

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Il Teorema di Connettività
per i Campi Vettoriali
di Hörmander, e Applicazioni

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Alessandro Rosa

Sessione III
Anno Accademico 2021/2022

We have not succeeded in answering all our problems; indeed we sometimes feel we have not completely answered any of them. The answers we have found have only served to raise a whole set of new questions. In some ways we feel that we are as confused as ever, but we think we are confused on higher level, and about more important things.

- Earl C. Kelley

Introduzione

I **campi vettoriali** sono oggetti matematici di grande interesse sia in Analisi sia in Geometria Differenziale: in quest'ultima, essi sono alla base della teoria delle varietà differenziabili; nella prima, essi rivestono un ruolo cruciale nell'ambito, ad esempio, della teoria delle Equazioni Differenziali Ordinarie relativamente all'analisi delle loro curve integrali. Analogamente, nella teoria delle Equazioni alle Derivate Parziali, vi sono importanti operatori differenziali (di tipo ellittico ed ellittico degenere) come gli operatori del Calore e di Laplace, che sono strutturati su campi vettoriali. In maniera paradigmatica, questo è tanto più vero per operatori differenziali che sono **somme di quadrati** di campi vettoriali.

Lo scopo di questa Tesi di Laurea è quello di analizzare brevemente alcuni aspetti significativi riguardanti le curve integrali di campi vettoriali di classe C^∞ definiti su aperti Ω di \mathbb{R}^N . In particolare, andremo a dimostrare il cosiddetto **Teorema di Connettività** (si veda [4, 5, 6, 8]), il cuore di questa Tesi, il quale dimostra che, se è data una famiglia di campi soddisfacenti la famosa **Condizione di Hörmander (CH)**, ogni coppia di punti dell'aperto connesso Ω è collegata tramite curve integrali a tratti dei campi vettoriali stessi e dei loro opposti. La condizione (CH) è un'ipotesi geometrico-differenziale relativa all'algebra di Lie $\text{Lie}\{X\}$ generata dalla assegnata famiglia di campi vettoriali $X = \{X_1, \dots, X_m\}$, secondo cui

$$\dim \left(\left\{ Y(x) \in \mathbb{R}^N : Y \in \text{Lie}\{X\} \right\} \right) = N, \quad \forall x \in \Omega.$$

In altre parole, l'insieme dei campi vettoriali in $\text{Lie}\{X\}$, valutati in ogni punto di Ω , genera l'intero spazio tangente \mathbb{R}^N .

Nella prova del Teorema di Connettività viene utilizzato in maniera cruciale un lemma, di tipo più spiccatamente algebrico ed abbastanza tecnico, che lega la mappa flusso

del commutatore di una famiglia di campi vettoriali alla composizione di curve integrali dei campi vettoriali stessi e dei loro opposti, queste ultime essendo dette **direzioni “orizzontali”** rispetto alla famiglia dei campi vettoriali di cui si sta facendo il commutatore.

Più nello specifico, se il commutatore in esame è $[\cdots [X_1, X_2] \cdots X_m]$, si tratta di un lemma di approssimazione (a meno di un $\mathcal{O}(t^{m+1})$, dove t indica il tempo) della traiettoria

$$\exp\left(t^m[\cdots [X_1, X_2] \cdots X_m]\right),$$

mediante la composizione di $3 \cdot 2^{m-1} - 2$ mappe della forma $\exp(\pm t X_i)$, con $i = 1 \dots, m$. La dimostrazione di questo fatto utilizza risultati di Algebra non commutativa sulle serie di potenze, in particolare fa uso di quello che chiameremo, seguendo [2], il **Teorema Esponenziale di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin**: una versione elementare di tale risultato fornisce, date due indeterminate non commutative x, y , la identità

$$\text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y) = \text{Exp}\left(x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \{L_3\}\right),$$

dove L_3 è una serie di commutatori di lunghezze ≥ 3 in x, y .

Per intraprendere la strada che porta alla dimostrazione del Teorema di Connettività, è necessario definire delle curve di grande interesse sia nella Teoria del Controllo sia nella Teoria Geometrica della Misura: le cosiddette **curve X -subunitarie**. Una volta data la definizione di queste ultime, faremo ampio uso di una loro caratterizzazione molto utile poiché fornisce un esplicito legame tra una curva X -subunitaria $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e i campi vettoriali X_1, \dots, X_m che cosituiscono X ; vale infatti

$$(\star) \quad \dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j(t) X_j(\gamma(t)), \quad \text{per quasi ogni } t \in [a, b],$$

con a_1, \dots, a_m funzioni reali definite in $[a, b]$ tali che $\sum_{j=1}^m |\alpha_j(t)|^2 \leq 1$ (da cui il termine *sub-unitario*). Nel seguito denotiamo con $\mathcal{S}_\Omega(X)$ l'insieme delle curve X -subunitarie con sostegno in Ω .

Durante tutto il corso della Tesi, verrà sottolineato più volte il nostro interesse per il concetto di **X -connessione**, ossia la proprietà di un insieme di avere ogni sua coppia di punti collegata tramite curve X -subunitarie. Osserviamo che le curve integrali a tratti

di $\pm X_1, \dots, \pm X_m$ sono X -subunitarie, quindi il Teorema di Connettività ci fornisce una condizione sufficiente (ma non necessaria) per la X -connessione di Ω .

La nozione di curva X -subunitaria è fondamentale per introdurre la **Distanza di Carnot-Carathéodory** d_X , anche chiamata *distanza di X -controllo*, associata alla famiglia X di campi vettoriali. L'idea della definizione di d_X è quella di misurare la distanza tra due punti x, y minimizzando l'intervallo di tempo di vita delle curve X -subunitarie che collegano x e y . Formalmente, se $x, y \in \Omega$, allora d_X è definita come

$$d_X(x, y) := \begin{cases} +\infty, & \text{se } x, y \text{ non sono } \mathcal{S}_\Omega(X)\text{-collegati} \\ \inf \left\{ b - a \mid \gamma : [a, b] \rightarrow \Omega, \gamma \in \mathcal{S}_\Omega(X), \gamma \text{ collega } x, y \right\}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che se Ω , l'insieme di definizione dei campi vettoriali, non è connesso tramite curve X -subunitarie, allora d_X assumerà valori infiniti, per cui non potrà essere una metrica. Dimosteremo invece che, se Ω è X -connesso, allora Ω munito della distanza di X -controllo è uno spazio metrico, per cui il nome "distanza" è appropriato.

Senza ipotesi aggiuntive oltre alla X -connessione di Ω si dimostra che la topologia indotta da d_X è più fine della topologia Euclidea. Il viceversa è, in generale, falso e di questo ne daremo un controesempio. Un fatto notevolissimo è il **Teorema di Chow-Rashewskii** ([5, 8]), che asserisce che, se X soddisfa la condizione di Hörmander e Ω è connesso, allora la topologia Euclidea è equivalente alla topologia indotta da d_X ; di più, per ogni compatto $K \subseteq \Omega$, si può trovare una stima tra le due metriche, espressa dalle due disuguaglianze

$$\mathbf{c}^{-1} \|x - y\| \leq d_X(x, y) \leq \mathbf{c} \|x - y\|^{1/k},$$

dove $x, y \in K$ e le costanti $\mathbf{c} > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ dipendono solo da Ω , K e X .

L'interesse per la relazione sussistente tra le curve integrali a tratti di campi vettoriali in X e le curve X -subunitarie è considerevole in tutto l'elaborato. Sappiamo già che le prime sono un caso particolare delle seconde. Fissato ora un punto $x_0 \in \Omega$, ci si potrebbe chiedere quale sia il legame tra i punti di Ω collegati a x_0 tramite curve integrali di X_1, \dots, X_m e quelli collegati a x_0 tramite curve X -subunitarie. Denotato con $\mathcal{E}_\Omega(X)$ il sottoinsieme di $\mathcal{S}_\Omega(X)$ formato da tutte le curve C^1 a tratti X -subunitarie in Ω che verificano (★) in ogni t , proveremo che: la chiusura dei punti raggiungibili in Ω , partendo

da x_0 , tramite curve in $\mathcal{E}_\Omega(X)$ è uguale alla chiusura dei punti raggiungibili in Ω , sempre partendo da x_0 , tramite curve integrali a tratti di $\pm X_1, \dots, \pm X_m$.

Per dimostrare questo fatto, è necessario introdurre il concetto di **insieme invariante rispetto ad un campo vettoriale** Z (brevemente, Z -*invariante*), che equivale a richiedere che ogni curva integrale di Z , avente almeno un punto di intersezione con l'insieme, abbia l'intera sua traiettoria contenuta nell'insieme stesso. Grazie al **Teorema di Nagumo-Bony** [3, 7], otteniamo una caratterizzazione della Z -invarianza di un insieme F relativamente chiuso in Ω , che riflette l'idea geometrica intuitiva della definizione di Z -invarianza, ossia che

$$\langle Z(y), \nu \rangle = 0,$$

per ogni punto $y \in \Omega \cap \partial F$ per il quale esiste¹ almeno un vettore ν che sia “normale” al bordo di F in y , detto *vettore esternamente ortogonale a F in y* . Geometricamente questo ci dice che, *per ogni curva integrale che abbia almeno un punto di contatto con il bordo di F , il vettore tangente alla curva in quei punti è “tangente” a ∂F* (Fig.4.4(a)).

Diremo inoltre che un insieme F è $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -**invariante** se ogni curva in $\mathcal{E}_\Omega(X)$, avente almeno un punto di intersezione con F , è obbligata ad avere immagine completamente contenuta in F . Il risultato centrale che lega le due nozioni di invarianza asserisce che, *se $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ è una famiglia di campi vettoriali di classe C^1 su Ω , allora la $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza di un insieme F relativamente chiuso in Ω è equivalente alla X_i -invarianza di F , per ogni $i = 1, \dots, m$* . Questo risultato, tutt'altro che ovvio, ha una interpretazione geometrica: ogni campo vettoriale X_i valutato in un punto di ∂F (per il quale esiste un vettore esternamente ortogonale) è tangente al bordo di F in quel punto se e solo se ogni curva integrale di una combinazione lineare dei campi vettoriali stessi è tangente a ∂F , non appena la traiettoria della curva tocca ∂F .

¹Garantiremo l'esistenza di almeno un siffatto vettore ν dimostrando che l'insieme di tutti i punti, per i quali esiste almeno un vettore esternamente ortogonale, è denso in $\Omega \cap \partial F$.

Indice

Introduzione	i
1 Preliminari	1
1.1 Risultati per EDO	1
1.2 Campi Vettoriali	2
1.3 Curve integrali e proprietà di flusso	3
1.4 Prerequisiti algebrici	6
1.5 Vettori \mathcal{V} -subunitari	7
1.6 Un Lemma cruciale	9
2 Il Teorema di Connettività	15
3 Applicazione. Distanza di Carnot-Carathéodory	23
4 Insiemi $\mathcal{E}_\Omega(X)$-invarianti	29
4.1 Insiemi di propagazione	29
4.2 Interpretazione geometrica	37
Bibliografia	41

Capitolo 1

Preliminari

Lo scopo di questo capitolo è di fornire i prerequisiti analitici ed algebrici per poter affrontare il Teorema di Connettività 2.11 nel capitolo 2. In particolare, dimostreremo un Lemma cruciale 1.19 sulla approssimazione delle curve integrali di commutatori di campi vettoriali di qualsiasi ordine tramite la composizione di curve integrali dei campi vettoriali stessi.

1.1 Risultati per EDO

In questa breve sezione richiamiamo due risultati generali della teoria delle EDO: il primo riguardante l'esistenza delle soluzioni del problema di Cauchy al variare del dato iniziale in un compatto; mentre il secondo riguardante la dipendenza continua delle curve integrali dai parametri e dal dato iniziale del problema di Cauchy considerato.

Teorema 1.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$ aperto e sia $K \subseteq \Omega$ compatto fissato. Se $f = f(t, x)$ tale che $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ è localmente lipschitziana rispetto a x , allora esistono $h, r > 0$ (che dipendono solo da $\Omega, K, \|f\|$) tali che per ogni $(t_0, x_0) \in K$, il problema di Cauchy*

$$(PC) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $\gamma(\cdot; t_0, x_0)$ definita in $I_0 = [t_0 - h, t_0 + h]$ che soddisfa $\|\gamma(\cdot; t_0, x_0) - x_0\| \leq r$, per ogni $t \in I_0$.

Teorema 1.2 (Dipendenza continua dai parametri e dal dato iniziale). *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+N}$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti, e sia $f \in C^0(\Omega \times V, \mathbb{R}^N)$. Supponiamo che, per ogni $(t_0, x_0) \in \Omega$ e per ogni $\xi_0 \in V$, il problema di Cauchy dipendente dal parametro ξ_0*

$$(PC)_{\xi_0} \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x; \xi_0) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

ammetta un'unica soluzione massimale $\gamma(\cdot; t_0, x_0; \xi_0) \in C^1(D(t_0, x_0; \xi_0), \mathbb{R}^N)$. Allora, posto $D(x_0, t_0; \xi_0) =]\tau_-(t_0, x_0; \xi_0), \tau_+(t_0, x_0; \xi_0)[$, si ha che:

1. *la mappa $(t, x; \xi) \mapsto \tau_-(t, x; \xi)$ è semicontinua superiormente su $\Omega \times V$;*
2. *la mappa $(t, x; \xi) \mapsto \tau_+(t, x; \xi)$ è semicontinua inferiormente su $\Omega \times V$;*
3. *l'insieme $A := \{(t, (t_0, x_0), \xi_0) \in \mathbb{R} \times \Omega \times V : t \in D(t_0, x_0; \xi_0)\}$ è aperto;*
4. *la funzione $(t, (t_0, x_0), \xi_0) \mapsto \gamma(t, (t_0, x_0), \xi_0)$ è continua su A .*

Corollario 1.3. *Con le stesse ipotesi del Teo.1.2, siano $K \in \Omega$ e $K' \in V$ compatti. Allora, esistono $h_1, h_2 > 0$ tali che, per ogni $(t_0, x_0) \in K$ e per ogni $\xi_0 \in K'$, ogni soluzione massimale del problema di Cauchy $(PC)_{\xi_0}(1.1)$ è definita almeno nel medesimo intervallo $]t_0 - h_1, t_0 + h_2[$.*

1.2 Campi Vettoriali

Iniziamo col definire l'oggetto che useremo per tutta questa tesi in modo sistematico.

Definizione 1.4 (Campo Vettoriale). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto non vuoto e sia $k \in \{0, 1, \dots, \infty\}$. Chiameremo **campo vettoriale** (abbreviato con *c.v.*) **di classe C^k** su Ω un qualsiasi operatore differenziale del primo ordine X della forma*

$$X = \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (1.2)$$

dove a_1, \dots, a_N sono funzioni reali definite su Ω di classe C^k .

Diremo che X è un **campo vettoriale liscio** (abbreviato con c.v.l.) su Ω se i coefficienti in (1.2) sono di classe C^∞ , e denoteremo con $\mathfrak{X}(\Omega)$ l'insieme di tutti i c.v.l.

Dato $x \in \Omega$ indicheremo con

- $X(x) := (a_1(x), \dots, a_N(x)) \in \mathbb{R}^N$ il vettore dei coefficienti di X valutati in x ;
- se $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, Xf la funzione

$$Xf : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto Xf(x) = \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x); \quad (1.3)$$

- se $g \in C^1(A \subseteq \mathbb{R}^m, \Omega)$, $XI(g(z)) = X(g(z))$ il vettore di \mathbb{R}^N dei coefficienti di X valutati in $g(z)$ (con $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ ci riferiamo all'identità su Ω);
- se $h \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $Xh(x) = (Xh_1(x), \dots, Xh_N(x))$ il vettore delle funzioni $Xh_i(x)$ date dalla mappa in (1.3) valutata in x .

