0,T) \times \mathbb{R}^d$. Detto $\mathbf{e}_i$ l'i-esimo elemento della base canonica di $\mathbb{R}^d$, definiamo le norme

$$\begin{aligned}
||f||_{C_d^\alpha} &:= \sum_{i=1}^d \sup_{\substack{(t,x)\in\mathcal{S}_T\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{|f(t,x+h\mathbf{e}_i) - f(t,x)|}{|h|^\alpha},\\
||f||_{C_b^{1,\alpha}} &:= \sum_{i=1}^d ||\partial_{x_i} f||_{C_d^\alpha},\\
||f||_{C_b^{2,\alpha}} &:= \sum_{i,j=1}^d ||\partial_{x_i,x_j} f||_{C_d^\alpha} + ||\partial_t f||_{C_b^\alpha}.
\end{aligned}$$

Per $n = 0, 1, 2$, diciamo inoltre che $f \in C^{n,\alpha}_{b,\mathrm{loc}}$ se $\psi f \in C^{n,\alpha}_b$ per ogni $\psi \in C^\infty_c(\mathcal{S}_T)$.
Il seguente lemma è una versione della formula di Ito.

Lemma 2.2.3. *Sia X una soluzione della SDE (2.20) e $f \in C^{2,\alpha}_{b,loc}$. Allora vale*

$$df(t, X_t) = \mathcal{K}f(t, X_t)dt + (\nabla f \cdot \sigma)(t, X_t)dW_t, \tag{2.21}$$

dove, sotto le ipotesi del Teorema 2.2.2,

$$\mathcal{K} := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(t, x)\partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(t, x)\partial_{x_i} + \partial_t, \quad (t, x) \in \mathcal{S}_T. \tag{2.22}$$

Definizione 2.2.4. Una soluzione fondamentale per $\mathcal{K}$ su $\mathcal{S}_T$ è una funzione $p = p(t, x; s, y)$ definita per $0 < t < s < T$ e $x, y \in \mathbb{R}^d$ tale che, per ogni $(s, y) \in \mathcal{S}_T$,

(i) $\mathcal{K}p(\cdot, \cdot; s, y) = 0$ in $\mathcal{S}_s$;

(ii) per ogni $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ vale

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(s,y)\\ t<s}} \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x; s, \eta)f(\eta)\, d\eta = f(y). \tag{2.23}$$

Vediamo che in effetti sotto le nostre ipotesi esiste una soluzione fondamentale (cfr. [L-P-P]).

Teorema 2.2.5. *Sotto le ipotesi del Teorema 2.2.2, l'operatore $\mathcal{K}$ ha una soluzione fondamentale p su $\mathcal{S}_T$. Inoltre $p(\cdot, \cdot; s, y) \in C^{2,\beta}_b$ su $\mathcal{S}_T$ per ogni $0 < \tau < s < T, y \in \mathbb{R}^d$ e $\beta < \alpha$.*

Enunciamo infine un'ultima proposizione ausiliaria, che come le precedenti ha una dimostrazione puramente analitica (cfr. [Lu-P-P]).

Proposizione 2.2.6. *Sotto le ipotesi del Teorema 2.2.2, per $\lambda > 0$, consideriamo la funzione*

$$u_\lambda(t, x; T) := \int_t^T \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda(s-t)} p(t, x; s, y)b(s, y)\, dy\, ds, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^d, \tag{2.24}$$

dove p è la soluzione fondamentale del Teorema 2.2.5. Allora

(i) *$u_\lambda(\cdot, \cdot; T) \in C^{2,\beta}_b$, per $\beta < \alpha$, risolve il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathcal{K}u = -b + \lambda u, & \text{in } \mathcal{S}_T \\ u(T, \cdot) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n; \end{cases}$$

(ii) *esiste $c > 0$ dipendente da d, μ, T, la Lip_b-norma di σ e la C_b^α-norma di b tale che*

$$|u_\lambda(t,x;T) - u_\lambda(t,y;T)| \le \frac{c}{\sqrt{\lambda}}|x-y|, \tag{2.25}$$

$$|\partial_{x_i} u_\lambda(t,x;T) - \partial_{x_i} u_\lambda(t,y;T)| \le \frac{c}{\lambda^{\frac{\alpha}{2}}}|x-y|, \tag{2.26}$$

per ogni $0 < t < T, x, y \in \mathbb{R}^d$ e per ogni $i = 1, \ldots, d$.

Dimostrazione (del Teorema 2.2.2). Sia X una soluzione della (2.20). Per il Lemma 2.2.3 e la (2.2.6),

$$\begin{aligned} du_\lambda &= \mathcal{K}u_\lambda(t,X_t)dt + (\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(t,X_t)dW_t \\ &= (\lambda u_\lambda(t,X_t) - b(t,X_t))dt + (\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(t,X_t)dW_t, \end{aligned}$$

che diventa, in notazione integrale per $t \in [0,T]$,

$$\int_0^t b(s,X_s)\,ds = u_\lambda(0,X_0) - u_\lambda(t,X_t) + \lambda \int_0^t u_\lambda(s,X_s)\,ds + \int_0^t (\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(s,X_s)\,dW_s. \tag{2.27}$$

Sostituendo l'espressione appena ricavata nella (2.20) si ottiene

$$X_t = X_0 + u_\lambda(0,X_0) - u_\lambda(t,X_t) + \int_0^t \lambda u_\lambda(s,X_s)\,ds + \int_0^t (\nabla u_\lambda(s,X_s) + I)\cdot \sigma(s,X_s)\,dW_s. \tag{2.28}$$

Sia ora X' un'altra soluzione della (2.20) con lo stesso dato iniziale rispetto allo stesso moto browniano W e poniamo $Z := X - X'$. Scrivendo anche X' nella forma (2.28) e sottraendo si ottiene

$$\begin{aligned} Z_t =& - u_\lambda(t,X_t) + u_\lambda(t,X'_t) + \lambda \int_0^t (u_\lambda(s,X_s) - u_\lambda(s,X'_s))\,ds \\ &+ \int_0^t ((\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(s,X_s) - (\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(s,X'_s) + \sigma(s,X_s) - \sigma(s,X'_s))\,dW_s. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Sia ora $q > 0$ tale che le funzioni $x \mapsto |x|^q$ e $x \mapsto |x|^{q/2}$ siano convesse (per esempio si può prendere q multiplo di 4). Usando la disuguaglianza di Jensen discreta si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{E[|Z_t|^q}{4^{q-1}} \le& E[|u_\lambda(t,X_t) - u_\lambda(t,X'_t)^q|] + \lambda^q E\left[\left|\int_0^t (u_\lambda(s,X_s) - u_\lambda(s,X'_s))\,ds\right|^q\right] \\ &+ E\left[\left|\int_0^t ((\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(s,X_s) - (\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(s,X'_s) + \sigma(s,X_s) - \sigma(s,X'_s))\,dW_s\right|^q\right]. \end{aligned}$$

Ora, dalla disuguaglianza di Burkholder-Davis-Gundy si ottiene in particolare che esiste c_q tale che

$$E[|Z_t|^q] \leq c_q E[\langle Z\rangle_t^{\frac{q}{2}}].$$

Nel caso del moto Browniano ciò significa

$$\begin{aligned}
&E\left[\left|\int_0^t ((\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(s, X_s) - (\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(s, X'_s) + \sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))\, dW_s\right|^q\right] \\
\leq & c_q E\left[\left(\int_0^t |(\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(s, X_s) - (\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(s, X'_s) + \sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)|^2\, ds\right)^{\frac{q}{2}}\right] \\
& \text{(per la disuguaglianza di Jensen)} \\
\leq & c_q E\left[\int_0^t |u_\lambda|^q\, ds\right].
\end{aligned}$$

Applicando in modo analogo la disuguaglianza di Jensen agli altri addendi del secondo membro si ottiene infine

$$\begin{aligned}
\frac{E[|Z_t|^q]}{4^{q-1}} \leq & E[|u_\lambda(t, X_t) - u_\lambda(t, X'_t)|^q] + \lambda^q E\left[\int_0^t |(u_\lambda(s, X_s) - u_\lambda(s, X'_s))|^q\, ds\right] \\
& + c_q E\left[\int_0^t |(\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(s, X_s) - (\nabla u_\lambda \cdot \sigma)(s, X'_s) + \sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)|^q\, ds\right] \\
& \text{(usando la Proposizione 2.2.6, la lipschitzianità e la limitatezza di } u_\lambda \text{ e } \sigma) \\
& \leq E\left[\left(\frac{c}{\sqrt{\lambda}}|Z_t|\right)^q\right] + \lambda^q E\left[\int_0^t \left(\frac{c}{\sqrt{\lambda}}|Z_s|\right)^q ds\right],
\end{aligned}$$

dove c è una costante che dipende da q, d, μ, T, la Lip_b-norma di σ e la C_b^α-norma di b. Scegliendo λ tale che

$$K := 1 - \frac{4^{q-1}c^q}{\lambda^{\frac{q}{2}}} > 0,$$

si ottiene infine

$$E[|Z_t|^q] \leq \frac{\lambda^q 4^{q-1} c^q}{K\lambda^{\frac{q}{2}}} \int_0^t E[|Z_s|^q]\, ds.$$

Il Lemma di Gronwall permette dunque di concludere che X e X' sono indistinguibili. □

Una generalizzazione di questo teorema per la SDE

$$dX_t = (BX_t + b(t, X_t))dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

con $B \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ si può trovare in [Lu-P-P].

Alla luce di questo teorema iniziamo a inquadrare l'utilità del problema della martingala che definiremo tra poco: permetterà infatti di dimostrare l'esistenza di una soluzione debole con ipotesi molto più leggere (continuità e limitatezza dei coefficienti).

Capitolo 3

Il problema della martingala

Su Ω_n consideriamo il processo canonico $X_t(\omega) = \omega(t)$. Poniamo inoltre

$$\mathscr{F}^n = \sigma(X_s, \ \ s < +\infty);$$
$$(\mathscr{F}^n_t)_{t \geq 0} = \sigma(X_s, \ \ s \leq t).$$

Useremo $x \in \Omega_n$ al posto di ω quando scriveremo esplicitamente i coefficienti di una SDE per uniformare la notazione ai vari testi di riferimento; sarà comunque sempre tutto chiaro dal contesto. A meno che non sia specificato diversamente, assumeremo la seguente ipotesi.

Ipotesi 3.1. I coefficienti σ, b sono della forma

$$\sigma : (0, +\infty) \times \Omega_n \to M_{n\times d}(\mathbb{R}),$$
$$b : (0, +\infty) \times \Omega_n \to \mathbb{R}^n,$$

tali che $\sigma(t, x) = \tilde{\sigma}(t, x(t))$, $b(t, x) = \tilde{b}(t, x(t))$ per certi

$$\tilde{\sigma} : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to M_{n\times d}(\mathbb{R}),$$
$$\tilde{b} : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

misurabili. Infine

$$a := \sigma\sigma^T.$$

Come anticipato nel capitolo precedente, useremo comunque b, σ al posto di $\tilde{b}, \tilde{\sigma}$ quando necessario.

Definizione 3.2. Dato $y \in \mathbb{R}^n$, diciamo che una misura di probabilità P^y su $(\Omega_n, \mathscr{F}^n, (\mathscr{F}^n_t)_{t\in\mathbb{R}})$ è una soluzione del problema della martingala per (a, b) con dato iniziale y se

(i) $P^y(\{x(0) = y\}) = 1$;

(ii) Per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$C_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{L} f(s, X.)\, ds \tag{3.1}$$

è una $\mathscr{F}_t^n$-martingala sotto P^y, dove

$$\mathscr{L} f(s,x) := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(s,x) \partial_i \partial_j f(x(s)) + \sum_{i=1}^n b_i(s,x) \partial_i f(x(s)). \tag{3.2}$$

Si può estendere la definizione considerando una distribuzione μ su $\mathbb{R}^n$ al posto di y e sostituendo (i) con

(i') $P^\mu(\{x(0) \in A\}) = \mu(A)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$.

Introduciamo anche un'ipotesi alternativa sui coefficienti, cioè che siano di tipo diffusivo.

