

Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Magnitudini, colori e sistemi fotometrici

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Marcella Brusa

Presentata da:
Guaita
Gianmarco

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Indice	I
1. Introduzione Storica	3
1.1. Ipparco [Nicea 200 a. C. - 110 a. C.]	3
1.2. Pogson(1829-1881)	4
2. Presente	4
3. Onde Elettromagnetiche	5
4. Colore	9
4.1. Classi Spettrali	9
4.2. Emissione di corpo nero	10
4.3. Indice di colore	12
5. Sistemi fotometrici	13
5.1. Occhio umano	13
5.2. CCD	14
Bibliografia	16

1 Introduzione Storica

1.1 Ipparco [Nicea 200 a. C. - 110 a. C.]

La luminosità stellare si può misurare attraverso un sistema di magnitudini inventato per la prima volta dal filosofo greco Ipparco nel 135 a. C. costruendo il primo catalogo stellare della storia usando come unico sistema fotometrico l'occhio umano. Impossibile dire con esattezza il numero delle stelle catalogate, poiché il catalogo stesso è stato perduto nelle sabbie del tempo, ma si stima che egli arrivò ad elencarne 1097. Tolomeo, un altro filosofo-astronomo, nel descrivere la creazione di tale catalogo asserisce egli lo avesse cominciato per via della comparsa di una "Nova" stella. La comparsa improvvisa e la sua luminosità rendono possibile abbia visto una nova secondo la definizione in campo astrofisico odierno.



Rappresentazione artistica di una Nova

Questo distrusse uno dei principi base della allora nascente filosofia greca naturalistica: ossia che le stelle, e più in generale la volta celeste, fossero immutabili ed eterne rendendo necessaria, per la mentalità del periodo, la loro catalogazione. Ovviamente la catalogazione fu molto soggettiva data la mancanza delle basi matematiche necessarie per quantificare sia la misura della grandezza sia la misura dello strumento. Per questo motivo, e anche

per una mancanza di strumenti piú efficaci i cataloghi successivi nel tempo utilizzarono la stessa scala ma variarono i valori di alcune stelle. La scelta dei numeri iniziali e finali della scala, 1 per le stelle di luminosit  maggiore e 6 per quelle minori,   sospettosamente simile a quella che si avrebbe prendendo i valori usati nelle tavole caldee, ossia del periodo babilonese, di molto antecedenti al filosofo. Tuttavia occorre rilevare che   dubbio che queste fossero state scoperte all'epoca, quindi si potrebbe presumere una coincidenza dovuta alla scelta di un numero con cui calcolare facilmente.

1.2 Pogson(1829-1881)

Nel 1850 l'astronomo inglese Norman Pogson prese la scala da 1 a 6 di Ipparco e la rese quantitativa e analitica usando la celeberrima formula

$$m_1 - m_2 = -cost * \log \frac{f_1}{f_2} \quad (1)$$

mantenendo alcune caratteristiche arbitrarie scelte del filosofo tra queste le 2 piú importanti sono la scala di tipo logaritmica per schematizzare matematicamente la risposta dell'occhio alla luminosit  e l'utilizzo di numeri crescenti per oggetti astronomici di luminosit  decrescente. Come si pu  facilmente notare dalla formula 1 si estende la scala anche ai numeri negativi mentre la magnitudine 0 corrisponde alla stella Vega scelta in maniera convenzionale. Queste particolari scelte arbitrarie sono state ottenute ponendo $cost = 2.5$

2 Presente

Attualmente con il termine magnitudine si indica la misura della quantit  di luce che viene rilevata da un qualsiasi corpo celeste. Questa grandezza   dipendente da molti fattori come:

1. la distanza del corpo celeste
2. la λ a cui si sta svolgendo la misurazione
 - la sua temperatura superficiale
 - la presenza di materiale assorbente interposto lungo la linea di vista
3. le dimensioni dell'oggetto
4. la sua velocit  rispetto all'osservatore

Infatti prima che la magnitudine diventasse una grandezza misurabile indipendentemente dalle caratteristiche dell'oggetto sopracitate si é dovuta creare la Magnitudine Apparente che era spesso molto diversa da quella propria dovuta alle sole caratteristiche fisiche del corpo che generava la luce del corpo in analisi. La dicitura apparente dovuta al fatto che ci si riferisce alle luminosità delle stelle così come appaiono viste dalla superficie terrestre.

