

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Fisica dell'Accrescimento

Tesi di Laurea

Relatrice:

**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Presentata da:

Luca Fiorino

Anno Accademico 2021-2022

*"I have no special talent.
I am only passionately curious."
- Albert Einstein*

Abstract

L'accrescimento è un fenomeno di assoluta rilevanza in astrofisica per il fatto di essere uno dei meccanismi di produzione energetica più efficienti conosciuti. Inoltre esso riveste un ruolo fondamentale sia nella caratterizzazione di oggetti astronomici noti come AGN, che per la descrizione di sistemi binari in cui una stella è nella condizione di trasferire parte della propria massa alla compagna.

Nell'**Introduzione** è messa in risalto l'elevata efficienza del processo di accrescimento, soprattutto se confrontata con una delle reazioni termonucleari più celebri come la catena protone-protone. Sono poi mostrati alcuni aspetti qualitativi riguardanti gli AGN e il modo in cui alcune loro particolarità possono essere giustificate proprio grazie ai fenomeni di accrescimento.

Il **Capitolo 2** è dedicato alla determinazione della luminosità di Eddington, ovvero quel valore limite di luminosità che un corpo in accrescimento può raggiungere e che, se superato, determina l'innescarsi di processi che portano l'accrescimento a rallentare. All'interno del **Capitolo 3** è analizzato il modello di Bondi per l'accrescimento di un oggetto compatto immerso in una distribuzione infinita di gas. Il modello preso in considerazione rappresenta la versione più semplice del modello di Bondi, che fornisce una soluzione idrodinamica e che, tuttavia, presenta ipotesi molto stringenti. Per tale motivo a fine capitolo è stato aggiunto un primo sguardo al problema di Bondi in presenza di *electron scattering*, andando a vedere il modo in cui questo influenza i risultati classici precedentemente ottenuti.

Infine, nel **Capitolo 4** è introdotto il problema dell'accrescimento all'interno di sistemi binari in modo da mettere in luce i principali meccanismi che possono dare vita all'accrescimento e le ipotesi sotto le quali questi possono avvenire.

Indice

Abstract	i
1 Introduzione	1
1.1 L'accrescimento come sorgente di energia	1
1.2 Il ruolo dell'accrescimento negli AGN	2
2 Luminosità di Eddington	3
2.1 Determinazione del limite di Eddington	3
2.2 Massa limite di una stella	5
3 Modello di Bondi per l'Accrescimento	6
3.1 Modello classico di Bondi	6
3.2 Analisi delle funzioni $g(\mathcal{M})$ e $f(x)$	8
3.3 Soluzioni del problema classico di Bondi	9
3.4 Modello di Bondi con electron scattering	11
4 Accrescimento in Sistemi Binari	13
4.1 Meccanismi di accrescimento	13
Bibliografia	16

Capitolo 1

Introduzione

1.1 L'accrescimento come sorgente di energia

In astrofisica, quando ci si riferisce al fenomeno dell'accrescimento, ci si riferisce ad una particolare situazione in cui un corpo centrale compatto (come può essere un buco nero, o una nana bianca) attira verso di sé della materia presente nelle proprie vicinanze.

Per il fatto che il gas in caduta possiede un certo momento angolare allora esso è impossibilitato a cadere semplicemente, ma è portato a formare un disco che prende, per l'appunto, il nome di disco di accrescimento.

Questo processo riveste un ruolo fondamentale in astronomia, in quanto esso è in grado di liberare un'enorme quantitativo di energia, facendo sì che l'accrescimento sia uno dei meccanismi di produzione energetica tra i più efficienti.