Ipotesi 3.3. I coefficienti σ, b sono della forma

$$\begin{aligned} \sigma(t,x) &= \tilde{\sigma}(x(t)), \\ b(t,x) &= \tilde{b}(x(t)) \end{aligned}$$

per certi

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &: \mathbb{R}^n \to M_{n \times d}(\mathbb{R}), \\ \tilde{b} &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

misurabili; di nuovo

$$a = \sigma\sigma^T.$$

Il problema della martingala omogeneo nel tempo si definisce analogamente, sostituendo (a, b) con i coefficienti dell'Ipotesi 3.3 nella definizione di $\mathscr{L}$. Questa ipotesi, oltre a essere coerente con la definizione di diffusioni che daremo a breve, risulta decisiva per la questione dell'unicità, come vedremo in seguito. Va aggiunto che è anche possibile incorporare la variabile temporale in quella spaziale, ponendo per esempio $X_t^{(n+1)} = t$, $b_{n+1} = 1$, $\sigma_{n+1,j} = 0$ per $1 \leq j \leq d$. In questo caso però $\sigma\sigma^T$ diventa singolare e questo compromette i risultati di unicità che verranno trattati più avanti.

3.1 L'equazione di Girsanov

Come anticipato, lo scopo dell'idea di Stroock-Varadhan è quella di fornire una formulazione equivalente alla risolubilità in senso debole delle SDE. Vediamo un esempio che dà un'idea di come ciò possa effettivamente essere utile.
Supponiamo che a, b siano di tipo diffusivo e P^y sia una soluzione del problema della martingala per (a, b) con dato iniziale $y \in \mathbb{R}^n$. Inoltre, sia $\rho : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ misurabile, strettamente positiva, invertibile e con ρ^{-1} localmente limitata. Definiamo il processo

$$\Phi_t := \int_0^t \rho(X_s)\, ds, \tag{3.3}$$

e richiediamo che $\Phi_t < \infty$ per ogni t (eventualmente limitandoci a un intervallo $[0, T]$). Operiamo adesso un cambio di variabile temporale: considerando il tempo di arresto

$$\tau_t := \inf\{s : \Phi_s > t\},$$

si ottiene che per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\widetilde{C}_t^f := C_{\tau_t}^f = f(X_{\tau_t}) - f(X_0) - \int_0^{\tau_t} \mathscr{L} f(X_s)\, ds$$

è una $\mathscr{F}_{\tau_t}$-martingala locale. Di conseguenza (tutti i dettagli si trovano in [E-K], 6), si può dimostrare che, posto $\widetilde{X}_t := X_{\tau_t}$,

$$\widetilde{C}_t^f = f(\widetilde{X}_t) - f(\widetilde{X}_0) - \int_0^t \rho(\widetilde{X}_s)^{-1} \mathscr{L} f(\widetilde{X}_s)\, du, \tag{3.4}$$

cioè $\widetilde{C}^f$ risolve il problema della martingala per $(\rho^{-1}a, \rho^{-1}b)$.
Fatta questa premessa, consideriamo, per $n = 1$, l'equazione di Girsanov

$$dX_t = \sigma_\alpha(X_t)\, dW_t, \quad X_0 = 0, \tag{3.5}$$

dove $\alpha > 0$ e $\sigma_\alpha(x) = |x|^\alpha \wedge 1$. Se $\alpha \geq 1$, σ_α è localmente lipschitziana e quindi ha la soluzione unica $X_t \equiv 0$. Cerchiamo invece altre soluzioni per $\alpha < 1$. L'idea di partenza è che, per la formula di Ito, sotto la misura di Wiener il processo

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \frac{1}{2} f''(X_s)\, ds$$

è una $\mathscr{F}_t$-martingala. Perciò, sfruttando la (3.4) per $\rho_\alpha(x) = |x|^{-2\alpha} \vee 1$, otteniamo che

$$f(\widetilde{X}_t) - f(X_0) - \int_0^t \frac{1}{2}(|\widetilde{X}_t|^{2\alpha} \wedge 1) f''(\widetilde{X}_s)\, ds$$

è una $\mathscr{F}_{\tau_t}$-martingala, da cui, se è vera l'equivalenza che vogliamo dimostrare, $\widetilde{X}$ è una soluzione debole della SDE (3.4). L'unica cosa da richiedere è che Φ_t sia finito, e questo è vero per $\alpha < \frac{1}{2}$ (cfr. [R-W2], V, 26.2), mentre per $\alpha \geq \frac{1}{2}$ l'unica soluzione è ancora quella nulla.

3.2 Equivalenza con le soluzioni deboli

Iniziamo questa sezione facendo un breve cenno ai processi diffusivi, di cui le equazioni differenziali stocastiche rappresentano un efficace metodo di costruzione.

Definizione 3.2.1. Siano a, b tali da verificare l'Ipotesi 3.3. Una diffusione in $\mathbb{R}^n$ con covarianza a e drift b è una semimartingala continua a valori in $\mathbb{R}^n$ definita su un certo spazio con filtrazione che soddisfa le ipotesi usuali, tale che, per ogni $i = 1, \ldots, n$,

$$M_t^{(i)} \equiv X_t^{(i)} - X_0^{(i)} - \int_0^t b_i(X_s)\, ds \tag{3.6}$$

è una martingala locale continua per cui vale, per ogni $i, j = 1, \ldots n$,

$$\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_t = \int_0^t a_{ij}\, ds. \tag{3.7}$$

Chiamiamo (a, b)-diffusione una diffusione con covarianza a e drift b.

Supponiamo quindi di riuscire a costruire un set-up $(Z, W, \mathbb{F})$ su cui esiste X semimartingala tale che

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t; \tag{3.8}$$

allora X è una (a, b)-diffusione, in quanto

$$dM_t \equiv dX_t - b(X_t)dt = \sigma(X_t)dW_t$$

definisce una martingala locale continua e

$$d\langle M, M\rangle_t = \sigma(X_t)dW dW^T \sigma(X_t)^T = \sigma(X_t)\sigma(X_t)^T dt = a(X_t)dt.$$

Come accennavamo nell'introduzione, il motivo che ha portato a considerare il problema della martingala un valido approccio per la ricerca di soluzioni deboli è costituito dal seguente teorema.

Teorema 3.2.2. *Sia X_t soluzione debole della SDE*

$$dX_t = \sigma(t, X.)\, dW_t + b(s, X.)\, dt \tag{3.9}$$

Allora X_t è soluzione del problema della martingala per $(\sigma\sigma^T, b)$.

Dimostrazione. Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, per la formula di Ito

$$df(X_t) = \mathscr{L}f(t, X.)dt + \nabla f(X_t) \cdot \sigma(t, X.),$$

da cui

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{L}f(s, X.)\, ds = \int_0^t \nabla f(X_s) \cdot \sigma(s, X.)\, dW_s,$$

che è una martingala in quanto $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\sigma \in \mathbb{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. □

Dimostrare il viceversa è invece molto più complesso; bisogna infatti costruire da zero il moto Browniano e non è detto che Ω_n sia sufficientemente grande da essere parte del set-up.

Teorema 3.2.3. *Sia P^y soluzione del problema della martingala per $(\sigma\sigma^T, b)$. Allora esiste una soluzione debole della SDE*

$$dX_t = \sigma(t, X.)\, dW_t + b(s, X.)\, dt. \tag{3.10}$$

Osservazione 3.2.4. I due teoremi che abbiamo appena enunciato rimangono veri anche se a e b verificano l'ipotesi diffusiva (3.3) (cfr. [K-S], 5.4.17).

Dimostrazione (del Teorema 3.2.3). Considero $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty$ tali che $f_N(x) = x_i$ per $x \in B(0, N)$. Siccome X è un processo continuo, esiste $\{\tau_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tale che $\|X_{t\wedge\tau_N}\| < N$ e $\tau_N \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$. Perciò, utilizzando la (3.1),

$$M^{(i)}_{t\wedge\tau_N} := X^{(i)}_{t\wedge\tau_N} - X^{(i)}_0 - \int_0^{t\wedge\tau_N} b_i(s, X.)\, ds \tag{3.11}$$

è una martingala, dunque M_t è una martingala locale.
Ripetendo il ragionamento per $f_N(x) = x_i x_j$, si ottiene che

$$M_t^{(i,j)} := X_t^{(i)} X_t^{(j)} - X_0^{(i)} X_0^{(j)} - \int_0^t \big(X_s^{(i)} b_j(s, X.) + X_s^{(j)} b_i(s, X.) + a_{ij}(s, X.)\big)\, ds \tag{3.12}$$

è una martingala locale. Definiamo ora

$$\begin{aligned} Y_t := &\int_0^t (X_s^{(i)} - X_t^{(i)}) b_j(s, X.)\, ds + \int_0^t (X_s^{(j)} - X_t^{(j)}) b_i(s, X.)\, ds \\ &+ \left(\int_0^t b_i(s, X.)\, ds\right) \left(\int_0^t b_j(s, X.)\, ds\right). \end{aligned}$$

Calcoliamo

$$
\begin{aligned}
&M_t^{(i)}M_t^{(j)} - \int_0^t a_{ij}(s,X.)\,ds = \\
&= \left(X_t^{(i)} - X_0^{(i)} - \int_0^t b_i(s,X.)\,ds\right)\left(X_t^{(j)} - X_0^{(j)} - \int_0^t b_j(s,X.)\,ds\right) \\
&= - X_0^{(i)}M_t^{(j)} - X_0^{(j)}M_t^{(i)} + X_t^{(i)}X_t^{(j)} - \int_0^t X_t^{(i)}b_j(s,X.)\,ds - \int_0^t X_t^{(j)}b_i(s,X.)\,ds + \\
&\quad - \int_0^t a_{ij}(s,X.)\,ds + \left(\int_0^t b_i(s,X.)\,ds\right)\left(\int_0^t b_j(s,X.)\,ds\right) \\
&= M_t^{(i,j)} - X_0^{(i)}M_t^{(j)} - X_0^{(j)}M_t^{(i)} + X_0^{(i)}X_0^{(j)} + Y_t.
\end{aligned}
$$

abbiamo cioè ottenuto

$$
\begin{aligned}
M_t^{(i)}M_t^{(j)} - \int_0^t a_{ij}(s,X.)\,ds &= M_t^{(i,j)} - X_0^{(i)}M_t^{(j)} - X_0^{(j)}M_t^{(i)} + X_0^{(i)}X_0^{(j)} + Y_t \\
&= \widehat{M_t} + Y_t,
\end{aligned}
$$

con $\widehat{M_t}$ martingala locale. Verifichiamo adesso

$$
Y_t = \int_0^t (M_s^{(i)} - M_t^{(i)})b_j(s,X.)\,ds + \int_0^t (M_s^{(j)} - M_t^{(j)})b_i(s,X.)\,ds.
$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (M_s^{(i)} - M_t^{(i)})b_j(s,X.)\,ds \\
&= \int_0^t \left(X_s^{(i)} - X_0^{(i)} - \int_0^s b_i(u,X.)\,du - X_t^{(i)} + X_0^{(i)} + \int_0^t b_i(u,X.)\,du\right) b_j(s,X.)\,ds \\
&= \int_0^t (X_s^{(i)} - X_t^{(i)})b_j(s,X.)\,ds - \int_0^t \left(\int_0^s b_i(u,X.)\,du\right) b_j(s,X.)\,ds + \\
&\quad + \int_0^t \left(\int_0^t b_i(u,X.)\,du\right) b_j(s,X.)\,ds.
\end{aligned}
$$

Bisogna cioè dimostrare

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^t b_i(s,X.)\,ds\right)\left(\int_0^t b_j(s,X.)\,ds\right) = \\
&- \int_0^t \left(\int_0^s b_i(u,X.)\,du\right) b_j(s,X.)\,ds + \int_0^t \left(\int_0^t b_i(u,X.)\,du\right) b_j(s,X.)\,ds \\
&- \int_0^t \left(\int_0^s b_j(u,X.)\,du\right) b_i(s,X.)\,ds + \int_0^t \left(\int_0^t b_j(u,X.)\,du\right) b_i(s,X.)\,ds.
\end{aligned}
$$