La magnitudine assoluta é per definizione la misura della luminosità che avrebbe un oggetto se fosse a una distanza di 10 Parsec dalla Terra. La relazione che lega la magnitudine apparente (m) a quella assoluta (M) é:

$$M = m + 5 - 5\log(d) \quad (2)$$

dove d é la distanza della stella in Parsec. La relazione é stata sviluppata unendo una enorme mole di osservazioni in cui si era riusciti a determinare il flusso o la luminosità tra questi cito per importanza le cefeidi che hanno una relazione tra magnitudine assoluta (M) e temperatura (T). Inoltre dalle definizioni di 1 e di 2 si ricava una ulteriore legge che definisce il modulo di distanza

$$m - M = -2,5\log\frac{f}{F} = -2,5\log\frac{(\frac{D}{d})^2 F}{F} = 5\log\frac{d}{D}$$

dove D la distanza convenzionale della magnitudine assoluta e d la distanza in Parsec.

Le magnitudini dipendono spesso dalla λ sia per motivi legati ai corpi celesti sia per motivi legati agli assorbimenti del materiale lungo la linea di vista per cui si é sentita la necessità di una misura maggiormente specifica di modo che si potesse calcolare l'estinzione della luce (A) che permette di ottenere informazioni preziose sui materiali che si trovano in mezzo alle osservazioni e quindi anche a capire meglio la composizione di galassie e sistemi stellari.

3 Onde Elettromagnetiche

La luce ha un comportamento che rientra nelle definizioni sia di onda sia di particella. Infatti innumerevoli esperimenti hanno dimostrato che la luce compie diffrazione (Grimaldi, Bologna 1665) e, dissipando ogni dubbio sulla natura ondulatoria, interferenza (Young, 1801) infine lavorando sulle equazioni dell'elettromagnetismo

Maxwell's Equations	Maxwell's Equations
Differential form	Integral form
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$

Maxwell dimostró che cariche accelerate possono dare origine a perturbazioni ondulatorie di campi Elettrici e Magnetici la cui velocità di propagazione coincide perfettamente con i risultati ottenuti storicamente per la velocità della luce. Infatti la dimostrazione segue: Per semplicità ci limitiamo a soluzioni in cui il campo elettrico ha solo componente diretta lungo l'asse y e il campo magnetico solo lungo z quindi si ha

$$\vec{E} = E_y \hat{y}$$

$$\vec{B} = B_z \hat{z}$$

Poiché E_x, E_z, B_x, B_y sono nulli, le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

mentre si ha che

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

per il campo magnetico si ha

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$$

e

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Deriviamo rispetto alla coordinata x ambo i membri della prima equazione e deriviamo rispetto a t entrambi i membri della seconda ottenendo

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

e

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

ma per il teorema di Schwarz

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x}$$

quindi si ha che

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

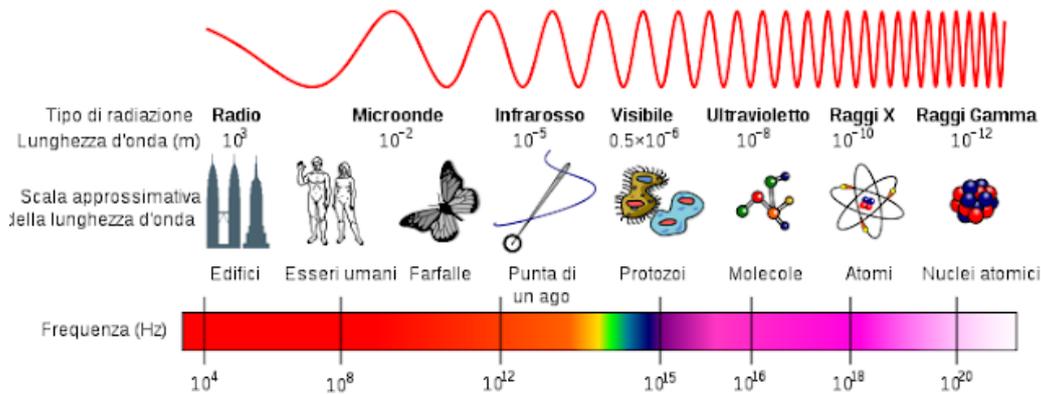
e la dimostrazione si può ripetere anche per il campo magnetico B con un risultato analogo. Entrambe le equazioni soddisfano perfettamente l'equazione generale delle onde di D'Alembert

