Alma Mater Studiorum · University of Bologna

School of Science
Department of Physics and Astronomy
Master Degree in Physics

Problems in physics and mathematics contexts with middle and high school classes: vertical and horizontal comparison

Supervisor:
Prof. Silvia Benvenuti

Co-supervisor:
Prof. Ivan Genesio

Submitted by:
Matteo Fantoni

Academic Year 2021/2022

Abstract

This thesis falls within the framework of physics education and teaching of mathematics.

The objective of this report was made possible by using geometrical (in mathematics) and qualitative (in physics) problems. We have prepared four (resp. three) open answer exercises for mathematics (resp. physics). The test batch has been selected across two different school phases: end of the middle school (third year, 8^{th} grade) and beginning of high school (second and third year, 10^{th} and 11^{th} grades respectively).

High school students achieved the best results in almost every problem, but 10^{th} grade students got the best overall results. Moreover, a clear tendency to not even try qualitative problems resolution has emerged from the first collection of graphs, regardless of subject and grade.

In order to improve students' problem-solving skills, it is worth to invest on vertical learning and spiral curricula. It would make sense to establish a stronger and clearer connection between physics and mathematical knowledge through an interdisciplinary approach.

Contents

Introduction

My work falls within the framework of physics education and teaching of mathematics. The aim of this thesis is to introduce a further connection between middle or high school students and qualitative solving skills.

The work is divided into three separate chapters. The first one presents two different approaches used by middle and high school students in order to solve mathematical and physics tasks: on the one hand, there is blind faith in computations, while on the other hand, there is conceptual reasoning. Throughout many very recent articles, it emerges that there is a growing attention to the topic of students' qualitative problem-solving ability.

The research methodology is explained in the second chapter. The objective of this report was made possible by using geometrical (in mathematics) and qualitative (in physics) problems. we have prepared four (resp. three) open answer tests for mathematics (resp. physics); all of them differ one from each other by two aspects: the order in which exercises were proposed and the presence or the absence of explicit numeric data in the problem. The test batch has been selected across two different school phases: end of the middle school (third year, 8^{th} grade) and the beginning of high school (second and third years, respectively 10^{th} and 11^{th} grades). Therefore, the comparison has been carried on students aged between 13 and 17 years old, with the aim of proving whether it is present or not a correlation between ability in resolution of mathematics and physics problems.

The third and final chapter is focused on the analysis and comparison between correctness and completeness of the solutions of the problems. Furthermore, a small section of the chapter is dedicated to a short impression of participation in the class depending on grades.

Hence, on the first hand, a clear tendency to not even try qualitative problems resolution has emerged from the first collection of graphs, regardless of subject and grade. On the other hand, high school students achieved the best results in almost every problem; however, it is worth saying that 10^{th} grade students got the best overall results. This is what can be seen from the second group of charts' comparison.

We think that, in order to achieve continuing students' problem-solving skills' improvements, it is worth to invest on vertical learning [1] and spiral curricula [2] in both physics and mathematics; moreover, it would make sense to establish a stronger and clearer connection between physics and mathematical knowledge, as already emerged from the study reported in Fantoni [3].

Chapter 1

State of the art

Contents

1.1 Preliminary topics

The principles underlying this thesis are those of *Learning Agreement*, *spiral curriculum*, *lateral* and *vertical development*. So, let's first define those concepts.

According to Brousseau [4] [5], the Learning Agreement is a sort of unwritten contract between the teacher and the students: it may be explicit or implicit, always in accordance with Brousseau's thinking. If it is upheld by both of the parts, it grants that everything runs smoothly in classroom context; moreover, it legitimates status, roles and expectations on both sides. This means that, when a task is administered to students by their professor, they expect to be in the possession of knowledge and skills to problem solve it.

The expression spiral curriculum is taken by Bruner [2] (2009): he alludes to a curricular structure in which crucial ideas are repeatedly covered but with increasing levels of complexity or in different contexts; after students have mastered some fundamental principles, which are frequently very theoretical and likely to discourage students who are looking to apply the concepts they are learning to real-world applications, such treatment allows the earlier introduction of concepts that are traditionally reserved for later (and more specialized) courses in the curriculum.

Last but not least, also strictly connected to Bruner's spiral curriculum definition, we build on Brown [1]'s (2012) analysis: in particular, by lateral development we mean *what we know*, as we gain knowledge and develop skills and technical expertise, whereas vertical development represents *how we know*, as we broaden and deepen our awareness, thinking, and interpretation ability. Spence and McDonald [6] (2015) developed an 8-month internship course on students' lateral and vertical development; in general, the results support the necessity for pedagogical strategies that encourage students' (vertical) development in addition to (lateral) competency growth and knowledge acquisition.

1.2 Current research situation

During the last decades interest in both *mathematical* and *physics abstraction*, generalization and qualitative solving skills grew up: for both disciplines, both research and debate are very heated even today.

Let us now try to go deeper, in order to have a better comprehension of those terms' meanings. Firstly, *mathematical abstraction* is the process thanks to which it is possible to identify how to break down images - or problems, in general - and at the same time figure out their essential properties; secondly, with the word *generalization* we refer to the capability to recognize such common properties of an object even in different contexts. In the end, by *qualitative solving skills* we mean the ability of solving problems without numeric data, reasoning only by formulas and symbols.

The very first researcher who introduced abstraction as a fundamental element of qualitative reasoning was Struss [7] (1993). In order to understand how could it be related with generalizing and qualitative reasoning, he explicitly carried on a study on temporal abstraction (physics matter). In particular, he began his paper with the words: «Abstraction is a fundamental element of qualitative reasoning about physics systems and crucial for coping with complexity of real problems.»; whether abstraction might bring additional theorems and contradictions not found in «ground theory», he concluded that qualitative reasoning is useful to generalize and formulate new theories studied within the scope of his article.

In his paper, Klenk [8] (2008) explains how abstraction could be useful to get a good generalization process in physics; moreover, he presents a way to determine how good could generalizations be: essentially, in Klenk's opinion, it depends on how many different situations could they be applied to. This study also shows the importance of getting used to generalizing and abstracts in order to get a more complex and complete view of the subject; as Klenk wrote in the conclusions of his article «This represents a significant step towards building systems that learn how to model situations from examples».

For what concerns the linkage between generalization and qualitative thinking, we must mention Kuo et al. [9] (2013), who came up with an interesting article (almost two decades after Struss' one). In that paper, Kuo and his team established a connection between the ability to generalize, the capacity to accurately represent mathematics and the qualitative skills of solving physics problems. More precisely, the study presents two different approaches used by high school students in order to solve physics tasks: on the first hand there is the blind faith in computations, while on the other hand there is a conceptual reasoning. To better explain this difference in approaches, we can see the example proposed by Wertheimer [10] (1959), where he asked students to solve problems like $(815 + 815 + 815 + 815 + 815)/5 =?$. In this case, a possible way to avoid explicit computation is to use the conceptual foundations of addition and division to recognize that the solution is 815 without performing any computations. In other words, the question above might be seen as $(x+x+x+x+x)/5 =?$, thanks to which it would have been surely easier to conclude that:

$$\frac{(x + x + x + x + x)}{5} = \frac{5x}{5} = x \tag{1.1}$$

with x equals to 815 in our case.

In this sense, students who solved the problem by computing the sum in the numerator and then dividing by 5 missed a *possibility*: this resulted in a small but non-negligible waste of time; on the contrary, students who failed to notice the shortcut had shown competence in mere mathematical computation but not in the underlying conceptual meaning.

1.3 Abstract thinking and generalization in schools

In one of his very recent articles, Park [11] (2020) interviewed first-year college pupils about their problem-solving strategies in qualitative physics problems, concluding that students mainly use equations simply as numerical computational tools by plugging in numbers; according to the outcomes of Kuo et al. [9] (2012), connecting conceptual reasoning to mathematical formalism demonstrates robust solutions that integrate conceptual and symbolic reasoning at a higher expert level. Consequently, that absence testifies to a low level of understanding of mathematical equation formalism.

Yusepa [12] (2018) individuated many different *indicators of abstract-thinking ability*, such as the one of transforming problems into symbolic form, or the one of building an equation, or also the capacity to identify connections between the geometric form concepts and linear equations; in particular, in order to identify qualitative resolution skills and abstract thinking abilities, we focus on those three aspects. The final aim of these researches - conducted on middle and high-school students - is closely connected with what emerged from the research of Putra [13] (2018). Indeed, in his paper, he highlights the importance of the step from basic to advanced mathematical reasoning, which occurs when one moves from describing to defining, from persuading to logically confirming based on a definition, according to Dubinsky et al. [14] (1991).

Students are known to struggle with this transition stage. In comparison to mathematics in university, where it shifts to a formal framework based on the axiomatic system and mathematical evidence, mathematics in middle or high school is considered as a blend of visual representation, such as geometry and graphs, as well as calculation and symbolic manipulation.

In this context, one aspect of advanced mathematical thinking is the capacity for mathematical abstraction. According to Rodriguez [15] (2006) and Evans [16] (1991), the process of representation, abstraction, the connection between those two, originality, and mathematical evidence are all examples of sophisticated mathematical thinking.

Moreover, we would like to mention Malara [17] (2012) for highlighting another important dimension - in a non-numerical sense - to get a complete comprehension of generalization and abstraction processes: the psychological point of view.

1.4 Psychological aspects: gestalt

A final linkage that is crucial to be cited is the one provided by Rivera [18] (2010) who analytically studied algebraic modeling through the evolution of students' cognitive visualization; in particular, in his paper Rivera mainly refers to three articles: Giaquinto [19] (2007), who asserts that a pattern's structure can be recognized because of associations formed by a person's inherent visual ability; Davis [20] (1993), in which the author mentions «*eye*» - in terms of «*sight*» - as «*a legitimate way to discover and acquire new knowledge*»: for the first time it is proposed that knowledge could be achieved not only by logic, but also through observations; last but not least, Metzger [21] (2006), who coined the term «*good gestalt law*» to express ability to perceive, distinguish and rearrange a figure depending on what you want to get. Moreover, Rivera overcame Metzger's term with the expression «*high (or low) gestalt patterns*»: thanks to this specification, he aimed to distinguish the effectiveness of the pattern in sequence recognition.

Unfortunately, due to lack of time and resources, all of these topics will not be further explored in this thesis. However, it seemed a good opportunity to mention the importance of having many different points of view, even from context or disciplines which are more connected to Humanities.

Chapter 2

The study: instruments, research procedure and participants

Contents

2.1 Problems' main purposes

This study has the objective of introducing a further connection between middle or high school students and qualitative solving skills: this was made possible by using geometrical (in mathematics) and qualitative (in physics) problems.

So,we have prepared four (resp. three) open answer tests for mathematics (resp. physics); all of them differ one from each other by two aspects: order in which exercises were proposed and presence or absence of explicit numeric data in the problem.

I selected four different exercises for both disciplines and then we wrote a paired version of them in which numbers were not provided to the students. Indeed, the second ones were supposed to be solved through an analytic path, focusing on equations and symbols, instead of numbers: either during the calculus or in the final answer.

The structure of these tests is strictly connected to the three principal aims of the study:

i. Analyze the difference between the many solving paths chosen by students, trying to establish if there might be or not a dependence between solving skills, trusts and knowledge of the subject. What we expect is that high school students would be more used to face exercises without numbers, rather than middle school ones. In addition, a particular focus will be placed on the justifications provided during the resolution of the task.

ii. Compare problems with or without numeric data, trying to find out whether there might be an evidence in different problem solving skills between students at the same teaching level.

iii. Point out the faith of students in the Learning Agreement, in this sense: how much do students believe in the fact that they are supposed to follow the order of exercises provided by the test itself? At the beginning of the test it has been specified - both orally and written - that they were free to face any problem they want as first, second... and so on.

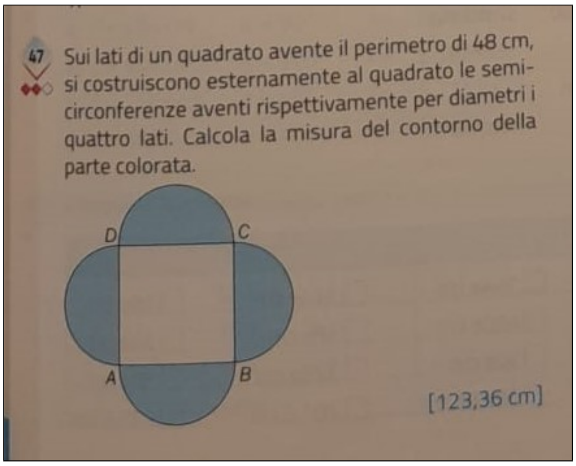
Moreover, as a side quest,we are also interested in seeing if students may be able to name new variables (like using l for sides of the square - which are *lati* in italian - or d for diagonal, *diagonale* in italian) in the version without numeric data. What we are trying to say is that the text of the exercise does not prescribe denoting the area of the square by A or x, but rather the student is forced to take a position. we find that this step is all but simple and necessitates awareness and responsibility: the student must be aware of what he is calculating during the resolution of the exercise. Indeed, one might initially think that there was no data, especially at lower teaching levels. All the problems proposed in the tests were chosen from exercise books, as described in the following sections, in which it's shown the reason why any question has been selected and how it has been decided to change the exercise in order to point out what we are searching on.

I have named every problem with a code in order to distinguish every single exercise; mathematical problems have the number of exercise followed by letter M, physics ones have the letter P instead. Moreover, a * precedes the letter in symbolic problems in order to avoid misunderstandings.

2.2 Mathematics tests

For mathematics, we decided to compose a 4-question test (one can find them in Appendix A): two of them have numbers, and the remaining two have not. All of the exercises were taken from middle school textbooks: for some of them, we replaced the number with an appropriate algebraic term. It is important to notice that all of the questions were the same for both middle and high school students.

Problems 1M & 1*M Were inspired by the exercise shown in the following figure (fig.2.1).


47 Sui lati di un quadrato avente il perimetro di 48 cm, si costruiscono esternamente al quadrato le semi-circonferenze aventi rispettivamente per diametri i quattro lati. Calcola la misura del contorno della parte colorata.

[123,36 cm]

Figure 2.1: Problem 1M & 1*M inspiration.

Thanks to this question, we would like to investigate the ability to graphically portray the problem; in particular, the core consists in noting that the diameter of the external circumference coincides with the diagonal of the inscribed square. For this reason, contrary to what happens in the textbook [22], the correct image was not put in the text of the exercise, as it already provide, the correct interpretation instead of giving students the opportunity to figure out what they are supposed to draw on their own.

In fig.2.2 you can find the two versions of the question: (a) is the one with numeric data, while (b) is without it.

> Dato un quadrato di area 16 cm^2, si determini la superficie del cerchio ad esso circoscritto.

(a) Problem 1M: *Given is a square surface equals to* $16 cm^2$*, determine the area of the circle circumscribed to it.*

> Si determini l'area di un cerchio circoscritto ad un quadrato di area A.

(b) Problem 1*M: *Determine the area of a circle circumscribed to a square surface equals to* A.

Figure 2.2: The two versions of the question proposed in thesis about problem 1; thus, 1M & 1*M.

Problems 2M & 2*M For this task we chose a problem from a test on a middle school exercise book [23]. we selected the one proposed in fig.2.3, but the main question behind this problem - which is the reason why we put it in my thesis work - was not the one supposed by the authors of the book.

109 I lati corrispondenti di due rombi simili sono di 9 cm e 15 cm. L'area del secondo è 100 cm². Determinare l'area del primo e le altezze. [36 cm²; 4 cm; $\frac{20}{3}$ cm]

Figure 2.3: Problem 2M & 2*M inspiration.

Indeed, while similarity and proportions are more common topics, the fact that rhombuses are parallelograms with all equal sides is the key aspect of the problem, and the one on which we focused my attention.

For these reasons, we decided to maintain the question as it is proposed by the exercise book, coming up with these two versions of the task in fig.2.4: (a) is the one with numeric data and (b) is without it.

I lati corrispondenti di due rombi simili sono di 9 cm e 15 cm. L'area del secondo è 100 cm². Determinare l'area del primo e la lunghezza delle due altezze.

(a) Problem 2M: *A pair of corresponding sides between two rhombuses are respectively equal to* $9cm$ *and* $15cm$*. The area of the second figure is* $100cm^2$*. Determine the surface of the first rhombus and the length of the height in both rhombuses.*

Siano dati due rombi simili tali che l_1 sia $^5/_3$ di l_2. Fissata l'area A_1, determinare A_2, e il rapporto tra le altezze dei due rombi, h_1 e h_2.

(b) Problem 2*M: *Two similar rhombuses are given such that the* s_1 *is the* $\frac{5}{3}$ *of* s_2*. Knowing that the area of the first figure is equal to* A_1*, determine* A_2 *and the ratio between rhombuses' heights.*

Figure 2.4: The two versions of the question proposed in thesis about problem 2; thus: 2M & 2*M.

Problems 3M & 3*M For the second problem, the starting point was from another exercise (fig.2.5) proposed in the same textbook as the last one.

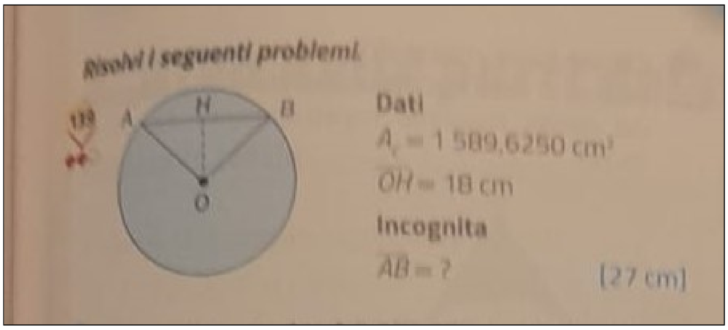
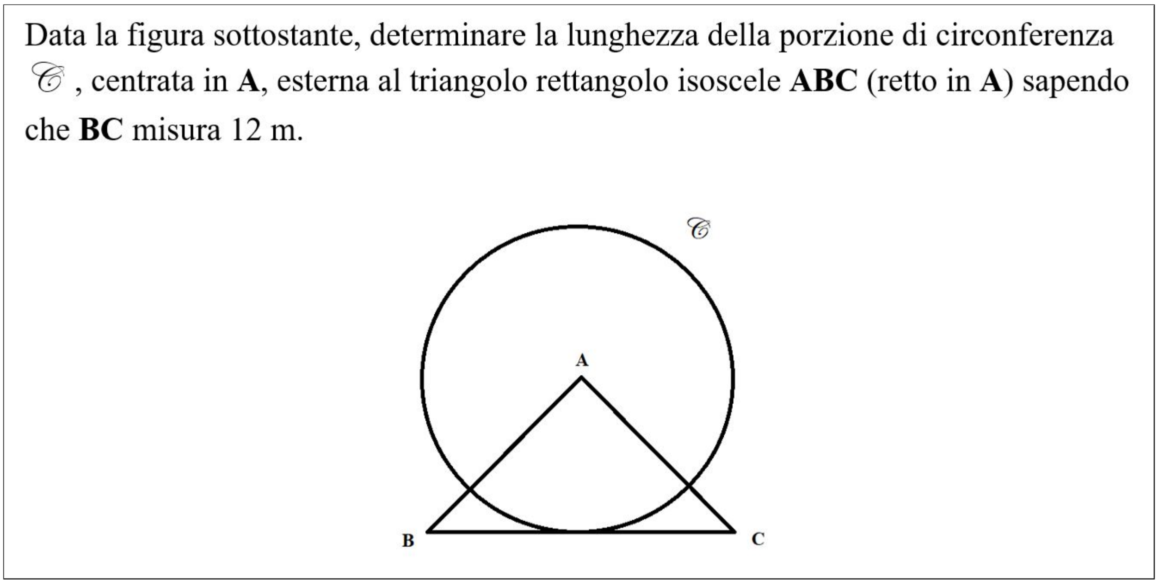


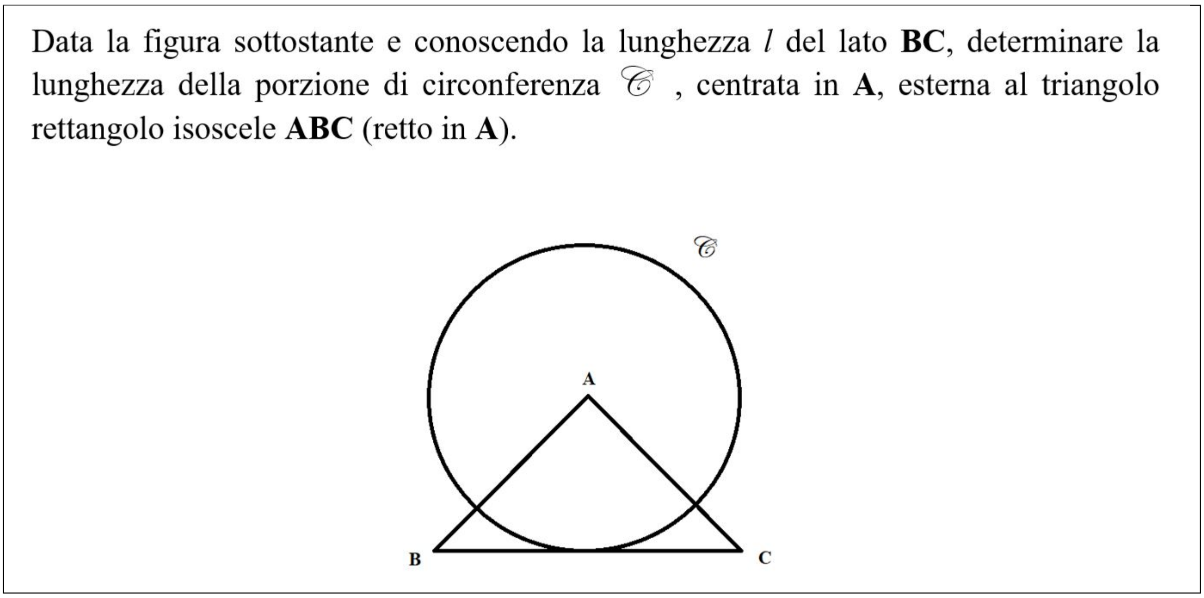
Figure 2.5: Problem 3M & 3*M inspiration.