1.3 Curve integrali e proprietà di flusso

Richiamiamo la definizione di curva integrale e di mappa flusso con relative proposizioni che ci serviranno in seguito.

Definizione 1.5 (Curva integrale). *Sia X un c.v. di classe C^1 su Ω . Allora ogni soluzione del sistema di ODE*

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$$

*è chiamata **curva integrale di X** . Inoltre se $x \in \Omega$, denoteremo l'unica soluzione massimale del problema di Cauchy*

$$(PC) \quad \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = x, \end{cases}$$

con $\gamma_{X,x}(t)$ con dominio massimale $D(X, x)$ e useremo inoltre la seguente notazione:

$$D(X) := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mid x \in \Omega, t \in D(X, x)\} = \bigcup_{x \in \Omega} D(X, x) \times \{x\}.$$

Definizione 1.6 (Flusso di un campo vettoriale). Sia X un c.v. di classe C^1 su Ω . Diremo che l'applicazione

$$D(X) \ni (t, x) \mapsto \Phi_t^X(x) := \gamma_{X,x}(t) \in \Omega$$

è il **flusso del c.v. X al tempo t in x** .

Enunciamo ora il seguente facile risultato sulla mappa flusso, che viene comunemente denominato come *le proprietà di gruppo del flusso*:

Proposizione 1.7 (Proprietà di gruppo del flusso). Sia X un c.v. di classe C^1 su Ω e sia $x \in \Omega$ fissato. Allora valgono:

1. se $s, t+s \in D(X, x)$ allora $t \in D(X, \Phi_s^X(x))$ e si ha $(\Phi_t^X \circ \Phi_s^X)(x) = \Phi_{t+s}^X(x)$;
2. se $t \in D(X, x)$ allora $-t \in D(X, \Phi_t^X(x))$ e si ha $(\Phi_{-t}^X \circ \Phi_t^X)(x) = x$;
3. se $\alpha, t \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha t \in D(X, x)$ allora $t \in D(\alpha X, x)$ e si ha $\Phi_{\alpha t}^X(x) = \Phi_t^{\alpha X}(x)$;
4. $\Phi_0^X(x) = x$, per ogni $x \in \Omega$.

Riportiamo inoltre il teorema riguardante la derivazione di campi vettoriali lungo le curve integrali, il quale verrà usato ripetutamente in molte delle proposizioni successive:

Teorema 1.8 (Derivazione lungo le curve integrali). Sia X un c.v. su Ω . Valgono

1. Se X è di classe C^1 e se $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, allora

$$\frac{d}{dt}((f \circ \Phi_t^X)(x)) = (Xf)(\Phi_t^X(x)), \quad t \in D(X, x).$$

2. Se X è di classe C^{k-1} , con $k \geq 2$, e se $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, allora

$$\frac{d^k}{dt^k}((f \circ \Phi_t^X)(x)) = (X^k f)(\Phi_t^X(x)), \quad t \in D(X, x). \quad (1.4)$$

3. Se X è di classe C^n e se $f \in C^{n+1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ allora, sviluppando la formula di Taylor con il resto di Peano di grado $n+1$, abbiamo

$$f(\Phi_t^X(x)) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(X^k f)(x)}{k!} t^k + o(t^{n+1}), \quad \text{per } t \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

4. Se $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e se $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, allora lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $t \mapsto f(\Phi_t^X(x))$ in 0 è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X^k f)(x)}{k!} t^k. \quad (1.6)$$

Osservazione 1.9. Riscriviamo le equazioni (1.5) e (1.6) nel caso particolare in cui $f = I$ sia l'identità:

(a) l'equazione (1.5) diventa

$$\Phi_t^X(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(X^k I)(x)}{k!} t^k + o(t^{n+1}), \quad \text{per } t \rightarrow 0, \quad (1.7)$$

dove lo sviluppo di grado 2 è

$$\Phi_t^X(x) = x + tX(x) + \frac{t^2}{2} X^2 I(x) + o(t^2), \quad \text{per } t \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

(b) Poiché la serie formale (1.6) assume la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X^k I)(x)}{k!} t^k,$$

ed inoltre vale la Prop.1.7, useremo la seguente notazione:

$$\exp(tX)(x) := \gamma_{X,x}(t), \quad x \in \Omega, \quad t \in D(X, x). \quad (1.9)$$

Concludiamo questa sezione dedicata ai campi vettoriali, dimostrando una proposizione sullo sviluppo in serie della composizione di più esponenziali di c.v., che sarà utilizzata per poter estendere il risultato del Teo.1.13 da un ambiente formale algebrico ad un contesto analitico.

Proposizione 1.10 (Sviluppo in serie della composizione di esponenziali). *Siano $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(\Omega)$, $x \in \Omega$ e $f \in C^\infty(\Omega)$. Allora lo sviluppo in serie di Taylor della funzione*

$$(t_1, \dots, t_m) \mapsto f((\exp(t_m X_m) \circ \dots \circ \exp(t_1 X_1))(x))$$

in $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ è dato da

$$\sum_{n_1, \dots, n_m \geq 0} \frac{(X_1^{n_1} \dots X_m^{n_m} f)(x)}{n_1! \dots n_m!} t_1^{n_1} \dots t_m^{n_m}. \quad (1.10)$$

Dimostrazione. Dimostriamolo per il caso $m = 2$ (per $m > 2$ è analogo): siano $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e sia $g(s, t) := f(\exp(tY)(\exp(sX)(x)))$. Osserviamo innanzitutto che la curva integrale $\exp(sX)(x)$ è definita per $s \in D(X, x)$ che contiene 0. Sia allora $\varepsilon > 0$ tale che $[-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq D(X, x)$ e sia $F := \{\exp(sX)(x) \mid s \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ insieme compatto in Ω . Per il Teo.1.1, considerando i punti $(0, y) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times F$, esiste $\delta > 0$ tale che $\exp(tY)(y)$ esiste per ogni $t \in [-\delta, \delta]$, uniformemente per ogni $y \in F$. Quindi, la mappa $(s, t) \mapsto f(\exp(tY)(\exp(sX)(x)))$ è ben posta in un intorno di $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Allora per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+j} g}{\partial s^i \partial t^j}(0, 0) &= \frac{\partial^i}{\partial s^i} \Big|_{s=0} \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} \Big|_{t=0} g(s, t) \right) \\ &= \frac{\partial^i}{\partial s^i} \Big|_{s=0} \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} \Big|_{t=0} f(\Phi_t^Y(\Phi_s^X(x))) \right) \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \frac{\partial^i}{\partial s^i} \Big|_{s=0} (Y^j f)(\Phi_s^X(x)) \\ &\stackrel{(1.4)}{=} (X^i Y^j f)(x). \end{aligned}$$

Quindi, sviluppando in serie di Taylor $g(s, t)$ in $(0, 0)$ ed inserendo il calcolo appena svolto, si ha la tesi; infatti,

$$\sum_{i, j \geq 0} \frac{\partial^{i+j} g}{\partial s^i \partial t^j}(0, 0) \frac{s^i t^j}{i! j!} = \sum_{i, j \geq 0} \frac{(X^i Y^j f)(x)}{i! j!} s^i t^j.$$

Questo conclude la prova. □

1.4 Prerequisiti algebrici

Questa parte di prerequisiti è dedicata a due risultati algebrici. Il primo teorema ci fornisce un'utile caratterizzazione della sottoalgebra di Lie generata da un insieme: la sua dimostrazione è un argomento per induzione sulla lunghezza dei commutatori che sfrutta ripetutamente l'identità di Jacobi.

Definizione 1.11 (Lunghezza dei commutatori e commutatori annidati). *Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie e $U \subseteq \mathfrak{g}$. Diremo che ogni elemento di U è un **commutatore di lunghezza 1** di U . Induttivamente diremo che $[u, v]$ è un **commutatore di lunghezza k** di U se u e v sono commutatori di lunghezza risp. i, j di U tali che $i + j = k$.*

Diremo che ogni elemento delle due forme

$$[u_1, [u_2, \dots, [u_{k-1}, u_k] \dots]] \quad \text{oppure} \quad [[\dots [u_1, u_2], \dots, u_{k-1}], u_k]$$

è risp. un *commutatore annidato a destra* e un *commutatore annidato a sinistra* di lunghezza k .

Ricordiamo che, data un'algebra di Lie \mathfrak{g} , un sottoinsieme \mathfrak{a} di \mathfrak{g} è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} se \mathfrak{a} è un sottospazio vettoriale di \mathfrak{g} chiuso rispetto alla operazione di commutazione: questo equivale a dire che \mathfrak{a} è essa stessa un'algebra di Lie mediante la restrizione ad $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ della operazione di commutatore pre-esistente in \mathfrak{g} .

Ricordiamo anche che, data un'algebra di Lie \mathfrak{g} e un suo qualunque sottoinsieme U , si chiama *sottoalgebra generata da U* (e denotata con $\text{Lie}\{U\}$) la più piccola sottoalgebra di \mathfrak{g} contenente U .

Teorema 1.12 (Sui brackets annidati). *La sottoalgebra di Lie generata da un sottoinsieme di un'algebra di Lie è uguale allo span dei soli commutatori annidati a sinistra (oppure allo span dei soli commutatori annidati a destra).*

Il secondo teorema invece è un corollario del *Teorema esponenziale* per l'algebra delle serie formali in due variabili non commutative. Per la dimostrazione di questo risultato non banale si veda [2].

Teorema 1.13 (Corollario del Teorema Esponenziale). *Siano x, y indeterminate non commutative e sia \mathbb{K} un campo di caratteristica 0. Posto $\text{Exp}(S) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{k!}$, dove S è una serie formale nelle indeterminate x, y il cui termine di grado zero è nullo, allora si ha che*

$$\text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y) = \text{Exp} \left(x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \{L_3\} \right),$$

dove L_3 è una serie di commutatori di lunghezze ≥ 3 in x, y .

1.5 Vettori \mathcal{V} -subunitari

In questo paragrafo, introdurremo la nozione di *vettore \mathcal{V} -subunitario* e dimostreremo una relativa caratterizzazione, la quale permetterà di dimostrare a sua volta la Prop.2.6 inerente alle curve X -subunitarie.

Definizione 1.14 (Vettore \mathcal{V} -subunitario). Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$ una famiglia di vettori di \mathbb{R}^N . Diremo che un vettore $v \in \mathbb{R}^N$ è **\mathcal{V} -subunitario** se

$$\langle v, \xi \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^m \langle v_j, \xi \rangle^2, \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (1.11)$$

Denoteremo con $\text{Sub}(\mathcal{V})$ l'insieme dei vettori \mathcal{V} -subunitari in \mathbb{R}^N .

Osservazione 1.15. Se $\xi \in \mathbb{R}^N$ è tale che $\xi \perp v_i$ per ogni $i = 1, \dots, m$, allora, per (1.11), dovrà essere $\langle v, \xi \rangle = 0$. Da cui si ha che $\text{Sub}(\mathcal{V}) \perp \{v_1, \dots, v_m\}^\perp$, quindi $\text{Sub}(\mathcal{V}) \subseteq \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$.

Teorema 1.16 (Caratterizzazione dei vettori \mathcal{V} -subunitari). Sia data la famiglia di vettori $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_m\}$ di \mathbb{R}^N . Sono equivalenti:

1. v è un vettore \mathcal{V} -subunitario,
2. esistono $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ tali che $v = \sum_{j=1}^m c_j v_j$ ed inoltre $\sum_{j=1}^m c_j^2 \leq 1$.

Dimostrazione. Supponiamo che $v = \sum_{j=1}^m c_j v_j$ con $\sum_{j=1}^m c_j^2 \leq 1$. Allora, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, se $\xi \in \mathbb{R}^N$, si ha

$$\begin{aligned} |\langle v, \xi \rangle| &= \left| \left\langle \sum_{j=1}^m c_j v_j, \xi \right\rangle \right| \leq \sum_{j=1}^m |c_j| |\langle v_j, \xi \rangle| \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m c_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^m \langle v_j, \xi \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^m \langle v_j, \xi \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Elevando ora il primo e l'ultimo membro della disuguaglianza al quadrato, si ottiene che v è un vettore \mathcal{V} -subunitario.

Supponiamo ora che $v \in \text{Sub}(\mathcal{V})$. In generale, se M è una matrice $N \times m$, è facile provare che $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^T M)$; da cui,

$$\text{Im}(M) = (\text{Ker}(M^T))^\perp = (\text{Ker}(MM^T))^\perp = \text{Im}\left((MM^T)^T\right) = \text{Im}(MM^T). \quad (1.12)$$

Quindi, $\text{Im}(M) = \text{Im}(MM^T)$.

Definendo ora S matrice $N \times m$ con v_1, \dots, v_m come colonne, per l'Oss.1.15, esiste $x \in \mathbb{R}^m$ tale che $v = \sum_{j=1}^m x_j v_j = Sx$, ed inoltre, per quanto appena osservato in (1.12), per ogni $x \in \mathbb{R}^m$, esiste $\xi_x \in \mathbb{R}^N$ tale che $Sx = SS^T \xi_x$.

Per definizione di v vettore \mathcal{V} -subunitario, abbiamo

$$\langle Sx, \xi_x \rangle^2 = \langle v, \xi_x \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^m \langle v_j, \xi_x \rangle^2. \quad (1.13)$$

Si ha $\langle SS^T \xi_x, \xi_x \rangle^2 = \langle S^T \xi_x, S^T \xi_x \rangle^2 = \|S^T \xi_x\|^4$; essendo $SS^T \xi_x = Sx$,

$$\|S^T \xi_x\|^4 \stackrel{(1.13)}{\leq} \sum_{j=1}^m \langle v_j, \xi_x \rangle^2 = \sum_{j=1}^m \langle Se_j, \xi_x \rangle^2 = \sum_{j=1}^m \langle e_j, S^T \xi_x \rangle^2 = \|S^T \xi_x\|^2. \quad (1.14)$$

Posto $c := S^T \xi_x$, per (1.14), segue che $\sum_{j=1}^m c_j^2 \leq 1$, ed inoltre

$$v = \sum_{j=1}^m x_j v_j = Sx = Sc = \sum_{j=1}^m c_j v_j,$$

e questo completa la dimostrazione. \square

1.6 Un Lemma cruciale

In questa ultima sezione dimostreremo il Lemma cruciale 1.19, sul quale verrà fondata la dimostrazione del Teorema di Connettività 2.11. Iniziamo con alcune osservazioni:

Osservazione 1.17. Vogliamo provare ora la buona positura dell'espressione

$$\exp(tX_1 + t^2X_2 + \cdots + t^mX_m).$$

Siano X_1, \dots, X_m c.v. di classe C^1 su Ω e sia $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$. Consideriamo il problema di Cauchy associato al c.v. $Y_\xi := \sum_{i=1}^m \xi_i X_i$ su Ω , ossia

$$(PC)_\xi \quad \begin{cases} \dot{\gamma} = Y_\xi(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = x, \end{cases}$$

con la soluzione massimale $\Phi_t^{Y_\xi}(x)$ definita in $D(x; \xi) =]\tau_-(x; \xi), \tau_+(x; \xi)[$.