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

con

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

e usando i loro valori sperimentali si ottiene c . Il fatto che sia B che E , si possono usare i vettori generici in quanto cambiando l'orientazione dei campi cambia solo il percorso della dimostrazione ma essa rimane valida e quindi non si perde di generalità, soddisfano tale equazione ha portato Maxwell a usare le onde trasversali invece di quelle piane o sferiche. Questo dimostra che le onde elettromagnetiche sono onde piane con variazione dei 2 campi sui piani \perp alla direzione di propagazione. All'interno dello spettro le onde elettromagnetiche sono classificate in base alla loro lunghezza d'onda λ , in modo analogo, alla loro frequenza f . Come per ogni onda la lunghezza d'onda λ e la frequenza sono legate dalla relazione: $c = \lambda f$.



Per quanto riguarda i comportamenti di tipo corpuscolare sono stati dimostrati dalla teorizzazione dell'effetto fotoelettrico (Einstein, 1905) e dell'effetto Compton. L'effetto fotoelettrico prevede che una radiazione di una certa $\nu > \nu_0$, con ν_0 che dipende dal materiale, incida su un metallo e per questo motivo il metallo emette elettroni. Ovviamente tali elettroni possono essere interpretati come un segnale elettrico da una strumentazione apposita. Empiricamente si nota che:

1. per valori maggiori di ν_0 si ha proporzionalità tra frequenza ed energia cinetica: $\varepsilon_c \propto (\nu - \nu_0)$, cioè l'energia degli elettroni emessi dipende dalla frequenza e non dall'intensità I della radiazione come ci si aspetterebbe in una trattazione ondulatoria
2. il numero N di elettroni emessi è proporzionale all'intensità della radiazione: $N \propto I$ ovviamente sempre a frequenza $\nu \geq \nu_0$
3. il tempo intercorrente tra l'inizio dell'illuminazione e l'inizio dellemissioni di elettroni è indipendente dall'intensità della radiazione e sempre inferiore a $10^{-9}s$

Per spiegarlo in maniera completa serve un'assunzione della meccanica quantistica ossia che le "particelle", dette fotoni, da cui è composta la luce trasmettano una quantità discreta di Energia $\varepsilon = h\nu$ dipendente dalla frequenza mentre nella meccanica classica veniva supposto che l'Energia fosse continua. Ovviamente oltre a questo per descrivere l'energia cinetica e l'impulso di un oggetto che viaggia a c serve la meccanica relativistica quindi invece di avere $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ si ha l'espressione analitica $\varepsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ che nel caso dei fotoni si riduce a $\varepsilon = pc$ in quanto hanno massa a riposo nulla. Questo assieme alla relazione di Planck fornisce, per l'energia e l'impulso di un fotone: $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ e

$\varepsilon = h\nu$ quindi ogni colore ha il suo tipo di fotoni, tutti uguali tra loro, ma con contenuto energetico diverso da quelli di un'altra frequenza. Con questa nuova ipotesi, le osservazioni sperimentali sull'effetto fotoelettrico vengono spiegate egregiamente:

1. per staccare un elettrone da un atomo occorre una energia ε_0 ergo se un fotone si scontra con un elettrone di un atomo, si possono verificare due casi
 - $h\nu < \varepsilon_0$: l'energia fornita é insufficiente e l'elettrone rimane nell'atomo
 - $h\nu > \varepsilon_0 \equiv h\nu_0$: l'energia ceduta all'elettrone viene utilizzata in parte per staccarlo dall'atomo e in parte viene ceduta all'elettrone medesimo sotto forma di energia cinetica $\varepsilon_c = h(\nu - \nu_0)$
2. un maggior numero di fotoni, cioé maggiore intensità di radiazione, aumenta la probabilità di scontro e quindi il numero di elettroni emessi quindi $N \propto I$ ovviamente sempre a frequenza $\nu \geq \nu_0$
3. l'effetto di emissione é praticamente istantaneo: nel momento in cui si comincia a bombardare il metallo con fotoni, essi si scontrano con elettroni e iniziano a estrarli.