Integrando per parti si ottiene

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^t \left(\int_0^s b_i(u,X.)\,du\right) b_j(s,X.)\,ds \\
&= -\left[\left(\int_0^s b_i(u,X.)\,du\right)\left(\int_0^s b_j(u,X.)\,du\right)\right]_0^t + \int_0^t \left(\int_0^s b_j(u,X.)\,du\right) b_i(s,X.)\,ds,
\end{aligned}
$$

cioè

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^t \left(\int_0^s b_i(u,X.)\,du\right) b_j(s,X.)\,ds - \int_0^t \left(\int_0^s b_j(u,X.)\,du\right) b_i(s,X.)\,ds \\
&= -\left(\int_0^t b_i(s,X.)\,ds\right)\left(\int_0^t b_j(s,X.)\,ds\right),
\end{aligned}
$$

da cui segue immediatamente il risultato. Se adesso dimostriamo

$$
\int_0^t (M_s^{(i)} - M_t^{(i)}) b_j(s,X.)\,ds = -\int_0^t \left(\int_0^s b_j(u,X.)\,du\right) dM_s^{(i)}, \tag{3.13}
$$

allora $Y_t \equiv 0$, essendo allo stesso tempo un processo BV (primo membro) e una martingala locale continua (secondo membro); di conseguenza

$$
M_t^{(i)} M_t^{(j)} - \int_0^t a_{ij}(s,X.)\,ds
$$

è una martingala locale. Verifichiamo la (3.13). Poniamo

$$
F(t, M_t^{(i)}) := M_t^{(i)} \int_0^t b_j(s,X.)\,ds.
$$

Dalla formula di Ito (con $M_0^{(i)} = 0$)

$$
F(t, M_t^{(i)}) = \int_0^t \partial_s F(s, M_s^{(i)})\,ds + \int_0^t \partial_x F(s, M_s^{(i)})\,dM_s^{(i)}
$$

si ricava

$$
M_t^{(i)} \int_0^t b_j(s,X.)\,ds = \int_0^t M_s^{(i)} b_j(s,X.)\,ds + \int_0^t \left(\int_0^s b_j(u,X.)\,du\right) dM_s^{(i)},
$$

da cui segue immediatamente la (3.13). Dalla definizione di processo variazione quadratica segue quindi

$$
\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_t = \int_0^t a_{ij}(s,X.)\,ds. \tag{3.14}
$$

Ora, se $d = n$ e σ è invertibile con inversa limitata, definiamo

$$\widetilde{W}_t := \int_0^t \sigma(s, X.)^{-1}\, dM_s. \tag{3.15}$$

Poichè $\widetilde{W}_0 = 0$ q.c e

$$d\langle\widetilde{W}\rangle_s = \sigma_s^{-1} a_s (\sigma_s^{-1})^T = \sigma_s^{-1}\sigma_s\sigma_s^T(\sigma_s^{-1})^T = I,$$

(dove abbiamo posto $\sigma_s := \sigma(s, X.)$, $a_s = \big(a_{ij}(s, X.)\big)_{i,j=1\dots n}$ e $\langle W\rangle = (\langle W^{(i)}, W^{(j)}\rangle)_{i,j=1,\dots,n})$, per il Teorema di Levy (Teorema 3.13 in [K-S]), $\widetilde{W}$ è un moto Browniano e inoltre

$$M_t = \int_0^t \sigma(s, X.)\, d\widetilde{W}_s \tag{3.16}$$

da cui, per definizione di M_t,

$$X_t = y + \int_0^t \sigma(s, X.)\, d\widetilde{W}_s + \int_0^t b(s, X.)\, ds.$$

Ora, se $d < n$, possiamo definire

$$\sigma_{ij}(t, x) = 0 \quad \text{per } 1 \le i \le n, d+1 \le j \le n;$$

in questo modo la (3.11) continua ad essere verificata. Ci basta quindi completare la dimostrazione nel caso $d = n$ e σ non invertibile.

Lemma 3.2.5. *Sia $\sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to M_{d\times d}(\mathbb{R})$ Borel misurabile e sia $a = \sigma\sigma^T$. Allora esistono ρ, $\eta : [0,\infty) \to M_{d\times d}(\mathbb{R})$ Borel misurabili tali che:*

$$\rho a \rho^T + \eta\eta^T = I_d, \tag{3.17}$$

$$\sigma\eta = 0, \tag{3.18}$$

$$(I_d - \sigma\rho)a(I_d - \sigma\rho)^T = 0. \tag{3.19}$$

Dimostrazione. Sia per il momento $\sigma \equiv \sigma(t, x)$ per t, x fissati. Poiché a è simmetrica semidefinita positiva, esiste una matrice U reale e ortogonale tale che $a = U^T\Lambda U$, con Λ matrice diagonale con entrate positive o nulle. Perciò è possibile definire

$$a^{1/2} = U^T\Lambda^{1/2}U.$$

Inoltre, se Γ è la matrice diagonale che ha entrate 1 in corrispondenza degli autovalori positivi di Λ e 0 in corrispondenza di quelli nulli, si può costruire D diagonale e invertibile tale che

$$D\Lambda = \Gamma.$$

Ora, poiché $\sigma\sigma^T = U^T \Lambda U$, si ha

$$\begin{aligned}(D^{1/2}U\sigma)(D^{1/2}U\sigma)^T &= D^{1/2}U\sigma\sigma^T U^T D^{1/2} \\ &= D^{1/2}\Lambda D^{1/2} \\ &= \Gamma.\end{aligned}$$

Perciò, scrivendo la fattorizzazione LQ di $D^{1/2}U\sigma$, dove L è triangolare inferiore e Q è ortogonale, si ottiene

$$LQQ^T L^T = \Gamma,$$

cioè

$$LL^T = \Gamma.$$

Quindi L deve essere diagonale e in particolare $L = \Gamma$, perciò

$$D^{1/2}U\sigma = \Gamma Q,$$

da cui, moltiplicando entrambi i membri per $D^{-1/2}\Gamma$ e osservando che $\Gamma^2 = \Gamma$,

$$\Gamma U\sigma = D^{-1/2}\Gamma Q = D^{-1/2}\Gamma^{1/2}Q = \Lambda^{1/2}Q.$$

Analogamente, moltiplicando invece solo per $D^{-1/2}$ si ottiene

$$U\sigma = D^{-1/2}\Gamma Q,$$

perciò $U\sigma$ ha zeri nelle colonne corrispondenti agli zeri di Γ. Questo significa che Γ agisce su $U\sigma$ come l'identità e quindi

$$U\sigma = \Lambda^{1/2}Q,$$

che implica

$$\sigma = U^T\Lambda^{1/2}Q = U^T\Lambda^{1/2}UU^TQ = a^{1/2}U^TQ.$$

Adesso non ci resta che definire

$$\begin{aligned}\rho &:= Q^T D^{1/2}U, \\ \eta &:= Q^T(I_d - \Gamma)U\end{aligned}$$

e verificare che le (3.17)-(3.19) sono soddisfatte.

$$\begin{aligned}
\rho a \rho^T + \eta\eta^T &= Q^T D^{1/2} U \sigma \sigma^T U^T D^{1/2} Q + Q^T (I_d - \Gamma) U U^T (I_d - \Gamma) Q \\
&= Q^T D^{1/2} \Lambda D^{1/2} Q + Q^T (I_d - \Gamma) Q \\
&= Q^T \Gamma Q + Q^T (I_d - \Gamma) Q \\
&= Q^T Q = I_d.
\end{aligned}$$

Vediamo la seconda:

$$\sigma\eta = a^{1/2} U^T Q Q^T (I_d - \Gamma) U = \sigma((I_d - \Gamma)(U\sigma))^T U = 0.$$

Infine

$$\begin{aligned}
(I_d - \sigma\rho) a (I_d - \sigma\rho)^T &= (\sigma\sigma^T - \sigma Q^T D^{1/2} U \sigma \sigma^T)(I_d - U^T D^{1/2} Q \sigma^T) \\
&= \sigma\sigma^T - \sigma\sigma^T U^T D^{1/2} Q \sigma^T - \sigma Q^T D^{1/2} U \sigma \sigma^T \\
&+ \sigma Q^T D^{1/2} U \sigma \sigma^T U^T D^{1/2} Q \sigma^T \\
&\text{(ricordando che } D^{1/2} U \sigma = \Gamma Q) \\
&= \sigma\sigma^T - 2\sigma Q^T \Gamma Q \sigma^T + \sigma Q^T \Gamma Q \sigma^T \\
&= \sigma Q^T (I_d - \Gamma) Q \sigma^T \\
&= a^{1/2} U^T Q Q^T (I_d - \Gamma) Q \sigma \\
&= \sigma((I_d - \Gamma)(U\sigma))^T Q \sigma^T = 0.
\end{aligned}$$

Per la misurabilità di ρ ed η si veda [E-K], 3 e A10. □

Per definire il moto Browniano che serve a completare la dimostrazione, questa volta bisogna allargare lo spazio di probabilità: consideriamo $(\Omega_n \times \Omega_d, \mathscr{F} \otimes \mathscr{G}, P^y \otimes \mu_W)$ con filtrazione $(\mathscr{F}_t^n \otimes \mathscr{G}_t)_{t \geq 0}$, dove μ_W è la misura di Wiener associata al moto Browniano d-dimensionale W, $\mathscr{G}_t = \sigma(W_s,\ s \leq t)$, $\mathscr{G} = \sigma(W_s,\ s \leq \infty)$. Prima di andare avanti, mostriamo che M_t continua ad essere una martingala locale. Più precisamente, poniamo $\widetilde{M}_t(\omega, \omega') = M_t(\omega)$ (con $\omega \in \Omega_n$, $\omega' \in \Omega_d$). Dobbiamo verificare che vale

$$E^{P^y \times \mu_W}[\widetilde{M}_{T \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{A \times B}] = E^{P^y \times \mu_W}[\widetilde{M}_{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{A \times B}],$$

per ogni $A \in \mathscr{F}_t^n$, $B \in \mathscr{G}_t$, $T > t$. Ma questo è vero in quanto

$$\begin{aligned}
E^{P^y \times \mu_W}[\widetilde{M}_{T \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{A \times B}] &= \int_{A \times B} \widetilde{M}_{T \wedge \tau_n}(\omega, \omega')\, d(P^y \times \mu_W) = \int_B \left(\int_A M_{T \wedge \tau_n}(\omega)\, dP^y \right) d\mu_W \\
&= \int_B E^{P^y}[M_{T \wedge \tau_n} \mathbb{1}_A]\, d\mu_W = \int_B E^{P^y}[M_{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_A]\, d\mu_W \\
&= \int_B \left(\int_A M_{t \wedge \tau_n}(\omega)\, dP^y \right) d\mu_W = \int_{A \times B} \widetilde{M}_{t \wedge \tau_n}(\omega, \omega')\, d(P^y \times \mu_W) \\
&= E^{P^y \times \mu_W}[\widetilde{M}_{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{A \times B}].
\end{aligned}$$

Possiamo quindi ora scrivere

$$\widetilde{W}_t := \int_0^t \rho_s \, d\widetilde{M}_s + \int_0^t \eta_s \, dW_s, \tag{3.20}$$

dove $\rho_s = \rho(s, X.)$, $\eta_s = \eta(s, X.)$ sono quelle del lemma. Essendo $\operatorname{tr}(\sigma\sigma^T) < C$ per una certa costante C, entrambi gli integrali sono ben definiti: il primo grazie alla (3.14) e al fatto che

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\rho\rho^T\sigma\sigma^T) &\leq \operatorname{tr}(\rho\rho^T)\operatorname{tr}(\sigma\sigma^T) \\
&= \operatorname{tr}(Q^T D^{1/2} U U^T D^{1/2} Q) \operatorname{tr}\Lambda \\
&= \operatorname{tr} D \operatorname{tr}\Lambda < \widetilde{C}.
\end{aligned}$$

per definizione di D. Il secondo segue dal fatto che

$$\operatorname{tr}(\eta\eta^T) = Q^T(I_d - \Gamma)UU^T(I_d - \Gamma)Q = \operatorname{tr}\Gamma < d.$$

