

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**IL MODELLO MATRICIALE DI LESLIE  
APPLICATO ALL'ECOLOGIA  
DELLE POPOLAZIONI**

Tesi di Laurea in Calcolo Numerico

Relatrice:  
Chiar.ma Prof.ssa  
VALERIA SIMONCINI

Presentata da:  
SABRINA RICCI

Anno Accademico 2021-2022



# Introduzione

Il presente elaborato ha lo scopo di studiare e analizzare il modello matriciale di Leslie che ha un ampio utilizzo nello studio demografico di popolazioni di diversi organismi, da animali a piante.

L'utilizzo di metodi matriciali è stato sviluppato in maniera indipendente da Bernardelli (1941), Lewis (1942) e Leslie (1945) ma furono gli scritti di quest'ultimo che influenzarono maggiormente gli studi in questo campo.

In particolare nel primo Capitolo, dopo una breve introduzione del modello, si osserveranno alcuni esempi degli effetti delle perturbazioni attuate sul dato iniziale di distribuzione e sugli elementi della matrice, analizzando in particolare crescita e decrescita della popolazione e la convergenza alla distribuzione stabile.

Il secondo Capitolo si soffermerà sugli autovalori delle matrici di Leslie, analizzando la funzione  $\lambda^t$  e le oscillazioni che essa produce e studiando i teoremi sui dischi di Gerschgorin che permettono una localizzazione degli autovalori.

Il terzo Capitolo introduce un modello matriciale associato al grafo di vita utilizzato per popolazioni suddivise in fasi e poi si concentra sugli importanti risultati riguardanti il tasso di crescita della popolazione e la sua convergenza (teorema di Perron-Frobenius e teorema ergodico forte). Infine verranno analizzati i legami di questi risultati con il Metodo delle Potenze.

Il quarto Capitolo affronta la teoria sulla perturbazione di autovalori per poi concentrarsi sulla sensibilità di autovalori e fattore di smorzamento a

seguito di variazioni delle componenti della matrice. Questi risultati vengono poi applicati come esempio alla popolazione degli Stati Uniti del 1966.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Il modello di Leslie</b>	<b>1</b>
1.1 Presentazione del modello . . . . .	1
1.1.1 Autovalori e Autovettori nella matrice di Leslie . . . . .	4
1.2 Esempio lineare e invariante dal tempo . . . . .	5
1.2.1 Perturbazione del dato iniziale . . . . .	8
1.2.2 Perturbazione degli elementi della matrice . . . . .	9
1.2.3 Effetto delle perturbazioni . . . . .	9
<b>2 Autovalori: proprietà e localizzazione</b>	<b>11</b>
2.1 Equazione caratteristica della matrice di Leslie . . . . .	11
2.2 L'equazione di proiezione . . . . .	12
2.3 Comportamento di $\lambda^t$ . . . . .	14
2.4 I dischi di Gerschgorin . . . . .	15
<b>3 Analisi asintotica ed ergodicità</b>	<b>19</b>
3.1 Il grafo del ciclo di vita . . . . .	19
3.2 Il teorema di Perron-Frobenius . . . . .	22
3.3 Il teorema ergodico forte . . . . .	25
3.3.1 Velocità di convergenza . . . . .	27
3.3.2 Il metodo delle potenze . . . . .	30
3.4 Matrici riducibili . . . . .	32
3.4.1 Esempio: popolazione con classi di età post riproduttive. . . . .	33

<b>4</b>	<b>Analisi transiente</b>	<b>37</b>
4.1	Sensibilità degli autovalori . . . . .	37
4.1.1	Perturbazione della matrice . . . . .	38
4.1.2	Sensibilità di $\lambda_1$ rispetto a fertilità e sopravvivenza . .	43
4.2	Sensibilità del fattore di smorzamento . . . . .	45
4.3	Esempio: studio della popolazione degli Stati Uniti del 1966 .	45
	<b>Conclusioni</b>	<b>49</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>51</b>

# Capitolo 1

## Il modello di Leslie

### 1.1 Presentazione del modello

Il modello di Leslie è stato sviluppato per descrivere la dinamica di sviluppo della popolazione femminile nelle specie animali, occupando un ruolo centrale nello studio dell'ecologia e demografia.

Si considera in questo caso un modello *discreto* (o finito: il tempo viene diviso in intervalli) per una popolazione *strutturata in classi di età*.

La popolazione viene divisa in  $k$  **classi di età**. Si considera un periodo di tempo continuo  $t$  e lo si suddivide in intervalli di uguale lunghezza chiamati **intervalli di proiezione**. In questo caso si suppone che l'unità di tempo coincida con la lunghezza della classe di età.

Partendo da  $t = 0$  la  $i$ -esima classe d'età corrisponde all'intervallo temporale  $[i - 1, i]$  con  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

La popolazione al tempo  $t$  viene rappresentata dal vettore colonna  $\mathbf{n}(t)$ , la cui  $i$ -esima componente  $n_i(t)$  indica il numero di individui nella  $i$ -esima classe d'età. Di conseguenza lo scalare

$$N(t) = \sum_{i=1}^k n_i(t)$$

indica la popolazione totale al tempo  $t$ .

L'obiettivo del modello di Leslie è quello di ottenere la struttura della popolazione dal tempo  $t$  al tempo  $t + 1$  e si ha

$$n_{i+1}(t + 1) = P_i n_i(t)$$

dove  $P_i > 0$  con  $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$  rappresenta la probabilità dell'individuo di classe  $i$  di sopravvivere dal tempo  $t$  al tempo  $t + 1$ .

Il numero degli individui della prima classe di età dipende solamente dalla riproduzione delle successive classi dato che non possono essere sopravvissuti a nessuna precedente:

$$n_1(t + 1) = \sum_{i=1}^k F_i n_i(t).$$

$F_i \geq 0$  con  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  rappresenta la fertilità di ogni classe.

In forma matriciale si ottiene quindi

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_3 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix} (t + 1) = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \cdots & F_k \\ P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix} (t) \quad (1.1)$$

o equivalentemente:

$$\mathbf{n}(t + 1) = \mathbf{L}\mathbf{n}(t) \quad (1.2)$$

che prende il nome di **equazione di proiezione**.

Sia  $\mathbf{n}(0)$  il vettore di distribuzione della popolazione al tempo iniziale  $t = 0$ , sviluppando (1.2) si riesce a ottenere il numero di individui a qualsiasi intervallo successivo  $t$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(1) &= \mathbf{L}\mathbf{n}(0) \\ \mathbf{n}(2) &= \mathbf{L}\mathbf{n}(1) = \mathbf{L}^2\mathbf{n}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{n}(t + 1) &= \mathbf{L}\mathbf{n}(t) = \mathbf{L}^{t+1}\mathbf{n}(0). \end{aligned} \quad (1.3)$$



La matrice  $\mathbf{L}$  prende il nome di **Matrice di Leslie** o **matrice di previsione della popolazione**.  $\mathbf{L}$  presenta le seguenti caratteristiche:

- è quadrata di dimensione  $k \times k$ ;
- è non negativa, elementi negativi comporterebbero un numero negativo di individui;
- ha componenti positive nella prima riga (fertilità) e nella sottodiagonale principale (probabilità di sopravvivenza).

Le matrici dei modelli di popolazione possono essere classificate in base alla natura della matrice di proiezione  $\mathbf{L}$ . Il caso più semplice che qui viene analizzato è quello con  $\mathbf{L}$  costante. Il modello (1.2) che ne risulta è un sistema lineare di equazioni alle differenze indipendenti dal tempo.<sup>1</sup>

*Osservazione 1.1.1.* Inizialmente si era supposto che ogni individuo potesse vivere al massimo  $k$  unità temporali, infatti nella matrice dell'equazione (1.1) l'elemento  $\mathbf{L}(k, k)$  è nullo. Diversamente, nel caso in cui si voglia prolungare l'età massima di sopravvivenza di ogni individuo e si suppongano  $F_i$  e  $P_i$  costanti nel successivo periodo di vita, si pone  $\mathbf{L}(k, k) = P_k$  dove  $P_k$  è chiamato *valore finale di sopravvivenza*.

**Definizione 1.1.2.** Un modello descrive un insieme di processi. Lo studio a lungo termine di questi processi prende il nome di **analisi asintotica**. Il suo scopo è quindi quello di analizzare il comportamento della popolazione dopo periodi di tempo molto lunghi: se continua a crescere oppure si estingue; se converge a un equilibrio oppure oscilla.

Viceversa lo studio dei processi in tempi molto brevi prende il nome di **analisi transiente**, utilizzata soprattutto per analizzare l'influenza delle perturbazioni sulla popolazione.

**Definizione 1.1.3.** Un modello (o una popolazione che lo descrive) si definisce **ergodico** se il suo comportamento asintotico è indipendente dalla distribuzione iniziale.

---

<sup>1</sup>Nel caso non costante,  $\mathbf{L}$  può dipendere dal tempo e/o dal vettore  $\mathbf{n}$ .

**Definizione 1.1.4.** Lo studio del cambiamento dello sviluppo della popolazione a seguito di perturbazioni e la sensibilità a queste modifiche prende il nome di **analisi delle perturbazioni** o **analisi di sensibilità**.

### 1.1.1 Autovalori e Autovettori nella matrice di Leslie

Siano  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{w}_i \neq 0 \in \mathbb{C}^n$  e  $\mathbf{v}_i \neq 0 \in \mathbb{C}^n$  tali che soddisfino le relazioni

$$\mathbf{L}\mathbf{w}_i = \lambda_i\mathbf{w}_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{v}_i^H \mathbf{L} = \lambda_i \mathbf{v}_i^H \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad (1.5)$$

dove con  $\mathbf{v}^H$  si indica il trasposto complesso coniugato di  $\mathbf{v}$ .

Questi valori prendono il nome di **autovalore** ( $\lambda$ ), **autovettore destro** ( $\mathbf{w}$ ) e **sinistro** ( $\mathbf{v}$ ) relativi a  $\lambda$ . La coppia  $(\lambda_i, \mathbf{w}_i)$  è chiamata **autocoppia**.

L'insieme degli autovalori di una matrice prende il nome di **spettro**, si indica con  $\text{spec}(\mathbf{L}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$  ed è rappresentato dall'insieme delle soluzioni dell'**equazione caratteristica**

$$\det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

dove  $p(\lambda) = \det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I})$  è chiamato **polinomio caratteristico**.

L'autovalore più grande in modulo, indicato con  $\lambda_1$ , prende il nome di **autovalore dominante**.

Nello sviluppo a lungo termine della popolazione, l'autocoppia  $(\lambda_1, \mathbf{w}_1)$  riveste un ruolo fondamentale. Per  $t \gg 1$  ogni classe di individui si stabilizza a un determinato valore che non dipende dal dato iniziale ma unicamente dalle caratteristiche della matrice di Leslie.

$\lambda_1$  definisce il tasso di crescita, in particolare:

- se  $\lambda_1 = 1$  la popolazione stabilizza;
- se  $\lambda_1 > 1$  la popolazione cresce;
- se  $0 < \lambda_1 < 1$  la popolazione decresce.

$\mathbf{w}_1$  fornisce informazioni sulla struttura della popolazione stabile, se normalizzato la sua  $i$ -esima componente indica la percentuale di individui presenti nella  $i$ -esima classe.

## 1.2 Esempio lineare e invariante dal tempo

Si considera una matrice di Leslie costante che definisce una popolazione strutturata in 3 diverse classi di età con le seguenti caratteristiche:

- il tasso di sopravvivenza degli individui della prima e seconda classe è rispettivamente il 30 e 50 per cento
- ogni individuo nella seconda e terza classe produce rispettivamente 1 e 5 individui.

Quindi

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Si prende come intervallo di proiezione 1 anno e come dato iniziale

$$\mathbf{n}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dopo 15 anni lo sviluppo della popolazione è quello presentato nella Figura 1.1. Per  $t \in [0, 15]$  i vettori aventi come componenti il numero di individui di ogni classe presentano un andamento piuttosto variabile, hanno periodi di crescita e di decrescita. Allo stesso modo si comporta il vettore della popolazione totale (nel grafico la linea tratteggiata).