4 Colore

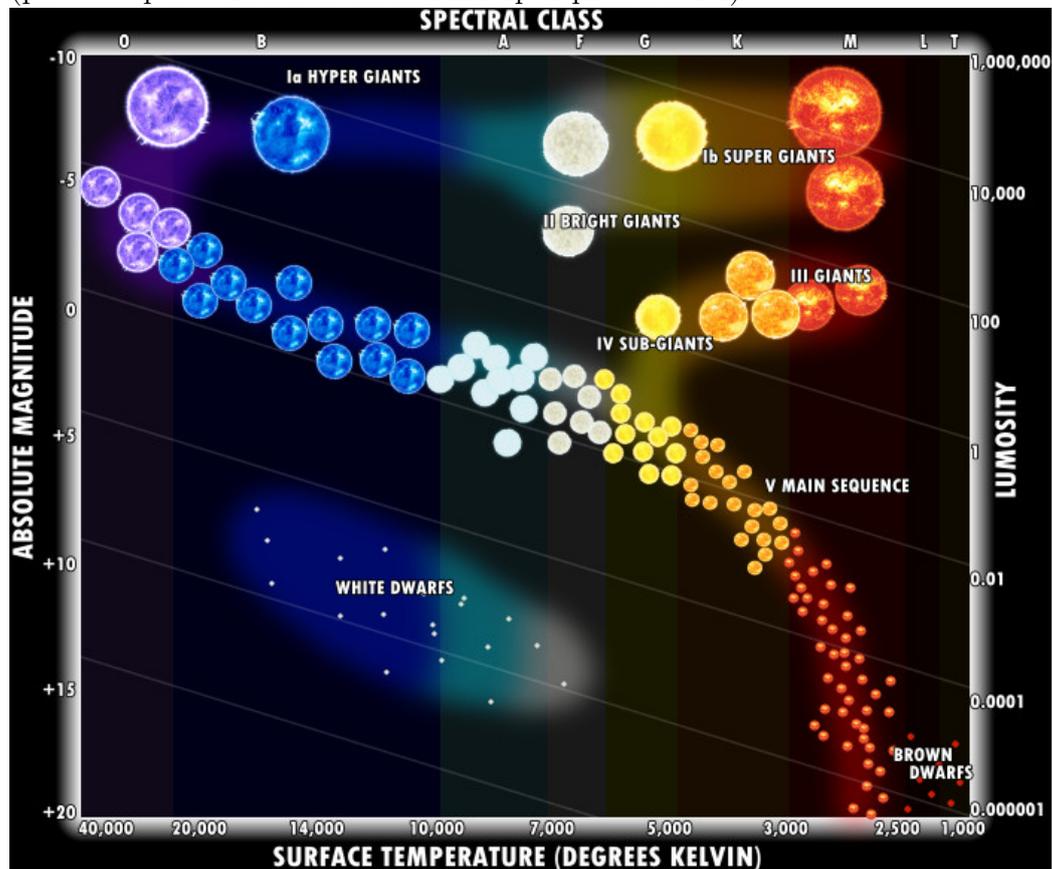
Ogni colore trasmette una quantità di energia dipendente dalla ν dei fotoni.

4.1 Classi spettrali

Quando un fascio di luce bianca viene fatto passare attraverso un prisma o un altro mezzo dispersivo, la luce viene scomposta nelle varie lunghezze d'onda che lo costituiscono e prende il nome di spettro della sorgente di luce. Lo spettro della luce fornisce molte informazioni sulla composizione chimica della sorgente e sul suo stato fisico (temperatura, densità e grado di ionizzazione). In astrofisica una stella viene caratterizzata da un "colore" e da una "temperatura superficiale" a seconda della forma del suo spettro. Il colore é determinato dalla regione dello spettro nella quale l'intensità della luce é massima; le stelle hanno temperature superficiali da $\sim 10^3 K$ a $\sim 10^5 K$. Il Sole emette al massimo di intensità nella regione gialla della banda ottica, perciò la sua temperatura superficiale é stata stabilita in 5780 K.

Le classi spettrali sono: O, B, A, F, G, K, M, S, R, N. Si differenziano in base alla temperatura decrescente da $> 3 * 10^4$ corrispondente alla classe O

fino a 2000 – 3000K, delle classi M, S, R e N. Ognuno di questi tipi spettrali é a sua volta suddiviso in sottoclassi, contrassegnate con numeri da 0 a 9 (per esempio il Sole é una stella di tipo spettrale G5).