As in the previous problem, the textbook already gives the correct graphical representation to the student; we thought that it could have been useful here to keep this aspect. The reason for this lies in the difficulty of describing the image without giving the core information on a possible resolution path. Indeed, this question doesn't force the student to a single precise solving path: we have individuated at least three different correct ways (all three of them within student's reach) to solve the problem. Moreover, we decided to put a unit of measure widely different from what they could measure with their rulers, in order to avoid answers obtained by mere measurements on the figure.

The ones that follow are the two different proposed problems (fig.2.6: (a) and (b) are, respectively, with and without data).



(a) Problem 3M: *The following figure is given; determine the length of the section of circumference (centered in **A**) that is out of the **ABC** isosceles right triangle (right angle in A) where the side **BC** is equal to* $12m$.



(b) Problem 3*M: *The following figure is given; determine the length of the section of circumference (centered in **A**) that is out of the **ABC** isosceles right triangle (right angle in A) where **BC**'s known length is equal to* s.

Figure 2.6: The two versions of the question proposed in thesis about problem 3; thus, 3M & 3*M.

Problems 4M & 4*M As last exercise we decided to propose the quintessential visualizing problem: the 30° and 60° right triangle. we found a perfect example in another exercise book [24], which is shown in the following fig.2.7.

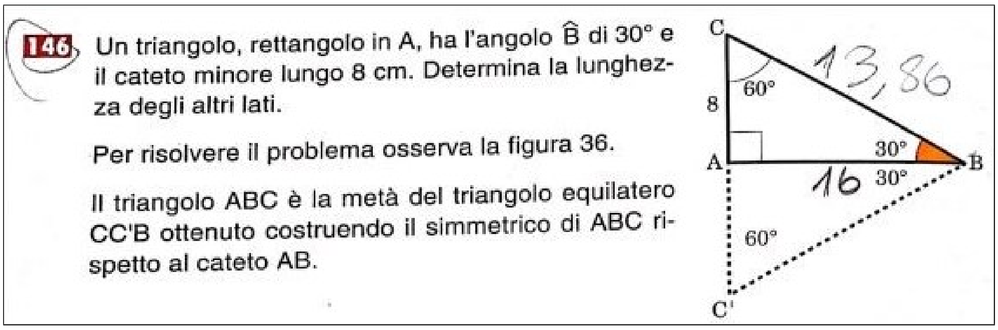
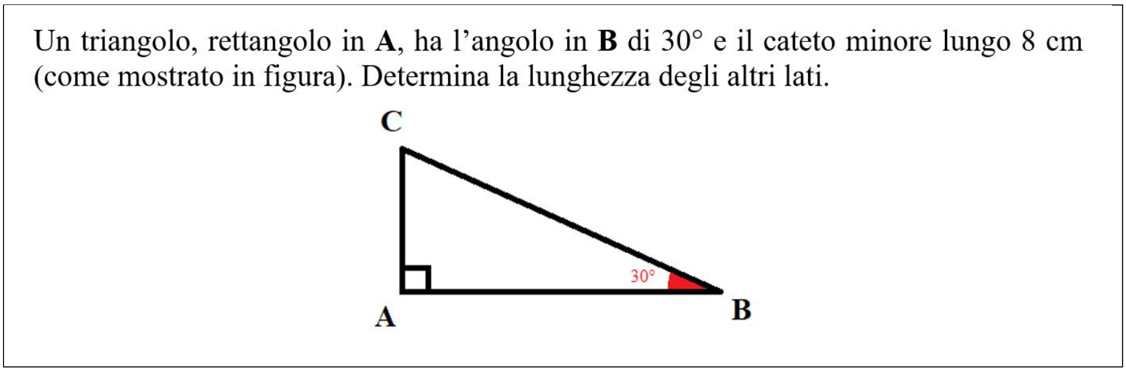


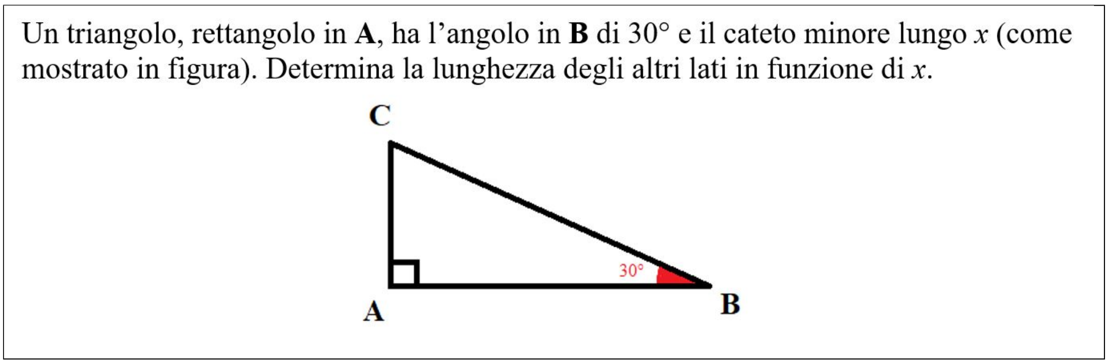
Figure 2.7: Problem 4M & 4*M inspiration.

I have done just a little modification to this problem: we removed the dotted line that depicts and essentially spots the correct path to resolve the question. The reason why we selected this task is to see whether students are familiar with the manipulation of a given figure. Actually two of the correct paths for 2.2 resolution are supposed to investigate in this sense: students are forced to draw on the figure and see - if they can - some particular emergent properties.

The following couple of images (fig.2.8 (a) and (b)) gives a view of the two versions of the question, respectively with and without numeric data.



(a) Problem 4M: *A right triangle (in the figure below)* $\boldsymbol{ABC}$ *(right angle in A) has the angle* $\boldsymbol{B}$ *that is equal to 30°; the shorter catheter is equal to* 8*cm. Determine the length of the other sides of the triangle.*



(b) Problem 4*M: *A right triangle (in the figure below)* $\boldsymbol{ABC}$ *(right angle in A) has the angle* $\boldsymbol{B}$ *that is equal to 30°; the shorter catheter's known length is* x*. Determine the length of the other triangle's sides (as functions of* x*).*

Figure 2.8: The two versions of the question proposed in thesis about problem 4: thus, 4M & 4*M.

2.3 Physics tests

Differently from what has been done in mathematics tests, physics ones are composed by three problems (one can find them, respectively, in Appendix B and in Appendix C); moreover, just two of them are present at the two teaching levels and the last question depends on the year of study. The reason for this choice is linked to the fact that some topics had not been treated in both of the classes, in particular we are referring to conservation of mechanic energy: in 11$^{\text{th}}$ grade tests, we decided to replace that question with an other one about mirrors. For what concerns the three investigation points, we will consider just a couple of same problems in order to develop a comparison between problem solving skills at different levels of teaching (as explained in point I at the beginning of the chapter).

I chose situations and data (both numbers and units of measurements) in order to recreate the most likely problem.

Let us now see how and why any problem was selected.

2.3.1 10$^{\text{th}}$ grade

In the following paragraphs, we will see the problems chosen for 10$^{\text{th}}$ grade students. All of them have been selected from a 10$^{\text{th}}$ grade textbook [25].

Problems 1.1P & 1.1*P For what concerns the first problem, we chose the last topic explained in the school year; this information is not negligible because it may cause students to be able to solve these questions in a better way than the other two exercises.

We decided to maintain the problem (shown in fig.2.9) unchanged because it does not force students to graphically represent the situation, but at the same time it can be useful to have a clear visualization in order to understand the meaning of a negative distance (obtained with a correct calculation of the distance of the image).

Uno specchio concavo produce un'immagine virtuale di dimensione pari al triplo dell'oggetto.

a) Assumendo che l'oggetto si trovi davanti allo specchio, alla distanza di 22 cm da esso, qual è la distanza dell'immagine?
b) Quale è la distanza focale dello specchio?

(a) Problem 1.1P: *A concave mirror produces a virtual image that is three times the object given. a) Assuming that the object is located in front of the mirror at a distance of* 22cm *from it, which is the distance of the image? b) What is the mirror focal length?*

Uno specchio concavo produce un'immagine virtuale di dimensione pari al triplo dell'oggetto.

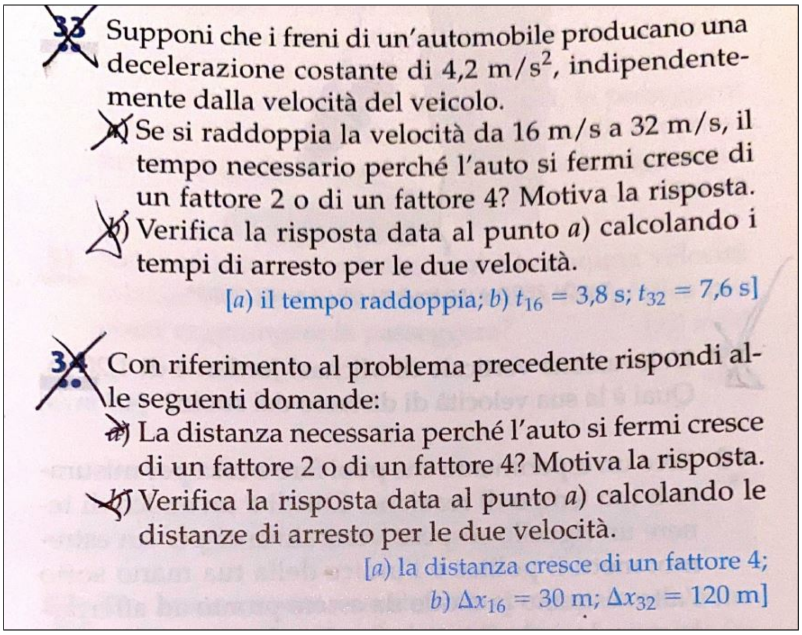
a) Assumendo che l'oggetto si trovi davanti allo specchio, alla distanza d_o da esso, quale è l'espressione per la distanza dell'immagine d_i?
b) Quale è la distanza focale dello specchio in funzione di d_o?

(b) Pproblem, 1.1*P: *A concave mirror produces a virtual image that is three times the object given. a) Assuming that the object is located in front of the mirror at a known distance d_o from it, which is the expression for the distance of the image d_i? b) What is the mirror focal length (as functions of d_o)?*

Figure 2.9: The two exercises taken as inspiration for problem 1.1P & 1.1*P

Problems 2P & 2*P This exercise deals with cinematic; as the previous one, this task is also taken from the same 10th grade textbook. Differently from the problem above, this and the next one will be administered to both of the 10th and 11th grade classes. The reason why we selected this question is linked to both the importance and the ability to visualize cinematic problems.

I selected the first questions proposed by these two problems shown in fig.2.10, resulting in the task presented in fig.2.11.



33 Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 4,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo.

a) Se si raddoppia la velocità da 16 m/s a 32 m/s, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore 2 o di un fattore 4? Motiva la risposta.

b) Verifica la risposta data al punto *a*) calcolando i tempi di arresto per le due velocità.

[*a*) il tempo raddoppia; *b*) t_{16} = 3,8 s; t_{32} = 7,6 s]

34 Con riferimento al problema precedente rispondi alle seguenti domande:

a) La distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore 2 o di un fattore 4? Motiva la risposta.

b) Verifica la risposta data al punto *a*) calcolando le distanze di arresto per le due velocità.

[*a*) la distanza cresce di un fattore 4; *b*) Δx_{16} = 30 m; Δx_{32} = 120 m]

Figure 2.10: Problem 2P & 2*P inspiration.

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 *m/s*^{2}, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 *m/s* a 32 *m/s*, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?
Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

(a) Problem 2P: *Assuming that a car's breaks produce constant deceleration equals to* $3,2m/s^2$ *regardless of the speed of the vehicle; what would happen if we pass from* $16m/s$ *to* $32m/s$ *in terms of breaking time and distance? How much (the precise rate) would those terms increase?*

Supponi che un corpo stia subendo una decelerazione costante a. Se si modificasse la velocità da v_1 a v_2 tale che la velocità nel secondo esperimento sia doppia rispetto a quella del primo, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?
Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

(b) Problem 2*P: *Assuming that a body is subjected to a constant deceleration* a. *What would happen if we pass from* v_1 *to* v_2 *such that the speed in the second car doubles the one in the first case? How much (the precise rate) would breaking time and distance increase?*

Figure 2.11: The two versions of the question proposed in thesis about problem 2; thus, 2P & 2*P.

As we can see, in both versions (with and without data) it is not required to calculate times and distances explicitly: essentially, both questions can be answered just using formulas and logic, resulting in two identical problems.

Thus, it will be interesting to evaluate whether there will be a tendency in providing much more correct resolutions of the one with data or without.

Problems 3P & 3*P As last problem, we chose to ask something about Archimedes' law. In particular, the exercise presented in fig.2.12 shows a couple of separated questions; we focused my attention on the first one, trying to invent a second case with a different density woodblock. For the correct resolution of this problem it is useful to draw the first woodblock to better understand how much volume of the object is submerged under the liquid.

40 Un tronco galleggia in un fiume con un quarto del suo volume al di sopra della superficie dell'acqua.
a) Qual è la densità del tronco?
b) Se il fiume trasporta il tronco fino al mare, nell'acqua del mare la porzione di tronco non sommersa aumenta, diminuisce, o rimane la stessa? Giustifica la risposta.
[*a*) 750 kg/m^3; *b*) aumenta]

Figure 2.12: Problem 3P & 3*P inspiration.

As presented in the following figure (fig.2.13), the second part of the task, we also want to investigate students' belief in the Learning Agreement, in the following sense: the second question asks which percentage of the second woodblock stays afloat in the same liquid; however, it will result in 150% of the total volume, which means that the block will sink in that kind of situation.

Un blocco cubico di legno di densità d_{L1} = 750 kg/m^3 e V_{L1} = 64 cm^3, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

(a) Problem 3P: *A wooden cubic block with density $d_{L1} = 750kg/m^3$ and volume $V_{L1} = 64cm^3$, floats in a liquid. a) Knowing that the body emerges for $1cm$ from the fluid level, determine density of the liquid. b) If you leave a second block with density $d_{L1} = 1500kg/m^3$ to float in the same fluid, what percentage of it would remain afloat?*

Un blocco di legno galleggia in un liquido con un quarto del suo volume al di sopra della superficie del fluido. Determina:

a) Il rapporto tra la densità del blocco e quella del fluido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità doppia rispetto al primo e lo si lasciasse nel fluido, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del liquido?

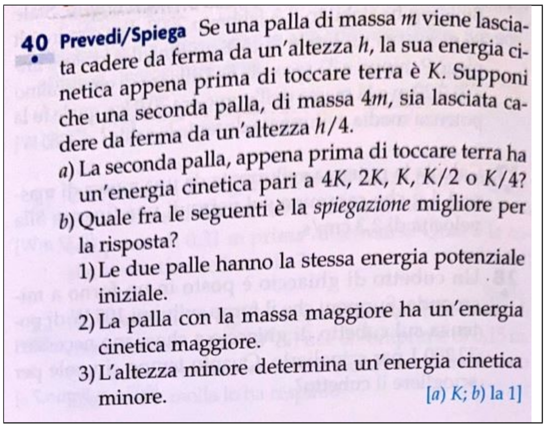
(b) Problem 3P: *A wooden cubic block floats with $1/4$ of its volume over the level of the fluid. Determine: a) The rate between block's density and liquid's one. b) If you leave a second block with twice density the first one to float in the same fluid, what percentage of it would remain afloat?*

Figure 2.13: The two versions of the question proposed in thesis about problem 3; thus, 3P & 3*P.

2.3.2 11$^{\text{th}}$ grade

We will introduce now the last problem, which has been selected to replace the mirrors one. We will not illustrate 2.3.1 and 2.3.1, because a detailed explanation has already been provided previously.

Problems 1.2P & 1.2*P This exercise is inspired by two problems in a 11$^{\text{th}}$ grade textbook; these two tasks belong to a specific category of exercises, labeled as *Predict/Explain* (*Prevedi/Spiega* in fig.2.14) in the book. All the questions in this group of problems request just logic and formulas to be solved.



40 **Prevedi/Spiega** Se una palla di massa m viene lasciata cadere da ferma da un'altezza h, la sua energia cinetica appena prima di toccare terra è K. Supponi che una seconda palla, di massa $4m$, sia lasciata cadere da ferma da un'altezza $h/4$.

a) La seconda palla, appena prima di toccare terra ha un'energia cinetica pari a $4K$, $2K$, K, $K/2$ o $K/4$?

b) Quale fra le seguenti è la *spiegazione* migliore per la risposta?

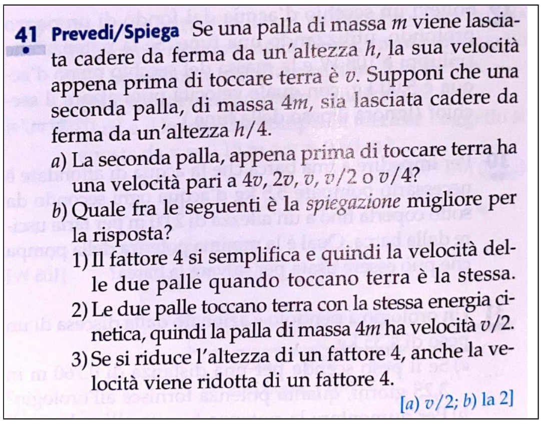
1) Le due palle hanno la stessa energia potenziale iniziale.

2) La palla con la massa maggiore ha un'energia cinetica maggiore.

3) L'altezza minore determina un'energia cinetica minore.

[*a)* K; *b)* la 1]

(a) First *Predict/Explain* exercise.



41 **Prevedi/Spiega** Se una palla di massa m viene lasciata cadere da ferma da un'altezza h, la sua velocità appena prima di toccare terra è v. Supponi che una seconda palla, di massa $4m$, sia lasciata cadere da ferma da un'altezza $h/4$.

a) La seconda palla, appena prima di toccare terra ha una velocità pari a $4v$, $2v$, v, $v/2$ o $v/4$?

b) Quale fra le seguenti è la *spiegazione* migliore per la risposta?

1) Il fattore 4 si semplifica e quindi la velocità delle due palle quando toccano terra è la stessa.

2) Le due palle toccano terra con la stessa energia cinetica, quindi la palla di massa $4m$ ha velocità $v/2$.