Se si va ad analizzare il comportamento della popolazione in un arco di tempo molto più lungo emerge dalla Figura 1.2 come all'interno di ogni classe

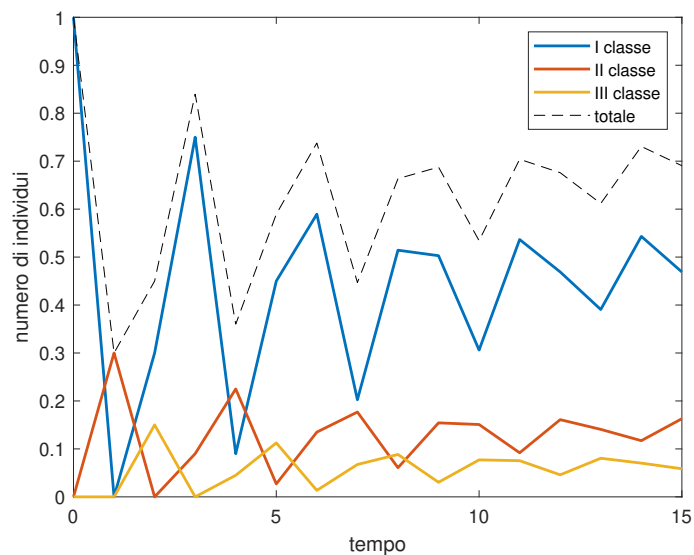


Figura 1.1: Andamento del totale (linea tratteggiata) e delle 3 classi di età della popolazione del modello (1.6) con 1 individuo nella distribuzione iniziale, dopo 15 anni.

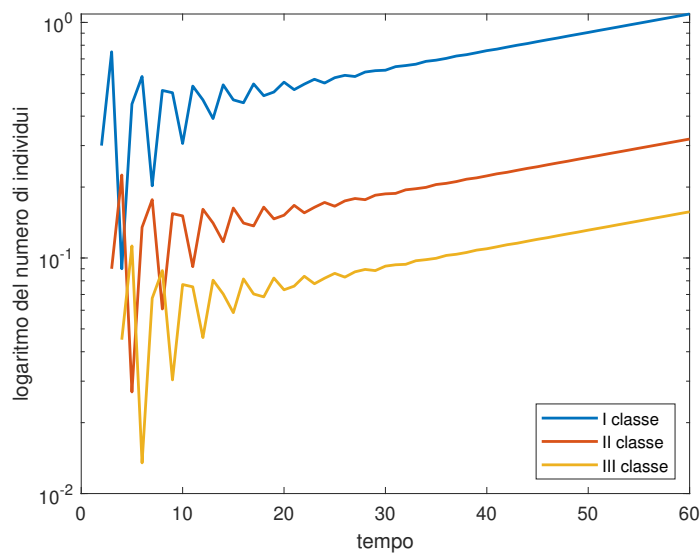


Figura 1.2: Andamento logaritmico delle 3 classi di età del modello di popolazione (1.6) con 1 individuo nella distribuzione iniziale, dopo 60 anni.

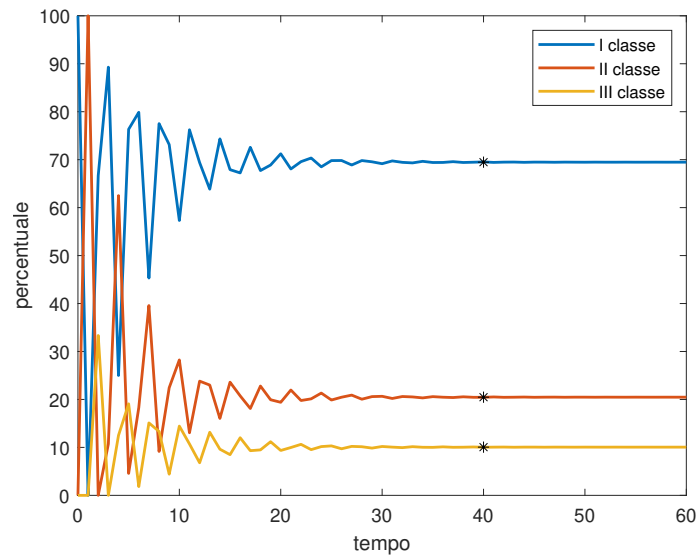


Figura 1.3: Percentuale rispetto al totale delle tre classi di età del modello di popolazione (1.6) con 1 individuo nella distribuzione iniziale.

il numero di individui continui a crescere esponenzialmente alla stessa velocità. Infatti l'autovalore dominante della matrice corrisponde a  $1.01815 > 1$ .

La Figura 1.3 mostra invece quale sarà la percentuale di ogni classe rispetto al totale della popolazione, è chiaro che ognuna si stabilizza in corrispondenza di un determinato valore: gli individui nella prima classe sono circa il 70%, nella seconda il 20% e nella terza il 10%.

Questi valori dipendono unicamente dall'autovettore dominante  $\mathbf{w}_1$ : gli asterischi nel grafico corrispondono alle sue componenti normalizzate in modo tale che la loro somma sia uguale a 100. Infatti

$$\frac{100\mathbf{w}_1}{\sum_{i=1}^3 w_i} = \begin{pmatrix} 69.48 \\ 20.47 \\ 10.05 \end{pmatrix}.$$

Queste considerazioni sono in accordo con la teoria associata al metodo delle potenze (si veda il Capitolo 3).

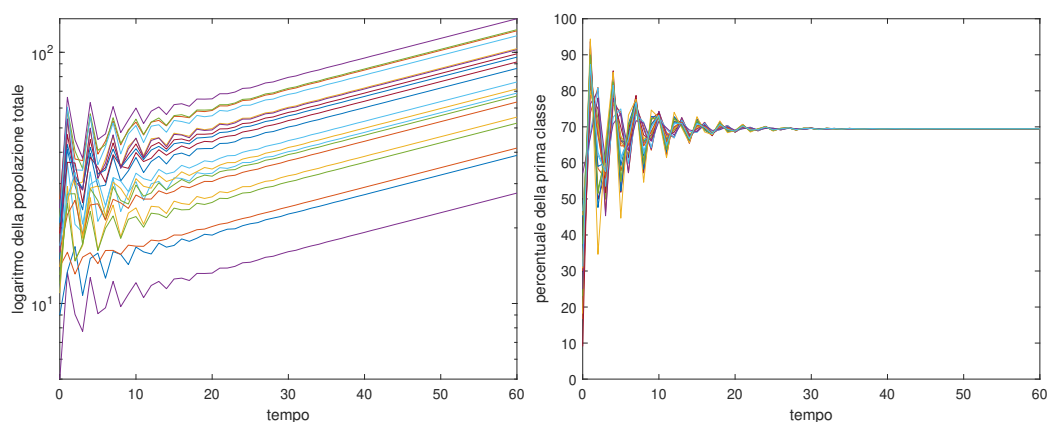


Figura 1.4: Andamento della popolazione del modello (1.6) con dato iniziale preso da una distribuzione casuale uniforme. Al variare della scelta di  $n_0$  il grafico a destra rappresenta l'andamento logaritmico, a sinistra la percentuale del numero di individui della prima classe rispetto al totale.

### 1.2.1 Perturbazione del dato iniziale

Tutte queste informazioni non dipendono dalla scelta di  $\mathbf{n}(0)$ : nella Figura 1.4 con il comando `n0=randi(10,1,3)` di MATLAB sono stati presi 20 diversi dati iniziali, le cui componenti sono quindi numeri interi presi da una distribuzione casuale uniforme nell'intervallo  $[0, 10]$ . Per ognuno è stato calcolato il numero totale di individui e la percentuale della prima classe sul totale.

Indipendentemente dal dato iniziale dopo un certo tempo la popolazione inizia a crescere esponenzialmente e gli individui della prima classe d'età rimangono il 70% del totale.

Nonostante il modello converga alla stessa distribuzione di età, la popolazione totale non è mai la stessa per tutti i valori di  $t$ .

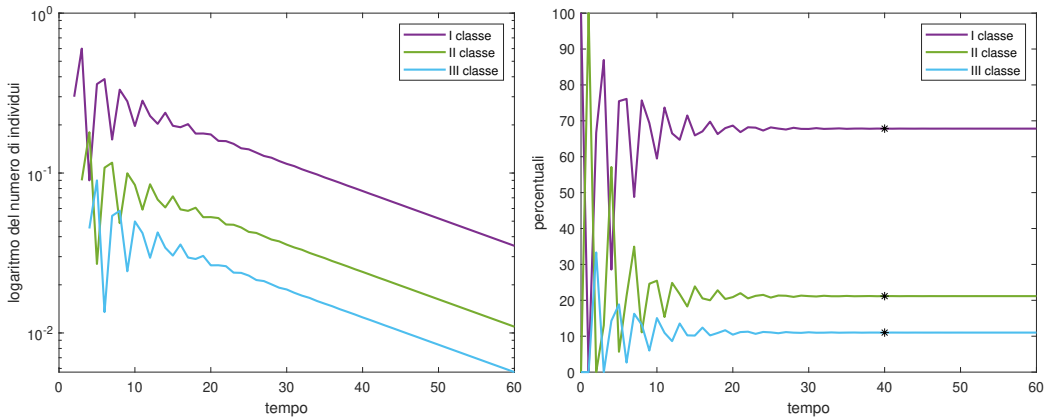


Figura 1.5: Andamento della popolazione del modello (1.7) con  $\lambda_1 < 1$ . Il grafico a destra rappresenta lo sviluppo logaritmico della popolazione, a sinistra la percentuale degli individui di ogni classe sul totale.

### 1.2.2 Perturbazione degli elementi della matrice

Si consideri ora un altro esempio ottenuto modificando i valori di (1.6) riducendo la fertilità della terza classe. Si ha

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

In questo caso l'autovalore dominante di  $\mathbf{L}$  è minore di 1 ( $\lambda_1 = 0.9613$ ). Infatti nel primo grafico della Figura 1.5 la popolazione diminuisce in maniera costante.

Inoltre in ogni classe di età la popolazione si stabilizza a valori che sono differenti dall'esempio precedente e questo è dovuto al cambiamento dell'autovettore associato a  $\lambda_1$ .

### 1.2.3 Effetto delle perturbazioni

A seconda di dove avviene la perturbazione dell'elemento della matrice lo sviluppo della popolazione può essere molto differente.

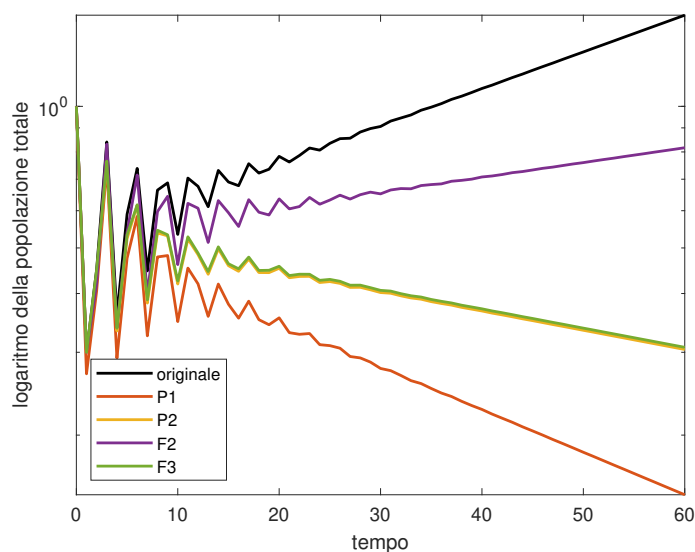


Figura 1.6: Perturbazioni della probabilità di sopravvivenza della prima e seconda classe e della fertilità della seconda e terza classe confrontate con l'andamento originale della popolazione del modello (1.6).

Nella Figura 1.6 sono state fatte 4 diverse modifiche alla matrice iniziale (1.6), riducendo separatamente del 10% i valori di  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ .

Mettendo a confronto lo sviluppo della popolazione a seguito delle perturbazioni di ogni valore con l'andamento della popolazione non perturbata si nota che solo la popolazione con la modifica della fertilità della seconda classe continua a crescere ( $\lambda_1 = 1.007$ ). Negli altri 3 casi la popolazione è portata all'estinzione in tempi più o meno rapidi (in ordine nel grafico  $\lambda_1 = 0.990$ ,  $\lambda_1 = 0.979$ ). In particolare la crescita appare più sensibile alla riduzione della probabilità di sopravvivenza della prima classe (infatti  $\lambda_1 = 0.979$ ).