Allora, rispetto a $f(t, x; \xi) = Y_\xi(x) \in C^1(\mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^m)$, per il Teo.1.2, abbiamo che $(x; \xi) \mapsto \tau_-(x; \xi)$ e $(x; \xi) \mapsto \tau_+(x; \xi)$ sono risp. semicontinua superiormente e semicontinua inferiormente su $\Omega \times \mathbb{R}^m$.

Inoltre $\tau_-(x; (0, \dots, 0)) = -\infty$ e $\tau_+(x; (0, \dots, 0)) = +\infty$, per ogni $x \in \Omega$; quindi, per ogni $x_0 \in \Omega$, esiste un intorno aperto $U_{x_0} \subseteq \Omega$ di x_0 ed esiste $\delta_{x_0} > 0$ tale che $\tau_-(x; \xi) < -1$ e $\tau_+(x; \xi) > 1$, per ogni $x \in U_{x_0}$ e ogni $\xi \in \mathbb{R}^m$, con $\|\xi\| \leq \delta_{x_0}$.

Preso ora $\{U_{x_i}\}_{i=1, \dots, p}$ un ricoprimento aperto finito di K compatto (in Ω), e definito $\delta := \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_p}\}$, si ha che

$$\tau_-(x; \xi) < -1 \text{ e } \tau_+(x; \xi) > 1, \quad \text{per ogni } x \in K, \quad \xi \in \mathbb{R}^m \text{ con } \|\xi\| \leq \delta.$$

Applicando questa osservazione al c.v. $tX_1 + t^2X_2 + \dots + t^mX_m$ ricaviamo che, se $x \in K$ e $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ (con ε è sufficientemente piccolo), allora la sua curva integrale è definita in $[-1, 1]$; quindi è ben posta (per ogni $x \in K$ e $|t| \leq \varepsilon$)

$$\Phi_1^{tX_1 + t^2X_2 + \dots + t^mX_m}(x) = \exp(tX_1 + t^2X_2 + \dots + t^mX_m)(x).$$

Introduciamo ora le notazioni per il Lem.1.19:

Notazione. Diremo che $Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$ è $\mathcal{O}(t^n)$ se $Y = Y_t$ dipende dal parametro $t \in \mathbb{R}$ e vale che, dato $K \subseteq \Omega$ compatto, esistono $C_{n,K}, \varepsilon_{n,K} > 0$ tali che

$$\|Y_t(x)\| \leq C|t|^n, \quad \text{per ogni } x \in K, \quad |t| \leq \varepsilon.$$

Notazione. Date f, g funzioni, definiamo

$$\text{comm}(f, g) := g^{-1} \circ f^{-1} \circ g \circ f,$$

quando f^{-1}, g^{-1} e le varie composizioni sono ben poste. In particolare, se $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$, useremo la notazione

$$\begin{aligned} \text{comm}(\Phi_t^X, \Phi_t^Y) &:= (\Phi_t^Y)^{-1} \circ (\Phi_t^X)^{-1} \circ \Phi_t^Y \circ \Phi_t^X \\ &\stackrel{(1.7)}{=} \Phi_t^{-Y} \circ \Phi_t^{-X} \circ \Phi_t^Y \circ \Phi_t^X. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Inoltre, osserviamo che se $K \subseteq \Omega$ è compatto e $|t| \leq \varepsilon_K$, allora la definizione della mappa $x \mapsto \text{comm}(\Phi_t^X, \Phi_t^Y)(x)$ in (1.15) è ben posta su K per il Teo.1.1.

Siano ora $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(\Omega)$ con $k \geq 2$. Definiamo induttivamente m funzioni nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\Phi_t^{X_1}) &:= \Phi_t^{X_1} \\ \alpha_m(\Phi_t^{X_1}, \dots, \Phi_t^{X_m}) &:= \text{comm}(\alpha_{m-1}(\Phi_t^{X_1}, \dots, \Phi_t^{X_{m-1}}), \Phi_t^{X_m}). \end{aligned} \tag{1.16}$$

E' facile vedere che le m funzioni in (1.16) sono composizioni di $3 \cdot 2^{k-1} - 2$ mappe flusso di $\pm X_1, \dots, \pm X_k$ per ogni $k = 1, \dots, m$. Ad esempio,

$$\begin{aligned}\alpha_1(\Phi_t^{X_1}) &= \Phi_t^{X_1} \\ \alpha_2(\Phi_t^{X_1}, \Phi_t^{X_2}) &= \Phi_t^{-X_2} \circ \Phi_t^{-X_1} \circ \Phi_t^{X_2} \circ \Phi_t^{X_1}\end{aligned}$$

Osservazione 1.18. Da (1.16), possiamo osservare subito che definire α_k è equivalente a dare una h -upla ordinata di vettori

$$(\varepsilon_1 X_{i_1}, \varepsilon_2 X_{i_2}, \dots, \varepsilon_h X_{i_h}), \quad \text{con } h = 3 \cdot 2^{k-1} - 2,$$

dove i coefficienti $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_h \in \{-1, +1\}$ e gli indici i_1, \dots, i_h variano in $\{1, \dots, k\}$, tale che

$$\alpha_k(\Phi_t^{X_1}, \dots, \Phi_t^{X_k}) = \Phi_t^{\varepsilon_1 X_{i_1}} \circ \Phi_t^{\varepsilon_2 X_{i_2}} \circ \dots \circ \Phi_t^{\varepsilon_h X_{i_h}}. \quad (1.17)$$

Enunciamo e dimostriamo ora il Lemma centrale di questo capitolo:

Lemma 1.19. *Sia $m \geq 2$ e siano $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{X}(\Omega)$ (non necessariamente distinti). Allora, con le notazioni in (1.16), per ogni $K \subseteq \Omega$ compatto, esistono $C, \varepsilon > 0$ tali che*

$$\begin{aligned}\alpha_m(\Phi_t^{X_1}, \dots, \Phi_t^{X_m})(x) &= \exp\left(t^m[\dots[X_1, X_2]\dots X_m]\right)(x) + \mathcal{O}_x(t^{m+1}) \\ &= \Phi_{t^m}^{[\dots[X_1, X_2]\dots X_m]}(x) + \mathcal{O}_x(t^{m+1}),\end{aligned} \quad (1.18)$$

per ogni $x \in K$ e ogni $|t| \leq \varepsilon$, dove $\|\mathcal{O}_x(t^{m+1})\| \leq C t^{m+1}$, uniformemente per ogni $x \in K$ e ogni $|t| \leq \varepsilon$.

Dimostrazione. Siano

$$f(t) := \alpha_m(\Phi_t^{X_1}, \dots, \Phi_t^{X_m})(x), \quad g(t) := \exp\left(t^m[\dots[X_1, X_2]\dots X_m]\right)(x).$$

Dobbiamo provare che lo sviluppo in serie di Taylor di f e g in 0 coincide fino al termine m -esimo. Osserviamo che:

- per il Teo.1.8, ed in particolare per (1.8), abbiamo che

$$g(t) = x + t^m [\dots[X_1, X_2]\dots X_m](x) + \mathcal{O}(t^{2m}) \quad \text{per } t \rightarrow 0. \quad (1.19)$$

- Per (1.17) possiamo riscrivere f come

$$f(t) = \exp(t\varepsilon_1 X_{i_1}) \circ \exp(t\varepsilon_2 X_{i_2}) \circ \cdots \circ \exp(t\varepsilon_h X_{i_h})(x) \quad \text{con } h = 3 \cdot 2^{m-1} - 2,$$

e utilizzando il risultato della Prop.1.10, abbiamo il seguente sviluppo della funzione f di ordine m

$$\sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_h \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_h \leq m}} \frac{(\varepsilon_h X_{i_h})^{n_h} \cdots (\varepsilon_2 X_{i_2})^{n_2} (\varepsilon_1 X_{i_1})^{n_1} I(x)}{n_h! \cdots n_2! n_1!} t^{n_1 + n_2 + \dots + n_h}. \quad (1.20)$$

Concludiamo il Lemma dimostrando l'uguaglianza tra

$$x + t^m [\cdots [X_1, X_2] \cdots X_m](x)$$

e (1.20) *passando per un ambiente più astratto*, ossia dimostriamo che: se x_1, \dots, x_m sono indeterminate non commutative, allora vale

$$\sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_h \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_h \leq m}} \frac{(\varepsilon_h x_{i_h})^{n_h} \cdots (\varepsilon_2 x_{i_2})^{n_2} (\varepsilon_1 x_{i_1})^{n_1}}{n_h! \cdots n_2! n_1!} = 1 + [[x_1, x_2] \cdots x_m]. \quad (1.21)$$

Dimostrato ciò, si avrà la tesi sostituendo x_i e 1 risp. con tX_i e l'operatore differenziale identità.

Posto $\text{Exp}(S) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{k!}$, abbiamo la seguente uguaglianza:

$$\text{Exp}(\varepsilon_h x_{i_h}) \cdots \text{Exp}(\varepsilon_1 x_{i_1}) = \sum_{n_1, \dots, n_h \geq 0} \frac{(\varepsilon_h x_{i_h})^{n_h} \cdots (\varepsilon_1 x_{i_1})^{n_1}}{n_h! \cdots n_1!}. \quad (1.22)$$

Ponendo anche $\text{Comm}(A, B) := A B A^{-1} B^{-1}$, possiamo definire, in modo analogo a quanto svolto in (1.16), le funzioni β_k (per ogni $k = 2, \dots, m$) come segue

$$\beta_1(x_1) := \text{Exp}(x_1),$$

$$\beta_k(x_1, \dots, x_k) := \text{Comm}(\beta_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}), \text{Exp}(x_k)),$$

dove β_1, \dots, β_k sono esprimibili anch'esse nella forma di (1.22) con la h -upla ordinata associata $(\delta_1 x_{j_1}, \delta_2 x_{j_2}, \dots, \delta_h x_{j_h})$, con $\delta_1, \dots, \delta_h \in \{-1, +1\}$ e $h = 3 \cdot 2^{k-1} - 2$, ossia vale

$$\beta_k(x_1, \dots, x_k) = \text{Exp}(\delta_1 x_{j_1}) \text{Exp}(\delta_2 x_{j_2}) \cdots \text{Exp}(\delta_h x_{j_h}),$$

per ogni $k = 1, \dots, m$. Fissato $k \in \{1, \dots, m\}$, per come è stato costruito β_k , sostituendo i c.v. X_1, \dots, X_k in (1.16) con x_1, \dots, x_k , abbiamo che

$$(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_h) = (\varepsilon_h, \varepsilon_{h-1}, \dots, \varepsilon_1), \quad (j_1, j_2, \dots, j_h) = (i_h, i_{h-1}, \dots, i_1),$$

da cui

$$\beta_k(x_1, \dots, x_k) = \text{Exp}(\varepsilon_h x_{i_h}) \cdots \text{Exp}(\varepsilon_2 x_{i_2}) \text{Exp}(\varepsilon_1 x_{i_1}). \quad (1.23)$$

Ricordiamo ora che per il Teo.1.13 vale

$$\text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y) = \text{Exp}\left(x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \{L_3\}\right),$$

dove L_3 è una serie di commutatori di lunghezza ≥ 3 in x, y non commutative. Vogliamo provare per induzione che

$$\beta_m(x_1, \dots, x_m) = \text{Exp}([x_1, x_2] \cdots x_m + \{L_m\}). \quad (1.24)$$

Passo base, $m = 2$:

$$\begin{aligned} \beta_2(x_1, x_2) &= \text{Comm}(\beta_1(x_1), \text{Exp}(x_2)) \\ &= \text{Exp}(x_1) \text{Exp}(x_2) \text{Exp}(-x_1) \text{Exp}(-x_2) \\ &\stackrel{\text{Teo.1.13}}{=} \text{Exp}\left(x_1 + x_2 + \frac{1}{2}[x_1, x_2] + \{L_3\}\right) \text{Exp}(-x_1) \text{Exp}(-x_2) \\ &\stackrel{\text{Teo.1.13}}{=} \text{Exp}(x_2 + [x_1, x_2] + \{L_3\}) \text{Exp}(-x_2) \\ &\stackrel{\text{Teo.1.13}}{=} \text{Exp}([x_1, x_2] + \{L_3\}). \end{aligned}$$

Supponiamo ora, come ipotesi induttiva (*IP*), che sia verificata (1.24) per $m - 1$; si ha

$$\begin{aligned} \beta_m(x_1, \dots, x_m) &= \text{Comm}(\beta_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-1}), \text{Exp}(x_m)) \\ &= \text{Comm}(\text{Exp}([x_1, x_2] \cdots x_{m-1} + \{L_m\}), \text{Exp}(x_m)) \\ &\stackrel{(IP)}{=} \text{Exp}\left(\left[[x_1, x_2] \cdots x_{m-1} + \{L_m\}, x_m \right] + \left\{ \begin{array}{l} \text{serie di commutatori} \\ \text{di lunghezza } \geq 3 \\ \text{in } [x_1, x_2] \cdots x_{m-1} \text{ e } x_m \end{array} \right\} \right) \\ &= \text{Exp}([x_1, x_2] \cdots x_m + \{L_m\}). \end{aligned}$$

Questo prova il passo induttivo e termina la dimostrazione mettendo insieme (1.24) e (1.23). \square

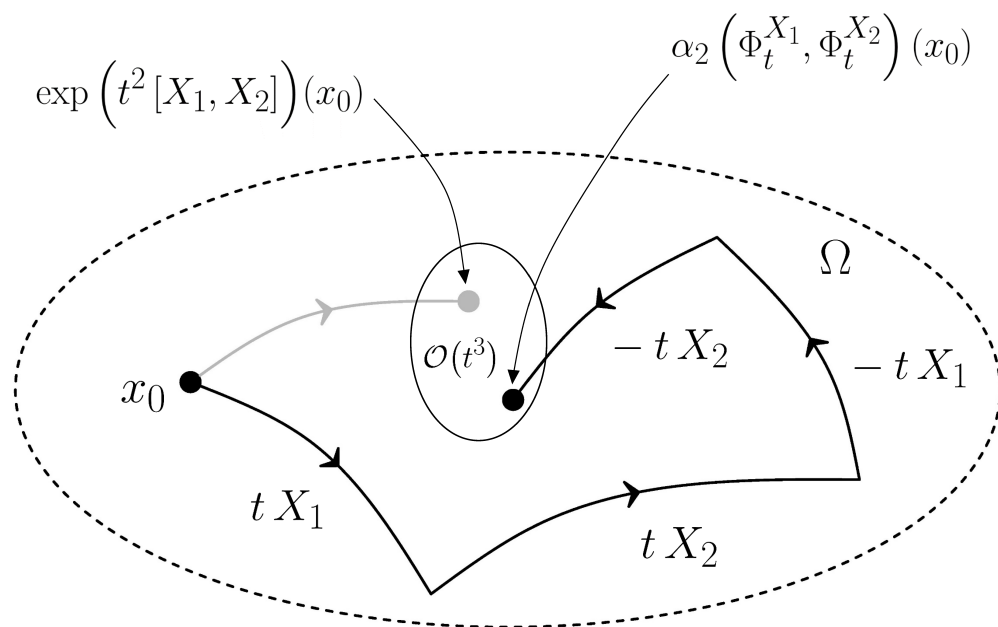


Figura 1.1: Lem.1.19 per $m = 2$.

Capitolo 2

Il Teorema di Connettività

In questo capitolo andremo a dimostrare il Teorema di Connettività 2.11 tramite gli strumenti introdotti in precedenza ed in particolare utilizzeremo il Lem.1.19.