Scriviamo in maniera più compatta

$$\widetilde{W}_t = \int_0^t \begin{bmatrix} \rho_s & \eta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dM_s \\ dW_s \end{bmatrix} ds;$$

con un conto analogo a quello visto prima si vede che $M_t W_t$ è una martingala locale, per cui $d\langle M^{(i)}, W^{(j)}\rangle_s = 0$ per ogni $i, j = 1, \ldots, d$. Dunque

$$\begin{aligned}
d\langle \widetilde{W} \rangle_s &= \begin{bmatrix} \rho_s & \eta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_s & \bar{0} \\ \bar{0} & I_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_s^T \\ \eta_s^T \end{bmatrix} \\
&= \rho_s a_s \rho_s^T + \eta_s \eta_s^T \\
&= I_d.
\end{aligned}$$

per la (3.17). Perciò, di nuovo per il teorema di Lévy, $\widetilde{W}$ è un moto Browniano. Adesso l'obiettivo è dimostrare

$$\widetilde{M}_t = \int_0^t \sigma_s \, d\widetilde{W}_s, \tag{3.21}$$

che è vero se $Y_t := \widetilde{M}_t - \int_0^t \sigma_s \, d\widetilde{W}_s$ ha variazione quadratica nulla (essendo una martingala locale). Si ha

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_t - \int_0^t \sigma_s \, d\widetilde{W}_s &= \int_0^t d\widetilde{M}_s - \int_0^t \sigma_s(\rho_s \, d\widetilde{M}_s + \eta_s \, d\widetilde{W}_s) \\
&= \int_0^t (I_d - \sigma_s\rho_s) \, d\widetilde{M}_s - \int_0^t \sigma_s\eta_s \, d\widetilde{W}_s
\end{aligned}$$

e quindi, come prima,

$$\begin{aligned}
d\langle Y\rangle_s &= \begin{bmatrix} I_d - \sigma_s\rho_s & -\sigma_s\eta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_s & \bar{0} \\ \bar{0} & I_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I_d - \sigma_s\rho_s)^T \\ (-\sigma_s\eta_s)^T \end{bmatrix} \\
&= (I_d - \sigma_s\rho_s)\sigma_s\sigma_s^T(I_d - \sigma_s\rho_s)^T + \sigma_s\eta_s\eta_s^T\sigma_s^T \\
&= 0
\end{aligned}$$

per la (3.18) e la (3.19). Il risultato segue di nuovo dalla definizione di M. □

Il corollario che segue è immediato.

Corollario 3.2.6. *L'unicità del problema della martingala è equivalente all'unicità in legge (Definizione 2.9) della SDE* (3.9).

3.3 Proprietà di Markov forte

In questa sezione ci mettiamo nell'Ipotesi 3.3: il teorema che stiamo per enunciare, infatti, chiarisce sotto quali ipotesi si riesce a dimostrare la markovianità forte delle (a, b)-diffusioni (cfr. [R-W2], V).

Teorema 3.3.1 (Teorema 21.1 in [R-W2])**.** *Supponiamo che (a, b) verificano l'Ipotesi 3.3 e sono tali che il problema della martingala con dato iniziale $y \in \mathbb{R}^n$ sia ben posto e che la soluzione P^y sia anche unica. Allora $(X_t)_{t\geq 0}$ verifica la proprietà di Markov forte sotto P^y.*

Dimostrazione. Per T $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-tempo d'arresto limitato definiamo

$$\begin{aligned}
\theta_T : \Omega_n &\to \Omega_n \\
\omega(t) &\mapsto \omega(t + T(x)).
\end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che

$$(P^y \circ \theta_T^{-1} | \mathscr{F}_T)(\omega, \cdot) = P^{\omega(T)}(\cdot) \quad P^y - \text{q.c. in } \omega, \tag{3.22}$$

intesa come uguaglianza di misure di probabilità (cioè senza richiedere che il membro di destra sia a sua volta una versione regolare). Per farlo, mostriamo che il membro di sinistra è soluzione del problema della martingala con dato iniziale $\omega(T)$ e concludiamo per l'unicità.
In particolare, mostriamo che per ogni $s < t$, per ogni $A \in \mathscr{F}_s$.

$$E^{(P^y|\mathscr{G})(\omega,\cdot)}[((C_t^f - C_s^f)\mathbb{1}_A) \circ \theta_T] = 0 \quad P^y - \text{q.c. in } \omega, \tag{3.23}$$

cioè

$$E^{(P^y|\mathscr{G})(\omega,\cdot)}[(C^f_{T+t} - C^f_{T+s})\mathbb{1}_H] = 0 \quad P^y - \text{q.c. in } \omega, \tag{3.24}$$

con $H = \theta_T^{-1}(A) \in \mathscr{F}_{T+s}$. Fissiamo per ora $s < t$, $A \in \mathscr{F}_s$, $f \in C_c^\infty$. Ponendo

$$F(s,t,A,f) := E^{P^y}[(C^f_{T+t} - C^f_{T+s})\mathbb{1}_H]$$

Per il punto ii) della definizione di versione regolare della probabilità condizionata, per ogni $G \in \mathscr{F}_T$

$$E^{P^y}[\mathbb{1}_G F(s,t,A,f)] = E^{P^y}[(C^f_{T+t} - C^f_{T+s})\mathbb{1}_{G\cap H}] = 0,$$

dove l'ultima uguaglianza è vera perché $(C^f_{T+t})_{t\geq 0}$ è una martingala sotto P^y e $G \cap H \in \mathscr{F}_{T+s}$. Questo significa che, per s,t,A,f fissati,

$$F(s,t,A,f)(\omega) = 0 \quad P^y - \text{q.c. in } \omega.$$

Chiamiamo $J(s,t,A,f)$ l'insieme di misura 1 su cui vale l'espressione. Per completare la dimostrazione bisogna far variare s,t,A,f entro un insieme numerabile e usare un argomento di continuità: è sufficiente scegliere s,t razionali, $A \in \mathcal{C}$ con $\mathcal{C}$ famiglia numerabile di eventi che genera $\mathscr{F}_s$. Inoltre è noto che per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ esiste una successione $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\partial^h f_k \to \partial^h f$ uniformemente per ogni $h \geq 0$ e di conseguenza, essendo a e b limitati, $\mathscr{L} f_k \to \mathscr{L} f$ uniformemente. Di conseguenza esiste I numerabile tale che la (3.3) vale anche su

$$\bigcap_{s,t,A,f\in I} J(s,t,A,f)$$

che ha ancora misura 1; dalla (3.23) è immediata la conclusione per continuità. $\square$

3.4 Esistenza

Richiamiamo la notazione

$$\Delta(\delta, N; \omega) := \sup\{|\omega(s) - \omega(t)| : s,t \in [0,N], |s-t| < \delta\}$$

per $\delta > 0$, $N \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \Omega_n$.

Lemma 3.4.1. *Siano a,b che soddisfano l'ipotesi I e tali che*

$$\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(t,x)| + \sum_{i=1}^n |b_i(t,x)| \leq K, \tag{3.25}$$

con $K > 0$.
Sia P^y *soluzione del problema della martingala rispetto ad* (a, b). *Allora esiste* $c > 0$ *tale che per ogni* $y \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0, m, N \in \mathbb{N}$ *con* $m > K$,

$$P^y\left(\left\{\omega \in \Omega_n : \Delta\left(\frac{1}{m}, N; \omega\right) > \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{cNK^2}{m\varepsilon^4}.$$

Dimostrazione. Se $\Delta\left(\frac{1}{m}, N; \omega\right) > \varepsilon$, allora esiste $j \in A := \{0, 1, \ldots, Nm - 1\}$ tale che

$$\sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{m}} \left|\omega\left(\frac{j}{m} + t\right) - \omega\left(\frac{j}{m}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.26}$$

Infatti, dati $\tau, \lambda \in [0, N]$ con $|\tau - \lambda| < \frac{1}{m}$, esiste $\bar{s} \in A$ tale che $|s - \tau| < \frac{1}{m}$, $|s - \lambda| < \frac{1}{m}$. Perciò, se la (3.26) non fosse vera, avremmo che per ogni $\tau, \lambda \in [0, N], |\tau - \lambda| < \frac{1}{m}$,

$$|\omega(\tau) - \omega(\lambda)| \leq |\omega(\bar{s}) - \omega(\tau)| + |\omega(\bar{s}) - \omega(\lambda)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon,$$

che contraddice l'ipotesi.
Adesso definiamo, fissati $0 \leq t_0 < t_1 \leq N$,

$$\tau := \inf\left\{u > 0 : |X_{t_0+u} - X_{t_0}| > \frac{\varepsilon}{3}\right\} \wedge (t_1 - t_0).$$

Vediamo che τ è un tempo d'arresto (t.d.a.) rispetto a $(\mathscr{F}^n_{t_0+t})_{t\geq 0}$. Infatti $Z_t := X_{t_0+t} - X_{t_0}$ è adattato a $(\mathscr{F}^n_{t_0+t})_{t\geq 0}$ ed è continuo, perciò $\tau_1 := \inf\{u > 0 : Z_u \notin \overline{B(0, \frac{\varepsilon}{3})}\}$ è un t.d.a. in quanto tempo di uscita da un chiuso; inoltre $\tau_2 \equiv t_1 - t_0$ è banalmente un t.d.a. e quindi $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$ è un t.d.a, pertanto il processo stoppato $M_{t_0+(t\wedge\tau)} - M_{t_0}$ è una una $(P^y, (\mathscr{F}^n_{t_0+t})_{t\geq 0})$-martingala nulla in 0. Ora,

$$X_{t_0+(t\wedge\tau)} - X_{t_0} = M_{t_0+(t\wedge\tau)} - M_{t_0} + \int_{t_0}^{t_0+(t\wedge\tau)} b(s, X.)\, ds$$

implica

$$|X_{t_0+(t\wedge\tau)} - X_{t_0}|^2 \leq 2|M_{t_0+(t\wedge\tau)} - M_{t_0}|^2 + 2K^2(t \wedge \tau)^2,$$

da cui

$$\overline{(X - X_{t_0})}^2_{t_0+t\wedge\tau} \leq 2\overline{(M - M_{t_0})}^2_{t_0+t\wedge\tau} + 2K^2\tau^2,$$

dove $\overline{X}_t := \sup_{s\leq t} |X_s|$. Per la disuguanglianza di Jensen (discreta),

$$\overline{(X - X_{t_0})}^{2p}_{t_0+t\wedge\tau} \leq 4^p\left(\overline{(M - M_{t_0})}^{2p}_{t_0+t\wedge\tau} + (K\tau)^{2p}\right)$$

per ogni $p > 0$.

Essendo $F(x) = x^p$ $(p > 0)$ moderata, per la disuguaglianza di Burkholder-Davis-Gundy 2.1.7 esiste $C_p > 0$ tale che, per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$E\left[\overline{(M^{(i)} - M^{(i)}_{t_0})}^{2p}_{t_0+\tau}\right] \leq C_p E[\langle M^{(i)}\rangle^p_{t_0+\tau}].$$

Ricordando che

$$\langle M^{(i)}, M^{(i)}\rangle_t = \int_0^t a_{ii}(s, X.)\, ds,$$

vale

$$E\left[\overline{(M^{(i)} - M^{(i)}_{t_0})}^{2p}_{t_0+\tau}\right] \leq E\left[\left(\int_{t_0}^{t_0+\tau} \sum_{i=1}^n a_{ii}(s, X.)\, ds\right)^p\right];$$

usando che esiste $K_p > 0$ tale che

$$\overline{(M - M_{t_0})_{t_0+\tau}}^{2p} \leq K_p \sum_{i=1}^n \overline{(M^{(i)} - M^{(i)}_{t_0})}^{2p}_{t_0+\tau}$$

concludiamo che esiste $\widetilde{C}_p > 0$ tale che

$$E\left[\overline{(X - X_{t_0})}^{2p}_{t_0+\tau}\right] \leq \widetilde{C}_p E\left[\left(\int_{t_0}^{t_0+\tau} a_{ii}(s, X.)\, ds\right)^p + (K\tau)^{2p}\right] \leq \widetilde{C}_p E[(K\tau)^p + (K\tau)^{2p}].$$

Poniamo ora $\eta := t_1 - t_0$. Siccome, per definizione di τ,

$$\sup_{0\leq t\leq\eta} |X_{t_0+t} - X_{t_0}| > \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow |X_{t_0+t\wedge\tau} - X_{t_0}| > \frac{\varepsilon}{3},$$

la disuguaglianza di Chebyshev implica

$$\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{2p} P\left(\sup_{0\leq t\leq\eta} |X_{t_0+t} - X_{t_0}| > \frac{\varepsilon}{3}\right) \leq \widetilde{C}_p\big((K\eta)^p + (K\eta)^{2p}\big).$$

Perciò, scegliendo $p = 2$ e ricordando che $m > K$, $\left(\frac{K}{m}\right)^4 < \left(\frac{K}{m}\right)^2$ e quindi

$$P\left(\bigcup_{j=0}^{Nm-1} \left\{\sup_{0\leq t\leq\frac{1}{m}} |X_{\frac{j}{m}+t} - X_{\frac{j}{m}}| > \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right) \leq 2Nm\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{-4} C_2\left(\frac{K}{m}\right)^2 = 162 C_2 \frac{NK^2}{m\varepsilon^4}$$
$$= C\frac{NK^2}{m\varepsilon^4}.$$

□

3.4.1 Convergenza di variabili aleatorie in spazi polacchi

Il risultato che segue è estremamente interessante, perché permette di "convertire" una convergenza debole di distribuzioni in una convergenza forte di variabili aleatorie costruite ad hoc.