3) Se si riduce l'altezza di un fattore 4, anche la velocità viene ridotta di un fattore 4.

[*a)* $v/2$; *b)* la 2]

(b) Second *Predict/Explain* exercise.

Figure 2.14: The two versions of the question used to take an inspiration for 1.2P & 1.2*P.

In fact, for the first time, we had to invent numbers for an exercise instead of replacing them with letters. The fact that these types of tasks are presented as different from any other problem in the textbook made me reflect on how students could perceive their importance and difficulty.

In the two following figures (fig.2.15, (a) and (b)) the two versions of the problem proposed to 11th grade classes are shown.

Una palla di massa 5 kg viene lasciata cadere da ferma da un'altezza di 2 m. Successivamente, una seconda palla di massa 20 kg viene lasciata cadere da 0,5 m. Determina:

a) Il rapporto tra le energie cinetiche delle due palle appena prima di toccare il suolo;
b) Il rapporto tra le velocità appena prima di toccare il suolo.

(a) Problem 1.2P: *A ball with a mass equals to* $5kg$ *is dropped from a height of* $2m$. *Then, a second ball with mass of* $20kg$ *is dropped from an height of* $0,5m$. *Determine: a) The rate between the two balls' kinetic energies just before touching the ground. b) The rate between the velocities of the two balls just before touching the ground.*

Un corpo di massa *m* viene lasciato cadere da fermo da un'altezza *h*. Successivamente, un secondo corpo di massa *4m* viene lasciato cadere da $h/_4$. Determina:

a) Il rapporto tra le energie cinetiche dei due corpi appena prima di toccare il suolo;
b) Il rapporto tra le loro velocità appena prima di toccare il suolo.

(b) Problem 1.2*P: A body with a known mass m is dropped from an height h, also knows. Then, a second body with mass equals to $4m$ is dropped from an height of $h/4$. Determine: a) The rate between the two bodies' kinetic energies just before touching the ground. b) The rate between the velocities of the two bodies just before touching the ground.

Figure 2.15: The two versions of the question proposed in thesis about problem 1.2; thus, 1.2P & 1.2*P.

As we can read above, we decided to use only the *a)* section of the two inspiration problems. The reason behind this choice is that students are supposed to know the correct second to give the correct response to the first question: it is pointless to provide different choices also because might students would feel themselves forced to individuate an option even without knowing the reason why they selected it. In this sense, we omitted the multiple choice form - as it is presented in the textbook - in order to avoid casual answers.

2.4 Test Batch

The test batch has been selected across two different school phases: the end of the middle school (third year) and the beginning of the high school (second and third years). Therefore, the comparison has been carried on students aged between 13 and 17 years old.

All students who took part in the experiment belonged to a Scientific High School, moreover, some of them were in classes with a greater focus on STEM subjects. In table 2.1 is displayed the number of classes to which either mathematics or physics test has been submitted.

Discipline	8^{th} grade	10^{th} Grade	11^{th} Grade	Total
Mathematics	3	3	3	9
Physics	-	2	2	4

Table 2.1: Number of classes taking part to the research, sorted both by grade and discipline.

The number of students who participated in the research is summarized in tables (tabb.2.2 and 2.3), also divided by grades, respectively for the mathematical test and the physics one. The main reason why we chose these classes are the similarities in programs linked to the importance of graphical representations in both mathematics and physics.

Class	8^{th} grade	10^{th} Grade	11^{th} Grade	Total
Students	70	57	56	183

Table 2.2: Students for mathematics test, divided by class.

Class	10^{th} Grade	11^{th} Grade	Total
Students	47	45	92

Table 2.3: Students for physics test, divided by class.

On the first hand, in mathematics we chose to propose 8^{th} grade geometry problems to high school students who just had gained a more complex - and complete - view of the argument; indeed, it would have been pointless to comprehend 9^{th} grade students because results would have probably been flawed by the fact that 2-dimensional geometry does not come up during the first year of high school, resulting in a predictable worsening in solving skills potential.

On the other hand, it is doubtless that the importance of displaying data through various methods (like charts, graphs, schematic drawings...) is crucial in physics, especially when dealing with more abstract concepts, like the ones that you must get used to face from 12^{th} grade onward, for example: thermodynamic, electricity, electromagnetism, and theory of relativity. Cinematic, Archimedes' law, conservation of mechanic energy and mirrors' laws do not require necessarily graphical representation of the situation in order to point out what the problem is dealing with; the fact that only many of the students use this powerful tool is more interesting in a situation in which it does not result as something fundamental but efficient anyway.

Therefore, it was decided to compare the representative skills of students in the 10^{th} and 11^{th} grades in the two different subjects, with the aim of proving whether there is a correlation between the ability to solve mathematical and physics problems.

Chapter 3

Analysis of results

Contents

The main results of the research are are shown in this chapter; all different sections are organized following the points mentioned in Chapter 2. The results are preceded by a brief section in which we summarize how students behaved in class during the test as this info it might be useful in order to better comprehend how the study was carried on.

3.1 Participation in class

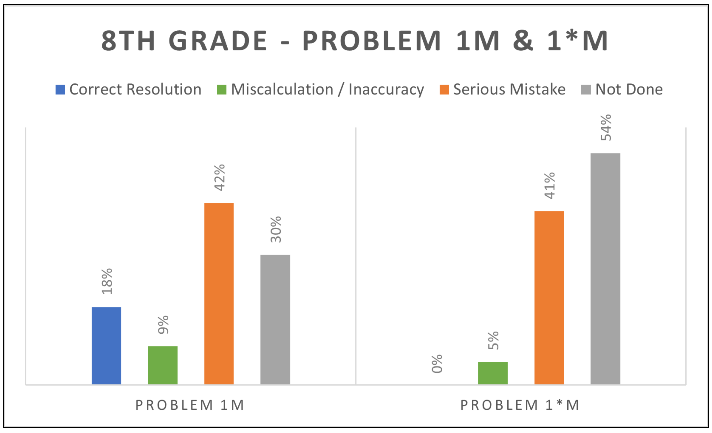
Let's start from 8$^{\text{th}}$ grade, in middle school, where we received many questions from students both during and after the submission of the test; during the examination, the main questions were about the fact that they were not able to do anything: indeed, some of them also felt a little bit discouraged for this reason. Differently, we received few questions about the correct solutions: only a minority seemed very curious and interested to the answers after the test was over. Moreover, we have to say that handling the behaviour of the students has not always been an easy task: students often tried to confront each other; although we suggested the students not to be afraid of not being able to provide any answer to the test – repeating many times that even no-answer test would have been very useful to my aims – most of the them were scared by that. Indeed, we met many difficulties while carrying on my purpose.

Upon referring to high school classes, we noticed a minor detachment from the objectives of the research we are carrying out. Instead of being perceived as a normal examination, the hour spent performing this test has been considered a *challenge*, with both good and bad consequences. More precisely, while on one hand very few of students got caught cheating during the test on the other hand we noticed a widespread lack of interest towards correct solutions and their explanation.

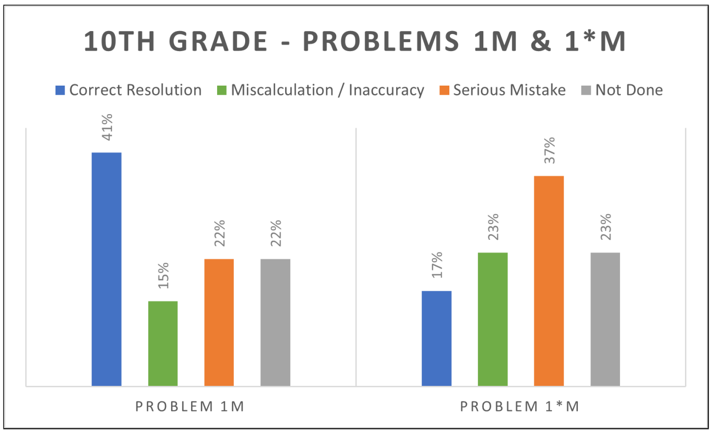
3.2 Coupled mathematics problems for each grade

For what concerns mathematics, an explanation on the cataloging of resolutions is provided in this first section. Each problem is paired with his counterpart: the first has numeric data, while the other just has symbols and requires a qualitative resolution. Moreover, the main mistakes or resolution strategies will be highlighted.

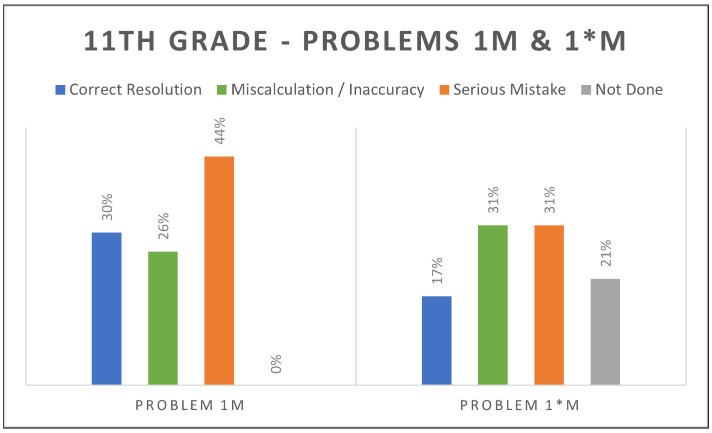
Problems 1M & 1*M The following three charts (in fig.3.1) show the results of the tests regarding the first couple of problems.



(a) 8th grade students' results.



(b) 10th grade students' results.



(c) 11th grade students' results.

Figure 3.1: Charts for the comparison between Problems 1M & 1*M for each grade.

From the comparison between these three images, it is possible to see that students reported more difficulties in qualitative problems. In fact, all classes of the three different grades got a lower level of people who didn't even try the first version rather than the symbolic one; moreover, in problems which have numbers, there are also higher *Correct Resolutions* rates. However, it is important to note that the percentage of *Serious Mistakes* is higher too, or at least very similar to the version which has no numbers instead.

To clarify, all resolutions with an inscribed circle (such as the one presented in fig.3.2) were considered seriously wrong. In particular, this has been the most widespread error at all three levels of teaching.

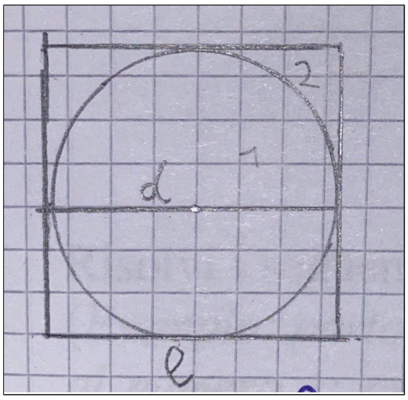
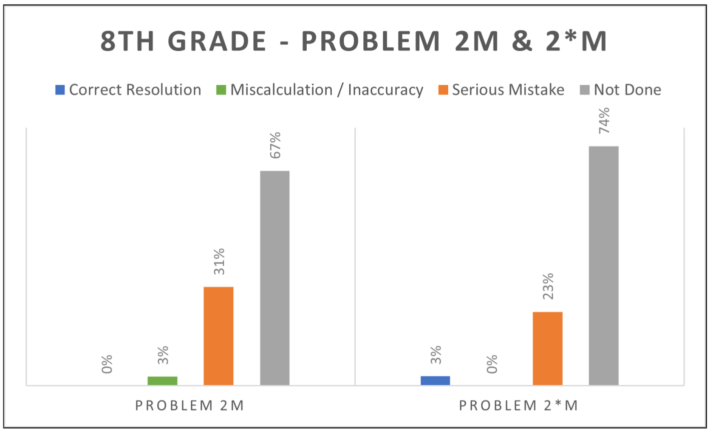


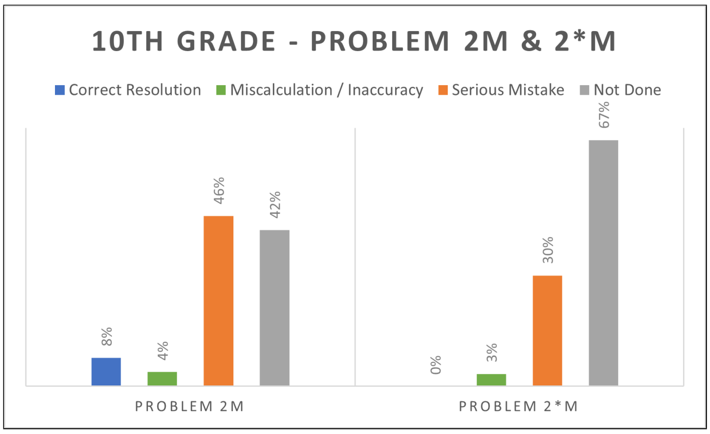
Figure 3.2: *Serious Mistake* found in problems 1M & 1*M

On the contrary, both calculation and approximation errors were not considered a serious mistake, instead; but still, it cannot be counted entirely correct.

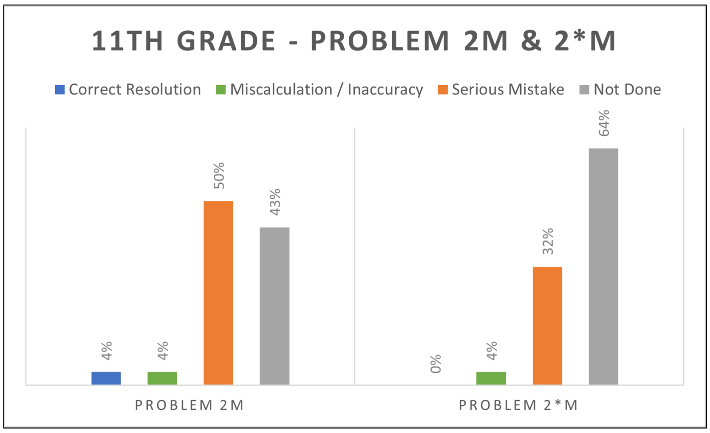
Problems 2M & 2*M Students have encountered difficulties in both versions of this problem, as you can see in fig.3.3.



(a) 8$^{\text{th}}$ grade students' results.



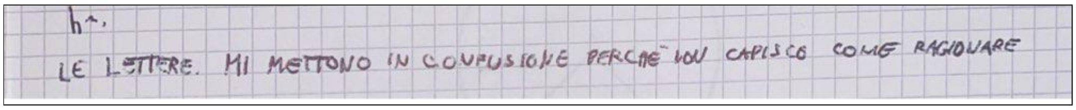
(b) 10$^{\text{th}}$ grade students' results.



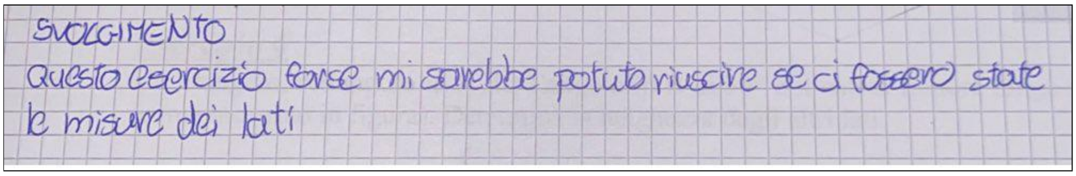
(c) 11$^{\text{th}}$ grade students' results.

Figure 3.3: Charts for the comparison between Problems 2M & 2*M for each grade.

Despite problem 2M has been selected from an 8$^{\text{th}}$ grade's exercise book, a large majority of students wrote that they couldn't, as you can read in fig.3.4.



(a) Translated content: «*Letters confuse me because I don't understand how to reason with them*».



(b) Translated content: «*Maybe I could have been able to solve this exercise if I had been given the leghts*».

Figure 3.4: This is what two 8$^{\text{th}}$ grade students wrote in their tests.

In high school, however, having to recognize the heights of the rhombus was the hardest thing. In the following picture (fig.3.5) you can see a representation of this problem (taken from a 10$^{\text{th}}$ grade test).

It is clear that students relate the height of the rhombuses with their diagonals; indeed, even during and after the test, many students came to me wondering whether we meant *rhombus' diagonals* instead of *heights*, or if they are the same.

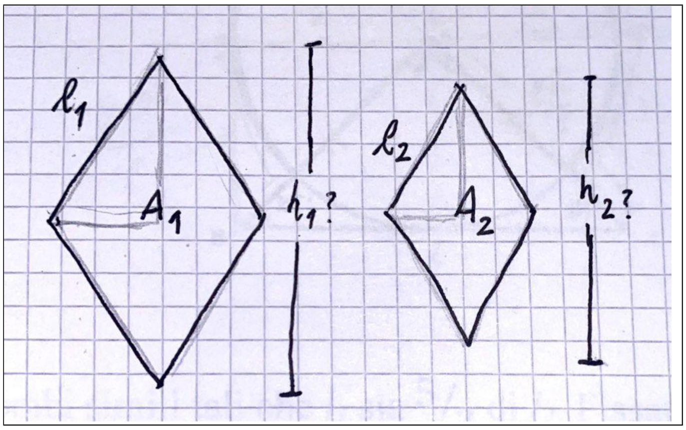
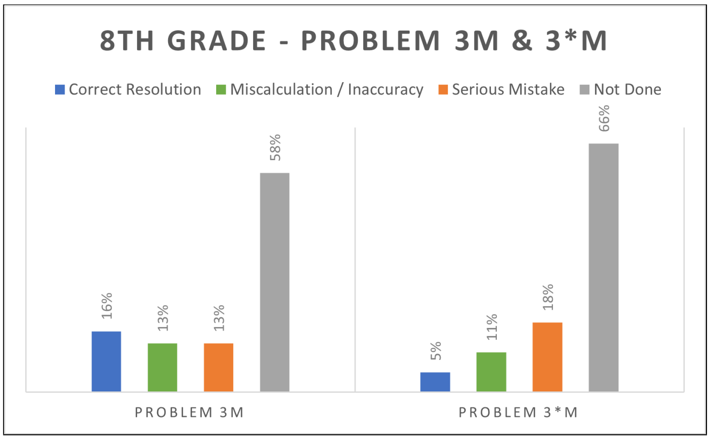
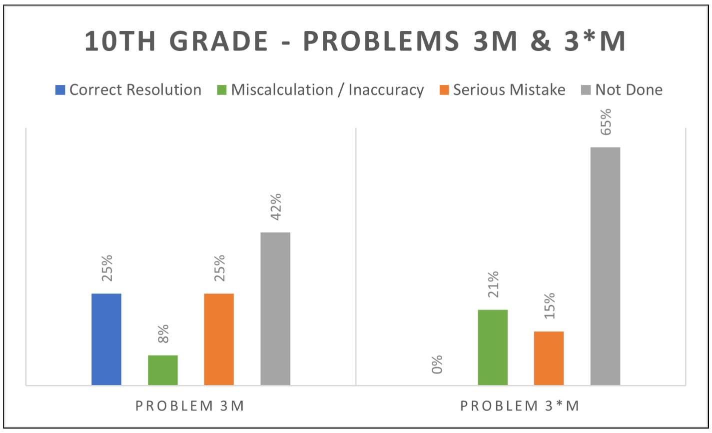


Figure 3.5: The depiction of the confusion between terms *heights* and *diagonals* in rhombuses.

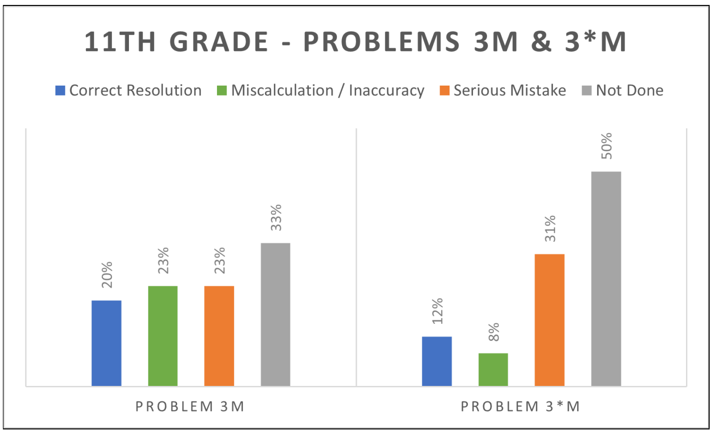
Problems 3M & 3*M Even in this case, the first vision alone of the charts in fig.3.6 gives us an idea of the difficulties encountered in both versions of the problem.