## Capitolo 2

# Autovalori: proprietà e localizzazione

### 2.1 Equazione caratteristica della matrice di Leslie

**Proposizione 2.1.1.** *L'equazione caratteristica di una matrice di Leslie  $L \in \mathbb{R}^{k \times k}$  è*

$$\sum_{i=1}^k \left( \prod_{j=1}^{i-1} P_j \right) F_i \lambda^{-i} = 1. \quad (2.1)$$

*Dimostrazione.* Si considera il caso per  $k = 4$ :

$$\det(\mathbf{L} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} F_1 - \lambda & F_2 & F_3 & F_4 \\ P_1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Svolgendo il determinante rispetto la prima colonna si ottiene

$$\begin{aligned}
0 &= (F_1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ P_2 & -\lambda & 0 \\ 0 & P_3 & -\lambda \end{pmatrix} - P_1 \det \begin{pmatrix} F_2 & F_3 & F_4 \\ P_2 & -\lambda & 0 \\ 0 & P_3 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= (F_1 - \lambda)(-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ P_3 & -\lambda \end{pmatrix} - P_1 F_2 \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ P_3 & -\lambda \end{pmatrix} + P_1 P_2 \det \begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ P_3 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda^4 - F_1 \lambda^3 - P_1 F_2 \lambda^2 - P_1 P_2 F_3 \lambda - P_1 P_2 P_3 F_4.
\end{aligned}$$

Dividendo per  $\lambda^4$

$$\begin{aligned}
0 &= 1 - \frac{F_1}{\lambda} - \frac{P_1 F_2}{\lambda^2} - \frac{P_1 P_2 F_3}{\lambda^3} - \frac{P_1 P_2 P_3 F_4}{\lambda^4} \\
\Rightarrow 1 &= F_1 \lambda^{-1} + P_1 F_2 \lambda^{-2} - P_1 P_2 F_3 \lambda^{-3} + P_1 P_2 P_3 F_4 \lambda^{-4} \\
\Rightarrow 1 &= \sum_{i=1}^4 \left( \prod_{j=1}^{i-1} P_j \right) F_i \lambda^{-i}.
\end{aligned}$$

Proseguendo analogamente per  $k$  classi si ottiene la formula generale.  $\square$

## 2.2 L'equazione di proiezione

La relazione esistente tra gli autovalori della matrice di Leslie e il comportamento effettivo della popolazione dipende dall'equazione di proiezione.

Se  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ammette  $n$  autovalori distinti allora è diagonalizzabile, cioè:

$$\mathbf{A} = \mathbf{W} \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}^{-1} \quad (2.2)$$

dove

- $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n]$  matrice invertibile (autovalori distinti implicano autovettori linearmente indipendenti allora il rango di  $\mathbf{W}$  è massimo) avente sulle colonne gli autovettori destri di  $\mathbf{L}$
- $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  matrice diagonale avente sulla diagonale principale gli autovalori di  $\mathbf{L}$

Se  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  è non diagonalizzabile è sempre possibile scrivere la **decomposizione di Jordan**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1}.$$

**Definizione 2.2.1.** Siano  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , si definisce **funzione di matrice** la scrittura  $f(\mathbf{A})$ .

◦ Se  $\mathbf{A}$  è diagonale:  $f(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} f(a_{11}) & & & \\ & f(a_{22}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(a_{nn}) \end{pmatrix}.$

◦ Se  $\mathbf{A}$  non è diagonale ma è diagonalizzabile:  $\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1}$   
allora  $f(\mathbf{A}) = \mathbf{W}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{W}^{-1}.$

◦ Se  $\mathbf{A}$  non è diagonalizzabile:  $\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1}$  allora  $f(\mathbf{A}) = \mathbf{W}f(\mathbf{J})\mathbf{W}^{-1}.$

*Osservazione 2.2.2.* L'equazione (1.2) è una funzione di matrice e può essere espressa anche nel modo seguente:

$$\mathbf{n}(t) = f(\mathbf{L})\mathbf{n}(0) \quad \text{dove} \quad f(x) = x^t.$$

Quindi se  $\mathbf{L}$  è diagonalizzabile:

$$\mathbf{L}^t = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & & & \\ & \lambda_2^t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^t \end{pmatrix} \mathbf{W}^{-1}.$$

**Proposizione 2.2.3.**  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$  siano  $\lambda_i$  gli autovalori distinti e  $\mathbf{w}_i$  i relativi autovettori destri della matrice di Leslie. La soluzione dell'equazione  $\mathbf{n}(t+1) = \mathbf{L}\mathbf{n}(t)$  è il vettore di distribuzione della popolazione

$$\mathbf{n}(t) = \sum_{i=1}^k \mathbf{w}_i \lambda_i^t c_i. \quad (2.3)$$

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $\mathbf{L}$  ha  $k$  autovalori distinti allora è diagonalizzabile. Per l'Osservazione 2.2.2 si ha:

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{L}^t \mathbf{n}(0) = \mathbf{W} \mathbf{\Lambda}^t \mathbf{W}^{-1} \mathbf{n}(0) = \sum_{i=1}^k \mathbf{w}_i \lambda_i^t c_i.$$

Ponendo  $\mathbf{c} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{n}(0)$ .

□

## 2.3 Comportamento di $\lambda^t$

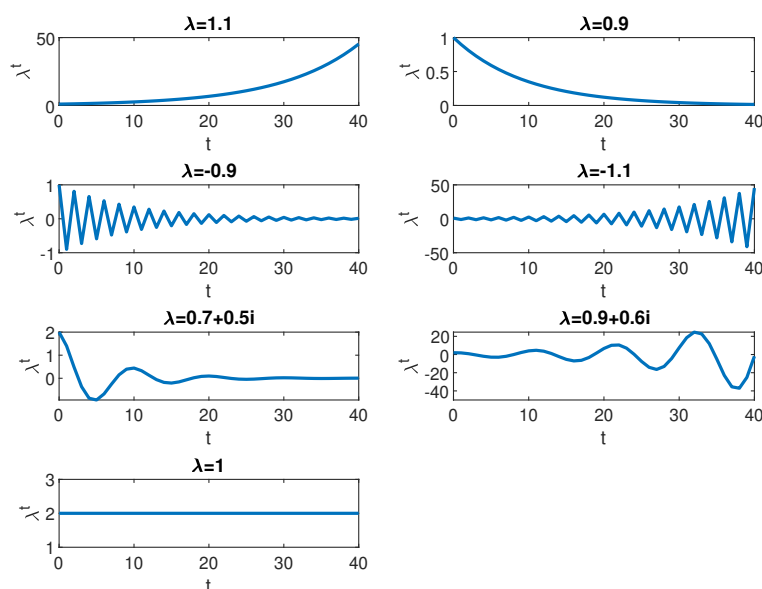


Figura 2.1: Comportamento di  $\lambda^t$  al variare di  $t$ , per svariate scelte di  $\lambda$ .

In Figura 2.1 si osserva l'andamento di  $\lambda^t$  al variare dell'autovalore. Infatti studiando la funzione  $\lambda^t$  per  $t \rightarrow \infty$ , si osservano le seguenti caratteristiche:

(a) *Caso reale*

- se  $\lambda > 1$  si ha una crescita esponenziale;
- se  $\lambda = 1$  è costante;
- se  $0 < \lambda < 1$  si ha una decrescita esponenziale;
- se  $-1 < \lambda < 0$  si hanno oscillazioni smorzate con periodo 2;

- se  $\lambda < -1$  si hanno oscillazioni divergenti con periodo 2.

(b) *Caso complesso*

Per il teorema fondamentale dell'algebra ogni equazione algebrica di ordine  $n$  ammette esattamente  $n$  soluzioni reali e complesse. Quindi se  $z \in \mathbb{C}$  è soluzione allora anche il suo coniugato  $\bar{z}$  lo è.

La stessa cosa accade per l'equazione caratteristica: le sue radici, cioè gli autovalori, possono essere anche complesse coniugate.

Siccome  $\mathbf{L}$  è reale, se  $\lambda = a + ib$  è un autovalore complesso con  $a, b \in \mathbb{R}$ , sicuramente anche il suo coniugato  $\bar{\lambda} = a - ib$  è un autovalore.

Siano inoltre  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$  il modulo di  $\lambda$  e  $\theta = \arctan(\frac{a}{b})$  l'angolo formato con il semiasse positivo reale, si scrive  $\lambda = \rho e^{i\theta}$ .

Quindi per la formula di de Moivre:  $\lambda^t = \rho^t e^{it\theta}$ .

Poiché il modulo di  $\lambda$  è un valore reale non negativo, ci si riconduce al caso reale.

In generale, le oscillazioni con periodo maggiore sono associate a  $\lambda_2$ , cioè al secondo autovalore più grande in modulo.

Da diversi studi effettuati su particolari tipologie di piante è emerso come una popolazione che cresce più velocemente abbia un periodo di oscillazione più breve, suggerendo l'esistenza di un legame tra il periodo di oscillazione dato da  $\lambda_2$  e  $\lambda_1$ .

## 2.4 I dischi di Gerschgorin

A partire dalla matrice, un modo per localizzare i suoi autovalori all'interno del piano complesso o della retta reale è l'utilizzo dei dischi di Gerschgorin.

Al seguito alcune premesse sulle norme di matrici.

**Definizione 2.4.1.** Una funzione  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  si definisce **norma di matrice** se  $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  si ha:

$$\text{i) } \|\mathbf{A}\| \geq 0 \text{ e } \|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\text{ii) } \|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\text{iii) } \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$$

$$\text{iv) } \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \Rightarrow \|\mathbf{A}^m\| \leq \|\mathbf{A}\|^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

**Definizione 2.4.2.** Si definisce **norma-p matriciale indotta** da una norma vettoriale

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^m} \frac{\|\mathbf{A}x\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|\mathbf{A}x\|_p.$$

Se  $p = 2$  si ha la norma matriciale indotta dalla norma euclidea vettoriale.

*Osservazione 2.4.3.* Siano  $\|\cdot\|_p$  una norma matriciale indotta e  $\|\cdot\|$  una qualsiasi norma matriciale, allora si hanno le seguenti proprietà:

1.  $\|\mathbf{A}x\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \|x\|_p, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$
2. Sia  $\mathbf{I}$  la matrice identità, allora  $\|\mathbf{I}\|_p = 1$  e  $\|\mathbf{I}\| \geq 1.$
3. Sia  $\mathbf{A}$  matrice quadrata invertibile allora  $\|\mathbf{A}^{-1}\| \geq \frac{1}{\|\mathbf{A}\|}.$

**Proposizione 2.4.4 (di Hirsch).** Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $\|\cdot\|$  la norma matriciale indotta. Allora

$$\text{spec}(\mathbf{A}) \subset \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z| \leq \|\mathbf{A}\|\}.$$

*Dimostrazione.* Si considera  $(\lambda, \mathbf{w})$  autocoppia di  $\mathbf{A}$  con  $\|\mathbf{w}\| = 1.$   
 $\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ , passando alla norma

$$|\lambda| = |\lambda|\|\mathbf{w}\| = \|\lambda\mathbf{w}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{A}\| \quad \forall \lambda.$$

□

**Definizione 2.4.5.** Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Si chiamano **dischi di Gerschgorin per righe** i cerchi nel piano complesso con centro  $a_{ii}$  e raggio  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ :

$$\mathcal{G}_i^{(r)} = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Analogamente si possono definire i **dischi di Gerschgorin per colonne** di  $\mathbf{A}$ , o per righe di  $\mathbf{A}^T$

$$\mathcal{G}_j^{(c)} = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \right\} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

**Teorema 2.4.6 (Primo teorema di Gerschgorin).** Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , allora

$$\text{spec}(\mathbf{A}) \subset \left( \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i^{(r)} \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i^{(c)} \right).$$

*Dimostrazione.* (a) Per prima cosa si dimostra che  $\text{spec}(\mathbf{A}) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i^{(r)}$ .

Sia  $(\lambda, \mathbf{w})$  una autocoppia di  $\mathbf{A}$  con  $x \neq 0$ , allora per la  $i$ -esima riga vale

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j = \lambda w_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} w_j = (\lambda - a_{ii}) w_i.$$

Sia  $\hat{i} \in \{1, \dots, n\}$  e  $w_{\hat{i}} = \max_{k=1, \dots, n} |w_k|$ . Per  $i = \hat{i}$  si ottiene quindi

$$(a_{\hat{i}\hat{i}} - \lambda) w_{\hat{i}} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \hat{i}}}^n a_{\hat{i}j} w_j.$$

Per cui passando al valore assoluto:

$$|a_{\hat{i}\hat{i}} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \hat{i}}}^n \frac{|a_{\hat{i}j}| |w_j|}{|w_{\hat{i}}|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \hat{i}}}^n |a_{\hat{i}j}| \quad \left( \frac{|w_j|}{|w_{\hat{i}}|} \leq 1 \right).$$

Ne segue che  $\lambda \in \mathcal{G}_i^{(r)} \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i^{(r)}$  poiché non è noto quale sia  $\hat{i}$  e può essere inserito nell'unione.

(b) Si dimostra in maniera analoga, sviluppando per righe di  $\mathbf{A}^T$  (quindi per colonne di  $\mathbf{A}$ ), che  $\text{spec}(\mathbf{A}) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i^{(c)}$ .