Teorema 3.4.2. *Sia S uno spazio polacco e $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Pr(S, \mathscr{B}(S))$ con $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{d} \mu$. Allora esiste uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ su cui si possono costruire $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}, X$ variabili aleatorie a valori in S tali che*

(i) $X_k \xrightarrow[k\to\infty]{} X$ *q.c.;*

(ii) $\mu_k = P^{X_k}, \quad \mu = P^X.$

Dimostrazione. Per $n \in \mathbb{N}$, associamo ad ogni sequenza finita $(i_1, \dots, i_n)$ un insieme $S_{(i_1,\dots,i_n)} \in \mathscr{B}(S)$ costruito nel modo seguente: per ogni n, siano $\sigma_m^{(n)}$ $(m \in \mathbb{N})$ palle di raggio $\leq 2^{-(n+1)}$ che ricoprono S e tali che $\mu_k(\partial\sigma_m^{(n)}) = \mu(\partial\sigma_m^{(n)}) = 0$ per ogni $n, m, k \in \mathbb{N}$. Per ogni n, definiamo $D_1^{(n)} = \sigma_1^{(n)}, D_2^{(n)} = \sigma_2^{(n)} \setminus \sigma_1^{(n)}, \dots, D_k^{(n)} = \sigma_k^{(n)} \setminus (\sigma_1^n \cup \dots \cup \sigma_{k-1}^{(n)}), \dots$. Ora, ad ogni insieme finito di indici $(i_1, \dots, i_n)$ associamo l'insieme $S_{(i_1,\dots,i_n)} = D_{i_1}^{(1)} \cap \cdots D_{i_n}^{(n)}$. E' di immediata verifica che $S_{(i_1,\dots,i_n)} \in \mathscr{B}(S)$ e inoltre

(1) Per ogni n, se $(i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots j_n)$, allora $S_{(i_1,\dots i_n)} \cap S_{(j_1,\dots,j_n)} = \varnothing$;

(2) $\cup_{j=1}^\infty S_j = S$ e $\cup_{j=1}^\infty S_{(i_1,\dots,i_n,j)} = S_{(i_1,\dots,i_n)}$;

(3) diam $S_{(i_1,\dots,i_n)} \leq 2^{-n}$;

(4) $\mu_k(\partial S_{(i_1,\dots,i_n)}) = P(\partial S_{(i_1,\dots,i_n)}) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Abbiamo quindi costruito un insieme di ricoprimenti $\mathcal{A}_n$ di S formati da insiemi disgiunti, in modo che, per $n < n', \mathcal{A}_n$ è un raffinamento di $\mathcal{A}_{n'}$. Adesso l'idea è quella di ordinare gli insiemi dei ricoprimenti e associarli ad un intervallo contenuto in $[0, 1)$ la cui lunghezza rappresenti la probabilità. In particolare, costruiremo le variabili aleatorie dell'enunciato sullo spazio $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con $\Omega = [0, 1), \mathscr{F} = \mathscr{B}([0, 1)), P(\omega) = d\omega$. Consideriamo l'ordine lessicografico sulle sequenze $(i_1, \dots, i_n)$ per n fissato. Definiamo gli intervalli (tutti del tipo $[a, b)$ con $a \leq b$) $\Delta_{(i_1,\dots i_n)}, \Delta_{(i_1,\dots i_n)}^{(k)}$ in $[0, 1)$ con le seguenti proprietà, che li identificano in modo univoco:

(I) $|\Delta_{(i_1,\dots i_n)}| = \mu(S_{(i_1,\dots,i_n)}), \quad |\Delta_{(i_1,\dots,i_n)}^{(k)}| = \mu_k(S_{(i_1,\dots,i_n)})$;

(II) se $(i_1, \dots, i_n) < (j_1, \dots, j_n)$, allora $\Delta_{(i_1,\dots,i_n)}$ è a sinistra di $\Delta_{(j_1,\dots,j_n)}$ e lo stesso per $\Delta_\cdot^{(k)}$;

(III) $\cup_{(i_i,\dots,i_n)}\Delta_{(i_i,\dots,i_n)} = [0,1), \quad \cup_{(i_i,\dots,i_n)}\Delta^{(k)}_{(i_i,\dots,i_n)} = [0,1).$

Siccome la frontiera degli $S_{(i_1,\dots,i_n)}$ ha misura nulla, se $\Delta_{(i_1,\dots,i_n)} \neq \varnothing$ o $\Delta^{(k)}_{(i_i,\dots,i_n)} \neq \varnothing$, allora $\mathring{S}_{(i_1,\dots,i_n)} \neq \varnothing$. Perciò, per ogni $(i_1,\dots,i_n)$ tale che $\mathring{S}_{(i_1,\dots,i_n)} \neq \varnothing$, possiamo scegliere $x_{i_1,\dots,i_n} \in \mathring{S}_{(i_1,\dots,i_n)}$ per cui risultano ben definite, per $\omega \in [0,1)$, $k,n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X^n_k(\omega) &= x_{i_1,\dots,i_n} \quad \omega \in \Delta^{(k)}_{(i_1,\dots,i_n)}, \\ X^n(\omega) &= x_{i_1,\dots,i_n} \quad \omega \in \Delta_{(i_1,\dots,i_n)}. \end{aligned}$$

Per la proprietà (2) si ha

$$d(X^n_k(\omega), X^{n+p}_k(\omega)) \leq 2^{-n}, \quad d(X^n(\omega), X^{n+p}(\omega)) \leq 2^{-n},$$

perciò $X_k(\omega) := \lim_{n\to\infty} X^n_k(\omega)$ e $X(\omega) := \lim_{n\to\infty} X^n(\omega)$ esistono per la completezza di S. Ora, per il punto (v) della Proposizione 1.1.5,

$$\lim_{k\to\infty} |\Delta^k_{(i_1,\dots,i_n)}| = \lim_{k\to\infty} \mu_k(S_{(i_1,\dots,i_n)}) = \mu(S_{(i_1,\dots,i_n)}) = |\Delta_{(i_1,\dots,i_n)}|,$$

perciò, dato $\omega \in \mathring{\Delta}_{(i_1,\dots,i_n)}$, esiste k_n tale che $\omega \in \mathring{\Delta}^k_{(i_1,\dots,i_n)}$ per ogni $k > k_n$ e quindi $X^n_k(\omega) = X^n(\omega)$, da cui

$$\begin{aligned} d(X_{k(\omega)}, X(\omega)) &\leq d(X_k(\omega), X^n_k(\omega)) + d(X^n_k(\omega), X^n(\omega)) + d(X^n(\omega), X(\omega)) \\ &\leq 2^{-n+1} \end{aligned}$$

per $k \geq k_n$. Dunque, se definiamo $\Omega_0 := \cap_{n=1}^{\infty}(\cup_{(i_1,\dots,i_n)}\mathring{\Delta}_{(i_1,\dots,i_n)})$, si ha $P(\Omega_0) = 1$ (intersezione numerabile di insiemi di misura 1) e $X_k(\omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} X(\omega)$, da cui il punto (i). Ora,

$$\begin{aligned} P^{X^{n+p}_k}(S_{(i_1,\dots,i_n)}) &:= P(\omega; X^{n+p}_k(\omega) \in S_{(i_1,\dots,i_n)}) = P(\omega; X^{n+p}_k(\omega) \in \mathring{S}_{(i_1,\dots,i_n)}) \\ &= P(\omega; X^{n+p}_k(\omega) = x_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1},\dots,i_{n+p}}, \quad i_{n+1},\dots,i_{n+p} \in \mathbb{N}^p) \\ &= P(\omega \in \Delta^k_{i_1,\dots,i_n,i_{n+1},\dots,i_{n+p}}, \quad i_{n+1},\dots,i_{n+p} \in \mathbb{N}^p) \\ &= \sum_{i_{n+1},\dots,i_{n+p}} P(\omega \in \Delta^k_{(i_1,\dots,i_n,i_{n+1},\dots,i_{n+p})}) \\ &= \sum_{(i_{n+1},\dots,i_{n+p})} |\Delta^k_{(i_1,\dots,i_n,i_{n+1},\dots i_{n+p})}| \\ &= \sum_{i_{n+1},\dots,i_{n+p}} \mu_k(S_{i_1,\dots,i_{n+p}}) \\ &= \mu_k(S_{(i_1,\dots,i_n)}), \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla proprietà (2). D'altro canto, se $p < q$, per come sono definite le X_k^p,

$$P^{X_k^p}(S_{(i_1,\dots,i_q)}) = 0$$

Perciò, siccome, per costruzione, ogni aperto A di S si può scrivere come unione disgiunta di $S_{(i_1,\dots,i_n)}$ (al variare di n), che indichiamo con $\cup_{\underset{n}{(i_1,\dots,i_n)}} S_{(i_1,\dots,i_n)}$, possiamo scrivere, per il Lemma di Fatou,

$$\begin{aligned}\liminf_{p\to\infty} P^{X_k^p}(A) &= \liminf_{p\to\infty} \int_{[0,1)} \mathbb{1}_{\cup_{\underset{n\le p}{(i_1,\dots,i_n)}} \Delta_{(i_1,\dots,i_n)}}(\omega)\, dP(\omega)\\ &\geq \int_{[0,1)} \liminf_{p\to\infty} \mathbb{1}_{\cup_{\underset{n\le p}{(i_1,\dots,i_n)}} \Delta^{(k)}_{(i_1,\dots,i_n)}}(\omega)\, dP(\omega) = P(\cup_{\underset{n}{(i_1,\dots,i_n)}} \Delta^{(k)}_{(i_1,\dots,i_n)})\\ &= \mu_k(A).\end{aligned}$$

Di conseguenza, per il punto (iii) della Proposizione 1.1.5, $P^{X_k^p} \xrightarrow[p\to\infty]{d} \mu_k$; per unicità del limite, dunque, $P^{X_k} = \mu_k$. Allo stesso modo si dimostra $P^X = \mu$. □

Il corollario che segue è l'applicazione del teorema appena visto, decisiva per la questione dell'esistenza.

Corollario 3.4.3. *Sia $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili uniformemente limitata su uno spazio polacco S. Supponiamo esista $\mu_k \in Pr(S)$, $\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{d} \mu$. Se $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}0}$ è equicontinua in ogni punto e $g_k \xrightarrow[k\to\infty]{} g$ puntualmente, allora*

$$\int_S g_k\, d\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_S g\, d\mu. \tag{3.27}$$

Dimostrazione. Siano $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}, X$ come nel Teorema 3.4.2. Siccome $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è equicontinua, esiste $\widetilde{N} > 0$ tale che

$$\begin{aligned}|g_k(X_k(\omega)) - g(X(\omega))| &\leq |g_k(X_k(\omega)) - g_k(X(\omega))| + |g_k(X(\omega)) - g(X(\omega))|\\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

per $k > \widetilde{N}$ (ω è tale che $X_k(\omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} X(\omega)$), perciò $g_k(X_k(\omega)) \xrightarrow[k\to\infty]{} g(X(\omega))$. Quindi, per (ii),

$$\int_S g_k\, d\mu_k = E[g_k(X_k)] \xrightarrow[k\to\infty]{} E[g(X)] = \int_S g\, d\mu.$$

□

3.4.2 Il teorema di esistenza

Abbiamo ora tutti gli strumenti per enunciare e dimostrare un importante risultato di esistenza.