(a) 8th grade students' results.



(b) 10th grade students' results.



(c) 11th grade students' results.

Figure 3.6: Charts for the comparison between Problems 3M & 3*M for each grade.

Most of the 8^{th} grade students did not even try any version of the problem, while the higher grades showed that the qualitative version turned out to be more challenging than the counterpart.

As concerns *Serious Mistakes*, there was a significant amount of students that put their trust in measurements taken with the ruler. Indeed, many resolutions started with the assumption «$\mathbf{BC} = d$, where d is the diameter of the circle C», and is accompanied by drawings like the one shown in fig.3.7.

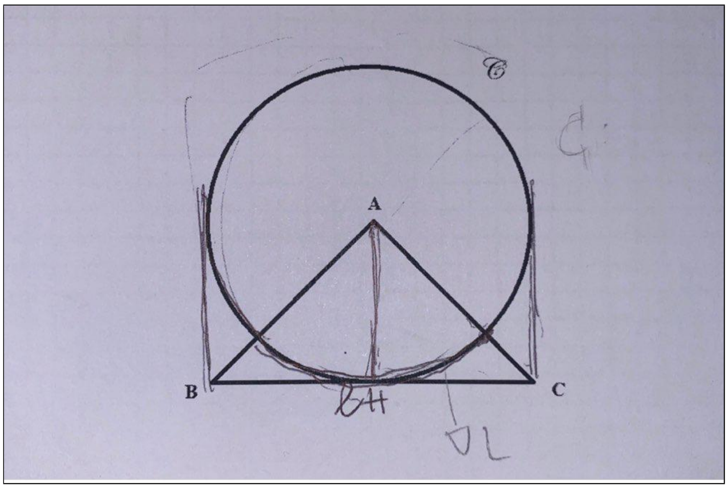


Figure 3.7: For those students, visual perception is the sole justification for $\mathbf{BC} = d$; unfortunately, this is not a sufficient one.

In addition to this type of mistake, students who also copied the figure incorrectly are to be mentioned. An example of this kind of *Serious Mistakes* can be found in fig.3.8.

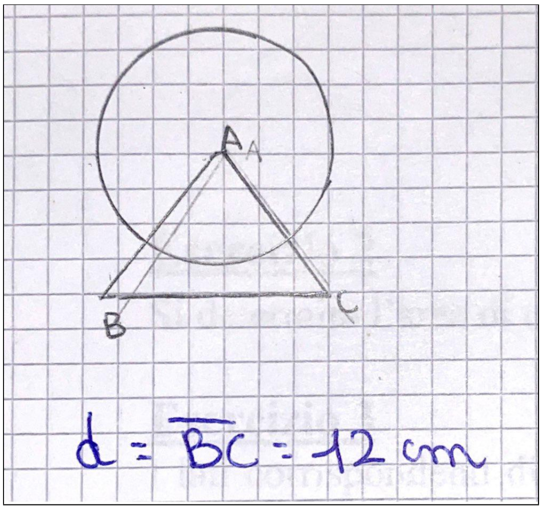
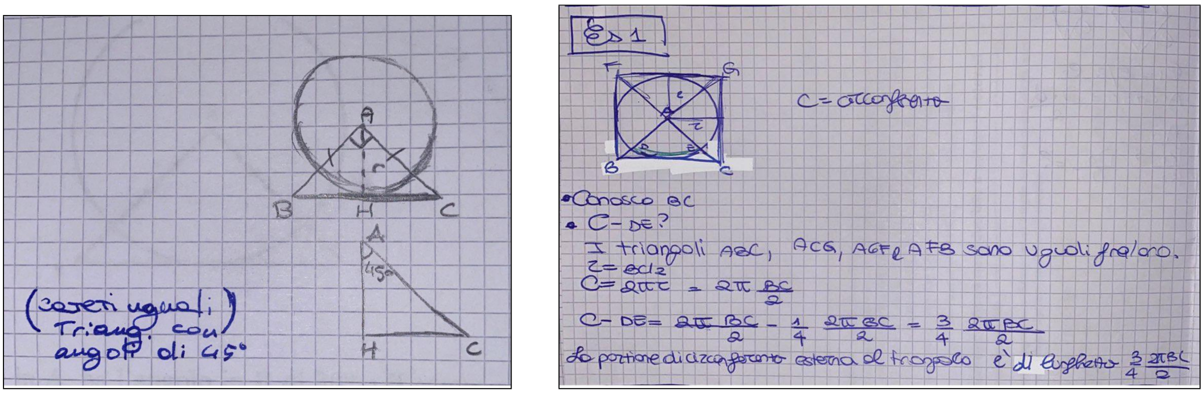


Figure 3.8: This figure has nothing to do with the one this student was supposed to study; indeed, in order to solve this problem, this figure is impossible to reason with.

However, many options have been floated regarding procedures with a *Correct Resolution*. In these two pictures, in fig.3.9, we would like to show the whole range of possible solving strategies found by the students.



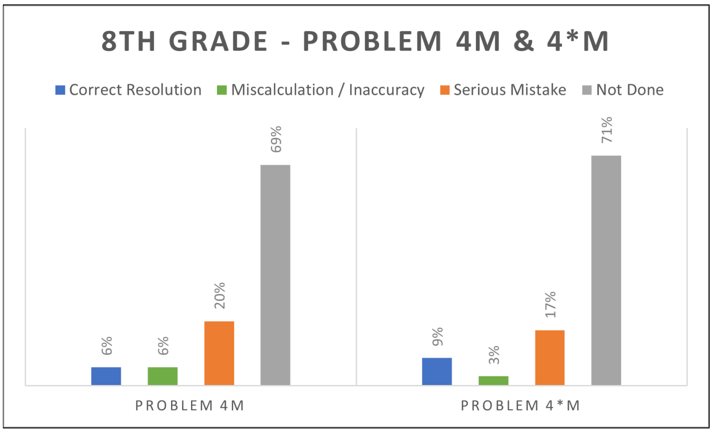
(a) (b)

Figure 3.9: Two different but equally correct resolutions for problem 3M & 3*M

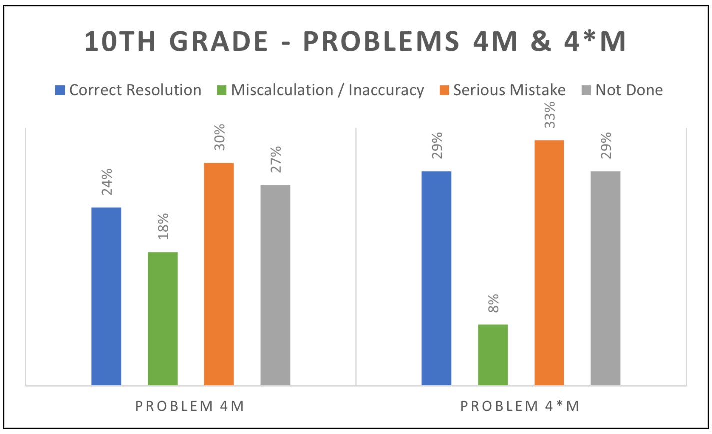
In fig.3.9 a), the student has broke down the triangle **ABC** into two isosceles right triangles (which were named **ABH** and **ACH**); after that, the property for which 45° corners isosceles right triangles also have cathetus of equal length has been highlighted. Due to that, at that point it becomes clear that the **BC** side is equal to the diameter of the circle.

In fig.3.9 b), the student drew a circumscribed square **BCGF** and then recognized that the height of the triangle **ACG** coincides with the radius of the inscribed circumference. Nonetheless, we would like to emphasize a detail we think it would be worth looking into: namely the fact that in order to see that triangle **ABC**'s height is equal to the radius, it was necessary to draw the entire square. Moreover, all the follow-up study has been carried on another triangle (not **ABC**).

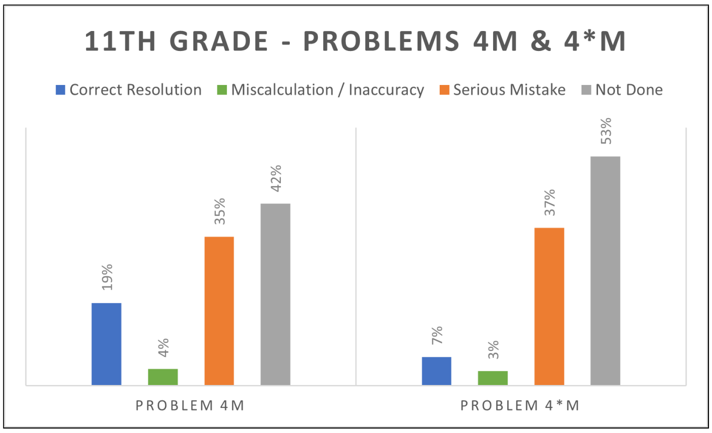
Problems 4M & 4*M In order to comprehend the results of the classes on this problem (presented in fig.3.10), let us point out first of all that most of the 10^{th} and 11^{th} grade students have used trigonometric formulas in their procedures As has been said repeatedly during the test, this would have been considered wrong since it doesn't involve any abstract aspect.



(a) 8th grade students' results.



(b) 10th grade students' results.



(c) 11th grade students' results.

Figure 3.10: Charts for the comparison between Problems 4M & 4*M for each grade.

As we can see in those graphs, there is a very high *Serious Mistake* rate compared to 8$^{\text{th}}$ grades results; moreover, those percentage are almost equal in both versions of the exercise.

Based on the rate of *Correct Resolution* and *Miscalculation/Inaccuracy*, this comparison reveals that - except for 11$^{\text{th}}$ grade students - the qualitative problem has been the most difficult.

A 10$^{\text{th}}$ grade student procedure is shown in fig.3.11 below: it is clear that he has solved problems like this before.

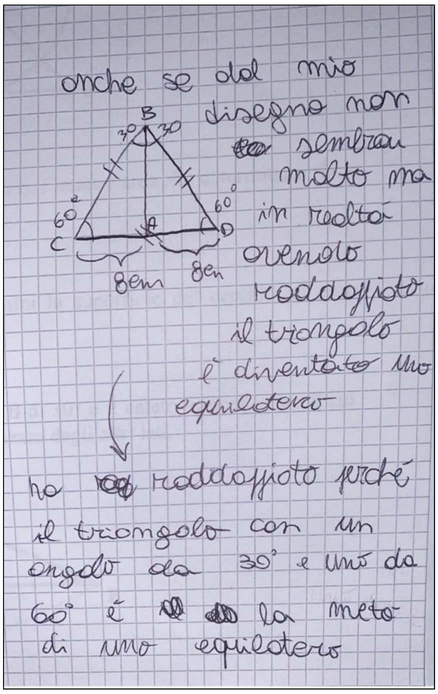


Figure 3.11: 10$^{\text{th}}$ explanation of how he built the equilateral triangle from the right triangle given to him. Translated content: «*Doubling the triangle given, it results an equilateral one, even if it does not look like; we followed these steps because (I know that) triangles with 30° and 60° are a half of an equilateral one*».

A minority of students tried to solve the qualitative version problem by replacing the x given with a number at will. So, basically, instead of solving the exercise, they invented an associated numeric version of the task, as shown in fig.3.12. However, the entire resolution process is correct (**BC=4** indeed, which is twice the length of AC).

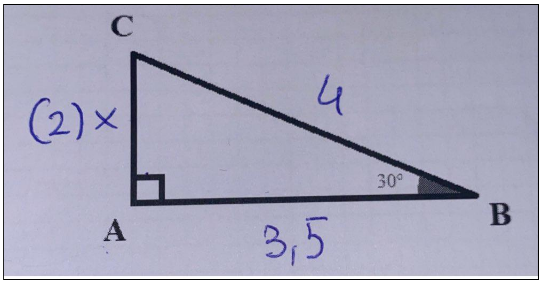


Figure 3.12: In this 8^{th} grade student's procedure x is replaced by number 2.

Also in this fourth problem, we would spend a couple of lines mentioning the fact that many students tried to resolve the problem creating a proportion between the real measure of the triangle's sides and the given numerical information. This kind of procedure is clearly explained in the following picture (fig.3.13).

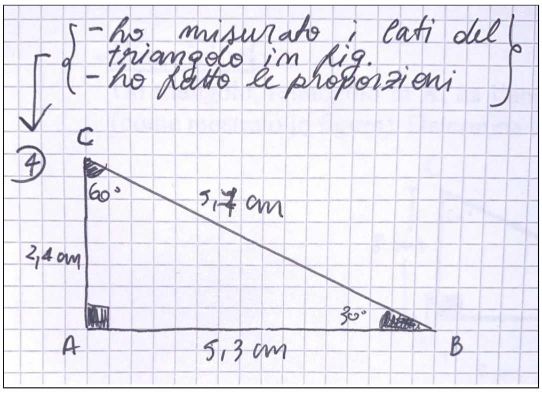


Figure 3.13: This 10^{th} grade student explained that he measured the the given side with the ruler and managed to deduce other sides' lengths this way.

Regarding the overall problem's outcomes, it seemed that after getting the potential of trigonometry, students instantly forgot how to solve or see problems with a different point of view. In this sense, the more knowledge you get, the more close-minded you become, and that is scaring.

3.3 Coupled physics problems at same grade

For physics problems, it is important to recall that problems 1.1P and 1.1*P have been carried out only by 10^{th} grade classes, while 1.2P and 1.2 * P are carried out by 11^{th} grade ones. The remaining problems were administered casually to students belonging to both grades classes.

Before beginning single paired problems analysis we have to mention an issue often encountered regardless of which qualitative exercise are you dealing with. we are referring to the problem that often students do not seem to know whether they have solved the problem. It is usually enhanced by the fact that a minority of students circles results when they think they have found the solution to the problem (as shown in fig.3.14).

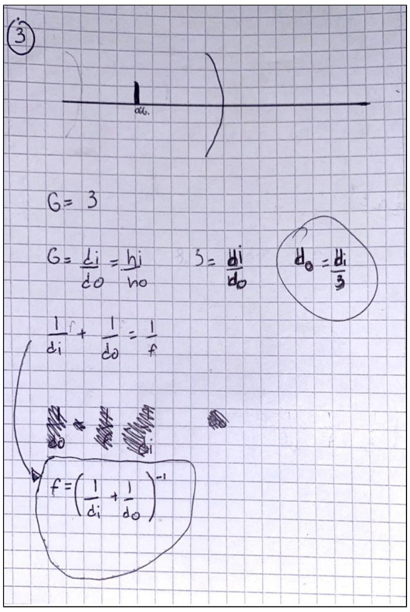


Figure 3.14: This resolution (problem 1.1*P) was considered wrong because it is clear that this student is not getting the point of the problem at all.

Problems 1.1P & 1.1*P Looking at the charts in the following figure (fig.3.15) it is clear that the respective percentages are very similar; therefore, we can conclude that the presence or absence of numbers in this specific problem had no influence on students' ability to resolve it.

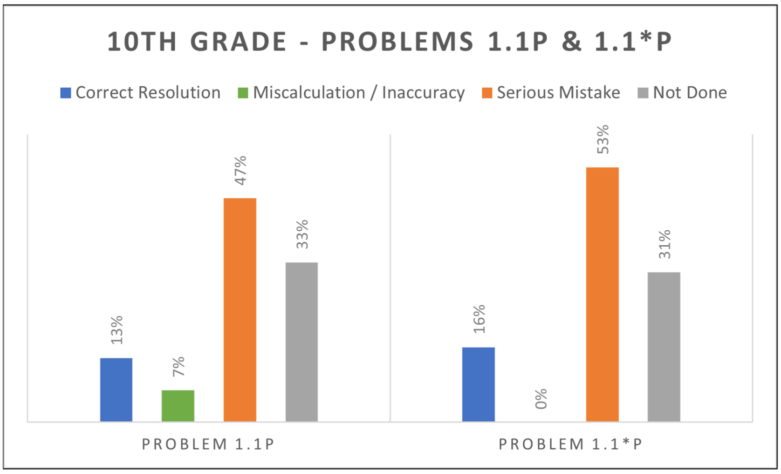


Figure 3.15: 10^{th} grade students' resolutions for problems 1.1P & 1.1*P.

Besides, it's important to notice that most of the *Serious Mistake* resolutions are accompanied by big mistakes in problem representation, like the one that we can see in fig.3.16.

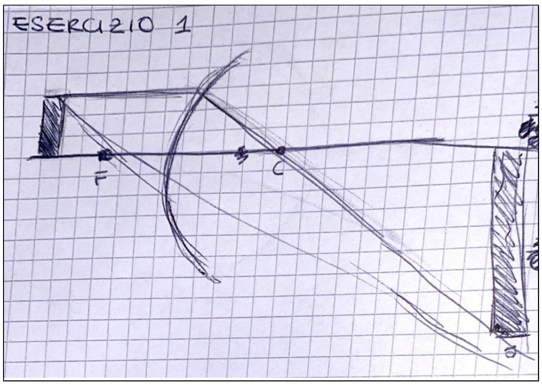


Figure 3.16: Here we can notice a serious mistake in the construction of the image generated by a concave mirror.

Another type of error consisted in the elimination of the negative sign in d_o, which is the distance between the mirror and the generated image.

Problems 1.2P & 1.2*P Let us move on to the conservation of mechanical energy problem, which was administrated only to 11^{th} grade students.

As the chart below shows (fig.3.17), unfortunately most of the proposed solutions were vitiated by the misconception about the meaning of the italian term *rapporto*; the correspondent translation should be *ratio*, but it is confused with terms like *connection*, or *relation*.

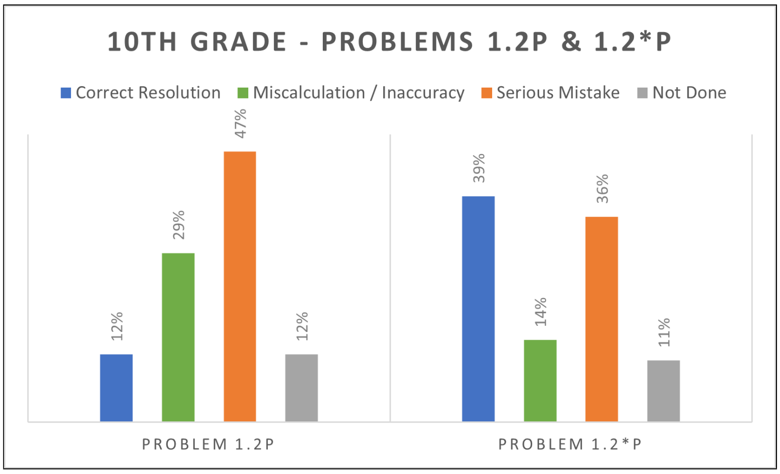


Figure 3.17: 11th grade students' resolutions for problems 1.2P & 1.2*P.

What follows (in fig.3.18) is a perfect resolution for the qualitative version of this problem. From that it becomes very obvious that the topic is well understood by the student.