Le varie Classi Spettrali nel diagramma **H-R**

Il colore di un oggetto é correlato alla variazione del flusso in funzione della lunghezza d'onda ma la classificazione spettrale é soprattutto collegata allo spettro di corpo nero che lega emissione e temperatura. Il corpo nero é un'approssimazione teorica dei corpi e ha come definizione: oggetto che assorbe tutta la radiazione incidente senza rifletterla.

Sebbene sia un'estensione teorica, si puó dimostrare che tutti gli oggetti otticamente spessi, ossia gli oggetti che assorbono la radiazione che li attraversa, e soprattutto le stelle hanno un'emissione che ben approssima l'emissione teorizzata per un corpo nero.

4.2 Emissione di Corpo Nero

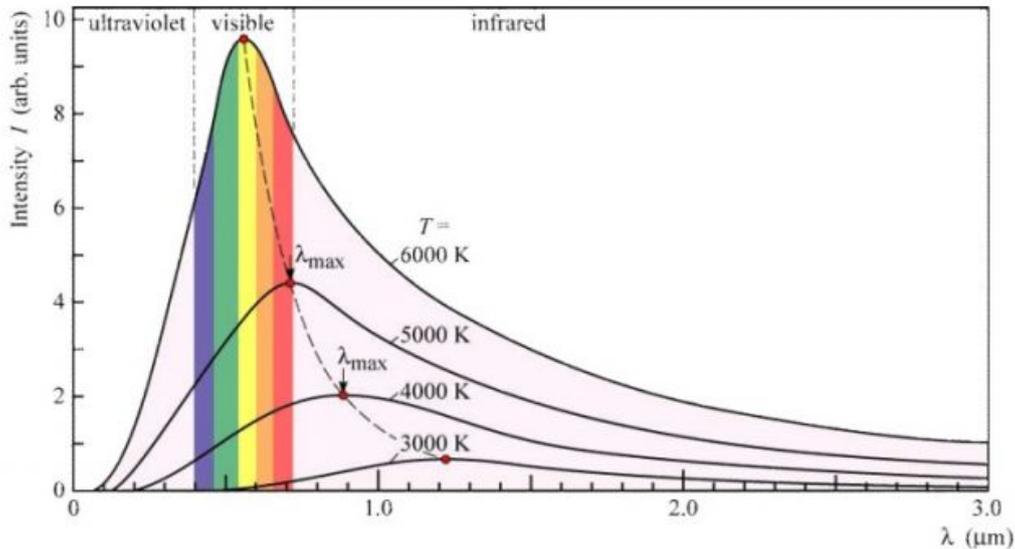
La legge, detta di Planck o Planckiana dal suo scopritore, si scrive come:

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 [e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1]} \quad (3)$$

oppure in funzione della frequenza

$$B_f(T) = \frac{2hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \quad (4)$$

queste funzioni hanno un andamento



come mostrato in figura al picco si ha il massimo dell'emissione e tale picco ne definisce il colore dominante, ovviamente tramite la λ , del corpo. Il picco si sposta seguendo un'altra legge molto importante chiamata legge dello spostamento di Wien che lega la posizione di tale picco alla temperatura (T):

$$\lambda_{max} = \frac{\alpha}{T}$$

Per dimostrare la legge di corpo nero e quella di Wien é stata fondamentale l'assunzione della meccanica quantistica mostrata per l'effetto fotoelettrico $\varepsilon = h\nu$ in quanto evita la cosiddetta "catastrofe dell'ultravioletto" prevista dalle assunzioni della meccanica classica, ossia la funzione inizialmente adottata $(\lambda) = costante \frac{T}{\lambda^4}$ diverge alle piccole λ dando Energia infinita per raggi X e ultravioletto mentre i dati erano indubbiamente abbastanza elevati ma comunque finiti.

Nella realtà le stelle sono una sovrapposizione di tanti spettri di corpo nero in quanto hanno una struttura a gusci concentrici di diverse temperature, ma lo spettro che si osserva viene dalla zona della stella detta fotosfera e la sua T viene presa per definire il colore della stella.