Teorema 3.4.4. *Consideriamo a, b che soddisfano l'Ipotesi 3.1, la condizione di limitatezza (3.25) e tali che $a(t,\cdot), b(t,\cdot)$ sono continui per ogni $t > 0$. Allora per ogni $\mu \in Pr(\mathbb{R}^n)$ esiste una soluzione al problema della martingala per (a, b) con distribuzione iniziale μ.*

Dimostrazione. Definiamo

$$\begin{aligned} a_k(t,x) &:= a((t-k^{-1})^+, x), \\ b_k(t,x) &:= b((t-k^{-1})^+, x). \end{aligned}$$

Definiamo inoltre, per $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (in notazione di Einstein),

$$\mathscr{L}_k f(t,x) := \frac{1}{2} a_k^{ij}(t,x) \partial_i \partial_j f(x(t)) + b_k^i(t,x) \partial_i f(x(t)).$$

Consideriamo una variabile aleatoria Z a valori in $\mathbb{R}^n$ (definita in un generico spazio di probabilità) con legge μ e un moto Browniano W indipendente da Z e a valori in $\mathbb{R}^n$; sia σ la radice quadrata di a semidefinita positiva. Consideriamo, per $k \in \mathbb{N}$, la SDE

$$X_t = Z + \int_0^t \sigma((s-k^{-1})^+, X_.)\, dW_s + \int_0^t b((s-k^{-1})^+, X_.)\, ds. \tag{3.28}$$

Questa SDE può essere risolta esplicitamente tramite induzione. Infatti, se $t \le \frac{1}{k}$,

$$X_t = Z + \sigma(0, X_.) W_t + t b(0, X_.)$$

è soluzione. Se ora conosciamo la soluzione per $t \le \frac{N}{k}$ ($N \in \mathbb{N}$), allora possiamo estenderla fino a $\frac{N+1}{k}$, dato che l'integrando è funzione di $\left(s - \frac{1}{k}, X_{s-\frac{1}{k}}\right)$.
In particolare, per il Teorema 3.2.2, la legge P_k di X risolve il problema della martingala per (a_k, b_k) con distribuzione iniziale μ. Per il Lemma 3.4.1, per ogni $N, m \in \mathbb{N}$ con $m > K$ vale

$$P_k\left(\left\{\omega \in \Omega_n : \Delta\left(\frac{1}{m}, N; \omega\right) > \varepsilon\right\}\right) \le \frac{CNK^2}{m\varepsilon^4}$$

(ovviamente anche a_k e b_k sono uniformemente limitati dalla stessa costante per definizione). Perciò

$$\lim_{m \to +\infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} P_k\left(\left\{\omega \in \Omega_n : \Delta\left(\frac{1}{m}, N; \omega\right) > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

e inoltre

$$\lim_{a\to+\infty}\mu(\{y\in\mathbb{R}^n : |y|>a\})=0,$$

cioè valgono le condizioni (i) e (ii) del Lemma 1.2.4 e quindi $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è relativamente compatto, dunque, a meno di passare ad una sottosuccessione, $P_k \xrightarrow[k\to\infty]{d} P$. Mostriamo adesso che P risolve il problema della martingala per (a,b) con distribuzione iniziale μ. Consideriamo $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\psi : C([0,s];\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ continua e limitata per $0<s<t$ e definiamo

$$\begin{aligned} g_k(x) &:= \left(f(x(t)) - f(x(s)) - \int_s^t \mathscr{L}_k f(u,x)\,du\right)\psi(x) \\ &= A_k(x)\psi(x). \end{aligned}$$

Mostriamo che $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è uniformemente limitata ed equicontinua in ogni punto. Sia $x\in\Omega_n$ fissato. Vale

$$\begin{aligned} |g_k(x)-g_k(y)| &\le |A_k(x)||\psi(x)-\psi(y)| + |\psi(y)||A_k(x)-A_k(y)| \\ &\le C_0\varepsilon_{\psi,x} + C_1|A_k(x)-A_k(y)| \end{aligned}$$

per $|x-y|<\delta$. Quindi è sufficiente mostrare che $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è equicontinua (l'uniforme limitatezza è immediata). Scriviamo

$$\begin{aligned} |A_k(x)-A_k(y)| \le& |f(x(t))-f(y(t))| + |f(x(s))-f(y(s))| \\ &+ \left|\int_s^t \mathscr{L}_k(f(u,x)-f(u,y))\,du\right| \\ \le& \varepsilon_x + \frac{1}{2}\left|\int_s^t \left(a_k^{ij}(u,x)\partial_i\partial_j f(x(u)) - a_k^{ij}(u,y)\partial_i\partial_j f(u,y(u))\right)\,du\right| \\ &+ \left|\int_s^t \left(b_k^i(u,x)\partial_i f(x(u)) - b_k^i(u,y)\partial_i f(y(u))\right)\,du\right| \\ =& \varepsilon_x + \frac{1}{2}A + B. \end{aligned}$$

Come prima,

$$\begin{aligned} A \le& \int_s^t |a_k^{ij}(u,x)||\partial_i\partial_j\big(f(x(u))-f(y(u))\big)|\,du \\ &+ \int_s^t |\partial_i\partial_j f(y(u))||a_k^{ij}(u,x)-a_k^{ij}(u,y)|\,du \\ \le& C_1\varepsilon_{f,x} + C_{ij}\int_s^t |a^{ij}((u-k^{-1})^+,x) - a^{ij}((u-k^{-1})^+,y)|\,du \\ =& C_1\varepsilon_{f,x} + C_{ij}\widetilde{A}_k. \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_k &= \int_s^{\max\{s,k^{-1}\}} |a^{ij}(0,x) - a^{ij}(0,y)|\,du + \int_{\max\{0,s-k^{-1}\}}^{t-k^{-1}} |a(u,x) - a(u,y)|\,du \\
&\leq \int_s^{s+1} |a^{ij}(0,x)) - a^{ij}(0,y)|\,du + \int_0^t |a(u,x) - a(u,y)|\,du \\
&\leq C_2\varepsilon_{a,x,s} + C_3\varepsilon_{a,x,t},
\end{aligned}$$

che non dipende più da k. Per B si fa lo stesso. Quindi, per il Lemma 3.4.3,

$$\int_{\Omega_n} g_k\,dP_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{\Omega_n} g\,dP.$$

Ora, sia

$$C^f_{k,t} := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{L}_k f(u, X.)\,du.$$

$C^t_{k,t}$ è una martingala se e solo se per ogni $s < t$

$$E[(C^f_{k,t} - C^f_{k,s}) \cdot G] = 0$$

per ogni $G \in m\mathscr{F}^n_s$ e limitata. Siccome ψ è un'arbitraria funzione limitata (e continua) del processo X fino al tempo s, verifica questa ipotesi e quindi, siccome P_k risolve il problema della martingala,

$$\int_{\Omega_n} g_k\,dP_k = E^{P_k}[(C^f_{k,t} - C^f_{k,s}) \cdot \psi(x)] = 0$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, da cui

$$0 = \int_{\Omega_n} g\,dP = E^P[(C^f_t - C^f_s)\psi(x)],$$

dove, come già noto

$$C^f_t := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathscr{L} f(u, X.)\,du.$$

□

Osservazione 3.4.5. La dimostrazione appena vista sfrutta in modo decisivo la dipendenza esplicita dal tempo; tuttavia, anche se i coefficienti sono di tipo diffusivo, sono possibili altri approcci per dimostrare l'esistenza con le stesse ipotesi di continuità e limitatezza: si veda a questo proposito il Teorema 4.22 in [K-S], 5, che sfrutta anch'esso tecniche di approssimazione e convergenza debole. Inoltre, tecniche ancora più complesse hanno permesso di fare ulteriori passi avanti: si veda per esempio il Teorema 6.3.4 in [S-V2].

3.5 Unicità

Fino ad ora il processo X considerato nella formulazione del problema della martingala è sempre stato quello canonico; vediamo che in effetti è anche l'unico.

Teorema 3.5.1. *Consideriamo (a, b) che soddisfano l'Ipotesi 3.1, localmente limitati. Supponiamo che esista P^y soluzione del problema della martingala relativo ad (a, b) con dato iniziale $y \in \mathbb{R}^n$. Sia Y un processo stocastico continuo a valori in $\mathbb{R}^n$ definito su $(\Omega_n, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}, P^y)$ tale che*

i) *$P(Y(0) = y) = 1$;*

ii) *per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$C^f_{Y,t} := f(Y_t) - f(Y_0) - \int_0^t \mathscr{L} f(s, Y.)\, ds \tag{3.29}$$

è una $\mathscr{F}_t$-martingala.

Fissati $T \in \mathbb{R}$ e U aperto di $\mathbb{R}^n$ con la norma

$$\|x\| := \sup_{0\le t\le T} |x_t|,$$

supponiamo che esista una costante K tale che

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \vee |b(t, x) - b(t, y)| \le K|x - y|, \quad 0 \le t \le T; x, y \in U \tag{3.30}$$

e definiamo

$$\tau := \inf\{t \ge 0 : X(t) \notin U \ \ o \ \ Y(t) \notin U\}. \tag{3.31}$$

Allora vale

$$P(X_{t\wedge\tau} = Y_{t\wedge\tau} \ \ su \ \ 0 \le t \le T) = 1. \tag{3.32}$$

Prima di procedere con la dimostrazione, osserviamo che la scelta di un tempo d'arresto costruito in questo modo serve solamente a mantenere X e Y limitati: non sarebbe quindi necessaria se (a, b) verificasse l'ipotesi di continuità del Teorema 3.4.4 che garantisce (insieme alla limitatezza) l'esistenza di almeno una soluzione.
Mettiamo inoltre ancora una volta l'accento sulla traduzione nel linguaggio delle SDE: ciò che vogliamo dimostrare (nella dimostrazione questo sarà chiaro) è che, date due soluzioni $X \in \mathrm{SDE}(b, \sigma, Z, W, \mathbb{F})$, $Y \in \mathrm{SDE}(b, \sigma, \widetilde{Z}, W, \mathbb{F})$ con $Z = \widetilde{Z}$ in legge, allora vale la (3.32).

Dimostrazione. Basta ripercorrere la dimostrazione del Teorema 3.2.3 per accorgersi che Y soddisfa

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dW_t, \tag{3.33}$$

dove W è lo stesso moto Browniano costruito per mostrare che X è soluzione debole della stessa SDE. Perciò, per $0 \leq t \leq T$ vale

$$\begin{aligned}
&E[|X_{t\wedge\tau} - Y_{t\wedge\tau}|^2] \\
=&E\left[\left|\int_0^{t\wedge\tau} (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds + \int_0^{t\wedge\tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dW_s\right|^2\right] \\
\leq&2E\left[\left|\int_0^{t\wedge\tau} (b(s, X_s) - b(s, Y_s))\, ds\right|^2 + \left|\int_0^{t\wedge T} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))\, dW_s\right|^2\right] \\
\leq&2E\left[\int_0^{t\wedge\tau} |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|^2\, ds + \int_0^{t\wedge\tau} |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^2\, ds\right] \\
\leq&2K^2E\left[\int_0^{t\wedge\tau} |X_s - Y_s|^2\, ds\right],
\end{aligned}$$

Dove è stata usata l'isometria di Ito. A questo punto, sfruttando il Lemma di Gronwall con $a = 0$ e $f(t) = E[|X_{t\wedge\tau} - Y_{t\wedge\tau}|^2]$, si ottiene

$$E[|X_{t\wedge\tau} - Y_{t\wedge\tau}|^2] = 0,$$

da cui

$$X_{t\wedge\tau} = Y_{t\wedge\tau} \quad \text{q.c. su } \ 0 \leq t \leq T.$$

□

In generale, se $a = \sigma\sigma^T$ può capitare che σ non abbia la regolarità che acquisisce invece a; ciò non accade nel caso $n = d = 1$ in cui si possono indebolire le ipotesi come vediamo nel teorema seguente.