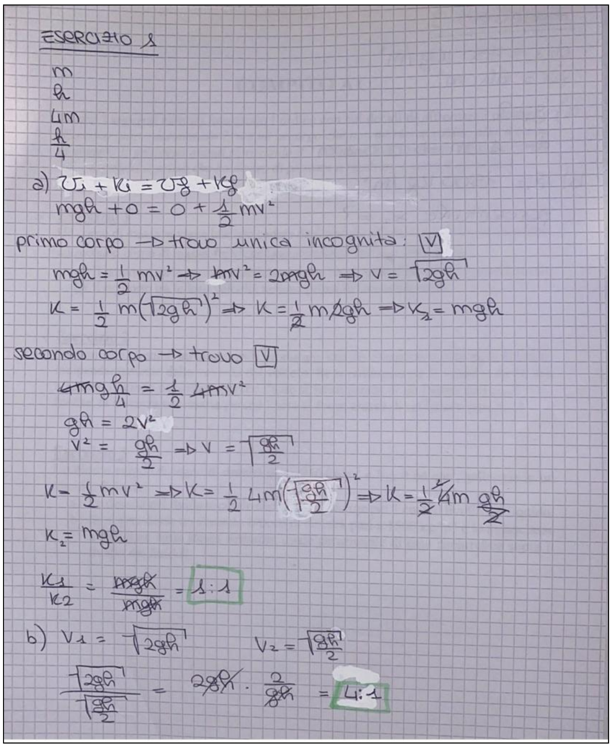
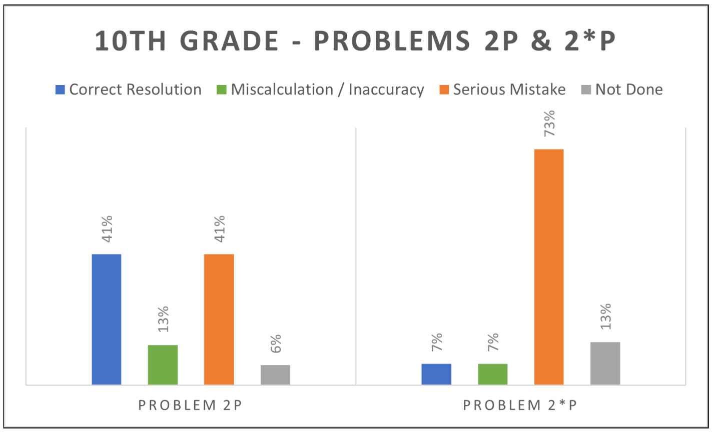
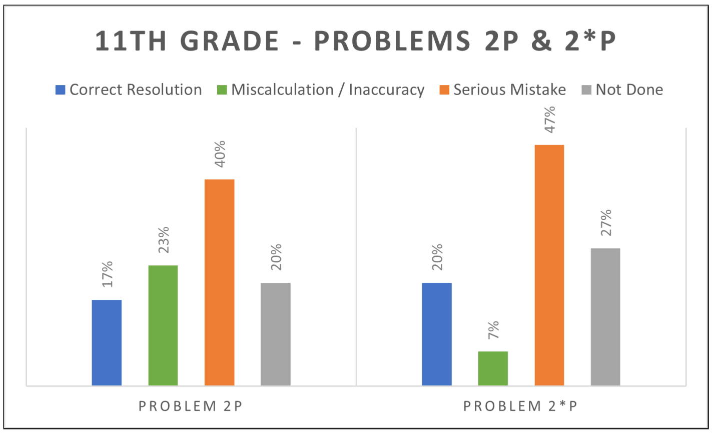


Figure 3.18: Correct resolution for problem 1.2*P.

Problems 2P & 2*P This problem was meant to be the easiest, but turned out to be the most insidious for the students. As reported in the following graphs in fig.3.19, although there are few *Not Done* exercises, there is a very high *Serious Mistake* rate.



(a) 10th grade students' results.



(b) 11th grade students' results.

Figure 3.19: Charts for the comparison between Problems 2P & 2*P for each grade.

The two most common errors found while correcting assignments were the following: many students failed in the process of obtaining the inverse formula of mean acceleration from its definition in order to determine the breaking time (as reported in fig.3.20); otherwise, another good portion of them have instinctively answered «If the speed doubles, then braking time and space will double too» without giving any reason. Moreover, in the first case, it is worth noting that there is no way that the numerical results obtained could make any physics sense: how could a car cover a distance of 320 meters in 0.2 seconds?

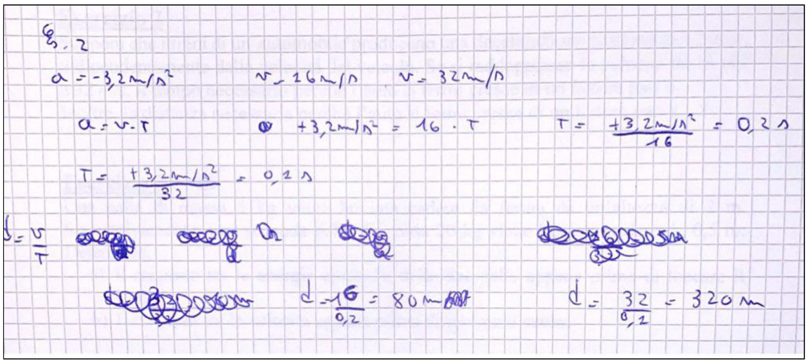


Figure 3.20: Even tho his premises were correct, this student tried to solve the problem using a wrong inverse formula.

A less widespread but interesting mistake is the one presented in fig.3.21; An error similar to this one occurred while correcting problem 4*M, as shown in 3.12: indeed, also in this case the absence of numbers is replaced not by an invented one, but with the most famous acceleration (namely acceleration of gravity).

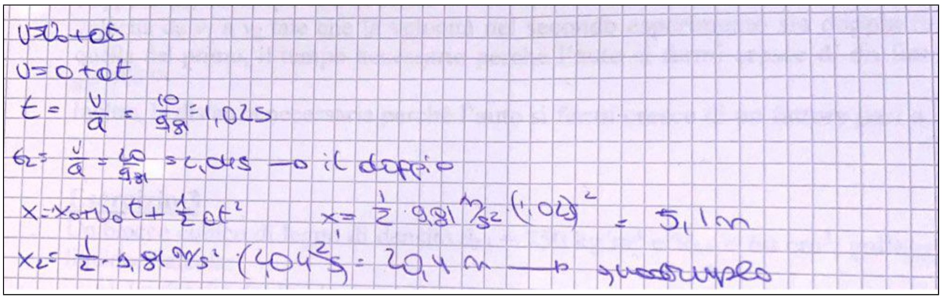
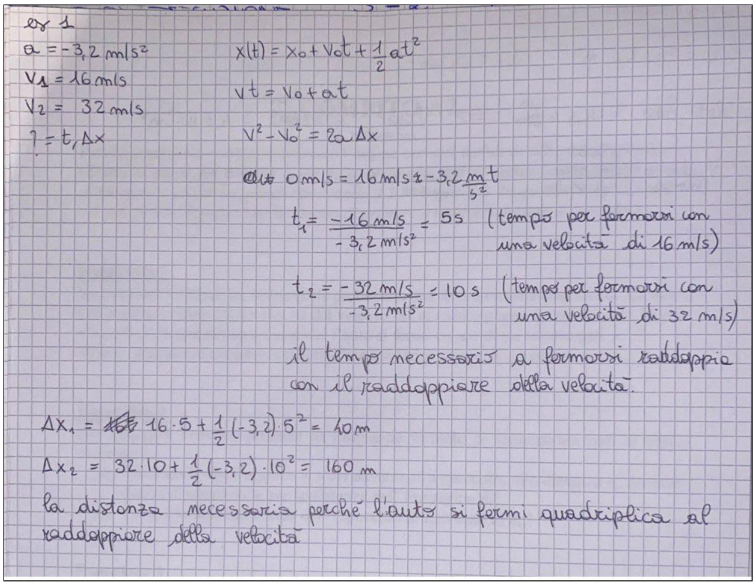


Figure 3.21: In this procedure, the student used $a = 9.81m/s^2$; this shows that there is a particular need to introduce numbers, even without understanding their meanings.

Yet the correct solution of this problem is depicted in fig.3.22.


es 1

$a = -3{,}2\ m/s^2$

$V_1 = 16\ m/s$

$V_2 = 32\ m/s$

$? = t, \Delta x$

$x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$v t = V_0 + a t$

$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x$

$0\ m/s = 16\ m/s - 3{,}2\ \frac{m}{s^2} t$

$t_1 = \frac{-16\ m/s}{-3{,}2\ m/s^2} = 5\ s$ (tempo per fermarsi con una velocità di 16 m/s)

$t_2 = \frac{-32\ m/s}{-3{,}2\ m/s^2} = 10\ s$ (tempo per fermarsi con una velocità di 32 m/s)

il tempo necessario a fermarsi raddoppia con il raddoppiare della velocità.

$\Delta x_1 = 16 \cdot 5 + \frac{1}{2}(-3{,}2) \cdot 5^2 = 40\ m$

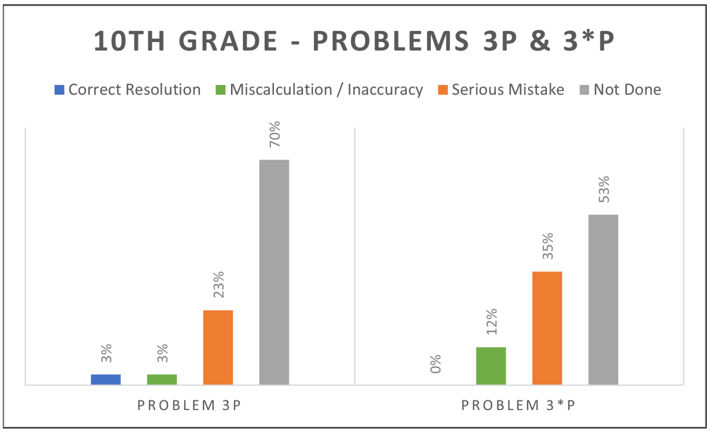
$\Delta x_2 = 32 \cdot 10 + \frac{1}{2}(-3{,}2) \cdot 10^2 = 160\ m$

la distanza necessaria perché l'auto si fermi quadruplica al raddoppiare della velocità

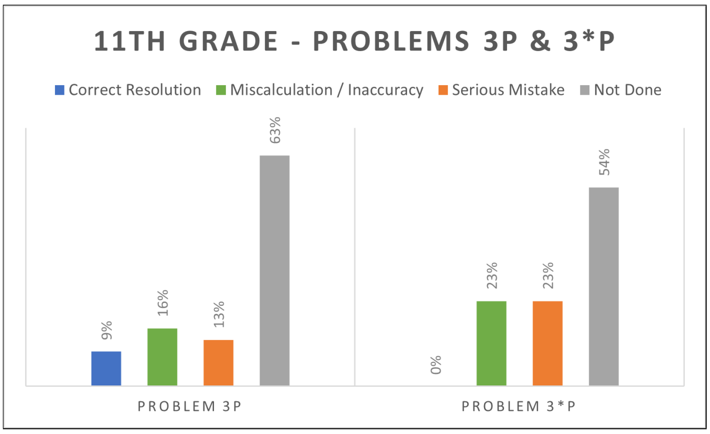
Figure 3.22: This is how problem 2P was supposed to be resolved. Also, all passages and results are correctly commented and physically realistic.

Problems 3P & 3*P Regarding this problem, a large number of students wrote that the reason why they cannot solve this exercise is because they do not remember the hydrostatic buoyancy formulas. Such phenomenon occurred more often in 11^{th} grade classes than in 10^{th} ones; this could be because younger students had just addressed this topic in class.

Also, there is a strong tendency in the answers to this exercise (see fig.3.23): since the percentage of students who made serious mistakes is very low, then we can say that a very clear idea was present in most of the them who tried to solve this problem.



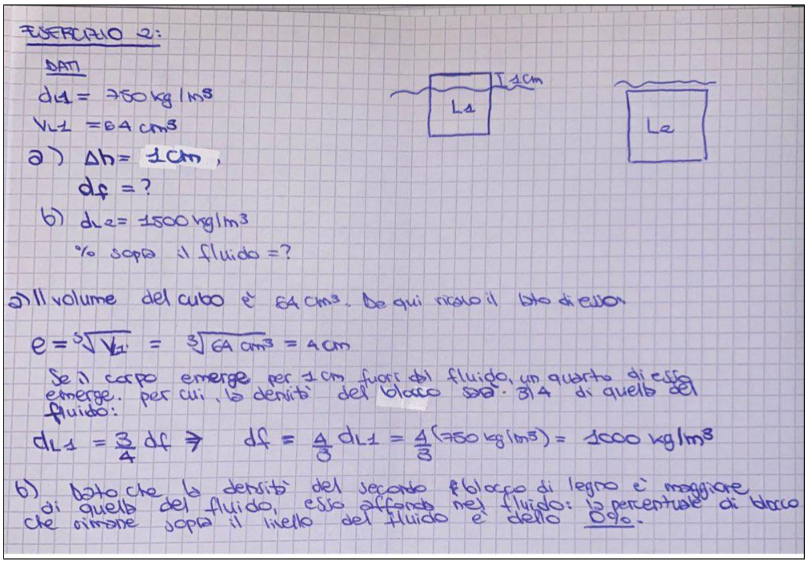
(a) 10th grade students' results.



(b) 11th grade students' results.

Figure 3.23: Charts for the comparison between Problems 3P & 3*P for each grade.

As shown in the graphs above, no one has been able to resolve the second version of the task (the one without numeric data); an 11th grade's student correct solution is shown in the following picture (fig.3.24).



ESERCIZIO 2:

DATI

$d_{L1} = 750\ kg/m^3$

$V_{L1} = 64\ cm^3$

a) $\Delta h = 1\ cm$,

$d_f = ?$

b) $d_{L2} = 1500\ kg/m^3$

% sopra il fluido = ?

a) Il volume del cubo è $64\ cm^3$. Da qui ricavo il lato di esso.

$e = \sqrt[3]{V_{L1}} = \sqrt[3]{64\ cm^3} = 4\ cm$

Se il corpo emerge per 1 cm fuori dal fluido, un quarto di esso emerge. per cui, la densità del blocco sarà 3/4 di quella del fluido:

$d_{L1} = \frac{3}{4} d_f \Rightarrow d_f = \frac{4}{3} d_{L1} = \frac{4}{3}(750\ kg/m^3) = 1000\ kg/m^3$

b) Dato che la densità del secondo blocco di legno è maggiore di quella del fluido, esso affonda nel fluido: la percentuale di blocco che rimane sopra il livello del fluido è dello 0%.

Figure 3.24: One of the few correct resolution of problem 3P.

3.4 Same mathematics problems at different grades

This second half of the chapter is dedicated to a comparison based on how students of different grades have been capable of tackling problems both with and without numeric data. While resolution percentages are the same plotted in previous graphs, differences between all grades' solving skills will be highlighted in this section.

3.4.1 Mathematical problems with data

Let us begin this analysis with problems with numeric data, then we see the coupled versions.

Problem 1M This one is doubtless the best question in terms of correctness of the answers, as shown in the following graph in fig.3.25.

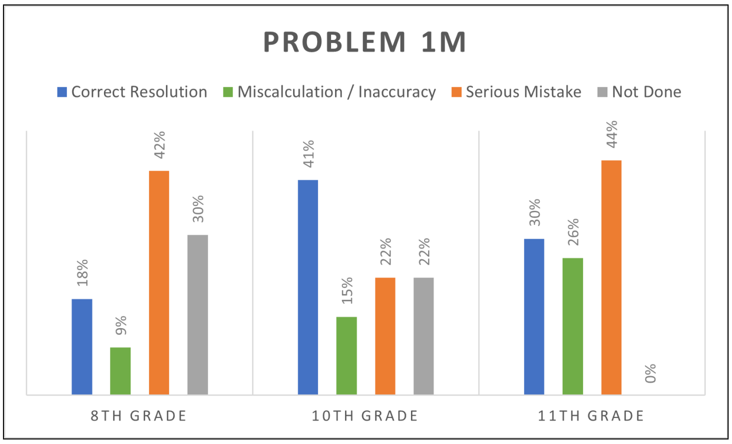


Figure 3.25: Problem 1M resolutions divided by class.

What we would like to emphasize is that the best results were achieved by 10^{th} grade students. As we mentioned previously, main mistakes were linked to the fact that students drew an inscribed circumference instead of a circumscribed one; while in 8^{th} grade this is perceived as a hard topic, in 11^{th} grade they didn't even know (better say *remember*) what that meant.

At the same time, we can also observe that none of the older students left this problem not done.

Problem 2M This second problem is characterised by tendency towards both *Serious Mistake* and *Not Done* outcomes, no matter what the grade, as clearly presented in fig.3.26.

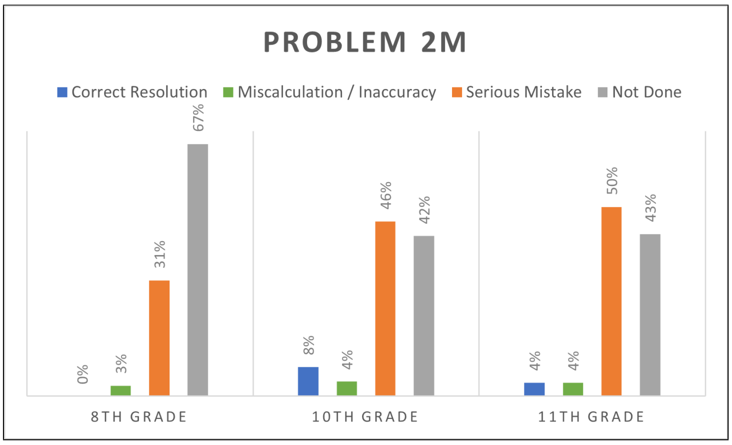


Figure 3.26: Problem 2M resolutions divided by class.

Although the 10^{th} and 11^{th} grade students got at least few correct answers, it is important to note that due to the orientation of the figures drawn, most of the pupils have attempted to resolve this problem using rhombuses' diagonals as their highs; therefore, it has been shown that the older students have more confidence in themselves with respect to younger ones.

Problem 3M Just looking at the four mathematical problems with numeric data, this is the only case in which the correctness of the answers follows the age trend. As expected, this unusual and complex problem put a bit of a fight in 8th grade students; indeed, the overwhelming majority of them haven't even made an attempt to solve this exercise, as we can see in fig. 3.27.

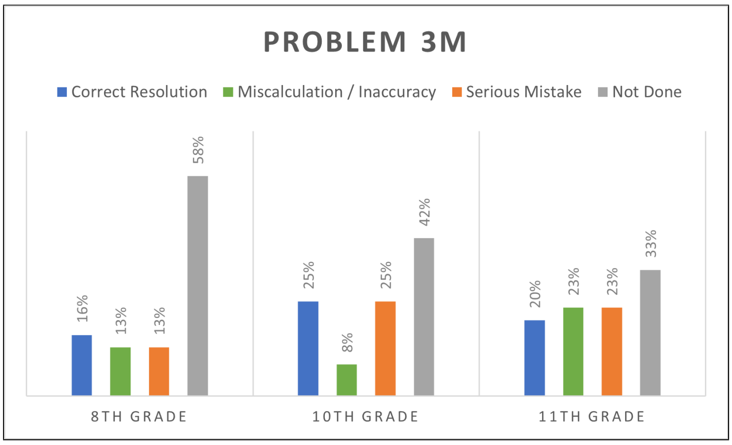


Figure 3.27: Problem 3M resolutions divided by class.

In 10th and 11th grades the *Not Done* percentage is high as well, but it is significantly below the proportion of younger students. Based on responses, it resulted that many 8th grade students took for granted that triangle's hypotenuse had the same length of the circle's diameter, only relying on what their eyes perceived. On the contrary, high school students tried to justify all their graphical assumptions.

Problem 4M In fig.3.28 we can see that the percentage of students who found the correct solution (blue plus green columns) is higher at 10th grade.

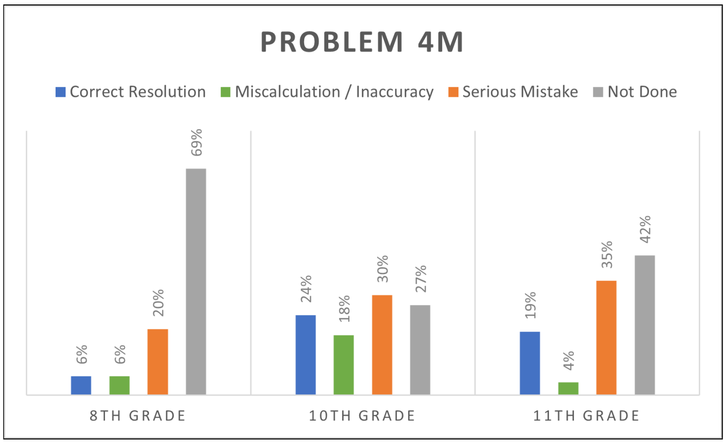


Figure 3.28: Problem 4M resolutions divided by class.

Indeed, what amazed us most was the difference between 10^{th} and 11^{th} grades: as we mentioned in the previous section, most of the higher students' mistakes are due to the use of trigonometric knowledge. Moreover, what we would expect to see were much better results for 8^{th} grade students: even middle school maths teachers unanimously upheld the fact that they spent several hours on right triangle with 30° and 60° angles.

3.4.2 Mathematical problems without data

Now, we move to mathematical qualitative problems. In general, *Not Done* occurrences increased slightly regardless of grade.

Problem 1*M As it is possible to see in graph below (fig.3.29), no students at 8^{th} grade had succeeded in resolving this problem.