Segue la tesi. □

**Teorema 2.4.7 (Secondo Teorema di Gerschgorin).** *Sia  $\mathcal{I} \in \{1, \dots, n\}$  un insieme di indici. Se*

$$\text{spec}(\mathbf{A}) \subset \left( \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{G}_i^{(r)} \right) \cap \left( \bigcup_{i \notin \mathcal{I}} \mathcal{G}_i^{(r)} \right) \neq \emptyset,$$

*allora esistono  $|\mathcal{I}|$  autovalori di  $\mathbf{A} \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{G}_i^{(r)}$  e  $n - |\mathcal{I}|$  autovalori  $\in \bigcup_{i \notin \mathcal{I}} \mathcal{G}_i^{(r)}$ .*

I Teoremi 2.4 e 2.4.7 appena enunciati sono molto importanti al fine di fornire condizioni sufficienti per avere autovalori reali di  $\mathbf{A}$  non simmetrica reale, dare informazioni su  $\lambda_1$  e stimare l'intervallo spettrale (per una matrice simmetrica reale).

In particolare, calcolando i dischi di Gerschgorin, è possibile dare una stima di  $\lambda_1$  e valutare se ha molteplicità semplice. Questa ultima proprietà assicura la convergenza del metodo delle potenze che, come si vedrà più avanti, permette di approssimare l'autovalore dominante di una matrice.

Inoltre se si considera una decomposizione numerica, i dischi di Gerschgorin permettono di verificare la bontà della decomposizione controllando la vicinanza degli autovalori di  $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ , dove  $\delta\mathbf{A}$  rappresenta l'errore di  $\mathbf{A}$ , dagli autovalori delle matrici tramite le quali  $\mathbf{A}$  viene decomposta.



# Capitolo 3

## Analisi asintotica ed ergodicità

### 3.1 Il grafo del ciclo di vita

La suddivisione in età di una popolazione rappresenta in realtà un caso particolare di un modello più generale che si basa sullo studio di una popolazione suddivisa in *fasi o taglie*.

Generalmente questo modello viene rappresentato graficamente tramite il **grafo del ciclo di vita**.

Si considerano un intervallo di proiezione e un insieme di fasi  $\{1, 2, \dots, k\}$ , ciascuna rappresentata da un **nodo**  $\mathcal{N}_i$ . Se un individuo al tempo  $t$  nella fase  $i$  aumenta, tramite sviluppo o riproduzione, gli individui nella fase  $j$  al tempo  $t + 1$ , si pone un **arco** dal nodo  $\mathcal{N}_i$  al nodo  $\mathcal{N}_j$ .

Se invece una classe aumenta gli individui di quella stessa classe si pone un arco da  $\mathcal{N}_i$  a se stesso che prende il nome di **cappio** o **self-loop**.

**Definizione 3.1.1.** Si definisce **cammino** da  $\mathcal{N}_i$  a  $\mathcal{N}_j$  una sequenza di archi percorsa nella stessa direzione di ogni arco passando per ogni nodo una e una sola volta.

Si denota **lunghezza di un cammino** il numero di archi che contiene.

Un **cammino chiuso** o **loop** ha inizio e fine nello stesso nodo.

Esempio. Un cappio è un cammino chiuso con lunghezza 1.

**Definizione 3.1.2.** Un grafo si dice **fortemente connesso** se contiene un cammino chiuso che percorre tutti i nodi.

Ogni arco da  $\mathcal{N}_i$  a  $\mathcal{N}_j$  viene denominato da un coefficiente  $a_{ji}$  che indica il numero di individui al tempo  $t$  nella fase  $i$  per gli individui al tempo  $t + 1$  nella fase  $j$ . Di conseguenza il numero di individui totale al tempo  $t + 1$  nella fase  $j$  sarà:  $n_j(t + 1) = \sum_{i=1}^k a_{ji}n_i(t)$ .

L'importanza del grafo di vita è dovuta all'isomorfismo con la matrice  $\mathbf{A}$  nell'equazione di proiezione  $\mathbf{n}(t + 1) = \mathbf{A}\mathbf{n}(t)$ .

In questo caso  $\mathbf{A}$  rappresenta una popolazione suddivisa in fasi o taglie ed è definita nel modo seguente:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} G_1 & F_2 & F_3 & \cdots & F_k \\ P_1 & G_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & G_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_{k-1} & G_k \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

dove ogni elemento  $a_{ji}$  rappresenta il coefficiente dell'arco da  $\mathcal{N}_i$  a  $\mathcal{N}_j$ .

In questo caso il vettore  $\mathbf{n}(t)$  indica il numero di individui presenti al tempo  $t$  in ogni fase.

Inoltre si ha:

- $P_i > 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$  rappresenta la probabilità di un individuo nella classe  $i$  al tempo  $t$  di sopravvivere e crescere passando alla classe  $i + 1$  nel tempo  $t + 1$ .
- $G_i > 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$  rappresenta la probabilità di sopravvivere al tempo  $t$  e rimanere nella stessa classe al tempo  $t + 1$ .

## Alcuni esempi di grafi

1. *Popolazione strutturata in classi di età.*

Si consideri l'esempio (1.6) analizzato nella Sezione 1.2 in cui una po-

popolazione suddivisa in classi di età veniva rappresentata dalla seguente matrice.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il grafo ad essa associato è riportato in Figura 3.1. Ogni classe è collegata da un arco alla successiva per probabilità di sopravvivenza. Inoltre la seconda e la terza classe sono collegate alla prima per riproduzione.

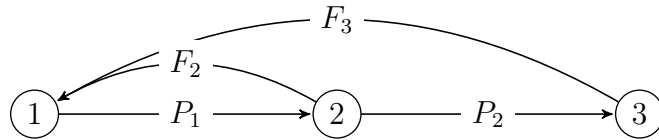


Figura 3.1: Grafo del modello di popolazione (1.6) suddiviso in classi di età.

## 2. Popolazione strutturata in classi di taglia.

Si considerino un tempo di proiezione di 1 anno e una popolazione di orche suddivisa in *cuccioli*  $\mathcal{N}_1$ , *giovani* (hanno superato un anno di vita ma non sono ancora mature)  $\mathcal{N}_2$ , *femmine mature*  $\mathcal{N}_3$  e *sterili*  $\mathcal{N}_4$ .

La Figura 3.2 mostra che solo le femmine giovani e mature contribuiscono all'aumento dei cuccioli tramite riproduzione mentre  $F_4 = 0$ .

Inoltre per gli individui della prima classe  $G_1 = 0$ : se sopravvivono passano sicuramente alla classe successiva. Questo avviene perché si considera il tempo di proiezione di 1 anno uguale alla grandezza temporale della prima classe. Infatti le fasi non necessariamente hanno tutte la stessa lunghezza.

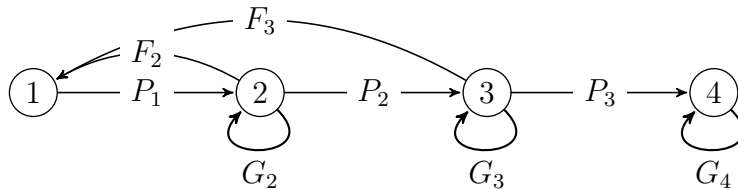


Figura 3.2: Grafo della popolazione di orche suddivisa in classi di taglia.

## 3.2 Il teorema di Perron-Frobenius

Il grafo di vita riveste un ruolo centrale nell'insieme di risultati a cui viene dato il nome di **Teorema di Perron-Frobenius** riguardanti le proprietà degli autovalori di matrici non negative.

### Classificazioni matriciali

**Definizione 3.2.1.** Si chiama matrice di **permutazione** una matrice ottenuta scambiando una o più righe o colonne della matrice identità.

Una matrice si definisce:

- **positiva** ( $\mathbf{A} > 0$ ) se  $a_{ij} > 0 \quad \forall i, j$ .
- **non negativa** ( $\mathbf{A} \geq 0$ ) se  $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$ .

Si divide in:

- **riducibile** se esiste una matrice  $\mathbf{P}$  di permutazione con la quale si può ottenere una *matrice triangolare a blocchi*

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array} \right)$$

dove le sottomatrici  $\mathbf{B}_{ii} \quad \forall i = 1, 2$  sono quadrate e, se riducibili, possono essere suddivise ulteriormente in blocchi.

Il grafo associato a una matrice riducibile non è fortemente connesso.

Esempio. Le popolazioni in cui una classe non viene coinvolta nella riproduzione sono associate a matrici riducibili, un esempio è rappresentato dalla popolazione di orche in Figura 3.2.

- **irriducibile** se non è riducibile.

Il grafo ad essa associato è fortemente connesso.

Si divide a sua volta in:

\* **primitiva** se esiste un  $k > 0$  tale che  $\mathbf{A}^k$  sia positiva.

Equivalentemente il massimo comune divisore della lunghezza dei cammini chiusi del grafo associato è uguale a 1.

Esempio 1. Nel caso di classificazione per età, la matrice è primitiva se esistono almeno due classi adiacenti con fertilità positiva. Infatti se le lunghezze dei cammini chiusi sono  $l$  e  $l + 1$  allora  $\text{MCD}(l, l + 1) = 1$ .

Esempio 2. Nel caso di classificazione in fasi, la matrice è primitiva se è presente almeno un cappio nel grafo associato. Infatti  $\forall l \text{ MCD}(1, l) = 1$ .

\* **non primitiva** o **ciclica** se il massimo comune divisore della lunghezza dei cammini chiusi del grafo associato è uguale a  $d$  con  $d \neq 1$ .  $d$  prende il nome di **indice di imprimitività**.

Esempio. Popolazioni con una sola classe d'età riproduttiva.

La classificazione delle matrici a partire dallo studio del grafo associato risulta semplice nel caso di matrici piccole ma all'aumentare delle dimensioni l'analisi si complica.

Per questo esistono diversi teoremi che si occupano della classificazione di matrici irriducibili e primitive da un punto di vista numerico.

**Teorema 3.2.2.** *Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matrice quadrata non negativa, sia  $c$  la lunghezza del più corto cammino chiuso nel grafo di  $\mathbf{A}$ . Allora si verificano le seguenti:*

1.  $\mathbf{A}$  è irriducibile  $\Leftrightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{s-1}$  è positiva.
2.  $\mathbf{A}$  è primitiva  $\Leftrightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{s+c(s-2)}$  è positiva.
3.  $\mathbf{A}$  è primitiva  $\Leftrightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{s^2-2s+2}$  è positiva

*Osservazione 3.2.3.* La determinazione di matrici primitive e irriducibili dipende solamente dalla posizione degli zeri e non dai termini positivi.

Si definisce **matrice delle adiacenze**  $\mathbf{M}$  la matrice binaria quadrata associata a un grafo tale che

$$\mathbf{M}(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } i \text{ è collegato da un arco al vertice } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si può sostituire la matrice delle adiacenze alla matrice alla quale si vuole applicare il Teorema 3.2.2, posizionando quindi al posto di ogni entrata positiva il valore 1.

Facendo lo stesso procedimento al termine di ogni elevamento a potenza si evitano errori di *underflow* e *overflow*<sup>1</sup> e il costo computazionale si abbassa.

*Osservazione 3.2.4.* Per calcolare numerosi elevamenti a potenza di matrici è conveniente procedere in questo modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^4 &= \mathbf{A}^2\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^8 &= \mathbf{A}^4\mathbf{A}^4 \quad \text{etc...} \end{aligned}$$

Riducendo il numero di moltiplicazioni tra matrici.

**Teorema di Perron-Frobenius.** *Si distinguono i seguenti casi.*

(i) *Sia  $\mathbf{A}$  una matrice irriducibile e primitiva allora esiste un autovalore  $\lambda_1$ , radice semplice dell'equazione caratteristica, reale tale che*

$$\lambda_1 > 0 \quad \wedge \quad \lambda_1 > |\lambda_i| \quad \forall i > 1$$

*inoltre gli autovettori destri e sinistri relativi a  $\lambda_1$  sono reali e positivi.*

(ii) *Sia  $\mathbf{A}$  una matrice irriducibile e non primitiva con indice di imprimitività  $d$ , allora esiste un autovalore  $\lambda_1$ , radice semplice della equazione caratteristica, reale tale che*

$$\lambda_1 > 0 \quad \wedge \quad \lambda_1 \geq |\lambda_i| \quad \forall i > 1$$

---

<sup>1</sup>Questo avviene quando i valori che devono essere memorizzati dalla macchina risultano essere rispettivamente più piccoli della sensibilità o maggiori dei bit fissati in memoria

In particolare  $\mathbf{A}$  ha  $d$  autovalori uguali in valore assoluto all'autovalore dominante:

$$\lambda_j = \lambda_1 e^{\frac{2k\pi i}{d}} \quad \forall k = 1, 2, \dots, d-1 \quad \forall j = 2, 3, \dots, d$$

Gli autovettori destri e sinistri relativi a  $\lambda_1$  sono positivi.

(iii) Sia  $\mathbf{A}$  una matrice riducibile allora esiste un autovalore  $\lambda_1$  reale tale che

$$\lambda_1 \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda_i \geq |\lambda_1| \quad \forall i > 1$$

Gli autovettori destri e sinistri relativi a  $\lambda_1$  sono nulli o positivi.