Al fine di dimostrare tale affermazione, si consideri la caduta di una massa m di gas verso un buco nero (non rotante) avente massa M_{BH} e caratterizzato da una estensione spaziale data dal proprio raggio di Schwarzschild

$$r_s = \frac{2GM_{BH}}{c^2}, \quad (1.1)$$

dove G e c indicano rispettivamente la costante di gravitazione universale e la velocità della luce nel vuoto. Supponendo, inoltre, un raggio iniziale di caduta di $3r_s$ ¹ e uno finale pari a r_s la differenza di energia tra tali punti sarà:

$$\Delta E = E_{3r_s} - E_{r_s} = \frac{1}{2}m \left(-\frac{GM_{BH}}{3r_s} + \frac{GM_{BH}}{r_s} \right) = \frac{1}{3} \frac{GM_{BH}m}{r_s} = \frac{mc^2}{6}. \quad (1.2)$$

Si può notare come il 16% circa della massa subisce una trasformazione in energia (efficienza $\epsilon = 0.16$). Per rendere meglio l'idea di quanto alto sia questo valore, basti pensare che la catena protone-protone, ovvero la reazione responsabile della formazione dell'elio negli interni stellari—nonché una delle reazioni più efficienti note—ha un parametro di efficienza ϵ di appena 0.007.

¹Questa distanza non è presa casualmente ma rappresenta il raggio oltre il quale il gas sarà costretto a cadere verso il *black hole*.

1.2 Il ruolo dell'accrescimento negli AGN

Il processo di accrescimento riveste un ruolo fondamentale nella caratterizzazione degli AGN (Active Galactic Nuclei). A partire dagli anni '60 si iniziarono ad osservare oggetti che avevano caratteristiche piuttosto insolite: essi si trovavano a grande distanza ed erano caratterizzati da una bassa magnitudine apparente e da una grande variabilità. Tali oggetti, che ad oggi vengono indicati con la sigla AGN, attirarono a lungo l'attenzione degli astronomi, anche per il fatto che, considerando distanza e magnitudine, essi avrebbero dovuto avere luminosità pari a quella di una galassia ($\simeq 10^{11}L_{\odot}$). Inoltre, ad aggiungere mistero, vi era il fatto che dal tempo di ricorrenza², misurato tramite le variazioni di luminosità, si riuscì a stimare l'estensione di questi oggetti che, tuttavia, risultava essere piuttosto ridotta, anche dell'ordine delle dimensioni del sistema solare. Queste evidenze misero dunque in chiaro l'impossibilità di una eventuale origine stellare della radiazione osservata. Infatti, anche considerando la reazione protone-protone sarebbe necessario racchiudere in una regione di spazio molto limitata un quantitativo di massa pari a quello di una galassia per riuscire ad ottenere luminosità simili a quelle stimate. Inoltre, anche supponendo possa esistere un meccanismo in grado di concentrare così tanta materia in una regione così ristretta, si arriverebbe ad un assurdo, poiché una sorgente così massiva si ritroverebbe confinata in una regione di raggio minore del proprio raggio di Schwarzschild, trattandosi così di un buco nero. Tuttavia, un buco nero non è un emettitore di radiazione e questo renderebbe impossibile l'osservazione diretta dei segnali luminosi provenienti da questi oggetti.

Per arrivare ad una soluzione a questi problemi si dovette aspettare il 1969, quando l'astronomo britannico Lynden-Bell ipotizzò che la radiazione proveniente da questi oggetti potesse essere prodotta da fenomeni di accrescimento attorno a dei buchi neri supermassicci. In effetti, se un buco nero fosse in grado di accrescere una massa solare all'anno, allora la sua luminosità sarebbe pari a quella di una galassia, difatti

$$L_{BH} = \epsilon \frac{\Delta M}{\Delta t} c^2 = 0.16 \cdot \frac{2 \cdot 10^{33}}{\pi \cdot 10^7} \cdot 9 \cdot 10^{20} \text{ erg } s^{-1} \simeq 10^{12} L_{\odot} . \quad (1.3)$$

Ad oggi è noto che buchi neri supermassicci siano presenti al centro di galassie ellittiche ed a spirale e che abbiano una massa pari a circa 10^{-3} volte quella della galassia o del bulge (per le spirali) che li contiene.