Notazione. Per tutto il capitolo presente, useremo le seguenti notazioni:

- Ω è un aperto non vuoto di \mathbb{R}^N ;
- se f è una funzione assolutamente continua definita in $[a, b]$ a valori in \mathbb{R}^p , scriveremo $f \in AC([a, b], \mathbb{R}^p)$;
- sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ un famiglia di c.v.l. su Ω ; con $\text{Lie}\{X\}$ ci riferiamo alla *algebra di Lie generata da X* , ossia la più piccola sottoalgebra contenente X dentro l'algebra di Lie $\mathfrak{X}(\Omega)$ dei c.v.l. su Ω , dotata dell'usuale commutatore.

Introduciamo innanzitutto la seguente importante definizione.

Definizione 2.1 (Sistema di Hörmander di campi vettoriali). *Sia data $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ un famiglia di c.v.l. su Ω . Diremo che X è un **sistema di Hörmander di campi vettoriali** se soddisfa la seguente condizione*

$$\dim \left(\{Y(x) \in \mathbb{R}^N : Y \in \text{Lie}\{X\}\} \right) = N, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.1)$$

Equivalentemente, diremo che X è un insieme di **campi vettoriali di Hörmander** o che X soddisfa la **condizione del rango di Hörmander**.

Osserviamo che la definizione (2.1) è ben posta, dato che

$$\{Y(x) \in \mathbb{R}^N : Y \in \text{Lie}\{X\}\}$$

è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^N e la (2.1) può essere riscritta come

$$\{Y(x) \in \mathbb{R}^N : Y \in \text{Lie}\{X\}\} = \mathbb{R}^N, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.2)$$

Osservazione 2.2. Per il Teo.1.12, la condizione (2.2) è equivalente a richiedere che per ogni $x \in \Omega$ esistano N commutatori annidati a sinistra Y_1, \dots, Y_N di X (i quali dipenderanno da x) tali che $Y_1(x), \dots, Y_N(x)$ formano una base di \mathbb{R}^N .

Osservazione 2.3. Sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ una famiglia di c.v. lisci in Ω . Se vale

$$\text{span}(X_1(x), \dots, X_m(x)) = \mathbb{R}^N, \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.3)$$

allora X è un sistema di Hörmander. *In generale, il viceversa è falso.*

Considerando infatti $X_1 = \partial_x$, $X_2 = x \partial_y$ c.v. in \mathbb{R}^2 , abbiamo che $\partial_y \in \text{Lie}\{X_1, X_2\}$, per cui è soddisfatta (2.2). Ma $X_2(0, 0) = (0, 0)$, e quindi $\{X_1(0, 0), X_2(0, 0)\}$ non è una base per \mathbb{R}^2 .

Diamo ora la definizione di una particolare classe di curve che risulterà fondamentale sia per questo capitolo che per i prossimi.

Definizione 2.4 (Curva X -subunitaria). *Sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ una famiglia di c.v. su Ω . Diremo che una curva $\gamma \in AC([a, b], \Omega)$ è X -subunitaria in Ω se, per quasi ogni $t \in [a, b]$, si ha*

$$\langle \dot{\gamma}(t), \xi \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^m \langle X_j(\gamma(t)), \xi \rangle^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (2.4)$$

Denotiamo con $\mathcal{S}_\Omega(X)$ l'insieme di tutte le curve X -subunitarie in Ω .

Osservazione 2.5. Dalla Def. 2.4 seguono immediatamente:

1. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ e $\mu : [c, d] \rightarrow \Omega$ sono X -subunitarie tali che $\gamma(b) = \mu(c)$, allora anche la loro concatenazione¹ è X -subunitaria in Ω .

¹Date $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\mu : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tali che $\gamma(b) = \mu(c)$, definiamo la concatenazione di γ con μ , $\Gamma : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^N$ come $\Gamma(t) := \gamma(t)\chi_{[a, b]}(t) + \mu(t - b + c)\chi_{]b, b+d-c]}(t)$.

2. Sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ famiglia di c.v. localmente lipschitziani su Ω . Se γ è una curva integrale di $\pm X_i$ per qualche $i \in \{1, \dots, m\}$, allora la restrizione di γ ad un qualsiasi intervallo compatto contenuto nel suo dominio massimale è X -subunitaria. Quindi, poichè una curva data dalla concatenazione finita di curve integrali di c.v. in $\{\pm X_i\}_{i=1, \dots, m}$ è X -subunitaria, è ben posta la definizione di $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$ l'insieme delle curve integrali a tratti di $\pm X_1, \dots, \pm X_m$ in Ω e si ha che $\mathcal{S}_\Omega^*(X) \subseteq \mathcal{S}_\Omega(X)$.
3. Se $\gamma \in \mathcal{S}_\Omega(X)$, per i tempi t tali che $\dot{\gamma}(t) \neq 0$, scegliendo $\xi = \dot{\gamma}(t)/\|\dot{\gamma}(t)\|$ in (2.4) e applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, otteniamo

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \leq \sum_{i=1}^m \|X_i(\gamma(t))\|. \quad (2.5)$$

4. Per la Def.1.14, la definizione di curva X -subunitaria è equivalente a chiedere che il vettore $\dot{\gamma}(t)$ sia $\{X_1(\gamma(t)), \dots, X_m(\gamma(t))\}$ -subunitario.
5. Restrizioni di curve X -subunitarie, sono ancora X -subunitarie.
6. Se γ è $\{X_1, \dots, X_m\}$ -subunitaria, allora è anche $\{-X_1, \dots, -X_m\}$ -subunitaria.

Come conseguenza immediata del Teo.1.16 e della Oss.2.5.4, si ha la seguente importante caratterizzazione delle curve X -subunitarie:

Proposizione 2.6 (Caratterizzazione delle curve X -subunitarie). *Sia γ una curva appartenente a $AC([a, b], \Omega)$ e sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ una famiglia di c.v. in Ω . Sono equivalenti:*

1. γ è una curva X -subunitaria in Ω ,
2. esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ funzioni reali definite in $[a, b]$ tali che $\sum_{j=1}^m |\alpha_j|^2 \leq 1$ ed inoltre vale

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j(t) X_j(\gamma(t)), \quad \text{per q.o. } t \in [a, b]. \quad (2.6)$$

Osservazione 2.7. Dati X, Y c.v. di classe C^1 in Ω e $x \in \Omega$, per Oss.2.5 sappiamo che le mappe flusso $t \mapsto \Phi_t^X(x)$ e $t \mapsto \Phi_t^Y(x)$ sono $\{X, Y\}$ -subunitarie. In generale però, **non** è vero che la mappa $t \mapsto \Phi_t^Y \circ \Phi_t^X(x)$ è $\{X, Y\}$ -subunitaria: ad esempio, se $X = \partial_x$ e $Y = \partial_y$

sono c.v. in \mathbb{R}^2 , allora, per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, si ha $\Phi_t^Y \circ \Phi_t^X(x_0, y_0) = (t + x_0, t + y_0)$ che non è una curva $\{X, Y\}$ -subunitaria.

Tuttavia, ogni punto dell'immagine di $t \mapsto \Phi_t^Y \circ \Phi_t^X(x)$ può essere raggiunto tramite una curva di $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$ data dalla concatenazione di $s \mapsto \Phi_s^X(x)$ percorsa nel tempo $[0, t]$ con $s \mapsto \Phi_s^Y(z)$ percorsa nel tempo $[0, t]$, dove $z = \Phi_t^X(x)$.

Proposizione 2.8 (Subunitarietà per riparametrizzazioni). *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva X -subunitaria, dove $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ è una famiglia di c.v. in Ω . Se $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ è un C^1 -diffeomorfismo tale che $|\dot{\varphi}(t)| \leq 1$, per ogni $t \in [\alpha, \beta]$, allora $\gamma \circ \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ è una curva X -subunitaria.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, per l'ipotesi di φ di essere un C^1 -diffeomorfismo, è facile² provare che $\gamma \circ \varphi \in AC([\alpha, \beta], \Omega)$.

Usiamo ora la caratterizzazione della Prop.2.6. Per q.o. $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\frac{d}{dt}(\gamma \circ \varphi)(t) = \dot{\gamma}(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^m a_i(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \cdot X_i((\gamma \circ \varphi)(t)),$$

dove $a_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono i coefficienti della Prop.2.6 rispetto a γ . Poiché $|\dot{\varphi}(t)| \leq 1$, per ogni $t \in [\alpha, \beta]$, abbiamo che

$$\sum_{i=1}^m |a_i(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t)|^2 \leq \sum_{i=1}^m |a_i(\varphi(t))|^2 \leq 1.$$

Quindi sono soddisfatte le ipotesi della Prop.2.6 rispetto a $\gamma \circ \varphi$ in $[\alpha, \beta]$. \square

Definizione 2.9 (Insieme X -connesso). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto connesso e sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ una famiglia di c.v. su Ω . Diremo che Ω è X -connesso se*

$$\forall x, y \in \Omega, \exists \gamma \in \mathcal{S}_\Omega(X), \gamma : [a, b] \rightarrow \Omega, \text{ tale che } \gamma(a) = x \text{ e } \gamma(b) = y.$$

²Se φ è crescente, allora essendo $\gamma \in AC([a, b], \Omega)$

$$\gamma(t) - \gamma(a) = \int_a^t \dot{\gamma}(z) dz = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(t)} \dot{\gamma}(\varphi(y)) \dot{\varphi}(y) dy = \int_a^{\varphi^{-1}(t)} \frac{d}{dy}(\gamma(\varphi(y))) dy,$$

ed inoltre si ha

$$\gamma(t) - \gamma(a) = (\gamma \circ \varphi)(\varphi^{-1}(t)) - (\gamma \circ \varphi)(a).$$

In modo analogo si procede nel caso di φ decrescente.

Nel caso in cui Ω sia X -connesso tramite curve in $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$, diremo che Ω è $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$ -connesso.

Osservazione 2.10. In generale, se $X = \{X_1, \dots, X_N\}$ è una famiglia di c.v. in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, non è vero che Ω è X -connesso.

Per esempio, sia $X_1 := x \frac{d}{dx} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Cerchiamo le curve $\{X_1\}$ -subunitarie utilizzando la Prop.2.6. Fissato $x \in \mathbb{R}$, una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, passante per x al tempo $t = a$, che è $\{X_1\}$ -subunitaria deve soddisfare

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \alpha(t) \gamma(t) \\ \gamma(a) = x, \end{cases}$$

per q.o. $t \in [a, b]$, con $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $|\alpha| \leq 1$ su $[a, b]$. Il sistema ha soluzione esplicita $\gamma(t) = x \exp(\int_a^t \alpha(s) ds)$, per cui,

- (a). se $x < 0$, γ assume solo valori negativi;
- (b). se $x > 0$, γ assume solo valori positivi;
- (c). se $x = 0$, la soluzione è identicamente nulla.

Quindi, \mathbb{R} non è $\{X_1\}$ -connesso. In particolare, notiamo che \mathbb{R} è connesso, X_1 è un c.v. liscio su \mathbb{R} ma X_1 non soddisfa la condizione di Hörmander.

Siamo ora pronti per enunciare e dimostrare il risultato centrale della tesi dovuto a C. Carathéodory [4], W.-L. Chow [5], R. Hermann [6] e P.K. Rashevskii [8]: il Teorema di Connettività.

Teorema 2.11 (Teorema di Connettività). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto connesso e sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ un sistema di Hörmander di c.v.l. su Ω . Allora Ω è X -connesso.*

Inoltre, ogni coppia di punti in Ω può essere collegata tramite una curva X -subunitaria in Ω che è una curva integrale a tratti di $\pm X_1, \dots, \pm X_m$.

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in 3 parti.

PARTE I. Sia $x_0 \in \Omega$. Per ipotesi $\{X_1, \dots, X_m\}$ è un sistema di Hörmander di c.v.l., ossia $\text{span}(\{Y(x_0) : Y \in \text{Lie}\{X\}\}) = \mathbb{R}^N$. Scegliamo allora $Y_1, \dots, Y_N \in \text{Lie}\{X\}$

tali che $Y_1(x_0), \dots, Y_N(x_0)$ siano linearmente indipendenti, ed inoltre, per il Teo.1.12, possiamo supporre che Y_1, \dots, Y_N siano commutatori annidati a sinistra della forma

$$Y_i = [\dots [X_{j_1}, X_{j_2}] \dots X_{j_k}], \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, N,$$

con j_1, \dots, j_k che variano in $\{1, \dots, m\}$.

Sia $i \in \{1, \dots, N\}$ fissato. Per il Lem.1.19, abbiamo che

$$\alpha_k(\Phi_t^{X_{j_1}}, \dots, \Phi_t^{X_{j_k}})(x) = \exp\left(t^k [\dots [X_{j_1}, X_{j_2}] \dots X_{j_k}]\right)(x) + \mathcal{O}(t^{k+1}), \quad (2.7)$$

per ogni $x \in K$ e $|t| \ll 1$, dove K è un qualsiasi sottoinsieme compatto di Ω . Sostituendo ora t con $s^{1/k}$ e osservando che $s^2 = \mathcal{O}(s^{\frac{k+1}{k}})$, dato che $2 \geq \frac{k+1}{k}$, definiamo

$$\begin{aligned} E(s, x) &:= \alpha_k(\Phi_{s^{1/k}}^{X_{j_1}}, \Phi_{s^{1/k}}^{X_{j_2}}, \dots, \Phi_{s^{1/k}}^{X_{j_k}})(x) \\ &= \exp\left(s [\dots [X_{j_1}, X_{j_2}] \dots X_{j_k}]\right)(x) + \mathcal{O}(s^{\frac{k+1}{k}}) \\ &\stackrel{(1.8)}{=} x + s [\dots [X_{j_1}, X_{j_2}] \dots X_{j_k}](x) + \mathcal{O}(s^{\frac{k+1}{k}}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Volendo estendere la definizione di $E(s, x)$ anche per s negativi, poniamo

$$E^*(s, x) := \begin{cases} E(s, x) & \text{se } s \geq 0, \\ \alpha_k\left(\Phi_{|s|^{1/k}}^{X_{j_2}}, \Phi_{|s|^{1/k}}^{X_{j_1}}, \Phi_{|s|^{1/k}}^{X_{j_3}}, \dots, \Phi_{|s|^{1/k}}^{X_{j_k}}\right)(x) & \text{se } s < 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

con $|s| \ll 1$. Facciamo notare che l'ordine dei c.v. X_{j_1} e X_{j_2} è invertito per $s < 0$. Osserviamo che, dalla proprietà di antisimmetria dei commutatori, vale

$$[\dots [[X_{j_2}, X_{j_1}], X_{j_3}] \dots X_{j_k}] = -[\dots [[X_{j_1}, X_{j_2}], X_{j_3}] \dots X_{j_k}],$$

per cui, tenendo presente anche (2.7), possiamo riscrivere (2.9) come

$$E^*(s, x) = \begin{cases} x + s [\dots [[X_{j_1}, X_{j_2}], X_{j_3}] \dots X_{j_k}](x) + \mathcal{O}(s^{\frac{k+1}{k}}) & \text{se } s \geq 0, \\ x - |s| [\dots [[X_{j_1}, X_{j_2}], X_{j_3}] \dots X_{j_k}](x) + \mathcal{O}(|s|^{\frac{k+1}{k}}) & \text{se } s < 0, \end{cases}$$

ossia

$$E^*(s, x) = x + s [\dots [[X_{j_1}, X_{j_2}], X_{j_3}] \dots X_{j_k}](x) + \mathcal{O}(|s|^{\frac{k+1}{k}}), \quad (2.10)$$

per ogni $|s| \ll 1$.