### 3.3 Il teorema ergodico forte

**Teorema ergodico forte.** Sia  $\mathbf{A}$  una matrice primitiva di dimensione  $n \times n$ , il tasso di crescita e la struttura stabile dipendono rispettivamente da  $\lambda_1$  e  $\mathbf{w}_1$ . In particolare il tasso di incremento demografico corrisponde a

$$r = \ln(\lambda_1). \quad (3.2)$$

*Dimostrazione.* Nella Proposizione 2.3 era stato dimostrato che

$$\mathbf{n}(t) = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^t \mathbf{w}_i.$$

Per ipotesi  $\mathbf{A}$  è primitiva, perciò per il teorema di Perron-Frobenius esiste l'autovalore dominante. Raccogliendolo si ha:

$$\mathbf{n}(t) = \lambda_1^t \sum_{i=1}^n c_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^t \mathbf{w}_i = \lambda_1^t \left( c_1 \mathbf{w}_1 + \sum_{i=2}^n c_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^t \mathbf{w}_i \right).$$

Quindi

$$\frac{\mathbf{n}(t)}{\lambda_1^t} = c_1 \mathbf{w}_1 + \sum_{i=2}^n c_i \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^t \mathbf{w}_i \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} c_1 \mathbf{w}_1,$$

supponendo  $c_1 \neq 0$ .

Poiché  $\lambda_1 > |\lambda_i| \quad \forall i > 1$ , i termini  $\left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^t \quad \forall i > 1$  sono trascurabili per

$t \rightarrow \infty$ .

Il tasso di crescita dipende in maniera ergodica da  $\lambda_1$  e la popolazione si stabilizza in proporzione a  $\mathbf{w}_1$ .  $\square$

*Osservazione 3.3.1.* Nella Sezione 2.3 si era osservato che elevando un autovalore complesso a  $t$  si ottengono oscillazioni. Questo comportamento si spiega nelle matrici non primitive. Per il teorema di Perron-Frobenius nelle matrici non primitive con indice di imprimitivit   $d$  solo  $\lambda_1$    un autovalore reale e positivo. Gli altri  $d - 1$  autovalori con lo stesso modulo sono  $\lambda_1 e^{\frac{2k\pi i}{d}}$  dove  $e^{\frac{2k\pi i}{d}}$  sono le radici  $d$ -esime dell'unit .

**Teorema 3.3.2.** *Sia  $\mathbf{A}$  una matrice non primitiva con indice di imprimitivit   $d$  e sia  $\mathbf{n}(0)$  non proporzionale a  $\mathbf{w}_1$  allora la distribuzione stabile di popolazione non converge a  $\mathbf{w}_1$  ma oscilla con periodo  $d$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione procede in modo analogo a quella del teorema ergodico ma tiene conto del fatto che la matrice ha indice  $d$ : si hanno  $\lambda_1 = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_d|$  autovalori uguali in modulo tali che

$$|\lambda_i| = \lambda_1 e^{\frac{2(i-1)\pi i}{d}} = \lambda_1 e^{i\theta_i} \quad \forall i = 1, \dots, d$$

dove  $\theta_i = \frac{2(i-1)\pi}{d}$    l'angolo descritto nel piano complesso. Quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(t) &= \sum_{i=1}^d c_i \lambda_i^t \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^d c_i \lambda_1^t e^{it\theta_i} \mathbf{w}_i = \lambda_1^t \left( c_1 \mathbf{w}_1 + \sum_{i=2}^d c_i e^{it\theta_i} \mathbf{w}_i \right). \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{n}(t)}{\lambda_1^t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( c_1 \mathbf{w}_1 + \sum_{i=2}^d c_i e^{it\theta_i} \mathbf{w}_i \right). \end{aligned}$$

Il limite   periodico con periodo  $d$  perci  la popolazione non converge a una struttura stabile proporzionale a  $\mathbf{w}$  e oscilla con uguale periodo.  $\square$

Esempio. Nel caso di popolazioni suddivise per et , le matrici con solamente una classe produttiva sono matrici non primitive. Sia ad esempio:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$



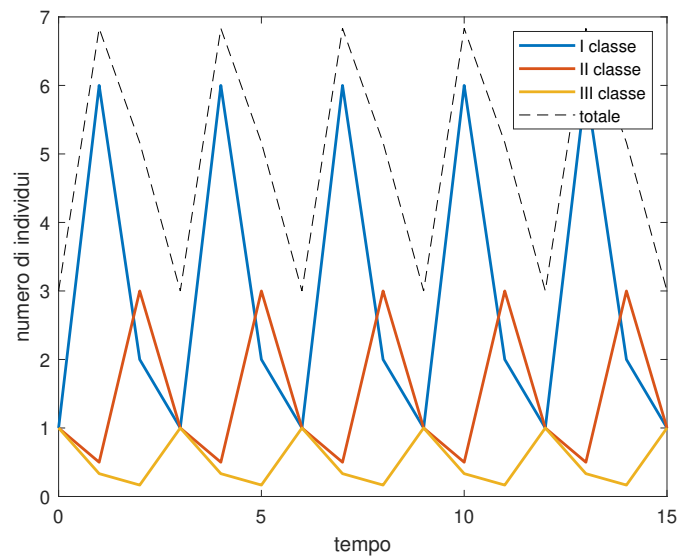


Figura 3.3: Oscillazioni delle prime tre classi e del totale (linea tratteggiata) del modello di popolazione (3.3).

In Figura 3.3 si osserva che la popolazione in ogni classe, e quindi di conseguenza anche quella totale, continua ad oscillare in maniera regolare, confermando la tesi del teorema.

*Osservazione 3.3.3.* Nel caso in cui lo stadio iniziale di popolazione è proporzionale a  $\mathbf{w}_1$  (cioè  $c_2 = \dots = c_d = 0$ ), la popolazione mantiene per tutti i tempi  $t$  la stessa struttura che dipende da  $\mathbf{w}_1$ .

Le oscillazioni e la periodicità delle popolazioni rappresentate da matrici primitive si rispecchiano nella ciclicità dei grafi ad esse associate: questi ultimi sono caratterizzati dalla presenza di cammini chiusi che hanno massimo comune divisore della lunghezza diverso da 1. Perciò tutti i cammini chiusi risultano essere multipli dello stesso cammino.

### 3.3.1 Velocità di convergenza

Si è visto che  $\lambda_1$  indica il tasso di crescita della popolazione però, nello studio della convergenza alla distribuzione stabile, anche il secondo autovalore più grande in modulo  $\lambda_2$  assume un ruolo importante.

**Definizione 3.3.4.** Si definisce **fattore di smorzamento** il valore  $\rho$  che indica quanto velocemente le oscillazioni raggiungono lo stadio di struttura stabile. Cioè

$$\rho = \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}. \quad (3.4)$$

**Teorema 3.3.5.** Una popolazione converge a una struttura stabile in modo esponenziale con una velocità che è almeno  $\ln \rho$ . Cioè se  $c_1 \neq 0$  allora esiste una costante  $K > 0$  per cui

$$\left\| \frac{\mathbf{n}(t)}{\lambda_1^t} - c_1 \mathbf{w}_1 \right\| \leq K e^{-t \ln \rho}. \quad (3.5)$$

*Dimostrazione.* Dal Teorema ergodico forte e sostituendo il valore del fattore di smorzamento si ha:

$$\frac{\mathbf{n}(t)}{\lambda_1^t} = c_1 \mathbf{w}_1 + c_2 \left(\frac{1}{\rho^t}\right)^t \mathbf{w}_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^t \mathbf{w}_n \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{n}(t)}{\lambda_1^t} = c_1 \mathbf{w}_1, \quad c_1 \neq 0$$

Per cui, essendo i valori successivi trascurabili rispetto  $\lambda_1$ , si ricava:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\mathbf{n}(t)}{\lambda_1^t} - c_1 \mathbf{w}_1 - \frac{c_2}{\rho^t} \mathbf{w}_2 \right) = 0.$$

Da qui si ottiene che

$$\left\| \frac{\mathbf{n}(t)}{\lambda_1^t} - c_1 \mathbf{w}_1 \right\| \leq k \rho^{-t} = k e^{-t \ln \rho}.$$

□

*Osservazione 3.3.6.* Dal teorema si osserva che la popolazione raggiunge la struttura stabile tanto più velocemente quanto l'autovalore dominante  $\lambda_1$  è maggiore rispetto al secondo autovalore più grande in modulo.

Banalmente il caso in cui la popolazione impiega il minor tempo possibile per convergere è il caso in cui  $\mathbf{n}(0)$  è proporzionale a  $\mathbf{w}_1$ , la popolazione non presenta oscillazioni e converge dalla partenza.

Se  $c_2 = 0$  la velocità di convergenza è maggiore ed è almeno  $\ln \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|}$ .

*Osservazione 3.3.7.* Il tempo necessario per fare in modo che il contributo dato da  $\lambda_1$  sia  $x$  volte più grande di quello dato da  $\lambda_2$  è

$$\left( \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} \right)^t = x \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln x}{\ln \rho}. \quad (3.6)$$

### Distanza dalla distribuzione stabile

Può essere utile conoscere la distanza tra due diverse distribuzioni o tra una distribuzione osservata e il suo eventuale stadio di convergenza.

Si considerano due diverse misure.

**Definizione 3.3.8.** Sia  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}$  la distribuzione stabile. Supponendo che  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{n}(t)$  siano scalati in modo tale che rappresentino proporzionalmente gli individui in ogni classe e  $\mathbf{x}(t) = \frac{\mathbf{n}(t)}{\sum_i n(t)}$ . Si definisce **delta di Keyfitz** il valore

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_i |x_i - w_i|. \quad (3.7)$$

Misura la distanza tra i due vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{w}$  e quindi  $0 \leq \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \leq 1$ . É indipendente dal percorso attraverso il quale  $\mathbf{n}$  converge a  $\mathbf{w}$ .

**Definizione 3.3.9.** Siano

$$\mathbf{s}(\mathbf{A}, \mathbf{n}(0), t) = \sum_{i=0}^t \left( \frac{\mathbf{n}(i)}{\lambda_1^i} - c_1 \mathbf{w}_1 \right) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{A}, \mathbf{n}(0), t) = \sum_{i=0}^t \left| \frac{\mathbf{n}(i)}{\lambda_1^i} - c_1 \mathbf{w}_1 \right| \quad (3.9)$$

due vettori che misurano la distanza tra  $\frac{\mathbf{n}(t)}{\lambda_1^t}$  e  $\mathbf{w}_1 c_1$  lungo il percorso per il quale il modello converge. Si chiama **distanza cumulativa di Cohen** la misura della distanza tra  $\mathbf{n}(0)$  e la distribuzione di convergenza definita nel modo seguente:

$$D_1 = \sum_{i=0}^t \lim_{t \rightarrow \infty} |s_i(\mathbf{A}, \mathbf{n}(0), t)| \quad (3.10)$$

$$D_2 = \sum_{i=0}^t \lim_{t \rightarrow \infty} |r_i(\mathbf{A}, \mathbf{n}(0), t)|. \quad (3.11)$$

*Osservazione 3.3.10.* Se i valori di fertilità tendono a concentrarsi in una sola classe, la distanza  $D_1$  diminuisce mentre la distanza  $D_2$  aumenta. Questo comportamento viene causato dalle oscillazioni provocate dalle matrici non primitive (con solo una classe riproduttiva).

Infatti, dato che  $\mathbf{s}(\mathbf{A}, \mathbf{n}(0), t)$    una sommatoria di termini positivi e negativi della distribuzione stabile, questi tendono a essere cancellati dalle oscillazioni. Viceversa  $\mathbf{r}(\mathbf{A}, \mathbf{n}(0), t)$    una sommatoria di valori assoluti che provocano una amplificazione dei valori delle oscillazioni.

### 3.3.2 Il metodo delle potenze

La teoria alla base del Teorema ergodico forte   la stessa che caratterizza il **metodo delle potenze**. Si tratta di un metodo iterativo che ha lo scopo di calcolare l'autocoppia dominante  $(\lambda_1, \mathbf{w}_1)$  di una matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . La procedura si basa sulla costruzione di due successioni  $\{\mathbf{w}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  e  $\{\lambda^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ <sup>2</sup> tali che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{w}_1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{(k)} = \lambda_1.$$

Tenendo con che con  $\mathbf{w}^H$  si indica il complesso coniugato di  $\mathbf{w}$ , si ha il seguente algoritmo.