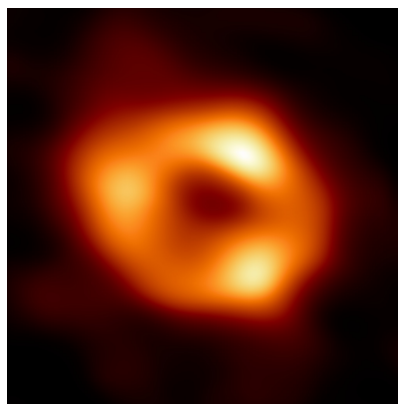


Figura 1.1: *Sagittarius A**, il buco nero al centro della Via Lattea

²Un oggetto può avere dimensioni al massimo pari a Δtv , con Δt tempo di ricorrenza, ovvero il tempo che un'informazione impiega ad attraversare con velocità v l'oggetto di dimensioni l .

Capitolo 2

Luminosità di Eddington

2.1 Determinazione del limite di Eddington

La luminosità di Eddington è un valore di luminosità teorico che stabilisce un limite per l'accrescimento. Una volta superato questo tetto massimo iniziano ad entrare in gioco degli effetti di pressione di radiazione che impediscono alla materia di proseguire nel proprio moto di caduta, andando quindi a frenare il processo di accrescimento. L'espressione per la luminosità di Eddington è ricavabile sotto le seguenti ipotesi:

- accrescimento sferico;
- gas in caduta otticamente sottile e composto da idrogeno totalmente ionizzato.

La luminosità bolometrica del corpo che sta accrescendo, per esempio un buco nero, è esprimibile come integrale della luminosità monocromatica su tutte le frequenze, ovvero

$$L_{BH} = \int_0^{\infty} L_{BH}(\nu) d\nu \quad (2.1)$$

$$L_{BH}(\nu) = L_{BH} f(\nu) ,$$

dove $f(\nu)$ indica una funzione modulatrice normalizzata a uno e detta distribuzione spettrale di energia (SED).

Indicando ora con $S(\nu)$ il flusso, ovvero l'energia per unità di tempo e frequenza che attraversa l'elemento di superficie ad una distanza r dal buco nero centrale, si avrà che

$$S(\nu) = \frac{L_{BH}(\nu)}{4\pi r^2} . \quad (2.2)$$

Dividendo ora il flusso per l'energia di un fotone di frequenza ν si ottiene il numero di fotoni per unità di tempo e frequenza che attraversano la superficie di raggio r

$$N = \frac{S(\nu)}{E(\nu)} = \frac{L_{BH}(\nu)}{4\pi r^2} \frac{1}{h\nu} , \quad (2.3)$$

con h costante di Planck.

Inoltre, sapendo che per l'impulso è valida la relazione $E = pc$, è possibile risalire all'impulso totale trasportato da tali fotoni (sempre per unità di tempo e frequenza)

$$p_{tot} = \frac{L_{BH}(\nu)}{4\pi r^2} \frac{1}{h\nu} \frac{h\nu}{c} = \frac{L_{BH}(\nu)}{4\pi cr^2} . \quad (2.4)$$

Per ipotesi si è supposto che il gas in caduta sia idrogeno completamente ionizzato e quindi si avranno cariche negative (elettroni) e positive (protoni) in circa lo stesso numero. Sarebbero dunque da considerare due tipi di interazioni: quella tra fotoni e protoni e quella tra fotoni ed elettroni. Gli urti tra fotoni e particelle avvengono sulla base della sezione d'urto di queste ultime e per tale motivo il problema a cui si sta facendo riferimento può essere enormemente semplificato andando a considerare esclusivamente gli urti tra fotoni ed elettroni. Difatti, gli elettroni hanno classicamente una sezione d'urto Thomson¹ pari a

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (2.5)$$

che è all'incirca 4 milioni di volte maggiore di quella dei protoni², rendendo di fatto rilevanti solo le interazioni che riguardano le cariche negative.

L'interazione tra fotoni e materia produce una pressione di radiazione e dunque la forza per unità di volume al raggio r , che si oppone alla caduta del gas, sarà espressa dall'integrale su tutte le frequenze dell'impulso trasferito alla materia

$$F_r = \int_0^\infty \frac{L_{BH}(\nu)}{4\pi cr^2} n_e(r) \sigma_T d\nu = \frac{L_{BH}}{4\pi cr^2} n_e(r) \sigma_T \int_0^\infty f(\nu) d\nu = \frac{L_{BH}}{4\pi cr^2} n_e(r) \sigma_T, \quad (2.6)$$

dove con $n_e(r)$ si indica la densità numerica di elettroni alla distanza r .