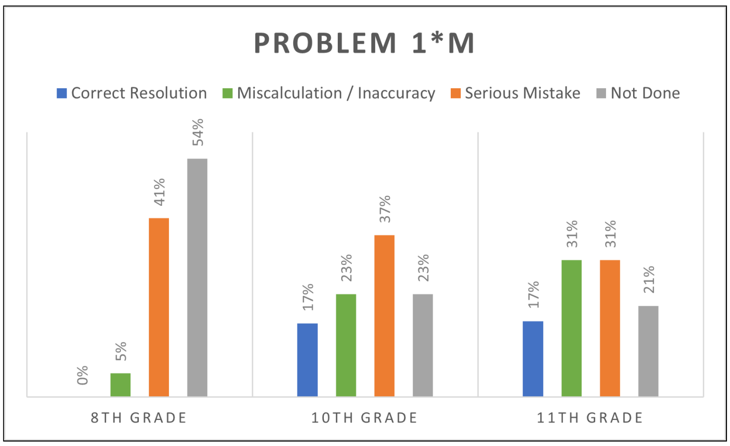


Figure 3.29: Problem 1*M resolutions divided by class.

At higher grades, however, students got quite good results: it is always good to remember that many mistakes were caused by error in drawing a circle inscribed in the square instead of a circumscribed one.

Problem 2*M This exercise has brought the students a lot of hardship, and they have run into many problems while trying to figure out how to draw the two rhombuses (fig.3.30.

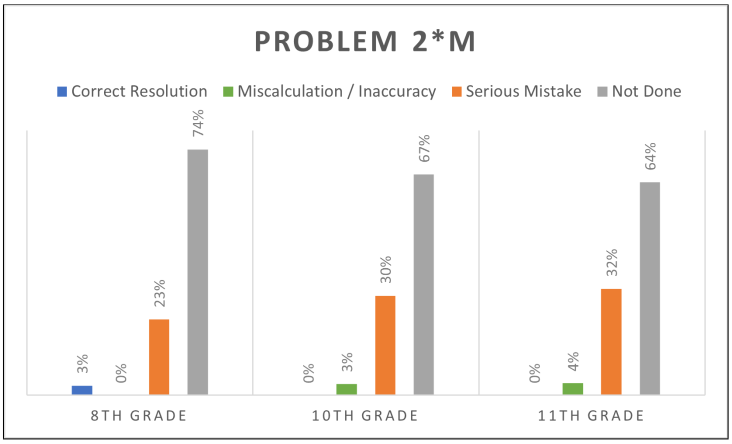


Figure 3.30: Problem 2*M resolutions divided by class.

It is especially important to emphasize the fact that only at 8^{th} grade there were few students able to resolve this problem; we can also notice that some very few good resolutions occurred in higher grades albeit with some inaccuracies.

Problem 3*M As concerns these problem resolutions, we can see in the graph shown in fig.3.31 that the majority of the students had demonstrated tendency to not even try to confront with the task, regardless of their grade.

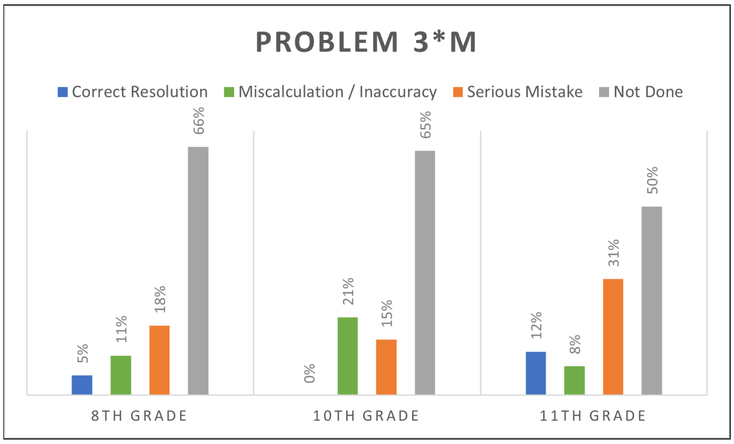


Figure 3.31: Problem 3*M resolutions divided by class.

Nevertheless, there would seem to be a need for a clarification: for what concerns higher levels of instruction, a tendency to try more, even at the risk of making mistakes, has been shown. And in this sense, with regards to mathematical solving-skills, students at high school do not seem to lack self confidence.

Problem 4*M Looking at qualitative resolutions of this problem in fig.3.32, it is clear that at the 10^{th} grade there is a better view of how to proceed with *30°-60° right triangle*, even without numeric references.

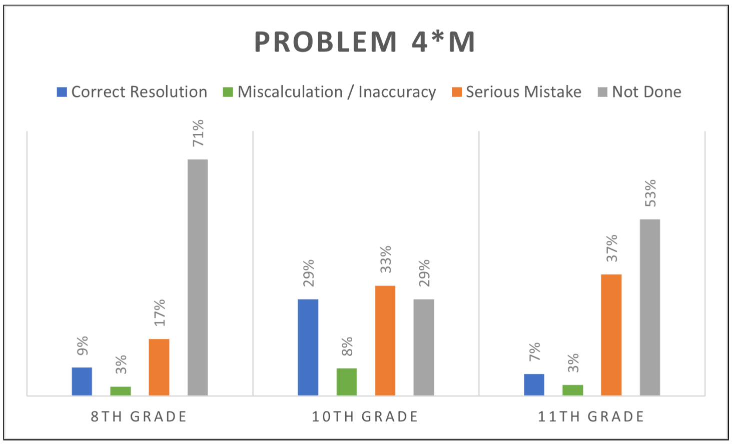


Figure 3.32: Problem 4*M resolutions divided by class.

3.5 Same physics problems at different grades

We shall now proceed to talk about physics problems from the point of view of different approaches depending on students' grade. As we discussed in Chapter 2, it was not possible to submit any physics problem to 8th grade students due to the lack of knowledge: indeed, those topics are not addressed in middle school's program.

3.5.1 Physics problems with data

As we did for mathematical ones, we will start with exercises with numeric references and then move on to symbolic ones.

Problem 2P Though it is a recursive topic in physics knowledge - and therefore a very important element - it often happens that kinematics is considered *forgettable*: spiral curriculum (sec.1.1) would therefore prove exceptionally helpful to front this huge problem in physics curricula. All this is evident even in the following graph, in fig.3.33.

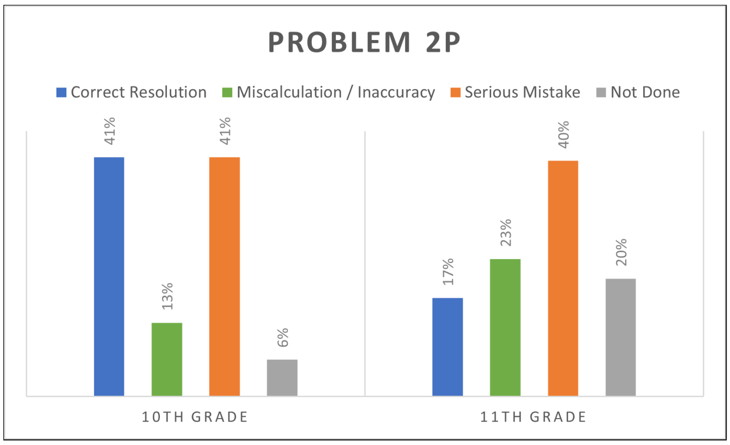


Figure 3.33: Problem 2P resolutions divided by class.

The main difference that needs to be brought out consists in the percentage of students who did not even try to solve the problem; the fact that one in five students of an 11th grade scientific high school's class is not even able to start the resolution is definitely worrying.

Problem 3P Results on the subject of the problem about Archimedes's Law were almost identical: in fig.3.34 we can see two high gray columns which are to represent a very high proportion of students who do not even try to solve the exercises.

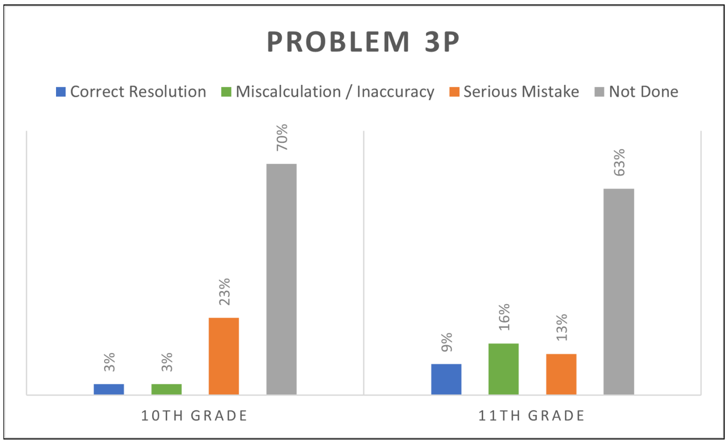


Figure 3.34: Problem 3P resolutions divided by class.

The main reason for that failure can be traced back to not remembering the necessary formulae, as we analyzed previously in this chapter.

3.5.2 Physics problems without data

Finally, let us compare the results obtained by high school students in symbolic physics problems.

Problem 2*P In this version of the exercise seems that the lack of numbers gave an advantage to 11$^{\text{th}}$ grade students in terms of solving skills; indeed, percentage of students whose made serious mistakes in their resolutions is significantly lower, even if the portion of people that avoided the problem is slightly higher than the 10$^{\text{th}}$ grade's one. All this can be seen in the following chart (fig.3.35).

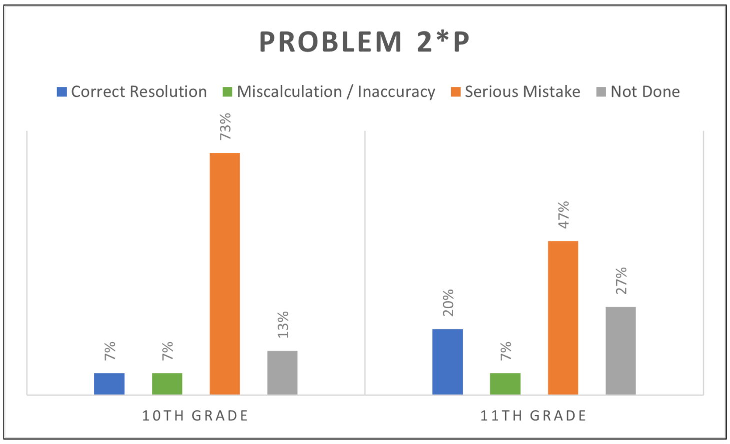


Figure 3.35: Problem 2*P resolutions divided by class.

Problem 3*P The most striking aspect of the chart below (fig.3.36), representing the cataloging procedure, is the absence of correct answers; indeed, no student has been able to correctly solve this problem.

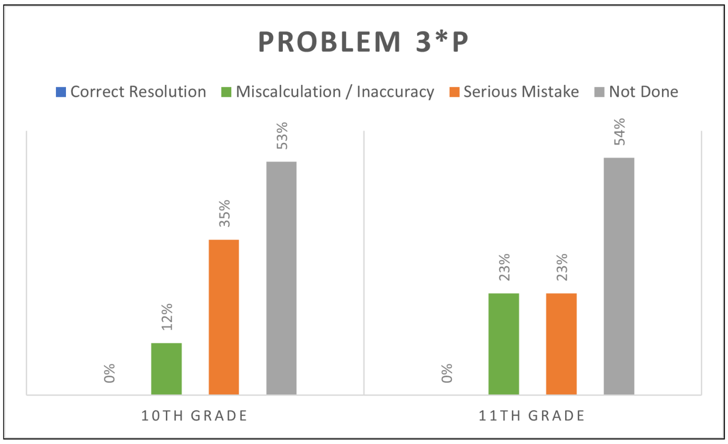


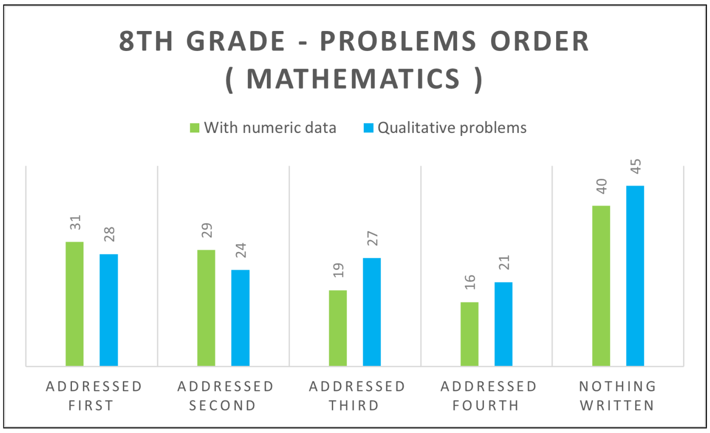
Figure 3.36: Problem 3*P resolutions divided by class.

We can also notice that the percentage of resolutions with just an inaccuracy is at least not equal to zero; moreover, it is higher in 11th grade compared to the 10th one and the amount of students who were not able to even start the procedure is almost the same.

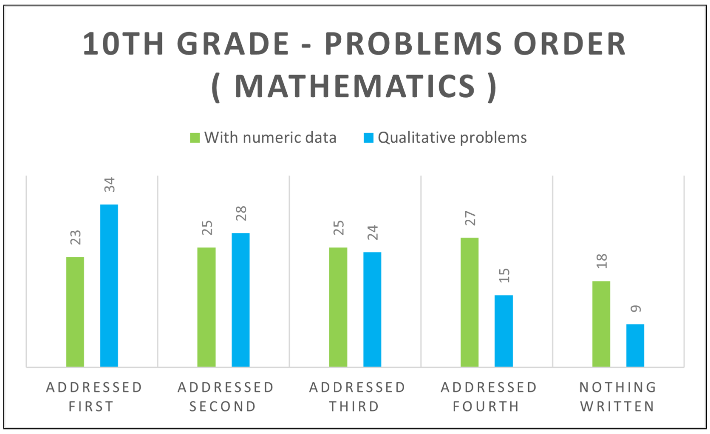
3.6 Comparison between orders of problems' resolution

In this last section we would like to analyze the order in which exercises have been faced by students.

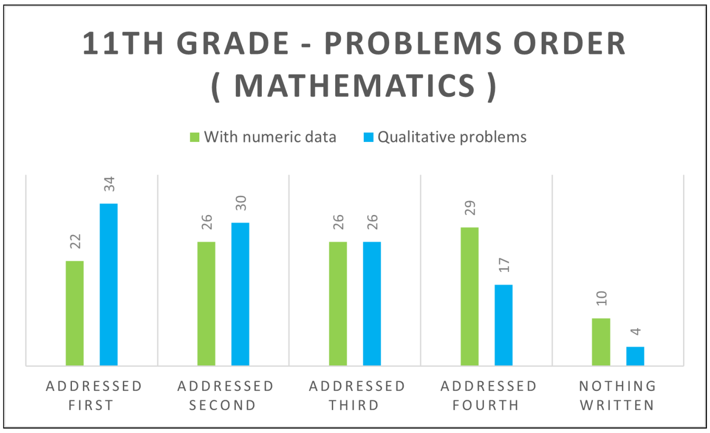
In particular, the three charts below (fig.3.37) break down the order in which both qualitative and quantitative mathematical problems have been addressed.



(a) 8th grade students' resolution order.



(b) 10th grade students' resolution order.

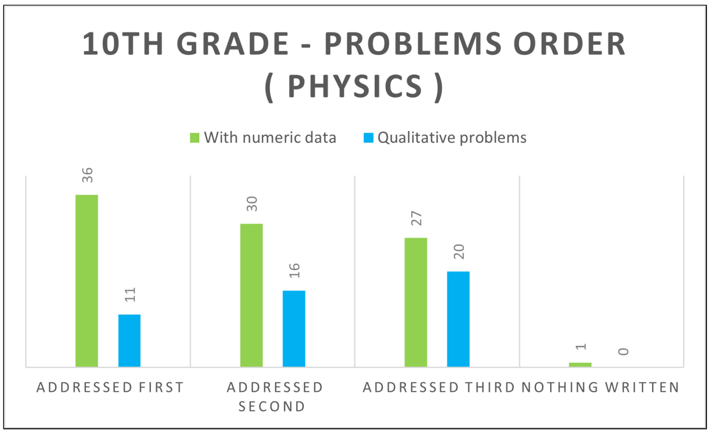


(c) 11th grade students' resolution order.

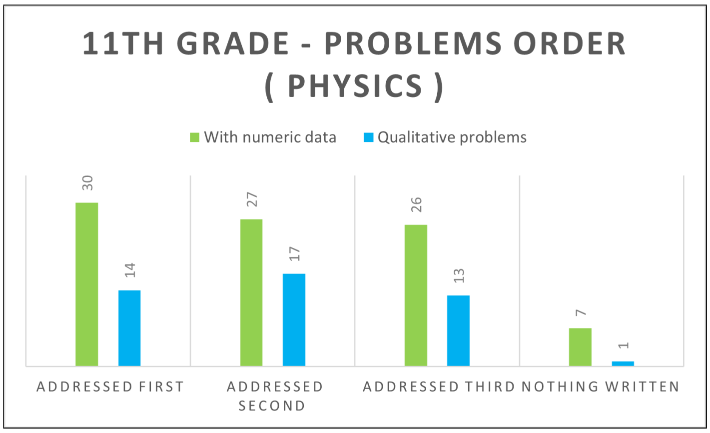
Figure 3.37: These are the orders in which both quantitative and qualitative mathematical problems were carried out at any grade.

As it turns out, for mathematical tasks, younger students are more confident in their numerical problem solving skills, whereas an opposite trend has been detected in high school ones. It is also interesting to note that the number of scholars who did not write anything about one or more tasks decreases dramatically with grades.

Whereas, the order of resolution of physics problems is shown in the following figure (fig.3.38).



(a) 10$^{\text{th}}$ grade students' resolution order.



(b) 11$^{\text{th}}$ grade students' resolution order.

Figure 3.38: These are the orders in which both quantitative and qualitative physics problems were carried out at any grade.

To better understand those graphs, it would be appropriate to remind that two quantitative and just one qualitative problem have been provided in each test. In the analysis phase, it is therefore appropriate to consider *problems with numbers*' occurrences as the half of what we read in the charts above. That being said, it reveals that the differences between problems with or without numbers are negligible.

Moreover, the comparison between student's attitudes in both of the disciplines has brought out the fact that the number of students whose did not even try to front one or more problems is much higher in mathematical tests.

I should like to highlight one final aspect: while we were grading tests, we also decided to take note of number of students who followed the order proposed in the test. In the following tables (tab.3.1 for what concerns mathematics and tab.3.2 for physics matter) those amounts of students are reported.

Class	8^{th} grade	10^{th} Grade	11^{th} Grade
Students percentage (approximately)	39%	51%	48%

Table 3.1: Percentage of students whose decided to follow the proposed problem order, sorted by class.

Class	10^{th} Grade	11^{th} Grade
Students percentage (approximately)	43%	33%

Table 3.2: Percentage of students whose decided to follow the proposed problem order, sorted by class.

According to the principles of the Learning Agreement 1.1, there are many implications that we must take into account. For example, the fact that in order to *solve mathematical problems*, it is necessary to *do some numerical calculations*; or, moreover, the conviction that problems are sorted by difficulty (from the from the easiest to the hardest, thus, it does not make sense to even try exercises number three or four if you weren't able to solve the first and the second ones).

However, what stands out the most is that the tendency to follow the proposed order of problems becomes increasingly noticeable as your teaching level grows.

Conclusions

The main objectives pursued in this thesis are the followings: establish a correlation between mathematical and physics problem-solving skills depending on qualitative and quantitative exercises; make a comparison between same problems resolutions at different grades; last but not least, proof whether order of resolution of problems is related to the presence or absence of numeric data.

The first comparison, between coupled mathematics or physics problems at same grade, highlights the presence of some common tendencies; to be more precise, as regards mathematical problems, all exercises' outcomes showed that students have higher problem-solving abilities in tasks with numeric data, while qualitative ones resulted more difficult; and for this reason they were often left undone. Only the comparison of problems 2.3.1 and 2.3.2 resulted in non-significant percentages' differences.