Teorema 3.5.2. *Sia $n = d = 1$. Il Teorema 3.5.1 rimane valido anche se la* (3.30) *viene sostituita da*

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \vee |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|, \quad 0 \leq t \leq T; x, y \in U. \tag{3.34}$$

In particolare, se $\sigma \geq 0$, basta supporre

$$|\sigma^2(t, x) - \sigma^2(t, y)| \vee |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|, \quad 0 \leq t \leq T; x, y \in U. \tag{3.35}$$

Dimostrazione. Per $\varepsilon > 0$ definiamo $\varphi_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})$ ponendo $\varphi_\varepsilon(u) = (u^2+\varepsilon)^{1/2}$. Calcoliamone le derivate prima e seconda.

$$\begin{aligned}
\varphi_\varepsilon'(u) &= u(u^2+\varepsilon)^{-1/2},\\
\varphi_\varepsilon''(u) &= (u^2+\varepsilon)^{-1/2} - u^2(u^2+\varepsilon)^{-3/2}\\
&= (u^2+\varepsilon)^{-1/2}(1-u^2(u^2+\varepsilon)^{-1}).
\end{aligned}$$

Per la formula di Ito,

$$\begin{aligned}
&E[\varphi_\varepsilon(X_{t\wedge\tau} - Y_{t\wedge\tau})] = \varphi_\varepsilon(0) +\\
&+E\left[\left(\int_0^t \varphi_\varepsilon'(X_s-Y_s)\cdot(b(s,X_s)-b(s,Y_s)) + \frac{1}{2}\varphi_\varepsilon''(X_s-Y_s)\cdot(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s))^2\right)ds\right]\\
&\leq \varphi_\varepsilon(0) + E\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau} K|X_s-Y_s| + \frac{1}{2}K|X_s-Y_s|\varphi_\varepsilon''(X_s-Y_s)\right)ds\right].
\end{aligned}$$

Adesso osserviamo che

$$|u||\varphi_\varepsilon''(u)| \leq 1$$

uniformemente in ε e inoltre

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon''(u) &= 0,\\
\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon'(u) &= 1.
\end{aligned}$$

Passando quindi al limite e sfruttando il Teorema della convergenza dominata otteniamo

$$E[|X_{t\wedge\tau} - Y_{t\wedge\tau}|] \leq K\int_0^t E[|X_{s\wedge\tau} - Y_{s\wedge\tau}|]\,ds, \tag{3.36}$$

da cui la tesi segue nuovamente dal Lemma di Gronwall. □

Nei teoremi precedenti abbiamo considerato solo processi nello spazio $(\Omega_n, \mathscr{F}, (\mathscr{F})_t, P^y)$. Non abbiamo quindi da affrontare il problema dell'unicità di P^y.
Dimostreremo due importanti teoremi di unicità della soluzione per il problema della martingala, che seguono approcci differenti ma si riconducono a ipotesi molto simili. Il primo sfrutta alcuni risultati sugli operatori in spazi $\mathscr{L}^p$ e l'approssimazione di X con combinazioni lineari di moti Browniani.

3.5.1 Primo metodo: per approssimazione

Ci apprestiamo a enunciare un lemma chiave.

Definizione 3.5.3. Dato S spazio topologico, una famiglia $\mathscr{T} \in C_b(S)$ si dice totale se la condizione

$$\int_S f(x)\, d\mu(x) = \int_S f(x)\, d\nu(x)$$

per ogni $f \in \mathscr{T}$ implica $\mu = \nu$.

Un esempio di famiglia totale è $\mathscr{T} = C_0^\infty$ (cfr. [K-S], 5.4.26).

Lemma 3.5.4. *Siano P^y, $\widetilde{P}^y$ due soluzioni al problema della martingala con dato iniziale y. Se vale*

$$E^{P^y}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t)\, dt\right] = E^{\widetilde{P}^y}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t)\, dt\right]$$

per ogni $f \in \mathscr{T}$ con $\mathscr{T}$ totale, allora $P^y = \widetilde{P}^y$.

Per la dimostrazione si veda [I-W], IV, Teorema 5.1.

Teorema 3.5.5. *Siano $a = \sigma\sigma^T$ e b come nell'Ipotesi 3.3. Inoltre, supponiamo che a sia uniformemente definita positiva, limitata e continua e che b sia limitato. Allora la soluzione del problema della martingala con dato iniziale $y \in \mathbb{R}^d$, se esiste, è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo che $b \equiv 0$ e che esista $\varepsilon > 0$ tale che

$$|a_{ij}(x) - \delta_{ij}| \le \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d; i, j = 1, 2, \dots, d. \tag{3.37}$$

Per rimuovere queste ipotesi aggiuntive sono necessari rispettivamente un procedimento di localizzazione e trasformazione con drift (cfr. [I-W], IV). Ricordiamo la densità gaussiana

$$G_t(x) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d$$

e definiamo

$$\nu_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G_t(x)\, dt, \quad \lambda > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

$$(V_\lambda f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu_\lambda(x - y) f(y)\, dy.$$

Valgono i seguenti fatti:

(i) V_λ è un operatore limitato da $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ in se stesso tale che

$$\|V_\lambda\|_p \le \|\nu_\lambda\|_1 = \frac{1}{\lambda}.$$

(ii) Se $p > \frac{d}{2} \vee 1$, esiste una costante A_p dipendente da p e d tale che

$$|V_\lambda f(x)| \leq A_p \|f\|_p \quad \text{per ogni } f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.38}$$

Questo è vero in quanto, per la disuguaglianza di Hölder,

$$|V_\lambda f(x)| \leq \|\nu_\lambda\|_q \|f\|_p \qquad \text{per } p, q \text{ tali che } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{3.39}$$

e inoltre esiste $C > 0$ tale che

$$\|\nu_\lambda\|_q \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|G_t\|_q \, dt \leq C \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{-\frac{d}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \, dt < \infty$$

se $\frac{d}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{d}{2p} < 1$;

(iii) Per ogni $i, j = 1, 2, \ldots, d$, $\frac{\partial^2 V_\lambda f}{\partial x_i \partial x_j}$ con $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ può essere esteso a un operatore limitato da $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$ in se stesso per ogni $p > 1$, cioè esiste una costante C_p che dipende solo da p e d tale che

$$\left\| \frac{\partial^2 V_\lambda f}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_p \leq C_p \|f\|_p . \tag{3.40}$$

La dimostrazione di questi fatti si può trovare in [S].
Sia ora P^y soluzione del problema della martingala. Passando al valore atteso nella (3.1) si ottiene, per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (ricordando che X è il processo canonico),

$$E[f(X_t)] = f(x) + E\left[\int_0^t \mathscr{L} f(X_s) \, ds\right].$$

Vogliamo ora moltiplicare per $\lambda e^{-\lambda t}$ e integrare da 0 a ∞. Calcoliamo il secondo addendo del membro di destra. Sia $F(t) = \int_0^t \mathscr{L} f(X_s) \, ds$ e integriamo per parti

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} F(t) \, dt = [e^{-\lambda t} F'(t)]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t) \, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(t) \, dt.$$

Sfruttando inoltre che

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} f(x) \, dt = f(x),$$

si ottiene

$$\lambda E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t) \, dt\right] = f(x) + E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathscr{L} f(X_t) \, dt\right].$$

Ora, definendo per $g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$

$$\mu_\lambda(g) := E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} g(X_t)\,dt\right], \tag{3.41}$$

si ricava, avendo prima posto $c_{ij}(x) := a_{ij}(x) - \delta_{ij}(x)$,

$$\mu_\lambda\left(\lambda f - \frac{1}{2}\Delta f\right) = f(x) + \frac{1}{2}\mu_\lambda\left(\sum_{i,j=1}^d c_{ij}(\cdot)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\cdot)\right),$$

Si può vedere per esempio in [S-P-B], 7, che V_λ è il cosiddetto risolvente per il moto Browniano, cioè

$$\mu_\lambda\left(\lambda(V_\lambda h) - \frac{1}{2}\Delta(V_\lambda h)\right) = \mu_\lambda(h)$$

per ogni $h \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Scegliamo in particolare $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\mu_\lambda(h) = V_\lambda h(x) + \frac{1}{2}\mu_\lambda\left(\sum_{i,j=1}^d c_{ij}(\cdot)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\cdot)\right), \tag{3.42}$$

da cui, usando la (3.37), la (3.39) e la (3.40), per $p > \frac{d}{2} \vee 1$,

$$|\mu_\lambda(h)| \le A_p \|h\|_p + \frac{\varepsilon}{2} d^2 C_p \sup_{\|f\|_p \le 1} |\mu_\lambda(f)| \, \|h\|_p .$$

Perciò, se valesse che $\sup_{\|f\|_p \le 1} |\mu_\lambda(f)| = \|\mu_\lambda\|_q < \infty$, passando al sup anche in h, si otterrebbe

$$\|\mu_\lambda\|_q \le \frac{A_p}{(1 - \frac{\varepsilon}{2} d^2 C_p)}$$

per ogni $\varepsilon > 0$ tale che $1 - \frac{\varepsilon}{2} d^2 C_p > 0$. Verifichiamo dunque $\|\mu_\lambda\|_q < \infty$.
Consideriamo

$$Y_t^{(m)}(\omega) = \omega\left(\frac{k}{2^m}\right), \quad t \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right), k \in \mathbb{N}$$

e sia W il moto Browniano del Teorema 3.2.3. Definiamo

$$X_t^{(m)}(\omega) := y + \int_0^t \sigma(Y_s^{(m)})\,dW_s.$$

e, per $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$,

$$\mu_\lambda^{(m)}(f) := E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t^{(m)})\,dt\right].$$

Vediamo che $\mu_\lambda^{(m)}(f) \xrightarrow[m\to\infty]{} \mu_\lambda(f)$. Infatti

$$\begin{aligned}
\left|\mu_\lambda(f) - \mu_\lambda^{(m)}(f)\right| &= \left| E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{k+1}{2^m}} e^{-\lambda t} \left(f(X_t) - f(X_t^{(m)}) \right) dt \right] \right| \\
&= \left| E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{k+1}{2^m}} e^{-\lambda t} \left(\int_0^t \left(\sigma(X_s) - \sigma(X_{\frac{k}{2^m}}) \right) dW_s \right) dt \right] \right| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

per la continuità di σ. Vediamo che $\left\|\mu_\lambda^{(m)}\right\|_q < \infty$.

$$\begin{aligned}
\left\|\mu_\lambda^{(m)}\right\|_q &= \sup_{\|f\|_p \le 1} \left| E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t^{(m)})\, dt \right] \right| \\
&= \sup_{\|f\|_p \le 1} \left| E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{k+1}{2^m}} e^{-\lambda t} f\left(y + \sigma\left(X_{\frac{k}{2^m}}\right) W_t \right) dt \right] \right| \\
&= \sup_{\|f\|_p \le 1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{k+1}{2^m}} e^{-\lambda t} E\left[f\left(y + \sigma\left(X_{\frac{k}{2^m}}\right) W_t \right) \right] dt \right| .
\end{aligned}$$

Pertanto, siccome $X_{k/2^m}$ è costante sotto $P^y(\cdot|\mathscr{F}_{k/2^m})$, l'argomento di f è una trasformazione lineare di $W_t \sim \mathscr{N}_{tI}$ che ha densità G_t; poiché inoltre $\sigma\sigma^T$ (cioè la matrice di covarianza della trasformazione lineare) è uniformemente definita positiva e limitata, esiste $K > 0$ tale che

$$\begin{aligned}
\left\|\mu_\lambda^{(m)}\right\| &\le K \sup_{\|f\|_p \le 1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{k}{2^m}}^{\frac{k+1}{2^m}} e^{-\lambda t} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) G_t(x-y)\, dx \right) dt \right| \\
&= K \sup_{\|f\|_p \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty e^{-\lambda t} G_t(x-y) f(x)\, dt\, dx \right| \\
&= K \sup_{\|f\|_p \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \nu_\lambda(x-y) f(x)\, dx \right| \\
&= K \sup_{\|f\|_p \le 1} \left| (V_\lambda f)(y) \right| \le K A_p < \infty.
\end{aligned}$$

per la (3.38). Facendo lo stesso conto visto in precedenza,

$$\left|\mu_\lambda^{(m)}(h)\right| \le A_p \|h\|_p + \frac{\varepsilon}{2} d^2 C_p \sup_{\|f\|_p \le 1} |\mu_\lambda(f)|\, \|h\|_p ,$$

perciò, avendo appena visto che $\left\|\mu_\lambda^{(m)}\right\| < \infty$,

$$\left\|\mu_\lambda^{(m)}\right\| \le \frac{A_p}{1 - \frac{\varepsilon}{2} d^2 C_p}.$$