L'altra forza fondamentale presente è ovviamente quella di gravità, il cui ovvio effetto è quello di attrarre il gas verso il buco nero. La forza gravitazionale, sempre per unità di volume, allo stesso raggio r sarà

$$F_g = -\frac{GM_{BH}}{r^2} (n_e m_e + n_p m_p). \quad (2.7)$$

Poiché $m_p \gg m_e$ e $n_e = n_p$ allora la forza gravitazionale si può riscrivere come

$$F_g \simeq -\frac{GM_{BH}}{r^2} n_e m_p. \quad (2.8)$$

La forza totale agente sulla materia posta alla solita distanza r sarà data dalla somma dei contributi gravitazionali e di pressione, ovvero

$$F_{tot} = F_r + F_g = -\frac{GM_{BH} n_e(r) m_p}{r^2} \left(1 - \frac{L_{BH} \sigma_T}{4\pi c GM_{BH} m_p} \right). \quad (2.9)$$

Si definisce la luminosità di Eddington come quel valore di L tale che la forza totale sia nulla, ovvero come quella luminosità per cui si ha equilibrio tra forza di radiazione e forza gravitazionale e che causa conseguentemente il cessare dell'accrescimento

$$L_{edd} = \frac{4\pi c G m_p}{\sigma_T} M_{BH} \simeq 10^{38} \left(\frac{M_{BH}}{M_\odot} \right) \text{ erg s}^{-1}. \quad (2.10)$$

Si nota come questo valore di luminosità sia proporzionale alla massa del *black hole*, esattamente come il raggio di Schwarzschild. Ciò significa che più un buco nero è

¹La sezione d'urto Thomson vale solo se $h\nu \ll m_e c^2$; per alte energie la sezione d'urto diventa quella di Klein-Nishina.

² $\sigma_T \propto m^{-2}$ ed essendo $m_p \simeq 2000 m_e$ ne risulta che il protone ha sezione d'urto quasi 4 milioni di volte inferiore all'elettrone.

massiccio, più questo sarà esteso e più materia potrà accrescere prima di arrivare a superare il proprio limite di Eddington.

Ciò che si è portati ad immaginare è che nel momento in cui $L_{BH} > L_{edd}$ l'accrescimento subisca una brusca ed improvvisa interruzione. In realtà quello che accade è che il processo è in grado di auto-regolarsi. Infatti, se il buco nero accresce abbastanza materia da oltrepassare il limite di Eddington, allora la pressione di radiazione diventa dominante e l'accrescimento di materia rallenta, poiché il gas viene spinto verso l'esterno. D'altra parte, una minor caduta di gas verso il corpo centrale porta alla diminuzione della pressione di radiazione e conseguentemente il processo di accrescimento può riprendere.

A partire dalla luminosità di Eddington si può ricavare anche il quantitativo limite di massa accrescibile per unità di tempo:

$$\dot{M}_{edd} = \frac{L_{edd}}{\epsilon c^2} \simeq 7 \cdot 10^{17} \left(\frac{M_{BH}}{M_{\odot}} \right) g s^{-1}. \quad (2.11)$$

2.2 Massa limite di una stella

Le implicazioni di questo tetto massimo di luminosità appena ricavato sono sicuramente importanti nello studio di fenomeni di accrescimento, ma in realtà la loro utilità non si esaurisce qui. La luminosità di Eddington determina infatti anche il limite per la massa di una struttura stellare stabile. Sapendo che esiste un legame tra la luminosità e la massa di una stella del tipo $L \propto M^{3.5}$, è possibile scrivere che

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.5} \implies L = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.5} L_{\odot}. \quad (2.12)$$

A questo punto, considerando una stella di massa $M \simeq 100M_{\odot}$, è possibile andare a stimare il suo valore di luminosità, ovvero

$$L = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.5} L_{\odot} \simeq 10^7 L_{\odot} \simeq 10^{40} \text{ erg } s^{-1}. \quad (2.13)$$