Poiché $(k+1)/k > 1$, è facile vedere che $E^*(s, x)$ è di classe C^1 risp. a (s, x) , ed inoltre vale

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} E^*(s, x) = [\cdots [[X_{j_1}, X_{j_2}], X_{j_3}] \cdots X_{j_k}](x) = Y_i(x). \quad (2.11)$$

PARTE II. Per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, per la PARTE I, possiamo costruire la mappa $(s, x) \mapsto E_i^*(s, x)$ relativa al c.v. Y_i (che è un commutatore annidato a sinistra). Allora definiamo, in un intorno $U^N(0)$ di 0 in \mathbb{R}^N , la funzione $\Lambda = \Lambda_{x_0} : U^N(0) \rightarrow \Omega$ tale che

$$\Lambda(s_1, \dots, s_N) := E_1^* \left(s_1, E_2^* (s_2, \dots, E_{N-1}^* (s_{N-1}, E_N^* (s_N, x_0)) \cdots) \right). \quad (2.12)$$

Osserviamo che Λ è ben posta dato che $\|s\| \ll 1$ in $U^N(0)$ e, per definizione di $E_1^*(s, x), \dots, E_N^*(s, x)$, abbiamo che $\Lambda(U^N(0)) \subseteq \Omega$ e Λ è di classe C^1 per composizione di funzioni di classe C^1 .

Ogni $E_i^*(s, x)$ è composizione di mappe flusso dei c.v. $\pm X_1, \dots, \pm X_m$, quindi anche Λ lo è con $\Lambda(0, \dots, 0) = x_0$, ed in particolare, per l'Oss.2.7, sappiamo che ogni punto dell'immagine di Λ può essere raggiunto tramite curve integrali a tratti di $\pm X_1, \dots, \pm X_m$ che sono anche X -subunitarie. Le siffatte curve sono ben poste per $|s|$ sufficientemente piccolo che dipende solo da x_0, Ω, X .

Proviamo ora che Λ è un *diffeomorfismo di classe C^1 da un intorno di 0 in \mathbb{R}^N ad un intorno di x_0 in Ω* . Sappiamo già che Λ è di classe C^1 . Inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_i} \Big|_{s=0} \Lambda(s) &= \frac{d}{ds_i} \Big|_{s_i=0} \left\{ \Lambda(s_1, \dots, s_i, \dots, s_N) \right\} \Big|_{s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N=0} \\ &= \frac{d}{ds_i} \Big|_{s_i=0} \Lambda(0, \dots, s_i, \dots, 0) \stackrel{(*)}{=} \frac{d}{ds_i} \Big|_{s_i=0} E_i^*(s_i, x_0) \stackrel{(2.11)}{=} Y_i(x_0), \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza $(*)$ è data dal fatto che $E_N^*(0, \cdot), \dots, E_1^*(0, \cdot)$ sono l'identità di Ω . Abbiamo quindi mostrato che

$$\mathcal{J}_\Lambda(0) = (Y_1(x_0), \dots, Y_N(x_0)).$$

Poiché $Y_1(x_0), \dots, Y_N(x_0)$ sono linearmente indipendenti, allora segue che $\mathcal{J}_\Lambda(0)$ è invertibile. Essendo soddisfatte le ipotesi del *Teorema di Invertibilità Locale*, ne deriva che esiste un intorno U_0 di 0 in \mathbb{R}^N ed esiste un intorno V_{x_0} di x_0 in Ω tali che la mappa $\Lambda|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_{x_0}$ è un diffeomorfismo di classe C^1 .

Abbiamo quindi provato che per ogni $x_0 \in \Omega$, esiste un intorno di x_0 in Ω tale che ogni punto dell'intorno può essere raggiunto partendo da x_0 tramite curve in $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$.

PARTE III. Vogliamo ora estendere il risultato locale della PARTE II sfruttando l'ipotesi di connessione di Ω .

Sia $x_0 \in \Omega$ fissato e sia Ω_0 l'insieme dei punti collegati a x_0 tramite curve in $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$. Sicuramente Ω_0 è non vuoto poiché $x_0 \in \Omega$. Mostriamo che Ω_0 è aperto e chiuso in Ω :

- Ω_0 è aperto: sia $x \in \Omega_0$ e sia $\gamma \in \mathcal{S}_\Omega^*(X)$ tale che collega x_0 con x . Sappiamo che, per la PARTE II, esiste un intorno U_x di x tale che, per ogni $y \in U_x$, esiste una curva $\mu \in \mathcal{S}_\Omega^*(X)$ che collega x con y . Allora, se consideriamo la concatenazione di γ con μ (che è una curva X -subunitaria per l'Oss.2.5), abbiamo collegato x_0 con y . Ma ciò vale per ogni $y \in U_x$, quindi U_x è contenuto in Ω_0 , e questo dimostra che Ω_0 è aperto.
- Ω_0 è chiuso: sia $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in Ω_0 convergente a $x \in \Omega$. Se U_x è un intorno $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$ -connesso di x , allora esiste un $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $x_k \in U_x$, per ogni $k \geq \bar{k}$; per cui $x_{\bar{k}}$ e x sono $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$ -collegati. Ma $x_{\bar{k}} \in U_x \subseteq \Omega_0$, quindi $x \in \Omega_0$ e questo ci dice che Ω_0 è chiuso.

Per ipotesi, Ω è connesso, e abbiamo mostrato che Ω_0 è non vuoto, aperto e chiuso in Ω . Si ha quindi $\Omega = \Omega_0$, ossia che ogni punto di Ω può essere collegato con x_0 tramite curve in $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$. Quindi Ω è $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$ -connesso e questo termina la dimostrazione. \square

Osservazione 2.12. Osserviamo che le ipotesi del Teorema di Connettività 2.11 sono solo sufficienti ma non necessarie per la X -connessione. Infatti, se $X = \partial_x$ e $Y = \max\{0, x\}\partial_y$, allora sono tali che \mathbb{R}^2 è $\{X, Y\}$ -connesso ma Y non è un campo vettoriale liscio.

Capitolo 3

Applicazione. Distanza di Carnot-Carathéodory

In questo capitolo introdurremo la *distanza di Carnot-Carathéodory* d_X , la quale gioca un ruolo importante nella teoria delle EDP sub-ellittiche, nella Teoria del Controllo e nella Teoria Geometrica della Misura [1]. In particolare, useremo il Teorema di Connettività 2.11 per poter dimostrare che, se una famiglia di c.v.l. soddisfa la condizione di Hörmander su un aperto connesso, allora la topologia indotta dalla metrica euclidea coincide con la topologia indotta da d_X , ed inoltre è possibile dare una equivalenza esplicita tra le due distanze.

Notazione. Per tutto il capitolo presente useremo le seguenti notazioni:

- (a). Ω denota un aperto non vuoto di \mathbb{R}^N ;
- (b). $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ denota una famiglia di c.v. localmente lipschitziani su Ω ;
- (c). $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ denota la norma Euclidea in \mathbb{R}^N ;
- (d). denotiamo con $B_E(x, r)$ la palla Euclidea di centro $x \in \mathbb{R}^N$ e raggio $r > 0$.
- (e). se la chiusura dell'insieme A è compatta ed è contenuta in Ω , scriveremo $A \Subset \Omega$.

Definizione 3.1 (Distanza di Carnot-Carathéodory). Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ è una curva X -subunitaria in Ω , poniamo $\ell(\gamma) := b - a$. Chiameremo **Distanza di Carnot-Carathéodory** (abbreviata con **CC**) relativa a X la mappa $d_X : \Omega \times \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ così definita:

se $x, y \in \Omega$, allora

$$d_X(x, y) := \begin{cases} +\infty, & \text{se } x, y \text{ non sono } \mathcal{S}_\Omega(X)\text{-collegati} \\ \inf \left\{ \ell(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{S}_\Omega(X), \gamma \text{ collega } x, y \right\}, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Osserviamo che d_X è finita su $\Omega \times \Omega$ se e solo se Ω è X -connesso.

Fissiamo ora la seguente notazione: se $x \in \Omega$ e $\rho > 0$, definiamo

$$B_{CC}(x, \rho) := \{y \in \Omega \mid d_X(x, y) < \rho\}.$$

Vogliamo ora mostrare che il nome “distanza” è ben posto, ossia vogliamo provare che se Ω è X -connesso, allora (Ω, d_X) è uno spazio metrico.

Per fare ciò, osserviamo che, utilizzando (2.5), si ottiene subito:

Proposizione 3.2. *Siano $x_0 \in \Omega$ e $r_0 > 0$ tali che $B_E(x_0, r_0) \Subset \Omega$. Posto $M_0 := \sup_{y \in B_E(x_0, r_0)} \sum_{i=1}^m \|X_i(y)\|$, se $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ è una curva X -subunitaria tale che $\gamma(0) = x_0$ e $T < r_0/M_0$, allora si ha $\gamma([0, T]) \subseteq B_E(x_0, r_0)$.*

Dimostriamo ora il seguente Lemma che ci servirà nella dimostrazione del Teo.3.4 e del Teo.3.6.

Lemma 3.3. *Sia Ω X -connesso. Allora, per ogni K compatto in Ω , esiste una costante $c = c_{\Omega, X, K} > 0$ tale che*

$$d_X(x, y) \geq c \|x - y\|, \quad \text{per ogni } x, y \in K.$$

Dimostrazione. Iniziamo osservando che, posto $\varepsilon := d(K, \partial\Omega)/2$, dove $d(K, \partial\Omega)$ indica la distanza di K dalla frontiera di Ω , allora si ha $B_E(x, \varepsilon) \Subset \Omega$, per ogni $x \in K$. Se poniamo anche $K_\varepsilon := \bigcup_{x \in K} B_E(x, \varepsilon)$, avremo che $\overline{K_\varepsilon} \subseteq \Omega$.

Definiamo ora $M := \sup_{y \in K_\varepsilon} \sum_{i=1}^m \|X_i(y)\|$ e notiamo che M è finito perché $\overline{K_\varepsilon}$ è compatto. Fissati $x, y \in K$ e definito $\rho := \min(\varepsilon, \|x - y\|)$, abbiamo che:

- (1) la chiusura di $B_E(x, \rho)$ è contenuta in Ω per definizione di ε ;
- (2) se $M(x, \rho) := \sup_{y \in B_E(x, \rho)} \sum_{i=1}^m \|X_i(y)\|$, allora $M(x, \rho) \leq M$, per $B_E(x, \rho) \subseteq K_\varepsilon$;
- (3) poiché $y \in \partial B_E(x, \rho)$, allora $y \notin B_E(x, \rho)$.

Quindi, se $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ è una curva in $\mathcal{S}_\Omega(X)$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(T) = y$, allora, per (1), $\gamma(T) \notin B_E(x, \rho)$ ed inoltre, per l'Oss.3.2, deve essere $T \geq \rho/M(x, \rho)$, altrimenti si avrebbe $\gamma([0, T]) \subseteq B_E(x, \rho)$ che è assurdo per (3). Per (2) abbiamo anche che $T \geq \rho/M$.

Abbiamo quindi due casi:

- se $\rho = \varepsilon$, allora $T \geq \frac{\varepsilon}{M} \geq \frac{\varepsilon}{M} \frac{\|x-y\|}{\text{diam}(K)} =: \mathbf{c} \|x - y\|$;
- se $\rho = \|x - y\|$, allora $T \geq \|x - y\|/M =: \mathbf{c} \|x - y\|$.

In ogni caso, abbiamo trovato una costante che dipende solo da Ω , K e X tale che $\ell(\gamma) = T \geq \mathbf{c} \|x - y\|$. Passando ora all'inf su $\mathcal{S}_\Omega(X)$ si ha la tesi. \square

Siamo ora in grado di dimostrare l'importante

Teorema 3.4. *Se Ω è X -connesso, allora (Ω, d_X) è uno spazio metrico.*

Dimostrazione. Sicuramente d_X assume valori reali non negativi per l'ipotesi di X -connessione di Ω . Inoltre, $d_X(x, x) = 0$, per ogni $x \in \Omega$. La proprietà di simmetria è soddisfatta poiché, se $x, y \in \Omega$ sono collegati tramite $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ curva X -subunitaria, allora $\hat{\gamma} : [0, T] \rightarrow \Omega$ definita come $\hat{\gamma}(t) := \gamma(T - t)$ è X -subunitaria con $\ell(\gamma) = \ell(\hat{\gamma})$.

Se $x, y \in \Omega$, denotiamo con $A(x, y) := \{\gamma \in \mathcal{S}_\Omega(X) \mid \gamma \text{ collega } x, y\}$. Siano $x, y, z \in \Omega$, allora abbiamo che: $\gamma \in A(x, y)$ ha z nella sua immagine se e solo se esistono $\mu \in A(x, z)$ e $\tau \in A(z, y)$ tali che γ è la concatenazione di μ con τ . Quindi $d_X(x, y) \leq \ell(\gamma) = \ell(\mu) + \ell(\tau)$. Da cui, passando all'inf su $A(x, z)$ e $A(z, y)$, sia ha la disuguaglianza triangolare.

Dimostriamo infine che se $d_X(x, y) = 0$, allora $x = y$. Siano $x, y \in \Omega$ tali che $d_X(x, y) = 0$. Se esiste un $r > 0$ tale che $y \in B_E(x, r) \Subset \Omega$, allora, per la Prop.3.3 considerando $K = \overline{B_E(x, r)}$, si ha $0 = d_X(x, y) \geq \|x - y\|$. Quindi $x = y$.

Supponiamo allora che, per ogni $B_E(x, r) \Subset \Omega$, $y \notin B_E(x, r)$. Fissato $r > 0$, dato che $d_X(x, y) = 0$, esiste una successione di curve $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}_\Omega(X)$ tali che $\gamma_n : [0, T_n] \rightarrow \Omega$ con $\gamma_n(0) = x, \gamma_n(T_n) = y$ e $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Sia t^* (*tempo di uscita di γ_n da $B_E(x, r)$*) definito come

$$t^* := \sup \{t \in [0, T_n] \mid \gamma_n(s) \in B_E(x, r) \text{ per } 0 \leq s \leq t\}. \quad (3.2)$$

Sicuramente $t^* > 0$, altrimenti $y \in B_E(x, r)$. Se $s \in [0, t^*[$, $\gamma_n(s) \in B_E(x, r)$ e, per la Prop.3.3, si ha

$$\mathbf{c} \|x - \gamma_n(s)\| \leq d_X(x, \gamma_n(s)) = d_X(\gamma_n(0), \gamma_n(s)) \leq s \leq t^* \leq T_n.$$

Quindi passando al limite per $s \rightarrow t^*$ ed osservando che $\gamma_n(t^*) \in \partial B_E(x, r)$, abbiamo $\mathbf{c} \|x - \gamma_n(t^*)\| = \mathbf{c} r \leq T_n$. Facendo tendere ora $n \rightarrow \infty$, otteniamo che $0 \leq \mathbf{c} r = 0$. Siamo arrivati ad una contraddizione. Quindi $y \in B_E(x, r) \Subset \Omega$, per qualche $r > 0$, e ciò termina la dimostrazione per il caso precedente. \square

Osservazione 3.5. Come diretta conseguenza del Lem.3.3 abbiamo che, se Ω è X -connesso, allora la topologia indotta dalla metrica d_X è più fine della topologia indotta dalla distanza Euclidea. In generale però, non è vero che la mappa $\text{id}: (\Omega, \|\cdot\|) \rightarrow (\Omega, d_X)$ è continua.