Algoritmo:

Fissato  $\mathbf{w}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\|\mathbf{w}^{(0)}\| = 1$

For  $k = 0, 1, 2, \dots$  fino a convergenza

$$y = \mathbf{A} \mathbf{w}^{(k)}$$

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = y / \|y\|$$

$$\lambda^{(k+1)} = (\mathbf{w}^{(k+1)})^H \mathbf{A} \mathbf{w}^{(k+1)}$$

end

*Osservazione 3.3.11.* Si definisce **quoziente di Rayleigh** il seguente valore

$$\frac{(\mathbf{w}^{(k+1)})^H \mathbf{A} \mathbf{w}^{(k+1)}}{(\mathbf{w}^{(k+1)})^H \mathbf{w}^{(k+1)}} \in \mathbb{R}$$

e si dimostra che

$$\lambda_{min} \leq \frac{(\mathbf{w}^{(k+1)})^H \mathbf{A} \mathbf{w}^{(k+1)}}{(\mathbf{w}^{(k+1)})^H \mathbf{w}^{(k+1)}} \leq \lambda_{max}$$

(il massimo e il minimo vengono raggiunti rispettivamente dall'autovettore  $\mathbf{w}_{max}$  e  $\mathbf{w}_{min}$ ).

<sup>2</sup>Con la notazione  $\mathbf{w}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda^{(k)} \in \mathbb{R}$  si indica la  $k$ -esima iterata.

Nel metodo delle potenze il quoziente viene utilizzato quindi per calcolare l'autovalore ad ogni iterata ma  $(\mathbf{w}^{(k+1)})^H \mathbf{w}^{(k+1)} = 1$  poiché  $\mathbf{w}^{(k+1)}$  viene precedentemente normalizzato.

Per quanto riguarda la convergenza, si dimostra in maniera analoga al teorema ergodico forte che anche nel metodo delle potenze l'algoritmo converge nella direzione di  $\mathbf{w}_1$  con una velocità dettata da  $\lambda_1$ .

Questo è dovuto al fatto che le iterate dei due metodi sono le stesse: ad ogni iterazione si ha un prodotto matrice per vettore il cui risultato viene poi usato nel prodotto successivo.

Se  $\mathbf{w}^{(0)}$  ha proiezione non nulla nella direzione di  $\mathbf{w}_1$  (ponendo  $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{W}\boldsymbol{\xi}$ ,  $\xi_1 \neq 0$ ) si può parlare di ergodicità, perciò il vettore  $\mathbf{w}^{(0)}$  non ha influenza sulla convergenza e può essere scelto da una distribuzione casuale uniforme.

In particolare la convergenza è lineare rispetto a  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$  e tanto maggiore è la distanza dell'autovalore dominante dallo spettro della matrice, tanto maggiore sarà la velocità di convergenza. Infatti vale l'analogo del Teorema 3.3.5 che può essere riscritto come:

$$\|\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w}_1\|_2 \leq C \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k = C\rho^{-k}$$

Il metodo delle potenze converge solo nel caso in cui  $\lambda_1$  sia un autovalore semplice in modulo.

Se invece l'autovalore ha molteplicità algebrica maggiore di 1, il metodo converge a un qualsiasi vettore dell'autospazio invariante associato se non esistono altri autovalori con lo stesso modulo ma diversi da  $\lambda_1$ . Altrimenti non c'è convergenza.

Un modo per prevedere la convergenza del metodo è calcolare i dischi di Gerschgorin per la matrice data e applicare i Teoremi 2.4 e 2.4.7.

Il metodo si arresta nel momento in cui viene soddisfatta la seguente relazione, calcolata ad ogni iterazione:

$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{|\lambda^{(k)}|} < \text{tol},$$

dove  $\text{tol}$  rappresenta la tolleranza inizialmente fissata mentre

$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{w}^{(k)} - \lambda^{(k)}\mathbf{w}^{(k)}$  è il residuo riferito alla  $k$ -esima iterata.

### 3.4 Matrici riducibili

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice riducibile. Si può scomporre  $\mathbf{A}$  in modo tale che ogni blocco che la compone risulti essere irriducibile:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{B}_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{m1} & \mathbf{B}_{m2} & \mathbf{B}_{m3} & \cdots & \mathbf{B}_{mm} \end{pmatrix}.$$

La decomposizione è unica a meno di permutazioni dei blocchi.

**Definizione 3.4.1.** Sia  $\mathcal{S}_i = \{\mathcal{N}_k, \dots, \mathcal{N}_l\} \quad \forall k < l$ , cioè l'insieme di nodi presenti nella sottomatrice  $\mathbf{B}_{ii}$  con le seguenti caratteristiche:

- tutti i nodi appartenenti allo stesso insieme  $\mathcal{S}_i$  sono tra loro dipendenti
- i nodi  $\in \mathcal{S}_i$  possono essere collegati ai nodi degli insiemi successivi  $\{\mathcal{S}_{i+1}, \dots, \mathcal{S}_m\}$
- i nodi  $\in \mathcal{S}_i$  non sono collegati ai nodi degli insiemi precedenti  $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{i-1}\}$

Ogni sottomatrice irriducibile  $\mathbf{B}_{ii}$  può essere analizzata separatamente dalle altre dato che il grafo associato è per definizione fortemente connesso e i suoi nodi sono indipendenti da altri. In questo caso la matrice si comporta come una generica matrice di Leslie.

Nel caso invece si volesse analizzare in toto la matrice  $\mathbf{A}$  il comportamento appare differente: non è ergodico.

### 3.4.1 Esempio: popolazione con classi di età post riproduttive.

Si consideri una popolazione strutturata in 5 classi di età in cui solo la seconda e la terza classe sono fertili ( $F_4 = 0 = F_5$ ).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

La Figura 3.4 mostra il grafo associato alla matrice  $\mathbf{A}$ .

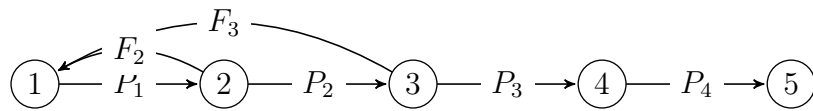


Figura 3.4: Grafo di una popolazione post riproduttiva.

Non è fortemente connesso perché i nodi  $\mathcal{N}_4$  e  $\mathcal{N}_5$  non sono collegati da un cammino chiuso agli altri nodi.

La matrice  $\mathbf{A}$  si può considerare come una matrice a blocchi:

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & F_2 & F_3 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array} \right). \quad (3.12)$$

Si pone:  $\mathcal{S}_1 = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3\}$ ,  $\mathcal{S}_2 = \{\mathcal{N}_4, \mathcal{N}_5\}$ .

$\mathbf{B}_{11}$  rappresenta la matrice delle tre classi riproduttive della popolazione. È una matrice irriducibile perciò dal teorema ergodico forte lo sviluppo della popolazione e la sua stabilità sono indipendenti dal dato iniziale (Figura 3.5).

$\mathbf{B}_{22}$  rappresenta la matrice delle due classi post riproduttive. Indipendentemente da  $\mathbf{n}(0)$ , la popolazione è destinata all'estinzione poiché la fertilità è nulla.

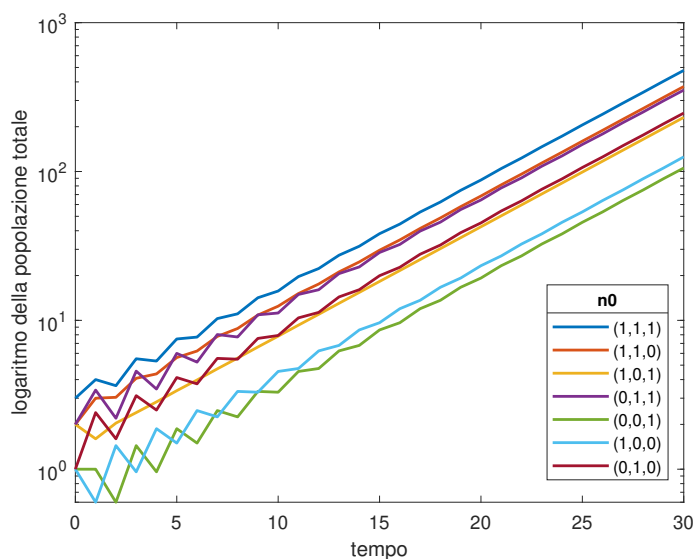


Figura 3.5: Andamento logaritmico della popolazione totale della sottomatrice  $\mathbf{B}_{11}$  del modello (3.13), al variare del dato iniziale.

Se si considera  $\mathbf{A}$ , se la distribuzione iniziale presenta individui solo nelle classi post riproduttive la popolazione per  $t = 1$  o  $t = 2$  si è estinta.

Si considerano i seguenti valori di fertilità e sopravvivenza:

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{B}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

In Figura 3.6 appare lo sviluppo in scala logaritmica della popolazione utilizzando diversi dati iniziali. Si osserva che solamente nel caso con  $\mathbf{n}(0) = (0, 0, 0, 1, 1)^T$  la popolazione non aumenta e si estingue nell'arco di pochi anni, nonostante  $\lambda_1 > 1$ .

Questo avviene proprio perché la distribuzione iniziale scelta presenta individui solamente nella quarta e quinta classe che sono le due classi post riproduttive.

Per questo motivo molto spesso nello studio demografico umano si con-



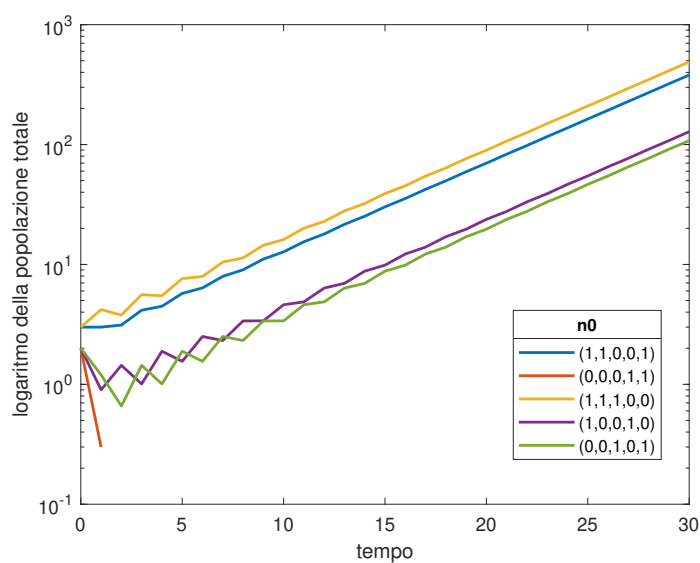


Figura 3.6: Andamento logaritmico della popolazione totale della matrice  $\mathbf{A}$  del modello (3.13), al variare del dato iniziale.

sidera solamente la sottomatrice, escludendo la popolazione femminile post riproduttiva (sopra i 50 anni) dato che non comporta una influenza sugli autovalori.



# Capitolo 4

## Analisi transiente

Nello studio pratico è difficile osservare un tasso di crescita dipendente da  $\lambda_1$  perché le condizioni ambientali molto spesso variano nel tempo. Per questo in molti casi risulta essere molto più utile calcolare il comportamento di una popolazione in tempi più brevi studiando come si comportano le oscillazioni e come lo sviluppo della popolazione dipende dalle perturbazioni della matrice.

### 4.1 Sensibilità degli autovalori

Lo studio del cambiamento della dinamica di una popolazione a seguito di perturbazioni è molto importante per diversi motivi.

- Non sempre nella pratica si hanno a disposizione tutti i dati necessari per lo studio di una popolazione perciò si ha la necessità di utilizzare dati approssimativi.
- La previsione del comportamento di una popolazione a precisi cambiamenti ambientali (naturali o imposti dall'uomo) permette il controllo futuro della diffusione della stessa.
- Lo studio degli effetti di cambiamenti nel passato porta a comprendere lo sviluppo della popolazione nel presente.

### 4.1.1 Perturbazione della matrice

Il cambiamento degli autovalori è causato prima di tutto dalla perturbazione della matrice  $\mathbf{A}$ . Infatti  $\lambda$  varia in funzione degli elementi di  $\mathbf{A}$  essendo soluzione dell'equazione caratteristica  $\det(\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ .

**Definizione 4.1.1.** Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertibile,  $\|\cdot\|$  una norma matriciale. Si definisce **numero di condizionamento di  $\mathbf{A}$**  il valore

$$k(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|. \quad (4.1)$$

*Osservazione 4.1.2.*  $k(\mathbf{A}) \geq 1$ .

Infatti  $1 \leq \|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$ .

**Teorema 4.1.3 (Bauer-Fike).** Siano  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  diagonalizzabile tale che  $\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1}$ ,  $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$  una perturbazione della matrice con  $\delta\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Allora per ogni autovalore della matrice perturbata  $\lambda(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})$  esiste un autovalore di  $\mathbf{A}$ ,  $\lambda(\mathbf{A})$ , tale che

$$|\lambda(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) - \lambda(\mathbf{A})| \leq k(\mathbf{W})\|\delta\mathbf{A}\|_2. \quad (4.2)$$

*Dimostrazione.* Siano  $\|y\|_2 = 1$  e  $(\mu, y)$  aut Coppia della matrice  $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ .

Allora  $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})y = \mu y$  da cui  $\delta\mathbf{A}y = (\mu\mathbf{I} - \mathbf{A})y$ .

Si distinguono due casi:

- se  $\mu \in \text{spec}(\mathbf{A})$ ,  $\mu\mathbf{I} - \mathbf{A}$  è non invertibile e l'errore è zero;
- se  $\mu \notin \text{spec}(\mathbf{A})$ ,  $\mu\mathbf{I} - \mathbf{A}$  è invertibile e si ha

$$\begin{aligned} y &= (\mu\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\delta\mathbf{A}y = (\mu\mathbf{W}\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1})^{-1}\delta\mathbf{A}y \\ &= [\mathbf{W}(\mu\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})\mathbf{W}^{-1}]^{-1}\delta\mathbf{A}y = \mathbf{W}(\mu\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{W}^{-1}\delta\mathbf{A}y. \end{aligned}$$

Applicando la norma:

$$\|y\|_2 \leq \|\mathbf{W}\|_2 \|(\mu\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\|_2 \|\mathbf{W}^{-1}\|_2 \|\delta\mathbf{A}\|_2 \|y\|_2.$$

Ma  $\|y\|_2 = 1$ , inoltre

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu - \lambda_1} & & & \\ & \frac{1}{\mu - \lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\mu - \lambda_n} \end{pmatrix} \right\|_2 = \max_{\lambda_i \in \text{spec}(\mathbf{A})} \frac{1}{|\mu - \lambda_i|} = \frac{1}{\min_{\lambda_i \in \text{spec}(\mathbf{A})} |\mu - \lambda_i|}.$$

Allora

$$1 \leq k(\mathbf{W}) \frac{1}{\min_{\lambda_i \in \text{spec}(\mathbf{A})} |\mu - \lambda_i|} \|\delta \mathbf{A}\|_2 \quad \Rightarrow \quad \min_{\lambda_i \in \text{spec}(\mathbf{A})} |\mu - \lambda_i| \leq k(\mathbf{W}) \|\delta \mathbf{A}\|_2.$$

□

*Osservazione 4.1.4.* Dal teorema di Bauer-Fike segue che se la matrice è diagonalizzabile, gli autovalori variano in funzione della norma indotta della matrice  $\delta \mathbf{A}$  di perturbazione. Però nel caso di mal condizionamento di  $\mathbf{W}$  il numero di condizionamento della matrice degli autovettori può rappresentare un fattore di amplificazione notevole della perturbazione.

Questo può avvenire ad esempio se alcuni degli autovettori sono quasi linearmente dipendenti.

Al seguito viene riportato quindi un risultato che non necessita della ipotesi di diagonalizzabilità della matrice.

**Teorema 4.1.5.** *Siano  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda$  autovalore semplice,  $\mathbf{w}$  autovettore destro e  $\mathbf{v}$  autovettore sinistro della matrice con  $\|\mathbf{w}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2 = 1$ . Allora esiste un intorno dell'origine in cui sono definite le funzioni  $\lambda(\varepsilon)$  e  $\mathbf{w}(\varepsilon)$  tali che*

- $(\mathbf{A} + \varepsilon \delta \mathbf{A}) \mathbf{w}(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) \mathbf{w}(\varepsilon)$  con  $\delta \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\|\delta \mathbf{A}\|_2 = 1$  e  $\lambda(\varepsilon)$  autovalore semplice
- $\lambda(0) = \lambda$  e  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}$
- $\lambda'(0) = \frac{\mathbf{v}^H \delta \mathbf{A} \mathbf{w}}{\mathbf{v}^H \mathbf{w}}$  da cui  $\lambda(\varepsilon) = \lambda(0) + \varepsilon \frac{\mathbf{v}^H \delta \mathbf{A} \mathbf{w}}{\mathbf{v}^H \mathbf{w}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Osservazione 4.1.6.* Nell'approssimazione al primo ordine si ha:

$$\begin{aligned} |\lambda'(0)| &= \left| \frac{\mathbf{v}^H \delta \mathbf{A} \mathbf{w}}{\mathbf{v}^H \mathbf{w}} \right| \leq \frac{\|y\| \|x\| \|\delta \mathbf{A}\|}{|\mathbf{v}^H \mathbf{w}|} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{v}^H \mathbf{w}|} := \text{numero di condizionamento di } \lambda. \end{aligned}$$

Quindi all'aumentare dell'angolo tra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ , aumenta il numero di condizionamento dell'autovalore associato. Perciò non è detto che tutti gli autovalori di una stessa matrice siano ben condizionati.

Si suppone ora di perturbare precisi elementi  $a_{ij}$  della matrice  $\mathbf{A}$ .

La sensibilità dell'autovalore può essere considerata come la locale pendenza di  $\lambda$ , studiato come funzione di  $a_{ij}$ .

Si ha infatti il seguente risultato.

**Teorema 4.1.7.** *Siano  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda$  autovalore semplice e  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v}$  autovettore destro e sinistro ad esso associati. Si suppone di variare solo l'elemento  $a_{ij}$ . La sensibilità di un autovalore alla perturbazione dell'elemento della matrice è*

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}} = \frac{\bar{v}_i w_j}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}. \quad (4.3)$$

*Dimostrazione.* Per il Teorema 4.1.5 si era visto che

$$\lambda'(0) = \frac{\mathbf{v}^H \delta \mathbf{A} \mathbf{w}}{\mathbf{v}^H \mathbf{w}}.$$

Immaginando di perturbare solo l'elemento  $a_{ij}$  mantenendo le restanti componenti della matrice costanti si ha:

$$\lambda' = \frac{\bar{v}_i \delta a_{ij} w_j}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle} \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}} = \frac{\bar{v}_i w_j}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}.$$

□

*Osservazione 4.1.8.* Il denominatore  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$  potrebbe essere trascurato nel momento in cui si confronta la sensibilità di  $\lambda$  rispetto diversi elementi della stessa matrice oppure scalando semplicemente gli autovettori.

**Definizione 4.1.9.** Si definisce **matrice delle sensibilità**  $\mathbf{S}$  la matrice che presenta nella componente  $s_{ij}$  la sensibilità dell'autovalore rispetto la perturbazione di  $a_{ij}$ . Si definisce come

$$\mathbf{S} = \left( \frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}} \right) = \frac{\bar{\mathbf{v}} \mathbf{w}^T}{\mathbf{v}^H \mathbf{w}}. \quad (4.4)$$

#### Esempio

Si consideri la popolazione dell'esempio (1.6) trattato nella Sezione 1.2. La matrice associata era

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema 4.1.5, l'autovalore dominante può essere visto come una funzione  $\lambda_1(\varepsilon)$  con  $\varepsilon$  perturbazione di  $\mathbf{A}$ . Per cui se  $a_{ij}$  è un elemento non perturbato di  $\mathbf{A}$ ,  $\lambda_1(a_{ij}) = \lambda_1$ .

Per quanto detto in precedenza, la sensibilità è il coefficiente angolare della retta tangente a  $\lambda_1$  nel punto  $(a_{ij}, \lambda_1(a_{ij}))$ . Quindi

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{ij}} = \frac{\lambda_1(\varepsilon) - \lambda_1(a_{ij})}{\varepsilon - a_{ij}} = \frac{\lambda_1(\varepsilon) - \lambda_1}{\varepsilon - a_{ij}}$$

$$\lambda_1(\varepsilon) = \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{ij}} (\varepsilon - a_{ij}) + \lambda_1. \quad (4.5)$$

Si perturba l'elemento  $a_{2,1} = P_1 = 0.3$  e si studia la sensibilità di  $\lambda_1$ .

Figura 4.1 mostra la sensibilità del tasso di crescita rispetto alla probabilità di sopravvivenza della prima classe.

La componente  $a_{21}$  viene fatta variare in  $[0, 1]$  di 0.1 ogni volta.

Ogni cerchio vuoto blu rappresenta la previsione del valore di  $\lambda_1$  rispetto ogni perturbazione, calcolato tramite l'equazione (4.5). Il cerchio pieno nero rappresenta la situazione priva di perturbazioni, cioè quella che effettivamente si osserva.

Il grafico in rosso rappresenta invece l'effettivo andamento di  $\lambda_1$ , ottenuto variando i valori della matrice  $\mathbf{A}$  e calcolando ogni volta il corrispettivo autovalore dominante.

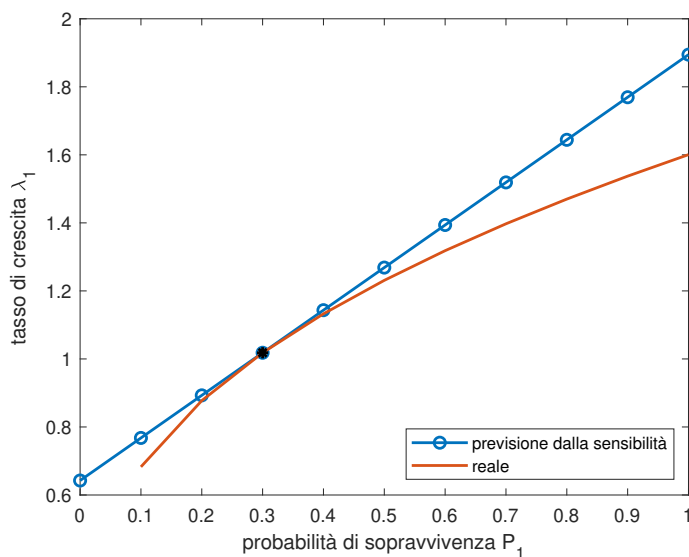


Figura 4.1: Sensibilità di  $\lambda_1$  al variare del termine  $a_{21}$  della matrice  $\mathbf{A}$  del modello di popolazione (1.6).

Per ottenere la matrice delle sensibilità di  $\mathbf{A}$  rispetto a  $\lambda_1$  si applica la formula (4.4) e si ottiene:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -0.9592 & -1.4296 & -2.5931 \\ -0.4888 & -0.9592 & -2.1227 \\ 0.1798 & -0.2905 & -1.4541 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{S}$  può essere rappresentata graficamente tramite il comando `bar3` di MATLAB in cui ogni barra rappresenta una componente della matrice (Figura 4.2).

La figura mostra che  $\lambda_1$  è più sensibile alle modifiche delle componenti della parte inferiore sinistra della matrice. In particolare il maggiore cambiamento si ottiene modificando il termine  $a_{31}$  di  $\mathbf{A}$  che corrisponderebbe alla crescita diretta dalla prima classe alla terza. Essendo una popolazione suddivisa in classi di età, si ha che  $a_{31} = 0$  perché questa crescita non avviene. In ogni caso se avvenisse questa modifica si avrebbe comunque un cambiamento molto significativo di  $\lambda_1$  e di conseguenza dello sviluppo della popolazione.

Viceversa il termine che presenta minore sensibilità è il valore della fertilità



della terza e ultima classe: una sua modifica non comporterà cambiamenti significativi.

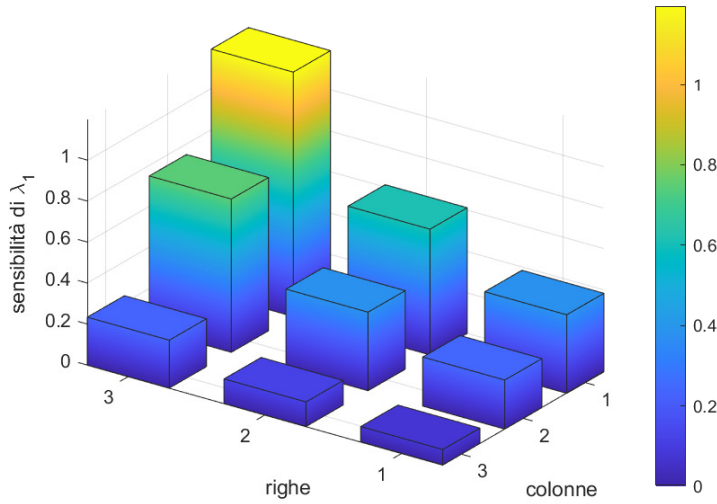


Figura 4.2: Rappresentazione grafica di  $\mathbf{S}$ , matrice delle sensibilità del modello (1.6).

#### 4.1.2 Sensibilità di $\lambda_1$ rispetto a fertilità e sopravvivenza

Dopo aver osservato la sensibilità degli autovalori alle perturbazioni della matrice, è importante soffermarsi in particolare sulla sensibilità dell'autovalore dominante alle perturbazioni di specifici valori di fertilità e sopravvivenza.