4.3 Indice di Colore

Ogni astro è caratterizzato dal suo indice di colore (B-V), un parametro che esprime la differenza tra la magnitudine bolometrica e visuale, indicando così il colore della stella. Supponendo ovviamente di avere un sistema fotometrico con diverse bande di filtri a lunghezze d'onda differenti. Quale informazione otteniamo da questi indici di colore? Dalla formula 1 si mostra come una differenza di magnitudini corrisponda ad un rapporto di flusso. Avendo la definizione di luminosità

$$L_\lambda = 4\pi R^2 f_\lambda$$

si nota come un rapporto tra i flussi permette di calcolare anche un rapporto tra le distanze e infatti uno dei tanti metodi per calcolare le distanze nell'universo è quello delle **Candele Standard** in cui L è nota con grande precisione. Le candele standard più comunemente usate sono le **Supernove Ia** ossia stelle, in un sistema binario, alle fasi finali della loro vita con una massa che non ha oltrepassato la soglia critica di 1.38 masse solari, calcolata dal matematico indiano Subrahmanyan Chandrasekhar[1910-1955], ma che la supera assorbendo materiale dalla compagna di sistema. Queste stelle terminate l'**H** non riescono a contrastare la forza di gravità che tende a farle contrarre e vanno incontro a una fase di collasso gravitazionale che si ferma a uno stato di materia degenerata estremamente densa ed esotica, in tale momento sono dette nane bianche. Dopo aver assorbito abbastanza da superare il limite di Chandrasekhar le reazioni di fusione nucleare riprendono in maniera fortemente esplosiva ed eiettando vari strati creando effettivamente la supernova Ia.

5 Sistemi fotometrici

In astronomia si definisce sistema fotometrico un insieme di bande di filtri con una sensibilità nota alla radiazione incidente la quale dipende solitamente dal sistema ottico, dai rilevatori e dai filtri utilizzati. Per ciascun sistema fotometrico é presa come standard una stella, il cui indice di colore é preso come valore 0. Prendendo la differenza in magnitudine misurata in due bande differenti, possiamo formare un colore, o indice di colore. Il sistema fotometrico usato oggi é basato sul sistema UBV (Ultravioletto- Blu-Visibile) di Johnson & Morgan (1953)

Le lunghezze d'onda centrali dei filtri sono, pressappoco, le seguenti:

1. $\lambda_U = 3600 \text{ \AA}$
2. $\lambda_B = 4400 \text{ \AA}$
3. $\lambda_V = 5500 \text{ \AA}$

La banda passante é di circa 1000 \AA per ciascun filtro nel sistema a banda larga UBV. Ad esempio, il filtro B lascia passare la luce compresa tra 3900 \AA e 4900 \AA . Un altro sistema usato é quello a cinque colori, il sistema UBVRI (dove R sta per rosso e I sta per infrarosso).

5.1 Occhio umano

Uno dei sistemi di rilevamento della radiazione luminosa che abbiamo fin dalla nascita si basa su un sistema di rilevatori naturali: coni e bastoncelli.

I coni sono i rilevatori per momenti di luce intensa e hanno una conformazione tale da poter distinguere le varie lunghezze d'onda ovviamente dando origine ai colori che vediamo. I bastoncelli invece sono per le situazioni di luce scarsa e sono piú grossi per poter raccogliere la maggior quantità di luce possibile ma questo non permette di distinguere i colori. Inoltre abbiamo la pupilla che funziona alla stregua di un diaframma per regolare la quantità di luce entrante nel sistema fotometrico. Visto quanto scritto sui rilevatori di cui siamo dotati naturalmente come mai ci preoccupiamo di costruire telescopi forniti e li equipaggiamo con i sopracitati rivelatori? Ovviamente perché:

1. i telescopi raccolgono molta piú luce delle nostre pupille;
2. Incrementano notevolmente la risoluzione angolare, permettendo di percepire i piú fini dettagli;

3. i rivelatori collegati ai telescopi ci consentono di indagare in quegli intervalli di lunghezza d'onda non visibili dall'occhio umano ossia praticamente tutto lo spettro delle onde elettromagnetiche;
4. i rivelatori consentono una registrazione continua per non perdersi alcun fatto o osservazione di fenomeni di breve o brevissima durata.