Ad esempio, se $X_1 := \partial_x$ e $X_2 := \phi(x) \partial_y$ sono c.v.l. in \mathbb{R}^2 , dove $\phi(x) = e^{1/x} \chi_{]0, +\infty[}(x)$, è facile provare che $B_{CC}((-1, -1), \frac{1}{2}) =] -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[\times \{-1\}$, la quale non è aperta nella metrica Euclidea.

Diamo ora il risultato centrale di questo capitolo.

Teorema 3.6 (Chow-Rashevskii). *Sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ un sistema di Hörmander su Ω aperto connesso di \mathbb{R}^N . Allora, per ogni $K \subseteq \Omega$ compatto, esiste $k_{\Omega, X, K} \in \mathbb{N}$ e una costante $\mathbf{c}_{\Omega, X, K} > 0$ tali che*

$$\mathbf{c}^{-1} \|x - y\| \leq d_X(x, y) \leq \mathbf{c} \|x - y\|^{1/k}, \quad \text{per ogni } x, y \in K. \quad (3.3)$$

Quindi la topologia indotta da d_X è equivalente alla topologia Euclidea su Ω .

Più precisamente, k è scelto come il minimo intero tale che lo span dei commutatori iterati di X_1, \dots, X_m di lunghezza $\leq k$ sia \mathbb{R}^N , per ogni punto in K .

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due parti:

PARTE I. Osserviamo subito che Ω è un aperto connesso di \mathbb{R}^N e X è un sistema di Hörmander, quindi, per il Teo.2.11, Ω è X -connesso. Diamo ora alcune considerazioni riguardanti il Teo.2.11.

Grazie alla condizione di Hörmander soddisfatta da X , denotiamo con $Y_1^x, \dots, Y_N^x \in \text{Lie}\{X\}$, al variare di $x \in \Omega$, N c.v. tali per cui valga $\text{span}(\{Y_1^x(x), \dots, Y_N^x(x)\}) = \mathbb{R}^N$.

Preso ora $x_0 \in \Omega$, sappiamo che $x \mapsto Y_i^{x_0}(x)$ è di classe C^∞ su Ω , per ogni $i = 1, \dots, N$, ed inoltre vale che $\det(Y_1^{x_0}(x_0), \dots, Y_N^{x_0}(x_0)) \neq 0$. Quindi, per il *Teorema della Permanenza del Segno*, esiste $\varepsilon_{x_0} > 0$ tale che $\det(\{Y_i^{x_0}(x)\}_i) \neq 0$, per ogni $x \in B_E(x_0, \varepsilon_{x_0})$, ossia possiamo scegliere come c.v. soddisfacenti la condizione del rango di Hörmander, per ogni $x \in B_E(x_0, \varepsilon_{x_0})$, esattamente $Y_1^{x_0}, \dots, Y_N^{x_0}$.

Fissiamo $K \subseteq \Omega$ compatto. Scegliamo $x_1, \dots, x_p \in K$ e $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p > 0$ tali che

- (1) $\{B_E(x_j, \varepsilon_j)\}_{j=1, \dots, p}$ sia un ricoprimento aperto di K ;
- (2) $\cup_j B_E(x_j, \varepsilon_j) \Subset \Omega$;
- (3) si può scegliere come c.v. di Hörmander $Y_1^{x_j}, \dots, Y_N^{x_j}$, per ogni $x \in B_E(x_j, \varepsilon_j)$.

Definiamo $B_j := B_E(x_j, \varepsilon_j)$, per ogni $j = 1, \dots, p$.

Ricordando le notazioni usate nel Teo.2.11, denotiamo con

$$E_{i,x_j}^*(s, x) := x + s Y_i^{x_j}(x) + \mathcal{O}_{x,x_j,i}(|s|^{\frac{k+1}{k}}).$$

Inoltre, nel Lem.1.19, possiamo uniformare rispetto a i, j e K la costante di controllo di $\mathcal{O}_{x,x_j,i}(|s|^{\frac{k+1}{k}})$ ed il raggio su cui è definito quest'ultimo, in modo che l'applicazione

$$\Lambda_j(s, x) := E_{1,x_j}^* \left(s_1, E_{2,x_j}^* (s_2, \dots, E_{N-1,x_j}^* (s_{N-1}, E_{N,x_j}^* (s_N, x)) \dots) \right) \quad (3.4)$$

sia ben definita, per ogni $j = 1, \dots, p$, su $V_0 \times B_j$, dove V_0 è un intorno di $0 \in \mathbb{R}^N$ uniforme in i, j e K . Dalla dimostrazione del Teo.2.11, per ogni $x \in B_j$, sappiamo che $s \mapsto \Lambda_j(s, x)$ è di classe C^1 .

Ripercorrendo la dimostrazione del *Teorema di Invertibilità Locale*, si può dimostrare che: per ogni $x \in K$ e per ogni $j \in \{1, \dots, p\}$, esiste $U_0 \subseteq V_0$ intorno di $0 \in \mathbb{R}^N$ e una costante $M > 0$ tali che $s \mapsto \Lambda_j(s, x)$ è un diffeomorfismo di classe C^1 da U_0 nella sua immagine, ed inoltre vale

$$\|\Lambda_j(s, x) - \Lambda_j(t, x)\| \geq M \|s - t\|, \quad \text{per ogni } s, t \in U_0. \quad (3.5)$$

Posto $\rho_x := d(x, \partial \Lambda_j(U_0, x))$, si può provare che $x \mapsto \rho_x$ è continua su $\overline{B_j}$, per cui, esiste $\rho > 0$ tale che $B_E(x, \rho) \subseteq \Lambda_j(U_0, x)$, per ogni $x \in K$ e per ogni $j = 1, \dots, p$.

PARTE II. Siano $x, y \in K$ tali che $\|x - y\| < \rho$ e supponiamo che $x \in B_j$, per qualche $j \in \{1, \dots, p\}$. In generale, dalla Def.1.16 delle mappe α_k , sappiamo che

$$d_X \left(z, \alpha_k(\Phi_t^{X_{j_1}}, \dots, \Phi_t^{X_{j_k}})(z) \right) \leq |t| (3 \cdot 2^{k-1} - 2). \quad (3.6)$$

Scegliamo $s \in U_0$ tale che $\Lambda_j(s, x) = y$. Osserviamo ora che le applicazioni E_{i, x_j}^* sono della forma $\alpha_k(\Phi_t^{X_{j_1}}, \dots, \Phi_t^{X_{j_k}})(z)$, con $t = s^{1/k}$. Definendo quindi

$$z_1 := E_{N, x_j}^*(s_N, x), \quad z_2 := E_{N-1, x_j}^*(s_{N-1}, z_1), \quad \dots, \quad z_{N-1} := E_{2, x_j}^*(s_2, z_{N-2})$$

si ha

$$d_X(z_i, z_{i+1}) = d_X \left(z_i, E_{N-i+1, x_j}^*(s_{N-i+1}, z_i) \right) \leq l |s_{N-i+1}|^{1/k}, \quad (3.7)$$

dove $l = l_{K, k} > 0$ uniforme in i, j e $x \in K$. Quindi,

$$d_X(x, y) \leq \sum_{i=1}^N d_X(x_i, x_{i+1}) \stackrel{(3.7)}{\leq} l \sum_{i=1}^N |s_{N-i+1}|^{1/k} \leq l N \|s\|^{1/k} \quad (3.8)$$

$$\stackrel{(3.5)}{\leq} \frac{l N}{M^{1/k}} \|\Lambda_j(s, x) - \Lambda_j(0, x)\|^{1/k} = \frac{l N}{M^{1/k}} \|x - y\|^{1/k}. \quad (3.9)$$

Ponendo $C_1 = C_1(\Omega, X, K) := \frac{l N}{M^{1/k}}$, abbiamo provato che, per ogni $x, y \in K$ con $\|x - y\| < \rho$, si ha $d_X(x, y) \leq C_1 \|x - y\|^{1/k}$.

Se $x, y \in K$ sono tali che $\|x - y\| \geq \rho$, posto $C_2 = C_2(\Omega, X, K) := \max \left(C_1, \frac{\text{diam}_X(K)}{\rho^{1/k}} \right)$, dove abbiamo indicato con $\text{diam}_X(K) := \sup_{x, y \in K} d_X(x, y)$, ne traiamo che

$$C_2 \|x - y\|^{1/k} \geq C_2 \rho^{1/k} \geq \text{diam}_X(K) \geq d_X(x, y).$$

Abbiamo dimostrato che, per ogni $x, y \in K$, $d_X(x, y) \leq C_2 \|x - y\|^{1/k}$.

Per il Lem.3.3, sappiamo che esiste una costante $c_{\Omega, X, K} > 0$ tale che $\|x - y\| \leq c d_X(x, y)$. Allora, posto $C = C_{\Omega, X, K} := \max(c, C_2)$, si ha l'enunciato. \square

Capitolo 4

Insiemi $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianti

Questo capitolo è dedicato allo studio degli insiemi $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianti (Def.4.4-4.15). In particolare, nella Sezione 4.1 andremo ad analizzare gli insiemi di propagazione tramite curve X -subunitarie e curve integrali a tratti di X , e dimostreremo che: per ogni punto $x_0 \in \Omega$, la chiusura dei punti raggiungibili in Ω , partendo da x_0 , tramite curve C^1 a tratti X -subunitarie per cui vale (2.6) per ogni t , è uguale alla chiusura dei punti raggiungibili in Ω , sempre partendo da x_0 , tramite curve integrali a tratti di $\pm X_1, \dots, \pm X_m$.

Nella Sezione 4.2, forniremo una interpretazione geometrica delle definizioni date nella Sezione 4.1, con particolare attenzione alla $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza di insiemi e alla tangenzialità dei c.v. ad un insieme.

4.1 Insiemi di propagazione

Iniziamo dando alcune notazioni. Per tutto il seguente capitolo, considereremo Ω un aperto di \mathbb{R}^N , non vuoto, e $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ una famiglia di c.v. su Ω . Denoteremo con $\|\cdot\|$ la norma Euclidea e con $B(x, r)$ la palla Euclidea di raggio r e centro $x \in \mathbb{R}^N$.

Indichiamo con $\mathcal{E}_\Omega(X)$ l'insieme formato da tutte le curve C^1 a tratti X -subunitarie in Ω per cui vale (2.6) **per ogni** t nel dominio di definizione della curva.

Fissato $x_0 \in \Omega$, definiamo i seguenti insiemi:

- $\mathcal{P}(x_0, \Omega)$ l'**insieme di $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -propagazione di x_0** , definito come l'insieme dei punti $y \in \Omega$ per i quali esiste una curva $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ in $\mathcal{E}_\Omega(X)$ tale che $\gamma(0) = x_0$

e $\gamma(T) = y$;

- $\mathcal{P}^*(x_0, \Omega)$ l'insieme di $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$ -propagazione di x_0 , definito come l'insieme dei punti $y \in \Omega$ per i quali esiste una curva $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ in $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(T) = y$;
- $F_1 := \overline{\mathcal{P}^*(x_0, \Omega)} \cap \Omega$ e $F_2 := \overline{\mathcal{P}(x_0, \Omega)} \cap \Omega$.

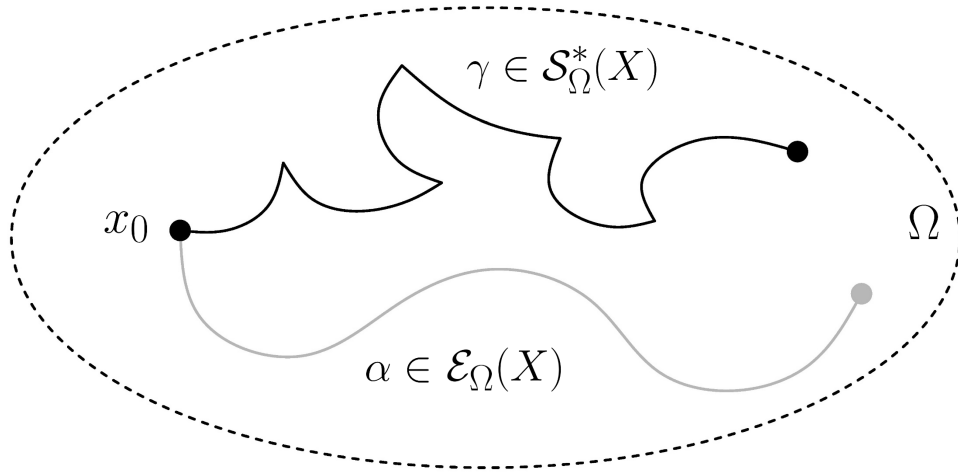


Figura 4.1: Propagazione tramite $\mathcal{E}_\Omega(X)$ e $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$ di x_0 .

Vogliamo provare che $F_1 = F_2$. Per fare ciò, diamo le seguenti importanti definizioni.

Definizione 4.1. Sia $F \subseteq \Omega$ un insieme e sia Z un c.v. su Ω . Diremo che F è **positivamente Z -invariante** se, per ogni $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ curva integrale di Z tale che $\gamma(0) \in F$, si ha $\gamma([0, T]) \subseteq F$.

Definizione 4.2. Sia $F \subseteq \Omega$ un insieme e sia Z un c.v. su Ω . Diremo che F è **Z -invariante** se F è positivamente invariante rispetto a Z e $-Z$.

Osservazione 4.3. Sia $F \subseteq \Omega$ un insieme e sia Z un c.v. su Ω . E' facile mostrare che F è Z -invariante se e solo se, per ogni $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ curva integrale di Z tale che $\gamma([a, b]) \cap F \neq \emptyset$, si ha $\gamma([a, b]) \subseteq F$.

Infatti, data $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ curva integrale di Z tale che $\gamma(t_0) \in F$, per qualche $t_0 \in [a, b]$, sfruttando la positiva Z -invarianza rispetto a $\gamma|_{[t_0, b]}$ e la positiva $(-Z)$ -invarianza

di F rispetto a $t \mapsto \gamma(-t)$ su $[-t_0, -a]$, si ha la condizione necessaria. Il viceversa è ovvio.

Definizione 4.4. Sia $F \subseteq \Omega$ un insieme. Diremo che F è $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -*invariante* se, per ogni curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ appartenente a $\mathcal{E}_\Omega(X)$ tale che $\gamma([a, b]) \cap F \neq \emptyset$, si ha $\gamma([a, b]) \subseteq F$.

Definizione 4.5. Sia $F \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω e sia $y \in \Omega \cap \partial F$. Diremo che un vettore $\nu \in \mathbb{R}^N$, non nullo, è *esternamente ortogonale a F in y* (abbreviato con *v.e.o.*) se

$$\overline{B(y + \nu, \|\nu\|)} \subseteq (\Omega \setminus F) \cup \{y\}. \quad (4.1)$$

In tal caso scriveremo $\nu \perp_y F$. Denotiamo con F^* l'insieme di tutti punti $y \in \Omega \cap \partial F$ tali che esiste almeno un v.e.o. ad F in y . (Fig.4.2)

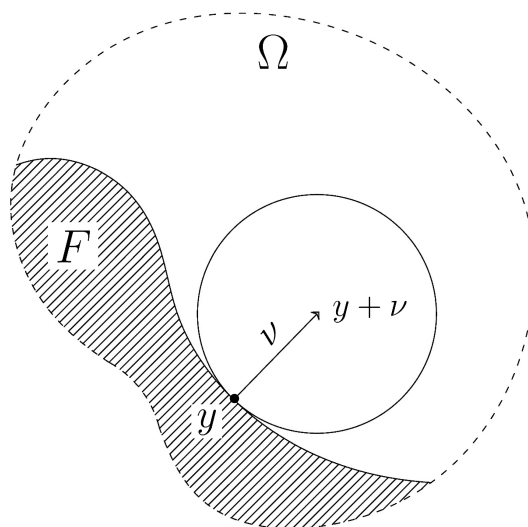


Figura 4.2: Vettore esternamente ortogonale a F in y

Osservazione 4.6. Dimostriamo il seguente importante risultato: Sia Ω un aperto connesso e sia F un insieme relativamente chiuso in Ω tale che $\emptyset \subsetneq F \subsetneq \Omega$. Allora F^* è denso in $\Omega \cap \partial F$.