But as for the comparison between classes of the three different grades, what emerges from the present study is that 10^{th} grade students got the best results, especially when it comes to mathematics context. On the contrary, about physics, 11^{th} grade students got bad results but other grades' ones have fared even worse. Still, we must say that high school students proved to have much more confidence in their own skills, with the lowest rate of undone problems.

As said in section 3.6, the difference between mathematics and physics amounts of students who wrote nothing about one or more problems could be attributable to the fact that the first test consists in four tasks, while the second one just three. Moreover, students who have *put their trust in me* (namely trusting the Learning Agreement) and therefore have followed the proposed order of problems, significantly increased in older students' procedures. Yet, for what concerns this specific topic, we must take to account that it is not possible to make statistically reliable considerations, being the sample, however, not sufficiently wide.

To conclude, what is clear is the fact that qualitative problems resulted far more difficult to solve in both mathematical and physics contexts, regardless of students' grade. Furthermore, remember that 10^{th} grade students got the best results in both qualitative and quantitative mathematical problems whereas 11^{th} grade ones showed better skills in both versions of physics tasks.

In order to narrow the gap among qualitative and quantitative problems, and the other one between students' problem solving skills in mathematics and physics, new ideas are needed.

According to Redish & Smith [26] (2008), the connection of physics meaning to equations should be emphasized in teaching and learning physics in order to help students to conceptualize physics system. For this reason, an interdisciplinary approach can potentially bring large gains [3] in terms of comprehensive understanding of mathematics and physics topics.

Appendix A

In this appendix one can find the mathematics tests preparedto be administered to students from all grades. As said in Chapter 2, there is a total of sixteen different tests.

COMPITO A1

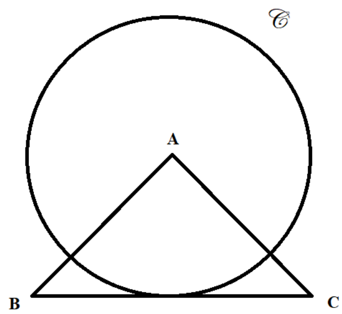
Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Si determini l'area di un cerchio circoscritto ad un quadrato di area A.

Esercizio 2

Data la figura sottostante e conoscendo la lunghezza *l* del lato **BC**, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**).

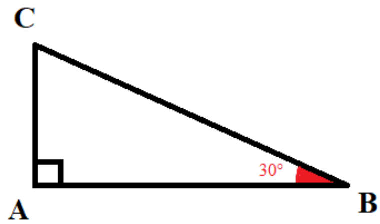


Esercizio 3

I lati corrispondenti di due rombi simili sono di 9 cm e 15 cm. L'area del secondo è 100 cm^2. Determinare l'area del primo e la lunghezza delle due altezze.

Esercizio 4

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo 8 cm (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati.



COMPITO A2

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

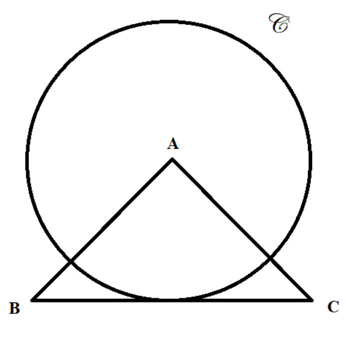
Si determini l'area di un cerchio circoscritto ad un quadrato di area A.

Esercizio 2

I lati corrispondenti di due rombi simili sono di 9 cm e 15 cm. L'area del secondo è 100 cm^2. Determinare l'area del primo e la lunghezza delle due altezze.

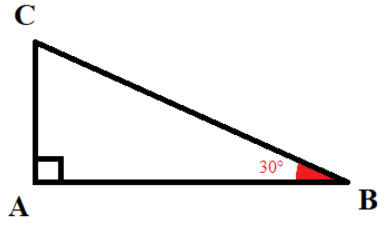
Esercizio 3

Data la figura sottostante e conoscendo la lunghezza *l* del lato **BC**, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**).



Esercizio 4

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo 8 cm (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati.



COMPITO A3

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

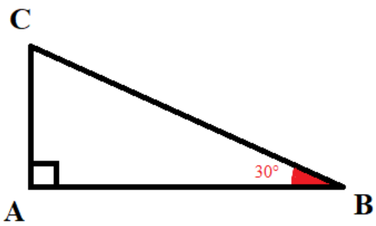
I lati corrispondenti di due rombi simili sono di 9 cm e 15 cm. L'area del secondo è 100 cm^2. Determinare l'area del primo e la lunghezza delle due altezze.

Esercizio 2

Si determini l'area di un cerchio circoscritto ad un quadrato di area A.

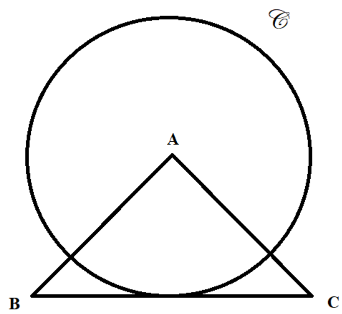
Esercizio 3

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo 8 cm (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati.



Esercizio 4

Data la figura sottostante e conoscendo la lunghezza *l* del lato **BC**, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**).



COMPITO A4

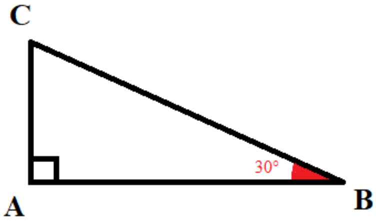
Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

I lati corrispondenti di due rombi simili sono di 9 cm e 15 cm. L'area del secondo è 100 cm^2. Determinare l'area del primo e la lunghezza delle due altezze.

Esercizio 2

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo 8 cm (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati.

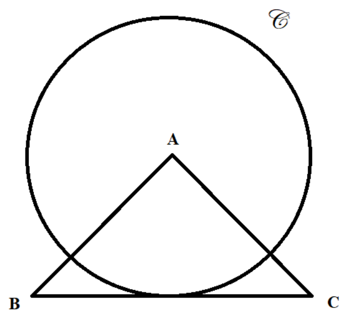


Esercizio 3

Si determini l'area di un cerchio circoscritto ad un quadrato di area A.

Esercizio 4

Data la figura sottostante e conoscendo la lunghezza *l* del lato **BC**, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**).

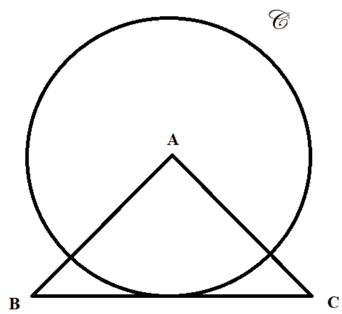


COMPITO B1

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Data la figura sottostante e conoscendo la lunghezza l del lato **BC**, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**).



Esercizio 2

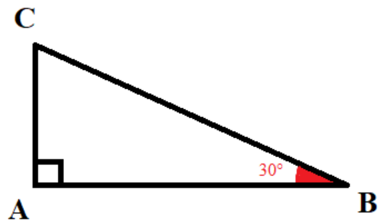
Siano dati due rombi simili tali che l_1 sia $^5/_3$ di l_2. Fissata l'area A_1, determinare A_2, e il rapporto tra le altezze dei due rombi, h_1 e h_2.

Esercizio 3

Dato un quadrato di area 16 cm^2, si determini la superficie del cerchio ad esso circoscritto.

Esercizio 4

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo 8 cm (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati.

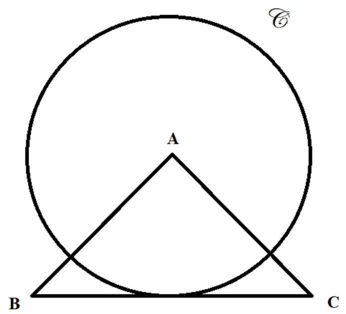


COMPITO B2

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Data la figura sottostante e conoscendo la lunghezza l del lato **BC**, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**).



Esercizio 2

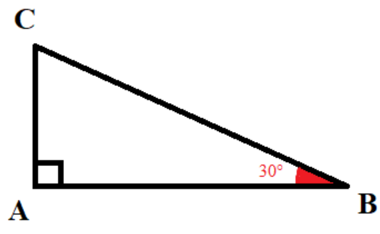
Dato un quadrato di area 16 cm^2, si determini la superficie del cerchio ad esso circoscritto.

Esercizio 3

Siano dati due rombi simili tali che l_1 sia $5/3$ di l_2. Fissata l'area A_1, determinare A_2, e il rapporto tra le altezze dei due rombi, h_1 e h_2.

Esercizio 4

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo 8 cm (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati.



COMPITO B3

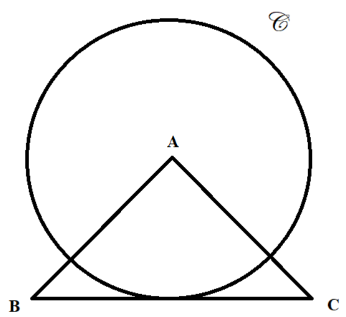
Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Dato un quadrato di area 16 cm^2, si determini la superficie del cerchio ad esso circoscritto.

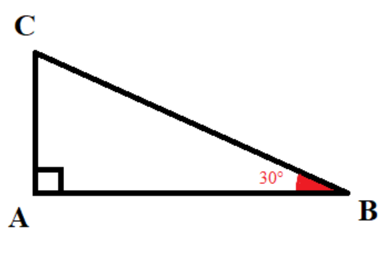
Esercizio 2

Data la figura sottostante e conoscendo la lunghezza *l* del lato **BC**, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**).



Esercizio 3

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo 8 cm (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati.



Esercizio 4

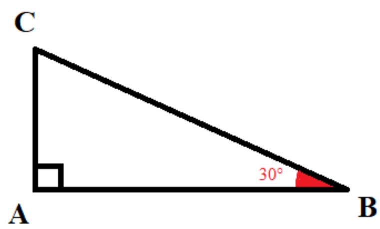
Siano dati due rombi simili tali che l_1 sia $^5/_3$ di l_2. Fissata l'area A_1, determinare A_2, e il rapporto tra le altezze dei due rombi, h_1 e h_2.

COMPITO B4

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo 8 cm (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati.



Esercizio 2

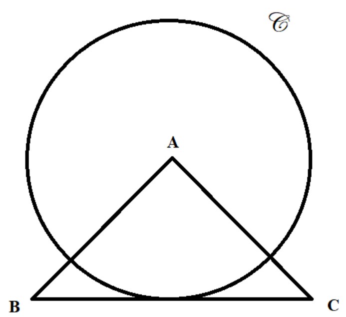
Dato un quadrato di area 16 cm^2, si determini la superficie del cerchio ad esso circoscritto.

Esercizio 3

Siano dati due rombi simili tali che l_1 sia $5/3$ di l_2. Fissata l'area A_1, determinare A_2, e il rapporto tra le altezze dei due rombi, h_1 e h_2.

Esercizio 4

Data la figura sottostante e conoscendo la lunghezza l del lato **BC**, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**).

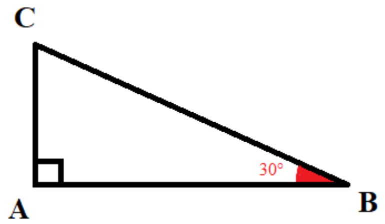


COMPITO C1

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo x (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati in funzione di x.

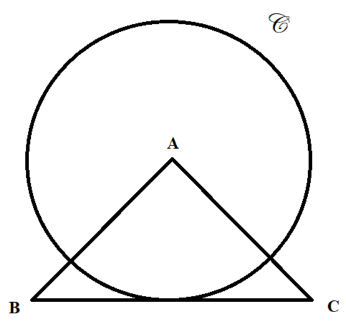


Esercizio 2

Si determini l'area di un cerchio circoscritto ad un quadrato di area A.

Esercizio 3

Data la figura sottostante, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**) sapendo che **BC** misura 12 m.



Esercizio 4

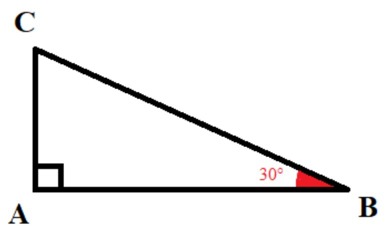
I lati corrispondenti di due rombi simili sono di 9 cm e 15 cm. L'area del secondo è 100 cm^2. Determinare l'area del primo e la lunghezza delle due altezze.

COMPITO C2

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

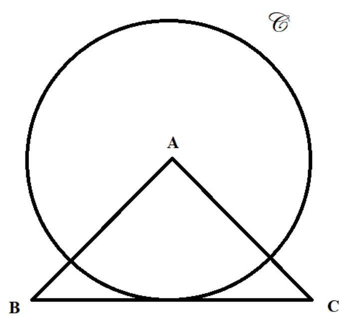
Esercizio 1

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo *x* (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati in funzione di *x*.



Esercizio 2

Data la figura sottostante, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**) sapendo che **BC** misura 12 m.



Esercizio 3

Si determini l'area di un cerchio circoscritto ad un quadrato di area A.

Esercizio 4

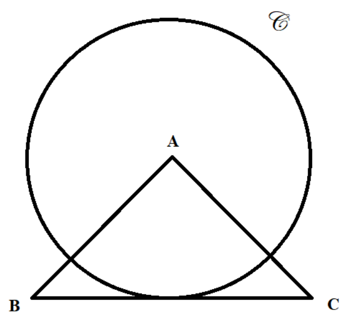
I lati corrispondenti di due rombi simili sono di 9 cm e 15 cm. L'area del secondo è 100 cm^2. Determinare l'area del primo e la lunghezza delle due altezze.

COMPITO C3

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Data la figura sottostante, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**) sapendo che **BC** misura 12 m.



Esercizio 2

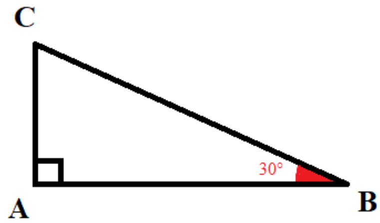
Si determini l'area di un cerchio circoscritto ad un quadrato di area A.

Esercizio 3

I lati corrispondenti di due rombi simili sono di 9 cm e 15 cm. L'area del secondo è 100 cm^2. Determinare l'area del primo e la lunghezza delle due altezze.

Esercizio 4

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo *x* (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati in funzione di *x*.



COMPITO C4

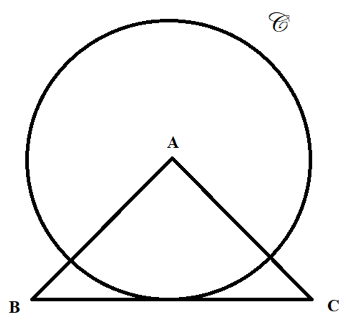
Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

I lati corrispondenti di due rombi simili sono di 9 cm e 15 cm. L'area del secondo è 100 cm^2. Determinare l'area del primo e la lunghezza delle due altezze.

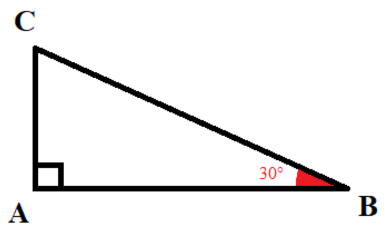
Esercizio 2

Data la figura sottostante, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**) sapendo che **BC** misura 12 m.



Esercizio 3

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo x (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati in funzione di x.



Esercizio 4

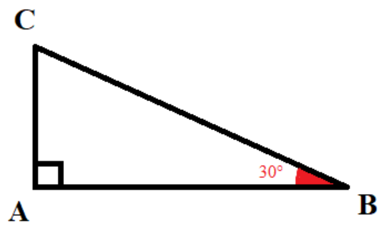
Si determini l'area di un cerchio circoscritto ad un quadrato di area A.

COMPITO D1

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo x (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati in funzione di x.



Esercizio 2

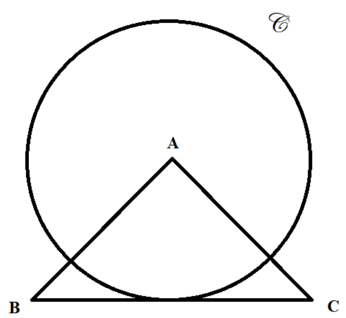
Siano dati due rombi simili tali che l_1 sia $^5/_3$ di l_2. Fissata l'area A_1, determinare A_2, e il rapporto tra le altezze dei due rombi, h_1 e h_2.

Esercizio 3

Dato un quadrato di area 16 cm^2, si determini la superficie del cerchio ad esso circoscritto.

Esercizio 4

Data la figura sottostante, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**) sapendo che **BC** misura 12 m.



COMPITO D2

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

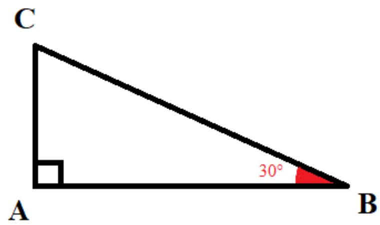
Siano dati due rombi simili tali che l_1 sia $^5/_3$ di l_2. Fissata l'area A_1, determinare A_2, e il rapporto tra le altezze dei due rombi, h_1 e h_2.

Esercizio 2

Dato un quadrato di area 16 cm^2, si determini la superficie del cerchio ad esso circoscritto.

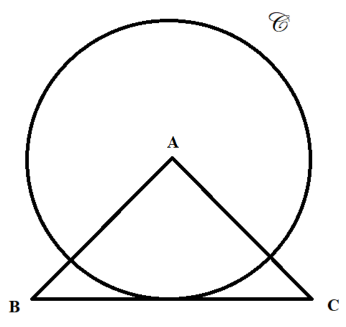
Esercizio 3

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo x (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati in funzione di x.



Esercizio 4

Data la figura sottostante, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**) sapendo che **BC** misura 12 m.



COMPITO D3

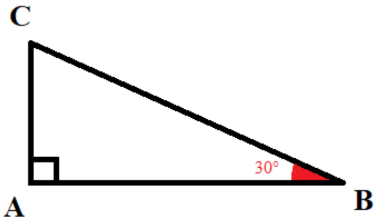
Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Dato un quadrato di area 16 cm^2, si determini la superficie del cerchio ad esso circoscritto.

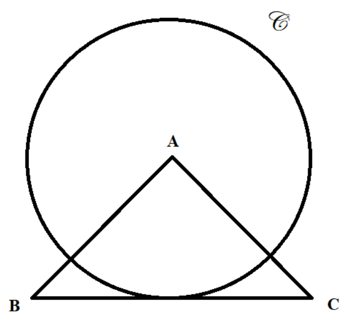
Esercizio 2

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo x (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati in funzione di x.



Esercizio 3

Data la figura sottostante, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**) sapendo che **BC** misura 12 m.



Esercizio 4

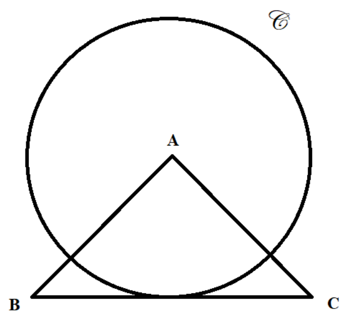
Siano dati due rombi simili tali che l_1 sia $^5/_3$ di l_2. Fissata l'area A_1, determinare A_2, e il rapporto tra le altezze dei due rombi, h_1 e h_2.

COMPITO D4

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 4 e il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 4 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Data la figura sottostante, determinare la lunghezza della porzione di circonferenza $\mathscr{C}$, centrata in **A**, esterna al triangolo rettangolo isoscele **ABC** (retto in **A**) sapendo che **BC** misura 12 m.



Esercizio 2

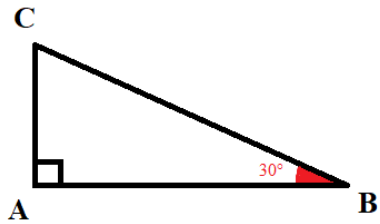
Dato un quadrato di area 16 cm^2, si determini la superficie del cerchio ad esso circoscritto.

Esercizio 3

Siano dati due rombi simili tali che l_1 sia $^5/_3$ di l_2. Fissata l'area A_1, determinare A_2, e il rapporto tra le altezze dei due rombi, h_1 e h_2.