**Proposizione 4.1.10.** *Siano  $A$  la matrice di Leslie di una popolazione suddivisa per età di dimensione  $k \times k$ ,  $\lambda$  l'autovalore dominante e  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  gli autovettori destro e sinistro ad esso associati scalati in modo tale che  $w_1 = v_1 = 1$ . Le componenti degli autovettori  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v}$  sono:*

$$w_1 = 1, \quad w_j = \prod_{i=1}^{j-1} P_i \lambda^{-i+1} \quad \forall j = 2, \dots, k \quad (4.6)$$

$$v_1 = 1, \quad v_j = F_j \lambda^{-1} + P_j \lambda^{-1} v_{j+1} \quad \forall j = 2, \dots, k \quad (4.7)$$

*Dimostrazione.* Poichè  $\lambda$  è l'autovalore dominante,  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  sono reali. Si ha quindi:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{A} = \mathbf{v}^T \lambda$$

Risolviendo le due equazioni si ottengono rispettivamente le componenti di  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$ . Infatti si ha:

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 \\ P_1 &= \lambda w_2 \Rightarrow w_2 = P_1 \lambda^{-1} \\ P_2 w_2 &= \lambda w_3 \Rightarrow w_3 = P_1 P_2 \lambda^{-2} \\ &\vdots \\ P_{k-1} w_{k-1} &= \lambda w_k \Rightarrow w_k = P_1 P_2 \cdots P_{k-1} \lambda^{k-1} \end{aligned}$$

Mentre per le componenti di  $\mathbf{v}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} F_k &= \lambda v_k \Rightarrow v_k = F_k \lambda^{-1} \\ F_{k-1} + P_{k-1} v_k &= \lambda v_{k-1} \Rightarrow v_{k-1} = F_{k-1} \lambda^{-1} + P_{k-1} \lambda^{-1} v_k \\ &\vdots \\ F_1 + P_1 v_2 &= \lambda \Rightarrow v_2 = F_1 \lambda^{-1} + P_1 \lambda^{-1} \end{aligned}$$

□

Utilizzando le formule (4.6) e (4.7) si può dimostrare la relazione tra  $\lambda_1$  e i valori di fertilità e sopravvivenza.

Siccome  $\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{ij}} = \frac{v_i w_j}{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$  e  $F_j = a_{1j}$  si ottiene:

$$\frac{\partial \lambda_1 / \partial F_j}{\partial \lambda_1 / \partial F_{j+1}} = \frac{w_j}{w_{j+1}} = \frac{\lambda_1}{P_j}. \quad (4.8)$$

Perciò se la popolazione aumenta ( $\lambda_1 > 1$ ), la sensibilità di  $\lambda_1$  rispetto alla fertilità è esponenzialmente decrescente. Inoltre maggiore è il valore di  $\lambda_1$ , più rapidamente la funzione decresce.

Se la popolazione decresce ( $\lambda_1 < 1$ ) e  $\lambda_1 < P_j$  la sensibilità aumenta dalla classe di età  $j$  a  $j + 1$ .

Per quanto riguarda la sensibilità dell'autovalore al variare della probabilità di sopravvivenza, tenendo conto che  $P_j = a_{j+1j}$ , si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1 / \partial P_j}{\partial \lambda_1 / \partial P_{j+1}} &= \frac{v_{j+1} w_j}{v_{j+2} w_{j+1}} = \left( \frac{F_{j+1} \lambda_1^{-1} + P_{j+1} \lambda_1^{-1} v_{j+2}}{v_{j+2}} \right) \frac{\lambda_1}{P_j} \\ &= \frac{F_{j+1}}{v_{j+2} P_j} + \frac{P_{j+1}}{P_j} \geq \frac{P_{j+1}}{P_j} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Quindi se  $\lambda_1 \geq 1$  e  $P_{j+1} \geq P_j$  la sensibilità decresce in maniera monotona all'aumentare dell'età.

Infine si ha

$$\frac{\partial \lambda_1 / \partial P_j}{\partial \lambda_1 / \partial F_j} = \frac{v_{j+1} w_j}{w_j} = v_{j+1} \quad (4.10)$$

Di conseguenza se  $v_{j+1} > 1$  il tasso di crescita è più sensibile a variazioni dei valori di sopravvivenza rispetto che a quelli di fertilità.

## 4.2 Sensibilità del fattore di smorzamento

**Teorema 4.2.1.** *Sia  $\lambda_2 \in \mathbb{C}$  allora  $\lambda_2 = x + iy$ . La sensibilità del rapporto di smorzamento rispetto alla perturbazione di  $a_{ij}$  è*

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_{ij}} = \frac{1}{|\lambda_2|} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{ij}} - \frac{\rho}{|\lambda_2|} \left[ x \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial a_{ij}} \right) + y \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial a_{ij}} \right) \right] \right).$$

Siano inoltre  $\mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}_2$  le matrici delle sensibilità rispettivamente per  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  allora:

$$\mathbf{S}_\rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial a_{ij}} \right) = \frac{1}{|\lambda_2|} \left( \mathbf{S}_1 - \frac{\rho}{|\lambda_2|} [x \operatorname{Re}(\mathbf{S}_2) + y \operatorname{Im}(\mathbf{S}_2)] \right).$$

## 4.3 Esempio: studio della popolazione degli Stati Uniti del 1966

Si considera la matrice di Leslie della popolazione degli Stati Uniti del 1966 suddivisa in 10 classi di età (si suppone che la popolazione sopra i

50 anni non sia più fertile). Si considerano i seguenti i valori di fertilità e probabilità di sopravvivenza per ogni classe.

<i>Classi di età</i>	<i>Fertilità</i>	<i>Sopravvivenza</i>
1	0	.9967
2	.00102	.99837
3	.08515	.9978
4	.30574	.99672
5	.40002	.99607
6	.28061	.99472
7	.15260	.99240
8	.06420	.98867
9	.01483	.98274
10	.00089	

La relazione tra  $\lambda_1$  e le variazioni dei valori di fertilità e sopravvivenza è presentata in Figura 4.3 dove viene applicata la formula (4.3). Si ha quindi:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial F_j} = \frac{\partial \lambda}{\partial a_{1j}} = v_1 w_j; \quad \forall j = 1, \dots, 10$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial P_j} = \frac{\partial \lambda}{\partial a_{j+1j}} = v_{j+1} w_j; \quad \forall j = 1, \dots, 9$$

Si osserva che la sensibilità di  $\lambda_1$  rispetto la fertilità decresce in maniera esponenziale all'aumentare dell'età. Inoltre nei primi anni di età (nelle prime 3 classi) il tasso di crescita è molto più sensibile alle variazioni dei dati di sopravvivenza che a quelli di fertilità. Successivamente, dalla quarta classe d'età in poi  $\lambda_1$  è molto più sensibile alle modifiche della fertilità.

Si consideri ora la sensibilità di  $\rho$  alle variazioni degli elementi della matrice di Leslie.

In Figura 4.4 si osserva che  $\rho$  dipende in maniera minore dai cambiamenti delle classi centrali.

In particolare aumentando la fertilità della sesta classe di età si ha una diminuzione del fattore di smorzamento. Viceversa aumentandola nelle altre

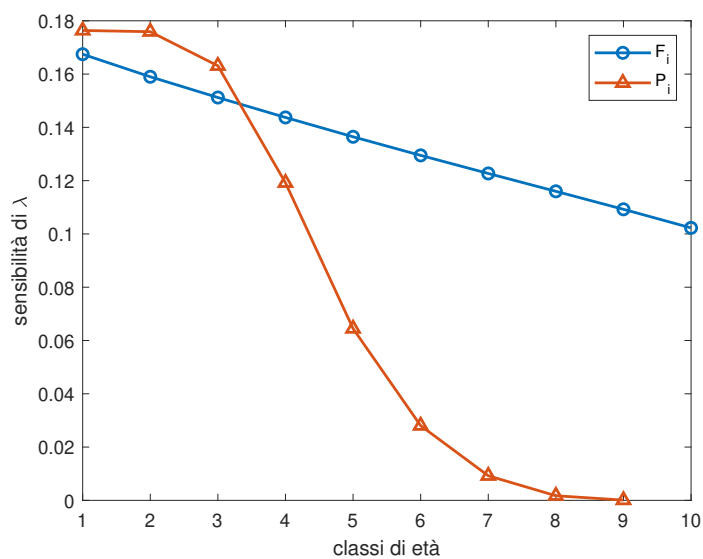


Figura 4.3: Grafico della sensibilità di  $\lambda$  rispetto ai valori di fertilità (in blu) e sopravvivenza (in rosso) di ogni classe di età.

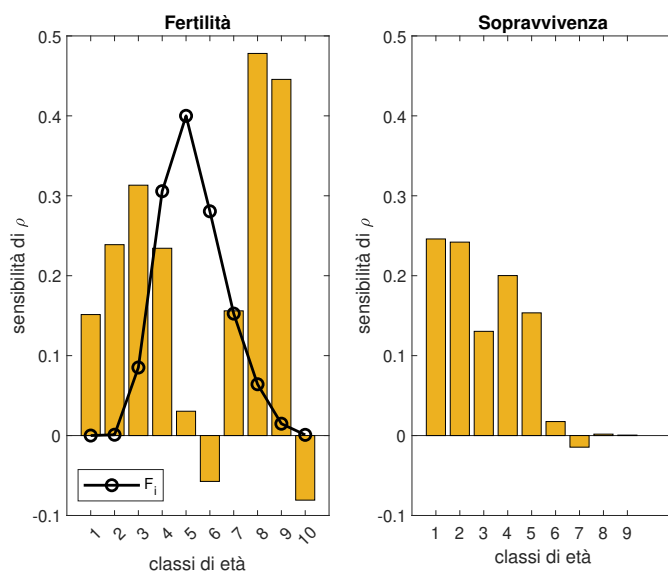


Figura 4.4: A sinistra appare il grafico della sensibilità di  $\rho$  al variare dei valori di fertilità. La linea puntata nera rappresenta la fertilità relativa ad ogni classe. A destra il grafico della sensibilità di  $\rho$  al variare dei valori di probabilità.

classi si ottiene un aumento di  $\rho$  che è maggiore nelle classi laterali. La fertilità della decima classe rappresenta una eccezione in questo ragiona-

mento perché se venisse aumentata si avrebbe una periodicità della fertilità rispetto all'età che causerebbe un rallentamento della convergenza alla distribuzione stabile.

Perciò ne consegue che concentrando la fertilità,  $\rho$  si riduce e la convergenza viene raggiunta dopo un maggior numero di oscillazioni. Viceversa se si distribuisce la fertilità tra le classi si ottiene l'effetto opposto. Questo emerge anche confrontando la sensibilità di  $\rho$  con il grafico in nero, in cui ogni cerchio rappresenta la fertilità di una determinata classe.

Sempre in Figura 4.4 si osserva che  $\rho$  è più sensibile alle modifiche della probabilità di sopravvivenza delle prime classi rispetto che alle ultime, dove la dipendenza diventa quasi nulla.

# Conclusioni

La matrice di Leslie attualmente ha un grande utilizzo nello studio dell'ecologia della popolazione, nonostante questo ci sono voluti diversi anni affinché questo modello matriciale venisse adottato da ecologisti e demografi. In primo luogo perché l'algebra lineare delle matrici era ancora percepita come un campo troppo complesso ed esoterico, inoltre prima dell'avvento dei computer ciò che poteva essere fatto con le matrici poteva essere calcolato semplicemente anche a mano.

Ora però questi studi vengono ampiamente utilizzati per diversi scopi. Ad esempio, non avendo spesso a disposizione dati precisi, è possibile utilizzare dati approssimativi per prevedere la dinamica delle popolazioni.

Un altro importante utilizzo è quello che riguarda il controllo del numero di individui, che può avvenire introducendo ad esempio dei predatori. È importante capire quando applicare una politica di controllo per evitare di causare un rischio di estinzione o uno squilibrio nei rapporti tra le specie.

Tutte queste informazioni possono essere previste con lo studio della matrice di Leslie che rende molto più facile e veloce l'analisi dei dati di fertilità e sopravvivenza.





# Bibliografia

- [1] Hal Caswell, *Matrix Population Models. Construction, Analysis, and Interpretation.*, Sinauer Associates, Second Edition, pp. 722, May 2006
- [2] G.C. Smith, R.C. Trout, *Using Leslie matrices to determine wild rabbit population growth and the potential for control.*, Journal of Applied Ecology, pp. 223-230, 1994
- [3] Valeria Simoncini, Davide Palitta, *Dispense del corso di Calcolo Numerico. Modulo di Algebra Lineare Numerica.*, seconda edizione, v.6, pp 65-75, settembre 2021