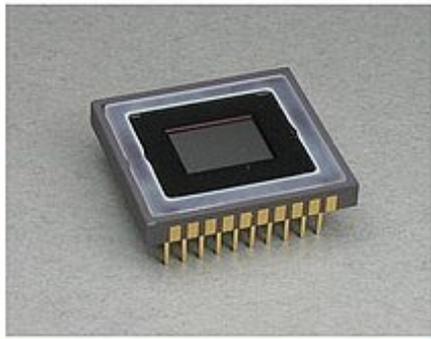
Per quanto concerne la raccolta della luce la grandezza del telescopio permette la raccolta di una maggior quantità di luce che permette di osservare e di studiare oggetti più deboli oppure effettuare misurazioni più precise su oggetti più luminosi. Telescopi più grandi possiedono una migliore risoluzione angolare, consentendo di rendere visibili dettagli più fini, sebbene il pieno potere risolutivo, di norma, non è raggiungibile a causa degli effetti deleteri dell'atmosfera, che sparpaglia la luce proveniente dagli oggetti celesti cosa che bisogna tenere fortemente in conto per qualsiasi osservazione svolta a terra. Per non parlare del fatto che l'atmosfera ha una variabilità elevata su scale di tempo brevi quindi talvolta bisogna ricalibrare gli strumenti durante le osservazioni.

5.2 CCD

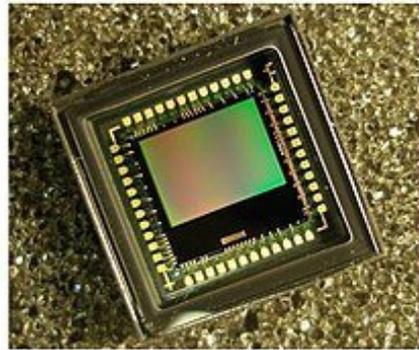
Un CCD (Dispositivo ad accoppiamento di carica) è un chip di **Si** sensibile alla luce elettricamente diviso in un gran numero di parti indipendenti chiamati pixel (contrazione di picture element). I CCD oggi in commercio hanno una superficie sensibile composta da una matrice da 512 x 512 (262.144) fino a 4096 x 4096 (16.777.216) singoli pixel, e la cui dimensione lineare varia da 0,5 fino a 10 cm (le dimensioni tipiche di ciascun pixel va dai 10 ai 30 μm di lato). Per poter funzionare sfruttano l'effetto fotoelettrico spiegato nella sezione sulle onde elettromagnetiche. Il risultato è un'immagine digitale, che consiste di una matrice di numeri, uno per pixel, ciascun numero è legato direttamente alla quantità di luce che incide su quel pixel. Naturalmente, una delle comodità del CCD è che l'immagine è rapidamente manipolabile, misurabile e analizzabile al computer. Un CCD rileva singoli fotoni, ma perfino il migliore dei CCD non rivelerà ogni singolo fotone che andrà a colpirlo. La frazione di fotoni incidenti su di un CCD e che sono effettivamente rilevati è chiamata efficienza quantica (QE) ed è di solito espressa in forma percentuale.

Allora, possiamo ritenere che i numeri letti sul CCD siano il numero effettivo dei fotoni che incidono su ciascun pixel? Ebbene no. Parte del numero è uno scostamento (offset) chiamato bias e parte può essere dovuta alla dark current (corrente di buio) infatti se eseguiamo un'integrazione del CCD per un qualche tempo SENZA che la luce lo colpisca, ci sarà un

segnale (e piú precisamente un rumore associato a quel segnale) causato dalla semplice eccitazione termica degli elettroni nel CCD che sono approssimabili ai fotoni emessi da un corpo nero a 300 K quindi con il picco nell'infrarosso. Questo viene chiamato segnale di buio (o semplicemente dark). Il dark é molto sensibile alla temperatura infatti come si nota dalla 3 o anche dalla 4 una minore temperatura riduce il numero di fotoni quindi si ha anche un minore dark, per questo motivo i CCD utilizzati in astronomia sono raffreddati (spesso alla temperatura dell'azoto liquido). Anche raffreddati,alcuni CCD hanno una corrente di buio non trascurabile. Questa infatti deve essere misurata e sottratta dall'immagine



Capteur CCD



Capteur CMOS

Bibliografia

- [1] **An Introduction to Astronomical Photometry Using CCDs**, di W. Romanishin, University of Oklahoma
- [2] G. Romano *“Introduzione all'Astronomia”* Muzzio, 1985
- [3] <https://gbm.difa.unibo.it/paola/didattica/AA2019-2020/SdA/Lezione10.pdf>
- [4] Ostlie Dale A. and Carroll Bradley W. (1996), *An Introduction to Modern Stellar Astrophysics*, Addison-Wesley Publishing Company, USA
- [5] www.media.inaf.it
- [6] Dispense e slide corso istituzioni fisica teorica anno 2021/2022
- [7] Dispense e slide corso astronomia 2021/2022
- [8] Dispense e slide corso Fisica II 2020/2021