Mostriamo inizialmente che $\Omega \cap \partial F \neq \emptyset$. Supponiamo per assurdo che $\Omega \cap \partial F = \emptyset$. Si avrebbe $\Omega = (\Omega \cap (\Omega \setminus \overline{F})) \cup (\Omega \cap \text{Int}(F))$. Posto $\Omega_1 := \Omega \cap (\Omega \setminus \overline{F})$ e $\Omega_2 := \Omega \cap \text{Int}(F)$, abbiamo che: $\Omega_1 \neq \emptyset$ poiché F è un insieme proprio relativamente chiuso in Ω ; se fosse $\Omega_2 = \emptyset$, allora $F = \partial F = \Omega \cap \partial F = \emptyset$, ma ciò è assurdo per le ipotesi fatte su F . Quindi $\Omega_2 \neq \emptyset$. Per cui Ω_1 e Ω_2 sono due insiemi aperti non vuoti disgiunti sottoinsiemi di Ω insieme connesso. Siamo arrivati ad un assurdo, dimostrando che $\Omega \cap \partial F \neq \emptyset$.

Fissiamo $z \in \Omega \cap \partial F$ e scegliamo $R_0 > 0$ tale che $B(z, R_0) \subseteq \Omega$. Per ogni $R \in]0, R_0[$, prendiamo $x_{z,R} \in B(z, R/2) \setminus F$ e $y_{z,R,x} \in \partial F \cap \overline{B(z, R/2)}$ tale che

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| \mid z \in \partial F\}. \quad (4.2)$$

Allora $\nu_{z,R,x,y} := (x - y)/2$ è v.e.o. a F in y . Infatti, se esistesse

$$w \in (F \cap B(y + \nu, \|\nu\|)) \setminus \{y\},$$

non sarebbe soddisfatta (4.2) con y . Quindi $y_R \in F^*$, per ogni $R > 0$ arbitrario.

Definizione 4.7. Sia $F \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω e sia Z un c.v. su Ω . Diremo che Z è **tangente a F** se vale

$$\langle Z(y), \nu \rangle = 0, \quad \forall y \in F^*, \forall \nu \perp_y F. \quad (4.3)$$

Enunciamo una caratterizzazione riguardante la positiva Z -invarianza di un insieme relativamente chiuso in Ω dovuta a J. M. Bony [3] e M. Nagumo [7].

Teorema 4.8 (Nagumo-Bony). Sia Z un c.v. di classe C^1 su Ω e sia $F \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω . Una condizione necessaria e sufficiente per la positiva Z -invarianza di F è la seguente:

$$\langle Z(y), \nu \rangle \leq 0, \quad \forall y \in F^*, \forall \nu \perp_y F. \quad (4.4)$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la necessità di (4.4) (per la sufficienza si veda [2]), poiché è ciò che useremo in seguito.

Sia $y \in F^*$, $\nu \perp_y F$ e sia $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ curva integrale di Z con $\gamma(0) = y$. Poiché F è positivamente Z -invariante, vale $\gamma([0, T]) \subseteq F$, e per la Def.4.5, vale (4.1). Da

cui $\gamma(t) \notin B(y + \nu, \|\nu\|)$ e quindi $\|\gamma(t) - (y + \nu)\|^2 \geq \|\nu\|^2$. Ma sappiamo anche che $\|\gamma(0) - (y + \nu)\|^2 = \|y - (y + \nu)\|^2 = \|\nu\|^2$, per cui la funzione $t \mapsto \|\gamma(t) - (y + \nu)\|^2$ (che è di classe C^1) ha un minimo in $t = 0$. Allora,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\|\gamma(t) - (y + \nu)\|^2 \right) = 2 \langle \dot{\gamma}(0), \gamma(0) - (y + \nu) \rangle \\ &= 2 \langle Z(y), y - (y + \nu) \rangle = -2 \langle Z(y), \nu \rangle. \end{aligned}$$

Quindi $\langle Z(y), \nu \rangle \leq 0$. □

Osservazione 4.9. Sia $F \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω e sia Z un c.v. su Ω . Come corollario immediato del Teo.4.8 abbiamo che F è Z -invariante se e solo se Z è tangente a F .

Riportiamo ora due risultati che ci serviranno nella dimostrazione del Teo.4.12.

Lemma 4.10. *Sia $g \in C^0([0, T], \mathbb{R})$ non negativa tale che $g(0) = 0$, e supponiamo che esista una costante $L \geq 0$ ed un insieme $E \subseteq]0, T]$ finito tale che*

$$\limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \leq L g(t), \quad \text{per ogni } t \in]0, T] \setminus E. \quad (4.5)$$

Allora $g \equiv 0$ su $[0, T]$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione nel caso di $E = \emptyset$, si veda il Lem.10.27 in [2]. Supponiamo allora che $E = \{t_1 < \dots < t_p\} \subseteq]0, T]$. Considerato l'intervallo $]0, t_1]$, grazie al Lem.10.27 in [2], sappiamo che $g \equiv 0$ su $[0, t_1 - \varepsilon]$, per ogni $0 < \varepsilon < t_1$. Quindi $g \equiv 0$ su $[0, t_1[$, che, per continuità di g , implica $g \equiv 0$ su $[0, t_1]$. Ora sappiamo che $g(t_1) = 0$, per cui si può procedere in modo analogo nell'intervallo $]t_1, t_2]$. Dopo un numero finito di passi, si ha l'enunciato. □

Lemma 4.11 (Disuguaglianza triangolare migliorata). *Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}^N$, si ha*

$$\|a - b\| \leq \|c - b\| + \left\langle \frac{c - a}{\|c - a\|}, \frac{b - a}{\|b - a\|} \right\rangle \cdot \|c - a\|. \quad (4.6)$$

Dimostriamo ora il risultato principale di questo capitolo, il quale fornisce una caratterizzazione della $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza di un insieme relativamente chiuso in Ω .

Teorema 4.12 (Tangenzialità e $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza). *Sia $F \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω e sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ una famiglia di c.v. di classe C^1 su Ω . Allora, F è X_i -invariante, per ogni $i = 1, \dots, m$, se e solo se F è $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invariante.*

Dimostrazione. Proviamo la condizione sufficiente. Per l'Oss.2.5.2, ogni $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ curva integrale di X_i , per ogni $i = 1, \dots, m$, è una curva in $\mathcal{E}_\Omega(X)$. Quindi, per l'ipotesi di $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza di F , se $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ è una curva integrale di X_i , per qualche $i \in \{1, \dots, m\}$, tale che $\gamma([a, b]) \cap F \neq \emptyset$, allora $\gamma([a, b]) \subseteq F$. Da cui, per l'Oss.4.3, si ha l'invarianza di F rispetto a X_i , per ogni $i = 1, \dots, m$.

Dimostriamo ora la condizione necessaria. Sia $x_0 \in F$ fissato e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva in $\mathcal{E}_\Omega(X)$ tale che $\gamma(t_0) = x_0$, per qualche $t_0 \in [a, b]$. Siano inoltre a_1, \dots, a_m funzioni reali definite in $[a, b]$ soddisfacenti (2.6) rispetto a γ , per ogni $t \in [a, b]$. Dobbiamo provare che $\gamma([a, b]) \subseteq F$. Dimostriamo innanzitutto che $\gamma([t_0, b]) \subseteq F$. A tal fine, poniamo $T := b - t_0$ e definiamo, per ogni $t \in [0, T]$, $\delta(t) := d_F(\gamma(t + t_0)) = \inf\{\|\xi - \gamma(t + t_0)\| : \xi \in F\}$ e osserviamo che $t \mapsto \delta(t)$ è una applicazione non negativa e continua su $[0, T]$. Dobbiamo provare quindi che $\delta \equiv 0$ su $[0, T]$. Per il Lem.4.10, è sufficiente trovare una costante $L \geq 0$ tale che

$$\Psi(t) := \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} \leq L \delta(t), \quad \text{per ogni } t \in]0, T] \setminus E, \quad (4.7)$$

con E un sottoinsieme finito di $]0, T]$. Sia V un intorno limitato di x_0 tale che $V \Subset \Omega$ e tale che $\gamma([t_0, b]) \subseteq V$. Definiamo

$$L := \sup_{x, z \in V, x \neq z} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\|X_i(x) - X_i(z)\|}{\|x - z\|} \right). \quad (4.8)$$

e osserviamo che L è ben posta poiché X_1, \dots, X_m sono c.v. di classe C^1 su Ω .

A meno di considerare ¹ un sottointervallo di $[0, T]$, possiamo supporre che $V = B(x_0, r)$ e che $B(x_0, 2r) \subseteq \Omega$.

Se $\delta(t) = 0$, poiché $h < 0$ e $\delta(t+h) \geq 0$, si ha

$$\Psi(t) = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} \leq 0 = L \delta(t).$$

¹Altrimenti dividiamo $[0, T]$ con una partizione di sottointervalli $[T_j, T_{j+1}]$ e dimostriamo che $\delta \equiv 0$ su ognuno di essi.

Supponiamo allora che $\delta(t) > 0$. Sia $(h_n)_n$ una successione in \mathbb{R}^- tale che $h_n \rightarrow 0$ e

$$\Psi(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta(t + h_n) - \delta(t)}{h_n}.$$

Poniamo $x := \gamma(t + t_0)$ e $x_n := \gamma(t + t_0 + h_n)$. Poiché $\gamma([t_0, b]) \subseteq B(x_0, r) \Subset \Omega$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $z_n \in F \cap B(x_0, r)$ tale che

$$\|x_n - z_n\| = d_F(x_n) = d_F(\gamma(t + t_0 + h_n)) = \delta(t + h_n). \quad (4.9)$$

A meno di considerare una sottosuccessione, possiamo supporre che $(z_n)_n$ converga a $z \in F \cap \overline{B(x_0, r)}$, e, poiché $x_n \rightarrow x$, facendo tendere $n \rightarrow +\infty$ in (4.9), traiamo

$$\|x - z\| = d_F(x) = d_F(\gamma(t + t_0)) = \delta(t). \quad (4.10)$$

Quindi $\|x - z\| = d_F(x)$. Definendo $\nu := (x - z)/2$, abbiamo che ν è v.e.o.a F in z . Infatti, se esistesse un punto $w \in (F \cap B(z + \nu, \|\nu\|)) \setminus \{z\}$, allora (4.10) non sarebbe soddisfatta da z . Come conseguenza, poiché $\|x - z\| = d_F(x)$ e $z_n \in F$, si ha

$$\delta(t + h_n) - \delta(t) = \|x_n - z_n\| - \|x - z\| \stackrel{(4.10)}{\geq} \|x_n - z_n\| - \|x - z_n\|. \quad (4.11)$$

Applicando il Lem.4.11 con $a = x, b = z_n$ e $c = x_n$, abbiamo

$$\|x - z_n\| - \|x_n - z_n\| \leq \left\langle \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \frac{z_n - x}{\|z_n - x\|} \right\rangle \cdot \|x_n - x\|. \quad (4.12)$$

Sostituendo ora (4.12) in (4.11), segue

$$\delta(t + h_n) - \delta(t) \geq -\frac{\langle x - z_n, x - x_n \rangle}{\|x - z_n\|} = \frac{\langle x - z_n, x_n - x \rangle}{\|x - z_n\|}.$$

Poniamo $E \subseteq [a, b]$ finito tale che $\gamma \in C^1([a, b] \setminus E, \Omega)$. Allora,

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta(t + h_n) - \delta(t)}{h_n} \stackrel{h_n < 0}{\leq} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \frac{x - z_n}{\|x - z_n\|}, \frac{x_n - x}{h_n} \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \frac{x - z_n}{\|x - z_n\|}, \frac{\gamma(t + t_0 + h_n) - \gamma(t + t_0)}{h_n} \right\rangle \stackrel{(*)}{=} \left\langle \frac{x - z}{\|x - z\|}, \dot{\gamma}(t + t_0) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{2\nu}{\|x - z\|}, \dot{\gamma}(t + t_0) \right\rangle, \end{aligned}$$

dove (\star) vale per ogni $t \in]0, T] \setminus E'$, dove $E' := \{t - t_0 \mid t \in E\}$ è *finito*. Per (2.6), abbiamo che $|a_i| \leq 1$, per ogni $i = 1, \dots, m$. Da cui,

$$\begin{aligned} \Psi(t) &\stackrel{(2.6)}{\leq} \frac{2}{\|x - z\|} \cdot \sum_{i=1}^m a_i(t + t_0) \langle X_i(\gamma(t + t_0)), \nu \rangle \leq \frac{2}{\|x - z\|} \cdot \sum_{i=1}^m \left| \langle X_i(x), \nu \rangle \right| \\ &= \frac{2}{\|x - z\|} \cdot \sum_{i=1}^m \left| \langle X_i(x) - X_i(z), \nu \rangle + \langle X_i(z), \nu \rangle \right|. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Per ipotesi sappiamo che F è X_i -invariante, per ogni $i = 1, \dots, m$, e per il Teo.4.8 ciò implica che $\langle X_i(z), \nu \rangle = 0$, per ogni $z \in F^*$ e ogni $\nu \perp_z F$. Possiamo quindi continuare la maggiorazione in (4.13) con

$$\begin{aligned} \Psi(t) &\leq \frac{2}{\|x - z\|} \cdot \sum_{i=1}^m \left| \langle X_i(x) - X_i(z), \nu \rangle \right| \leq \frac{2}{\|x - z\|} \|\nu\| \cdot \sum_{i=1}^m \|X_i(x) - X_i(z)\| \\ &\stackrel{\nu=(x-z)/2}{=} \sum_{i=1}^m \|X_i(x) - X_i(z)\| \leq L\|x - z\| \stackrel{(4.10)}{=} L\delta(t). \end{aligned}$$

Abbiamo provato che $\Psi(t) \leq L\delta(t)$, per ogni $t \in]0, T] \setminus E'$, ed essendo soddisfatte le ipotesi del Lem.4.10, otteniamo che $\delta \equiv 0$ su $[0, T]$, ossia che $\gamma(t) \in F$, per ogni $t \in [t_0, b]$.