Infine,

$$\|\mu_\lambda\|_q \le \liminf_{m\to\infty} \left\|\mu_\lambda^{(m)}\right\|_q \le \frac{A_p}{1-\frac{\varepsilon}{2}d^2C_p}.$$

Sia ora $\widetilde{P}^y$ un'altra soluzione del problema della martingala con dato iniziale y. Definendo $\widetilde{\mu}_\lambda$ in modo analogo a μ_λ (ma calcolando il valore atteso rispetto a $\widetilde{P}^y$) si ha, per la (3.42),

$$\begin{aligned}\mu_\lambda(f) &= V_\lambda f(x) + \mu_\lambda(K_\lambda f),\\ \widetilde{\mu}_\lambda(f) &= V_\lambda f(x) + \widetilde{\mu}_\lambda(K_\lambda f),\end{aligned}$$

dove

$$K_\lambda f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} c_{ij}(x)\frac{\partial^2 V_\lambda f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad x\in\mathbb{R}^d.$$

Pertanto

$$(\mu_\lambda - \widetilde{\mu}_\lambda)(f) = (\mu_\lambda - \widetilde{\mu}_\lambda)(K_\lambda f),$$

e poichè $\|K_\lambda f\|_p \le \frac{d^2}{2}\varepsilon C_p \|f\|_p$,

$$\sup_{\|f\|_p\le 1} |(\mu_\lambda - \widetilde{\mu}_\lambda)(f)| \le \frac{d^2}{2}\varepsilon C_p \sup_{\|f\|_p\le 1} |(\mu_\lambda - \widetilde{\mu}_\lambda)(f)|.$$

A questo punto, se scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $\frac{d^2}{2}\varepsilon C_p < 1$, deve necessariamente valere $\mu_\lambda(f) = \widetilde{\mu}_\lambda(f)$, da cui segue la tesi per il Lemma 3.5.4. □

3.5.2 Secondo metodo: marginali unidimensionali

Un altro approccio che si può seguire per la dimostrazione dell'unicità consiste nel mettersi sotto ipotesi che prevedano l'unicità delle marginali unidimensionali per poi sfruttare la proprietà di Markov forte vista in precedenza.

Teorema 3.5.6. *Supponiamo che per ogni $y\in\mathbb{R}^n$, date P^y e $\widetilde{P}^y$ due soluzioni del problema della martingala omogeneo con dato iniziale y, queste hanno le stesse distribuzioni marginali unidimensionali, cioè*

$$P^y(\{\omega(t)\in A\}) = \widetilde{P}^y(\{\omega(t)\in A\}) \quad \forall A \textit{ Borel.} \tag{3.43}$$

Allora, per ogni $y\in\mathbb{R}^n$ la soluzione al problema della martingala omogeneo, se esiste, è unica.

Dimostrazione. E' sufficiente mostrare che P^y e $\widetilde{P}^y$ hanno le stesse distribuzioni finito-dimensionali. Fissiamo quindi $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \infty$ e mostriamo che P^y e $\widetilde{P}^y$ coincidono su $\sigma(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ (qui con σ si intende la σ-algebra generata).
Procediamo per induzione su k; il passo base è vero per ipotesi. Supponiamo quindi che l'uguaglianza sia vera per $k-1$. Ora, la tecnica vista nella dimostrazione del Teorema 3.3.1 mostra che, a meno di un insieme N P^y- nullo,
$Q^y := \big(P^y \circ \theta_{t_{k-1}}^{-1} | \sigma(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{k-1}})\big)(\omega, \cdot)$ risolve il problema della martingala con dato iniziale $w(t_{n-1})$. Analogamente, a meno di un insieme $\widetilde{N}$ $\widetilde{P}^y$-nullo, $\widetilde{Q}^y := \big(\widetilde{P}^y \circ \theta_{t_{k-1}}^{-1} | \sigma(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{k-1}})\big)(\omega, \cdot)$ risolve il problema della martingala con dato iniziale $w(t_{k-1})$. Di nuovo per ipotesi, quindi, Q^y e $\widetilde{Q}^y$ hanno le stesse marginali unidimensionali su $(N \cup \widetilde{N})^c$. Di conseguenza, fissati $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n(k-1)})$ e $B \in \mathbb{R}^n$, vale

$$Q^y\{\omega \in \Omega_n; \omega(t_k) \in B\} = \widetilde{Q}^y\{\omega \in \Omega_n; \omega(t_k) \in B\}.$$

e dunque

$$\begin{aligned}
&P^y\{\omega \in \Omega_n : (w(t_1), \dots, \omega(t_{k-1})) \in A,\ \omega(t_k) \in B\} \\
=&E^{P^y}\big[E^{P^y}[\mathbb{1}_{\{X_{t_1},\dots,X_{t_k} \in A\}} \mathbb{1}_{\{X_{t_k} \in B\}} | \sigma(X_1, \dots, X_{t_{k-1}})]\big] \\
=&E^{P^y}\big[\mathbb{1}_{\{X_{t_1},\dots,X_{t_{k-1}} \in A\}} Q^y(\{\omega \in \Omega_n : \omega(t_k) \in B\})\big] \\
=&E^{P^y}\big[\mathbb{1}_{\{X_{t_1},\dots,X_{t_{k-1}} \in A\}} \widetilde{Q}^y(\{\omega \in \Omega_n : \omega(t_k) \in B\})\big] \\
&\text{(poiché } P^y \text{ e } \widetilde{P}^y \text{ coincidono su } \sigma(X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}})) \\
=&E^{\widetilde{P}^y}\big[\mathbb{1}_{\{X_{t_1},\dots,X_{t_{k-1}} \in A\}} \widetilde{Q}^y(\{\omega \in \Omega_n : \omega(t_k) \in B\})\big] \\
=&\widetilde{P}^y\{\omega \in \Omega_n : (w(t_1), \dots, \omega(t_{k-1})) \in A,\ \omega(t_k) \in B\}.
\end{aligned}$$

□

Perciò, per ottenere l'unicità del problema della martingala è sufficiente trovare condizioni che garantiscano l'unicità delle marginali unidimensionali. Una di queste è data dalla seguente proposizione.

Proposizione 3.5.7. *Supponiamo che per ogni $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathscr{L}u(t,x) & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,\cdot) = f & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.44}$$

abbia una soluzione $u_f \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ limitata su $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ per ogni $T < \infty$. Allora, se P^y e $\widetilde{P}^y$ sono due soluzioni al problema della martingala con dato iniziale $y \in \mathbb{R}^n$, le loro distribuzioni marginali unidimensionali coincidono, cioè vale la (3.43).

Alla dimostrazione anteponiamo un lemma.

Lemma 3.5.8. *Sia $g : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $g \in C^{1,2}((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ e sia X una soluzione debole della SDE (3.10) rispetto ad un set-up $(Z, W, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ con W definito su uno spazio $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Sia inoltre $\mathscr{L}g$ definito come in (3.2) ma sostituendo $g(\cdot)$ con $g(t,\cdot)$. Allora il processo*

$$M_t^g := g(t, X_t) - g(0, X_0) - \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s} + \mathscr{L} \right)(s, X_s)\, ds \tag{3.45}$$

è una martingala locale continua (ed è una martingala su $[0,T]$ se T è definito come nella (2.3) e $T < \infty$).

Dimostrazione. Per la formula di Ito

$$M_t^g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d M_t^{(i,j)}, \text{ con } M_t^{(i,j)} := \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s) \frac{\partial}{\partial x_i} g(s, X_s)\, dW_s^{(j)}, \tag{3.46}$$

che è una martingala su $[0,T]$ se $T < \infty$. Se invece $T = \infty$, bisogna porre condizioni di limitatezza, motivo per cui introduciamo la successione localizzante $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con

$$\tau_n := \inf \left\{ t \geq 0 : \|X_t\| \geq n \text{ o } \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 \geq n \right\},$$

in modo che, per $n \in \mathbb{N}$, i processi

$$M_{n,t}^g := M_{t\wedge\tau_n} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \int_0^{t\wedge\tau_n} \sigma_{ij}(s, X_s) \frac{\partial}{\partial x_i} g(s, X_s)\, dW_s^{(j)} \tag{3.47}$$

siano martingale continue. Da questo segue la tesi. $\square$

Dimostrazione (della Proposizione 3.5.7). Fissiamo $T > 0$ e definiamo

$$g(t, x) := u_f(T - t, x), \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^n,$$

che per ipotesi è di classe $C_b([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^{1,2}((0,T) \times \mathbb{R}^n)$ e soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} + \mathscr{L}g = 0 \quad & \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ g(T, \cdot) = f \quad & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ora, per il Teorema 3.2.3, sotto P^y e $\widetilde{P}^y$ il processo canonico $(X_t)_{t\geq 0}$ è soluzione debole della SDE (3.10) e quindi, per il Lemma 3.5.8, il processo $(g(t, X_t))_{t\in[0,T]}$ è una

$\mathscr{F}_t$-martingala locale sotto P^y e $\widetilde{P}^y$; in particolare, è proprio una martingala perché è continua e limitata. Si ha quindi

$$E^{P^y}[f(X_T)] = E^{P^y}[g(T, X_T)] = g(0, x) = E^{\widetilde{P}^y}[g(T, X_T)] = E^{\widetilde{P}^y}[f(y(T))],$$

cioè, essendo f arbitrariamente scelta in C_0^∞, che è totale, e T scelto all'inizio, vale la (3.43). $\square$

E' noto (cfr. [S-V2], Teorema 3.2.1) che una condizione sufficiente per la risolubilità del problema di Cauchy (3.44) è che a, b siano funzioni solo di $x \in \mathbb{R}^n$ limitate e Hölderiane, e che a sia uniformemente definita positiva. Ritroviamo quindi, in questo caso specifico, un'ipotesi solo leggermente più forte di quella del Teorema 3.5.5.

Bibliografia

[D-S] Dunford N., Schwartz J. T., *Linear Operators: Part I, General Theory*, Interscience, 1958.

[E-K] Ethier S. N., Kurtz T. G., *Markov Processes, Characterization and Convergence*, John Wiley & Sons Inc, 1986.

[I-W] Ikeda N., Watanabe S., *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, 2° ed., North-Holland/Kodansha, 1989.

[K] Kallenberg O., *Foundations of Modern Probability*, 2nd ed., Springer, 2002.

[K-S] Karatzas I., Shreve S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1988.

[L-P-P] Lanconelli A., Pagliarani S., Pascucci A., *Local densities for a class of degenerate diffusions*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 56, pp. 1440-1464, 2020.

[Lu-P-P] Lucertini G., Pagliarani S., Pascucci A., *Strong regularization by noise for kinetic SDEs*, arxiv.org/abs/2207.09726v3, 2022.

[P] Pascucci A., *Calcolo Stocastico per la Finanza*, Springer, 2008.

[R-W1] Rogers L. C. G., Williams D., *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 1: Foundations*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1994.

[R-W2] Rogers L. C. G., Williams D., *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 2: Itô Calculus*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1994.

[S] Stein E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[S-P-B] Schilling, Partzsch, Böttcher, *Brownian Motion, And Introduction to Stochastic Processes*, De Gruyter & Co., 2012.

[S-V] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., *Diffusion Processes with Continuous Coefficient, I e II*, Comm. Pure Appl. Math. 22, pp. 345-400, 479-530, 1969.

[S-V2] Stroock D. W., Varadhan S. R. S., *Multidimensional Diffusion Processes*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 2006. Reprint of the 1997 edition.

[V] Villani Cédric, *Optimal Transport, Old and New*, Springer, 2009.

Ringraziamenti

Giunto alla fine di questi splendidi cinque anni, vorrei ringraziare innanzitutto i miei genitori, per avermi sempre sostenuto e per aver riposto in me la massima fiducia; vorrei ringraziare il mio relatore, il professore Andrea Pascucci, per i suoi preziosi consigli, per il suo aiuto durante la stesura e per aver alimentato in questi anni la mia passione per lo studio della matematica, e in particolare dell'analisi stocastica. Infine vorrei ringraziare tutti gli amici con cui ho avuto il piacere di condividere il percorso universitario.