Esercizio 4

Un triangolo, rettangolo in **A**, ha l'angolo in **B** di 30° e il cateto minore lungo x (come mostrato in figura). Determina la lunghezza degli altri lati in funzione di x.



Appendix B

In this appendix one can find the physics tests prepared to be administered to 10^{th} grades. As said in Chapter 2, there is a total of nine different tests.

COMPITO A1

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Uno specchio concavo produce un'immagine virtuale di dimensione pari al triplo dell'oggetto.

a) Assumendo che l'oggetto si trovi davanti allo specchio, alla distanza d_o da esso, quale è l'espressione per la distanza dell'immagine d_i?
b) Quale è la distanza focale dello specchio in funzione di d_o?

Esercizio 2

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 *m/s* a 32 *m/s*, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?
Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 3

Un blocco cubico di legno di densità d_{L1} = 750 kg/m^3 e V_{L1} = 64 cm^3, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

COMPITO A2

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 *m/s* a 32 *m/s*, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…? Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 2

Uno specchio concavo produce un'immagine virtuale di dimensione pari al triplo dell'oggetto.

a) Assumendo che l'oggetto si trovi davanti allo specchio, alla distanza d_o da esso, quale è l'espressione per la distanza dell'immagine d_i?
b) Quale è la distanza focale dello specchio in funzione di d_o?

Esercizio 3

Un blocco cubico di legno di densità d_{L1} = 750 kg/m^3 e V_{L1} = 64 cm^3, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

COMPITO A3

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Un blocco cubico di legno di densità $d_{L1} = 750\ kg/m^3$ e $V_{L1} = 64\ cm^3$, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

Esercizio 2

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 *m/s* a 32 *m/s*, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…? Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 3

Uno specchio concavo produce un'immagine virtuale di dimensione pari al triplo dell'oggetto.

a) Assumendo che l'oggetto si trovi davanti allo specchio, alla distanza d_o da esso, quale è l'espressione per la distanza dell'immagine d_i?
b) Quale è la distanza focale dello specchio in funzione di d_o?

COMPITO B1

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Supponi che un corpo stia subendo una decelerazione costante a. Se si modificasse la velocità da v_1 a v_2 tale che la velocità nel secondo esperimento sia doppia rispetto a quella del primo, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 2

Un blocco cubico di legno di densità $d_{L1} = 750\ kg/m^3$ e $V_{L1} = 64\ cm^3$, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a $1500\ kg/m^3$ e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

Esercizio 3

Uno specchio concavo produce un'immagine virtuale di dimensione pari al triplo dell'oggetto.

a) Assumendo che l'oggetto si trovi davanti allo specchio, alla distanza di 22 cm da esso, qual è la distanza dell'immagine?
b) Quale è la distanza focale dello specchio?

COMPITO B2

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Uno specchio concavo produce un'immagine virtuale di dimensione pari al triplo dell'oggetto.

a) Assumendo che l'oggetto si trovi davanti allo specchio, alla distanza di 22 cm da esso, qual è la distanza dell'immagine?
b) Quale è la distanza focale dello specchio?

Esercizio 2

Supponi che un corpo stia subendo una decelerazione costante a. Se si modificasse la velocità da v_1 a v_2 tale che la velocità nel secondo esperimento sia doppia rispetto a quella del primo, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 3

Un blocco cubico di legno di densità d_{L1} = 750 kg/m^3 e V_{L1} = 64 cm^3, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

COMPITO B3

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Uno specchio concavo produce un'immagine virtuale di dimensione pari al triplo dell'oggetto.

a) Assumendo che l'oggetto si trovi davanti allo specchio, alla distanza di 22 cm da esso, qual è la distanza dell'immagine?
b) Quale è la distanza focale dello specchio?

Esercizio 2

Un blocco cubico di legno di densità d_{L1} = 750 kg/m^3 e V_{L1} = 64 cm^3, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

Esercizio 3

Supponi che un corpo stia subendo una decelerazione costante a. Se si modificasse la velocità da v_1 a v_2 tale che la velocità nel secondo esperimento sia doppia rispetto a quella del primo, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

COMPITO C1

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Un blocco di legno galleggia in un liquido con un quarto del suo volume al di sopra della superficie del fluido. Determina:

a) Il rapporto tra la densità del blocco e quella del fluido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità doppia rispetto al primo e lo si lasciasse nel fluido, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del liquido?

Esercizio 2

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 m/s a 32 m/s, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…? Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 3

Uno specchio concavo produce un'immagine virtuale di dimensione pari al triplo dell'oggetto.

a) Assumendo che l'oggetto si trovi davanti allo specchio, alla distanza di 22 cm da esso, qual è la distanza dell'immagine?
b) Quale è la distanza focale dello specchio?

COMPITO C2

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 *m/s* a 32 *m/s*, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…? Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 2

Un blocco di legno galleggia in un liquido con un quarto del suo volume al di sopra della superficie del fluido. Determina:

a) Il rapporto tra la densità del blocco e quella del fluido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità doppia rispetto al primo e lo si lasciasse nel fluido, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del liquido?

Esercizio 3

Uno specchio concavo produce un'immagine virtuale di dimensione pari al triplo dell'oggetto.

a) Assumendo che l'oggetto si trovi davanti allo specchio, alla distanza di 22 cm da esso, qual è la distanza dell'immagine?
b) Quale è la distanza focale dello specchio?

COMPITO C3

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Uno specchio concavo produce un'immagine virtuale di dimensione pari al triplo dell'oggetto.

a) Assumendo che l'oggetto si trovi davanti allo specchio, alla distanza di 22 cm da esso, qual è la distanza dell'immagine?
b) Quale è la distanza focale dello specchio?

Esercizio 2

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 m/s a 32 m/s, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?
Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 3

Un blocco di legno galleggia in un liquido con un quarto del suo volume al di sopra della superficie del fluido. Determina:

a) Il rapporto tra la densità del blocco e quella del fluido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità doppia rispetto al primo e lo si lasciasse nel fluido, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del liquido?

Appendix C

In this appendix one can find the physics tests prepared to be administered to 11^{th} grade students. As said in Chapter 2, there is a total of nine different tests.

COMPITO A1

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Un corpo di massa *m* viene lasciato cadere da fermo da un'altezza *h*. Successivamente, un secondo corpo di massa *4m* viene lasciato cadere da $h/4$. Determina:

a) Il rapporto tra le energie cinetiche dei due corpi appena prima di toccare il suolo;
b) Il rapporto tra le loro velocità appena prima di toccare il suolo.

Esercizio 2

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 *m/s* a 32 *m/s*, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…? Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 3

Un blocco cubico di legno di densità d_{L1} = 750 kg/m^3 e V_{L1} = 64 cm^3, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

COMPITO A2

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 *m/s* a 32 *m/s*, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…? Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 2

Un corpo di massa *m* viene lasciato cadere da fermo da un'altezza *h*. Successivamente, un secondo corpo di massa *4m* viene lasciato cadere da $h/4$. Determina:

a) Il rapporto tra le energie cinetiche dei due corpi appena prima di toccare il suolo;
b) Il rapporto tra le loro velocità appena prima di toccare il suolo.

Esercizio 3

Un blocco cubico di legno di densità d_{L1} = 750 kg/m^3 e V_{L1} = 64 cm^3, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

COMPITO A3

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Un blocco cubico di legno di densità d_{L1} = 750 kg/m^3 e V_{L1} = 64 cm^3, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

Esercizio 2

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 *m/s* a 32 *m/s*, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…? Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 3

Un corpo di massa *m* viene lasciato cadere da fermo da un'altezza *h*. Successivamente, un secondo corpo di massa *4m* viene lasciato cadere da $h/4$. Determina:

a) Il rapporto tra le energie cinetiche dei due corpi appena prima di toccare il suolo;
b) Il rapporto tra le loro velocità appena prima di toccare il suolo.

COMPITO B1

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Supponi che un corpo stia subendo una decelerazione costante a. Se si modificasse la velocità da v_1 a v_2 tale che la velocità nel secondo esperimento sia doppia rispetto a quella del primo, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 2

Un blocco cubico di legno di densità d_{L1} = 750 kg/m^3 e V_{L1} = 64 cm^3, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

Esercizio 3

Una palla di massa 5 kg viene lasciata cadere da ferma da un'altezza di 2 m. Successivamente, una seconda palla di massa 20 kg viene lasciata cadere da 0,5 m. Determina:

a) Il rapporto tra le energie cinetiche delle due palle appena prima di toccare il suolo;
b) Il rapporto tra le velocità appena prima di toccare il suolo.

COMPITO B2

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Una palla di massa 5 kg viene lasciata cadere da ferma da un'altezza di 2 m. Successivamente, una seconda palla di massa 20 kg viene lasciata cadere da 0,5 m. Determina:

a) Il rapporto tra le energie cinetiche delle due palle appena prima di toccare il suolo;
b) Il rapporto tra le velocità appena prima di toccare il suolo.

Esercizio 2

Supponi che un corpo stia subendo una decelerazione costante a. Se si modificasse la velocità da v_1 a v_2 tale che la velocità nel secondo esperimento sia doppia rispetto a quella del primo, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 3

Un blocco cubico di legno di densità d_{L1} = 750 kg/m^3 e V_{L1} = 64 cm^3, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

COMPITO B3

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Una palla di massa 5 kg viene lasciata cadere da ferma da un'altezza di 2 m. Successivamente, una seconda palla di massa 20 kg viene lasciata cadere da 0,5 m. Determina:

a) Il rapporto tra le energie cinetiche delle due palle appena prima di toccare il suolo;
b) Il rapporto tra le velocità appena prima di toccare il suolo.

Esercizio 2

Un blocco cubico di legno di densità d_{L1} = 750 kg/m^3 e V_{L1} = 64 cm^3, galleggia in un liquido. Calcola:

a) La densità del fluido sapendo che il corpo emerge per 1 cm dal livello del liquido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità pari a 1500 kg/m^3 e lo si lasciasse galleggiare nella stessa sostanza, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del fluido?

Esercizio 3

Supponi che un corpo stia subendo una decelerazione costante *a*. Se si modificasse la velocità da v_1 a v_2 tale che la velocità nel secondo esperimento sia doppia rispetto a quella del primo, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

COMPITO C1

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Un blocco di legno galleggia in un liquido con un quarto del suo volume al di sopra della superficie del fluido. Determina:

a) Il rapporto tra la densità del blocco e quella del fluido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità doppia rispetto al primo e lo si lasciasse nel fluido, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del liquido?

Esercizio 2

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 m/s a 32 m/s, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…? Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 3

Una palla di massa 5 kg viene lasciata cadere da ferma da un'altezza di 2 m. Successivamente, una seconda palla di massa 20 kg viene lasciata cadere da 0,5 m. Determina:

a) Il rapporto tra le energie cinetiche delle due palle appena prima di toccare il suolo;
b) Il rapporto tra le velocità appena prima di toccare il suolo.

COMPITO C2

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 *m/s* a 32 *m/s*, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…? Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 2

Un blocco di legno galleggia in un liquido con un quarto del suo volume al di sopra della superficie del fluido. Determina:

a) Il rapporto tra la densità del blocco e quella del fluido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità doppia rispetto al primo e lo si lasciasse nel fluido, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del liquido?

Esercizio 3

Una palla di massa 5 kg viene lasciata cadere da ferma da un'altezza di 2 m. Successivamente, una seconda palla di massa 20 kg viene lasciata cadere da 0,5 m. Determina:

a) Il rapporto tra le energie cinetiche delle due palle appena prima di toccare il suolo;
b) Il rapporto tra le velocità appena prima di toccare il suolo.

COMPITO C3

Risolvi i seguenti esercizi annotando l'ordine con cui decidi di affrontare i problemi. (*Esempio: parto dal numero 2, ma mi accorgo che non mi riesce subito, allora passo al numero 1; proseguo quindi riprovando il 2 ed infine il 3. In questo caso, scriverò 2 – 1 – 3, poiché il primo che ho deciso di provare a risolvere è stato il secondo.*)

Esercizio 1

Una palla di massa 5 kg viene lasciata cadere da ferma da un'altezza di 2 m. Successivamente, una seconda palla di massa 20 kg viene lasciata cadere da 0,5 m. Determina:

a) Il rapporto tra le energie cinetiche delle due palle appena prima di toccare il suolo;
b) Il rapporto tra le velocità appena prima di toccare il suolo.

Esercizio 2

Supponi che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di 3,2 m/s^2, indipendentemente dalla velocità del veicolo. Se si raddoppiasse la velocità da 16 *m/s* a 32 *m/s*, il tempo necessario perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…? Inoltre, la distanza necessaria perché l'auto si fermi cresce di un fattore pari a…?

Esercizio 3

Un blocco di legno galleggia in un liquido con un quarto del suo volume al di sopra della superficie del fluido. Determina:

a) Il rapporto tra la densità del blocco e quella del fluido.
b) Se si prendesse un secondo blocco di densità doppia rispetto al primo e lo si lasciasse nel fluido, quale percentuale di esso rimarrebbe sopra il livello del liquido?

Ringraziamenti

Giunto al termine di questo lungo percorso, mi sento in dovere di esprimere dei sentiti ringraziamenti verso alcune persone, alle quali vorrei dedicare questo importante traguardo.

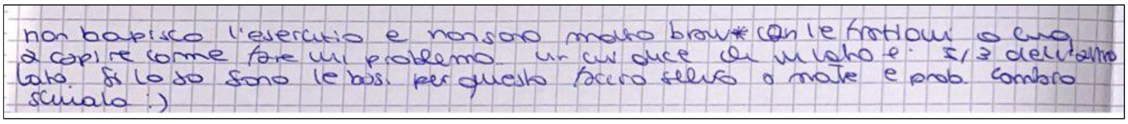
In primis, partirei da coloro i quali sempre mi hanno sostenuto nel travagliato percorso universitario, e non solo in quello, ovvero mio fratello (la cui laurea attendo con ansia!), i miei genitori e le mie nonne: verso tutti loro non posso che provare un'enorme senso di gratitudine per aver reso possibile tutto questo. In seconda battuta, ma non per importanza, un ringraziamento altrettanto sentito alla Prof.ssa S.Benvenuti per tutti gli stimoli che ha saputo fornirmi, sia dal punto di vista accademico che personale. Passerei quindi al Prof. I.Genesio, che da ormai sei anni mi sopporta e che da altrettanto tempo alimenta costantemente la mia curiosità e voglia di migliorarmi; grazie davvero per tutte le ore al telefono e per gli audio di svariati minuti lungo la strada per Colle Salvetti.

Passo ora a ringraziare Giulia - senza ombra di dubbio la persona più paziente e fantastica che potessi incontrare in quel di Bologna - senza la quale non sarei mai riuscito a raggiungere questo obiettivo; a lei lo ripeto spesso, e le belle parole si sprecherebbero, ma ormai penso di aver inflazionato la parola *grazie* per quante volte è stata in grado di aiutarmi sia accademicamente che psicologicamente.

Un'ultima menzione d'onore per Alessia, compagna di scleri, bevute, incazzature, pianti e risate; insomma, una vera e propria compagna di Vita.

E un grazie speciale anche ai miei Condorelli, Aurora (x2), Filippo, Riccardo, Giulia, Silvia, Katherine, Giada e Gabriele, per tutte le volte in cui, anche con un semplice - ma non banale - messaggio sono riusciti (e riescono) a farmi sorridere.

Vorrei, infine, dedicare questa tesi a tutti quei ragazzi e quelle ragazze che non si sentono all'altezza delle situazioni che vivono, che pensano di non essere abbastanza, che si sentono dannatamente inadatti in ogni contesto e situazione. Chiudo con un estratto da uno dei compiti che mi è stato consegnato, che è possibile leggere nella foto sottostante (fig.39). Ecco, quest* student* era convint* di aver fatto un compito scandente, di non essere all'altezza, non essere abbastanza brav*... motivo per cui - come si legge nella stessa immagine - cambierà scuola; e posso giurare che il suo è stato tra i migliori compiti che son stati fatti: sì, c'erano molte imprecisioni, ma è la convinzione di non essere in grado che, spesso, ci porta ad avere una visione distorta della realtà.



non capisco l'esercizio e non sono molto brava* con le frazioni a cui
a capire come fare un problema. un ... dice di un lato e 5/3 dell'altro
lato. Si lo so sono le basi per questo farò felice o male e prob. cambierò
scivolo :)

Figure 39: .

Voglio dedicare questo lavoro soprattutto a te.

Bibliography

[1] B.C. Brown. “Leading complex change with post-conventional consciousness”. In: *Journal of Organizational Change Management* (2012).

[2] J.S. Bruner. *The process of education*. Harvard university press, 2009.

[3] M. Fantoni. “Difficoltà di trasposizione delle conoscenze matematiche in fisica: problemi ed esercizi con due classi quinte di liceo scientifico”. 202. URL: `http://amslaurea.unibo.it/22052/`.

[4] G.P. Brousseau. “L’échec et le contrat”. In: *Recherches* 41 (1980), pp. 177–182.

[5] G.P. Brousseau and V.M. Warfield. “The case of Gaël”. In: *The journal of mathematical behavior* 18.1 (1999), pp. 7–52.

[6] K.K. Spence and M.A. McDonald. “Assessing vertical development in experiential learning curriculum”. In: *Journal of Experiential Education* 38.3 (2015), pp. 296–312.

[7] P. Struss. “Temporal abstraction in qualitative physics”. In: *Working Papers of the 7th Int. Workshop on Qualitative Reasoning, Seattle*. Citeseer. 1993.

[8] M. Klenk, S. Friedman, and K. Forbus. “Learning modeling abstractions via generalization”. In: *Proceedings of the 22nd international workshop on qualitative reasoning*. 2008.

[9] E. Kuo et al. “How students blend conceptual and formal mathematical reasoning in solving physics problems”. In: *Science Education* 97.1 (2013), pp. 32–57.

[10] M. Wertheimer and M. Wertheimer. *Productive thinking*. Vol. 1. Harper New York, 1959.

[11] M. Park. “Students’ problem-solving strategies in qualitative physics questions in a simulation-based formative assessment”. In: *Disciplinary and Interdisciplinary Science Education Research* 2.1 (2020), pp. 1–13.

[12] B.G.P. Yusepa, Y.S. Kusumah, and B.G. Kartasasmita. “Promoting middle school students’ abstract-thinking ability through cognitive apprenticeship instruction in mathematics learning”. In: *Journal of Physics: Conference Series* 948 (2018), p. 012051.

[13] J.D. Putra, D. Suryadi, and D. Juandi. “Mathematical abstraction ability of prospective math teacher students”. In: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1132. 1. IOP Publishing. 2018, p. 012049.

[14] E. Dubinsky. “Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics”. In: *Epistemological foundations of mathematical experience*. Springer, 1991, pp. 160–202.

[15] F. Rodrıéguez and A. Gutiérrez. “Analysis of proofs produced by university mathematics students, and the influence of using Cabri software”. In: *Proceedings of the 30th PME International Conference*. Vol. 4. 2006, p. 433.

[16] J.R. Evans. “Creativity in MS/OR: Creative thinking, a basis for MS/OR problem solving”. In: *Interfaces* 21.5 (1991), pp. 12–15.

[17] N.A. Malara. “Processi di generalizzazione nell’insegnamento-apprendimento dell’algebra”. In: *Annali online della Didattica e della Formazione Docente* 4.4 (2012), pp. 13–35.

[18] F.D. Rivera. “Visual templates in pattern generalization activity”. In: *Educational Studies in Mathematics* 73.3 (2010), pp. 297–328.

[19] M. Giaquinto. *Visual thinking in mathematics*. Oxford University Press, 2007.

[20] P.J. Davis. “Visual theorems”. In: *Educational Studies in Mathematics* (1993), pp. 333–344.

[21] W. Metzger et al. *Laws of seeing*. Mit Press, 2006.

[22] G. Bonola, I. Forno, and C. Cossu. *Il genio e la regola. Geometria C*. Lattes, 2017.

[23] E. Castelnuovo. *La Matematica. Figure piane A*. La Nuova Italia, 2016.

[24] E. Castelnuovo. *La Matematica. Figure piane B*. La Nuova Italia, 2020.

[25] V. Barone. *Walker. Corso di Fisica*. Pearson, 2010.

[26] E.F. Redish and K.A. Smith. “Looking beyond content: Skill development for engineers”. In: *Journal of Engineering Education* 97.3 (2008), pp. 295–307.