Per dimostrare che $\gamma([a, t_0]) \subseteq F$, possiamo procedere in modo analogo, considerando la curva $t \mapsto \gamma(-t)$ definita su $[-t_0, -a]$ e definendo l'applicazione

$$t \mapsto \delta(t) := d_F(\gamma(t_0 - t)), \quad \text{per ogni } t \in [0, t_0 - a].$$

Questo conclude la dimostrazione. \square

Premettiamo al Teo.4.14 un'altra Proposizione:

Proposizione 4.13. *Sia $Y = \{Y_1, \dots, Y_p\}$ una famiglia di c.v. di classe C^1 su Ω e sia $y_0 \in \Omega$. Definiamo $\mathcal{R}(y_0, \Omega)$ l'insieme dei punti $y \in \Omega$ per i quali esiste $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ curva integrale a tratti di un c.v. in Y tale che $\gamma(0) = y_0$ e $\gamma(T) = y$. Allora $F := \overline{\mathcal{R}(y_0, \Omega)} \cap \Omega$ è positivamente Z -invariante, per ogni $Z \in Y$.*

Dimostrazione. Siano $y \in F$, $Z \in Y$ e $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ una curva integrale di Z tale che $\gamma(0) = y$. Per definizione di F , esiste una successione $(y_k)_k$ in $\mathcal{R}(y_0, \Omega)$ tale che $y_k \rightarrow y$. Per ogni $t \in [0, T]$, poiché γ è una curva integrale di Z su $[0, T]$, abbiamo

che $t \in D(Z, y)$. Siccome $y_k \rightarrow y$, per la semicontinuità degli intervalli di definizione della soluzione dipendente dal dato iniziale (Teo.1.2), esiste $k_0 = k_0(t) \in \mathbb{N}$ tale che $t \in D(Z, y_k)$, per ogni $k \geq k_0$.

Sia $z_k := \Phi_t^Z(y_k)$, per ogni $k \geq k_0$. Giacché $y_k \in \mathcal{R}(y_0, \Omega)$ e z_k è immagine di y_k attraverso la mappa flusso di Z (un c.v. di Y) al tempo t , allora $z_k \in \mathcal{R}(y_0, \Omega)$. Sappiamo anche che $\gamma(t) = \Phi_t^Z(y)$ per definizione, quindi, per la dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale (Teo.1.2), abbiamo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi_t^Z(y_k) = \Phi_t^Z(y) = \gamma(t).$$

Perciò, $\gamma(t) \in F$, per ogni $t \in [0, T]$, ossia F è positivamente Z -invariante. \square

Siamo ora pronti per dimostrare quanto dichiarato ad inizio capitolo.

Teorema 4.14. *Con le notazioni precedentemente definite, si ha $F_1 = F_2$.*

Dimostrazione. Per definizione, sappiamo che $\mathcal{P}^*(x_0, \Omega) \subseteq \mathcal{P}(x_0, \Omega)$, quindi $F_1 \subseteq F_2$. Proviamo allora che $F_2 \subseteq F_1$.

Considerando $Y = \tilde{X} := \{\pm X_1, \dots, \pm X_m\}$ nella Prop.4.13, si ha $F = F_1$ e risulta essere F_1 positivamente Z -invariante, per ogni $Z \in \tilde{X}$. Perciò F_1 è positivamente $\pm X_i$ -invariante, per ogni $i = 1, \dots, m$, ossia F_1 è X_i -invariante, per ogni $i = 1, \dots, m$, che, per il Teo.4.12, è equivalente alla $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza di F_1 .

Fissato $y \in F_2$, esiste una successione $(y_k)_k$ in $\mathcal{P}(x_0, \Omega)$ tale che $y_k \rightarrow y$, e per definizione di $\mathcal{P}(x_0, \Omega)$, x_0 è collegato con y_k tramite una curva in $\mathcal{E}_\Omega(X)$. Sappiamo anche che $x_0 \in F_1$, quindi, per la $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza di F_1 , $y_k \in F_1$. Dunque, si ha che $y \in \overline{F_1}$. Ma $y \in F_2 \subseteq \Omega$, perciò $y \in \overline{F_1} \cap \Omega = F_1$. Abbiamo provato che $F_2 \subseteq F_1$, completando la dimostrazione. \square

4.2 Interpretazione geometrica

In questa sezione daremo un'interpretazione geometrica delle Def.4.2 e Def.4.4, in relazione alle Def.4.1 e Def.4.15, utilizzando anche le caratterizzazioni del Teo.4.8 e Teo.4.12. Innanzitutto diamo la seguente definizione che è in analogia alla $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza come la positiva Z -invarianza lo è rispetto alla Z -invarianza.

Definizione 4.15. Sia $F \subseteq \Omega$ un insieme. Diremo che F è **positivamente $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invariante** se, per ogni curva $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ in $\mathcal{E}_\Omega(X)$ tale che $\gamma(0) \in F$, si ha che $\gamma([0, T]) \subseteq F$.

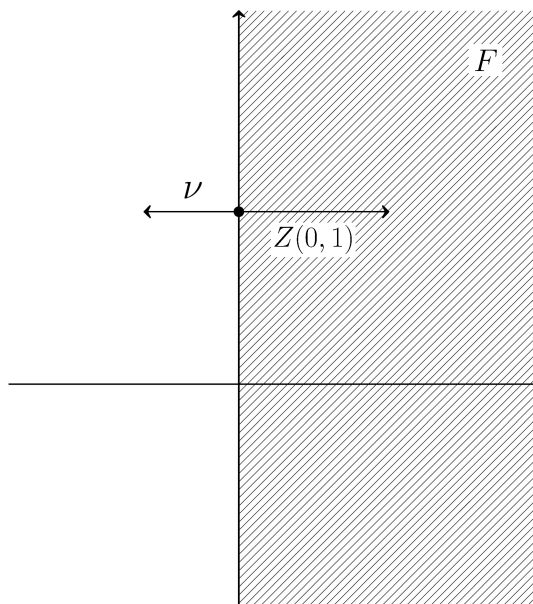


Figura 4.3: Controesempio dell'Oss.4.16.

Osservazione 4.16. Dalle Def.4.1 e Def.4.2, abbiamo che, se F è Z -invariante, allora F è positivamente Z -invariante. In generale, il viceversa è falso.

Consideriamo $Z := \partial_x$ c.v. su \mathbb{R}^2 e $F := [0, +\infty[\times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$. Per ogni $P_0 = (x_0, y_0)$, la curva integrale $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di Z , con dato iniziale P_0 al tempo $t = 0$, è data da $\gamma(t) = (t + x_0, y_0)$. Osservando che $t \mapsto \gamma_1(t)$ è crescente e $t \mapsto \gamma_2(t)$ è costante, segue che, se $P_0 \in F$, allora $\gamma(t) \in F$, per ogni $t \in [0, T]$, ossia F è positivamente Z -invariante.

Scelto il punto $P := (0, 1) \in F$, il vettore $\nu := (-1, 0) \in \mathbb{R}^2$ è v.e.o. a F in P . Quindi, se F fosse Z -invariante, per l'Oss.4.9, si dovrebbe avere $\langle Z(P), \nu \rangle = 0$. Ma $\langle Z(P), \nu \rangle = \langle (1, 0), (-1, 0) \rangle = -1 < 0$ (Fig.4.3). Per cui F non è Z -invariante.

Graficamente possiamo interpretare questo controesempio (e quindi anche la Def.4.2 rispetto alla Def.4.1) con l'Oss.4.9. Infatti, chiedere la Z -invarianza di F è equivalente a chiedere che l'angolo formato da ν (v.e.o. a F nel punto $y \in \Omega \cap \partial F$) e $Z(y)$ in y

sia un angolo retto, ossia che “ogni curva integrale di Z , passante per y , risulti tangente al bordo di F in y ” (Fig.4.4(a)). Mentre la positiva Z -invarianza di F è equivalente a richiedere solo che l'angolo formato da ν e $Z(y)$ in y sia un angolo ottuso (Fig.4.4(b)).

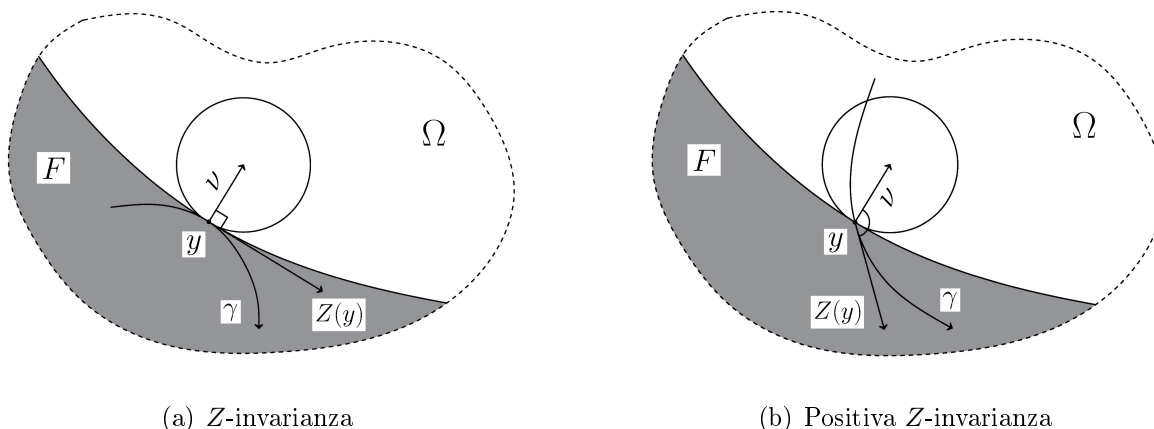


Figura 4.4

Similmente a quanto dimostrato nel Teo.4.12, ci si potrebbe chiedere se vale l'equivalenza tra la positiva X_i -invarianza, per ogni $i = 1, \dots, m$, e la positiva $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza. La risposta è negativa poiché si ha il seguente risultato.

Proposizione 4.17 (Caratterizzazione della $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza). *Sia $F \subseteq \Omega$ un insieme relativamente chiuso in Ω e sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ una famiglia di c.v. di classe C^1 su Ω . Sono equivalenti:*

- (i) F è $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invariante;
- (ii) F è positivamente $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invariante;
- (iii) F è X_i -invariante, per ogni $i = 1, \dots, m$;
- (iv) F è positivamente $\pm X_i$ -invariante, per ogni $i = 1, \dots, m$;
- (v) X_i è tangente a F , per ogni $i = 1, \dots, m$;

Dimostrazione. Le affermazioni (i) e (iii) sono equivalenti grazie al Teo.4.12; (iii) è equivalente a (v) per l'Oss.4.9 e (iii) è equivalente a (iv) per la sola Def.4.2. Il fatto che (i) implichi (ii) è ovvio. Resta da provare che (ii) implica (i).

Consideriamo $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ curva in $\mathcal{E}_\Omega(X)$ tale che $\gamma(t_0) \in F$, per qualche $t_0 \in [a, b]$. Poniamo $\alpha(t) := \gamma(-t+t_0)$ definita in $[0, t_0-a]$ e $\beta(t) := \gamma(t+t_0)$ definita in $[0, b-t_0]$. E' facile provare che α e β sono curve in $\mathcal{E}_\Omega(X)$ ed inoltre $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(t_0) \in F$. Quindi, per la positiva $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza di F , deduciamo che $\alpha([0, t_0-a]) \cup \beta([0, b-t_0]) \subseteq F$, ossia che F è $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invariante. \square

Osservazione 4.18. Come conseguenza immediata della Prop.4.17, abbiamo che se F è positivamente $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invariante, allora, F è positivamente X_i -invariante, per ogni $i = 1, \dots, m$. In generale, il viceversa è falso.

Infatti, grazie all'Oss.4.16, sappiamo che la positiva X_i -invarianza non implica la X_i -invarianza di F , per ogni $i = 1, \dots, m$. Ma, per la Prop.4.17, la X_i -invarianza, per ogni $i = 1, \dots, m$, è equivalente alla positiva $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza di F .

Osservazione 4.19. Sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ una famiglia di c.v. di classe C^1 su Ω tale che

$$\text{span}(X_1(x), \dots, X_m(x)) = \mathbb{R}^N, \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.14)$$

Supponiamo Ω connesso. Ci chiediamo quali siano gli insiemi $\emptyset \subsetneq F \subseteq \Omega$ relativamente chiusi in Ω ed $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianti. Dal Teo.4.12 sappiamo che F deve essere X_i -invariante, per ogni $i = 1, \dots, m$, ossia $\langle X_i(z), \nu \rangle = 0$, per ogni $z \in F^*$ e ogni $\nu \perp_z F$. Però, dato che vale (4.14), necessariamente ν deve essere nullo, per ogni $z \in F^*$. Se $F^* \neq \emptyset$, si avrebbe un assurdo per la Def.4.5 che richiede ν non nullo. Per cui restano due alternative: la prima è se F è un sottoinsieme proprio di Ω e $F^* = \emptyset$, ma ciò è in contraddizione con l'Oss.4.6; la seconda, l'unico caso possibile, è $F = \Omega$. (Se Ω non è connesso, allora avremo che F è unione delle componenti connesse di Ω intersecanti F).

Osservazione 4.20. Sia X un sistema di Hörmander su Ω connesso. Sia $\emptyset \subsetneq F \subseteq \Omega$ relativamente chiuso in Ω ed $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invariante. Dal Teo. 2.11, abbiamo che Ω è $\mathcal{S}_\Omega^*(X)$ -connesso, quindi, ogni punto di F può essere collegato ad un punto $P \in \Omega \setminus F$ tramite curve integrali a tratti di X . Per cui, dalla $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invarianza di F , deduciamo che $P \in F$, e quindi necessariamente $\Omega \setminus F = \emptyset$. Abbiamo provato che, dato X un sistema di Hörmander su Ω connesso, l'unico sottoinsieme di Ω $\mathcal{E}_\Omega(X)$ -invariante è Ω stesso.

Bibliografia

- [1] Agrachev, A. A., Barilari, D., and Boscain, U. (2020). *A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry*, (Cambridge University Press, Cambridge).
- [2] Biagi, S. and Bonfiglioli, A. (2019). *An Introduction to the Geometrical Analysis of Vector Fields with Applications to Maximum Principles and Lie Groups* (World Scientific).
- [3] Bony, J. M. (1969). *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 19, pp. 277 – 304.
- [4] Carathéodory, C. (1909). *Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik*, Math. Ann. 67, pp. 355 – 386.
- [5] Chow, W.-L. (1939). *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Ann. 117, pp. 98 – 105.
- [6] Hermann, R. (1968). *Differential geometry and calculus of variations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol.49 (Academic Press, New York - London).
- [7] Nagumo, M. (1942). *Über das Randwertproblem der nicht linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 24, pp. 845 – 851.
- [8] Rashewskii, P. K. (1938). *On the connectability of two arbitrary points of a totally nonholonomic space by an admissible curve*, Uchen. Zap. Mosk. Ped. Inst. Ser. Fiz.-Mat. Nauk 3, pp. 83 – 94.

Ringraziamenti

In questa sezione voglio dedicare un ringraziamento a tutti coloro che mi hanno accompagnato durante il mio percorso universitario.

In primo luogo, voglio ringraziare i miei genitori, i quali mi hanno dato la possibilità di intraprendere questo bellissimo cammino e mi hanno sempre sostenuto nei periodi più difficili.

Voglio ringraziare infinitamente il Prof. Bonfiglioli per avermi condotto in questi tre anni di studi nell'immenso mondo dell'Analisi Matematica, per avermi trasmesso la passione per la Matematica in generale e, non di meno, per avermi guidato ed aiutato a redigere questa Tesi di Laurea.

Ringrazio il mio collega ed amico Alessio per tutti i momenti trascorsi ad analizzare insieme tantissimi Teoremi, Lemmi e controesempi di qualsiasi ambito matematico, producendo nuove idee di interesse intrinseco.

Ringrazio inoltre la mia collega ed amica Maria Giulia per tutta la vicinanza e il sostegno datomi in questi anni.

Come ultima, ma non per importanza, ringrazio la mia gattina Briciola per avermi tenuto compagnia durante lo studio e non solo.