Questo risultato può essere dunque confrontato con la corrispondente luminosità limite di Eddington, che per tale corpo avrà un valore pari a circa

$$L_{edd} \simeq 10^{38} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \simeq 10^{40} \text{ erg } s^{-1}. \quad (2.14)$$

Come è possibile vedere attraverso questo semplice calcolo, la luminosità effettiva della stella considerata eguaglia quella limite di Eddington. Conseguentemente si può arrivare alla conclusione che se una stella avesse massa $M > 100M_{\odot}$ si arriverebbe alla situazione in cui $L > L_{edd}$ e questo porterebbe alla disgregazione della struttura stellare per effetto dell'elevatissima pressione di radiazione.

Tuttavia, se è vero che stelle più massive di un centinaio di masse solari non possono esistere, allora buchi neri di origine stellare difficilmente hanno la possibilità di superare le $50M_{\odot}$. D'altra parte, come brevemente accennato nel **Capitolo 1**, esistono e sono noti buchi neri al centro di galassie aventi una massa di milioni, se non miliardi, di masse solari (*Sagittarius A** ha una massa di circa $4 \cdot 10^6 M_{\odot}$, ad esempio) e di conseguenza è logico supporre che debbano esistere meccanismi in grado di portare un buco nero a tali valori di massa, che non siano il semplice collasso del *core* di una stella.

Capitolo 3

Modello di Bondi per l'Accrescimento

3.1 Modello classico di Bondi

Il modello classico di Bondi è uno dei modelli di accrescimento più semplici e si pone come obiettivo quello di spiegare il modo in cui accresce un corpo compatto ed isolato (come un buco nero, per esempio) immerso in una distribuzione infinitamente estesa di gas che, all'infinito, è supposto in uno stato di quiete, con pressione P_∞ , densità ρ_∞ e temperatura T_∞ .

In aggiunta, il modello di Bondi è caratterizzato da alcune fondamentali assunzioni:

- il problema è stazionario $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$;
- si ha simmetria sferica, ovvero si considera momento angolare nullo $\left(\vec{J} = \vec{0}\right)$;
- il campo magnetico è assente $\left(\vec{B} = \vec{0}\right)$;
- gli effetti elettromagnetici sono completamente trascurati;
- il campo gravitazionale è prodotto esclusivamente dal corpo centrale che accresce

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (3.1)$$

e di conseguenza viene esclusa l'autogravità della nube di gas;

- il gas in caduta è considerato perfetto (viscosità trascurata) e le uniche trasformazioni possibili sono quelle politropiche; il che implica che pressione e densità siano legate dalla relazione

$$P = \frac{k_B \rho T}{\mu m_p} = P_\infty \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma, \quad (3.2)$$

dove $1 < \gamma \leq 5/3$ è l'indice politropico, m_p la massa del protone, μ il peso molecolare medio e k_B la costante di Boltzmann;

Una delle equazioni fondamentali per il modello è la cosiddetta equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.3)$$

Essendo il problema a simmetria sferica, tutte le grandezze che descrivono il fluido dipendono solamente dalla coordinata radiale r . Inoltre, è valida anche l'ipotesi di stazionarietà e dunque, sulla base di queste considerazioni, l'equazione di continuità può esser integrata facendo uso del teorema di Gauss, dando come risultato

$$4\pi r^2 \rho(r) v(r) = \text{cost} = \dot{M} , \quad (3.4)$$

dove $v(r)$ è la velocità radiale del gas e \dot{M} il *rate* di accrescimento costante del corpo centrale, cioè la quantità di massa (per unità di tempo) che passa per una generica superficie sferica di raggio r .

Oltre all'equazione di continuità, un'altra espressione di fondamentale importanza per il modello è l'equazione di Bernoulli, la quale assume (considerando le condizioni al contorno all'infinito) la forma

$$\frac{v^2(r)}{2} + \int_{P_\infty}^P \frac{dP}{\rho} + \Phi(r) = 0 . \quad (3.5)$$

Attraverso le assunzioni fatte sul potenziale gravitazionale e sulle trasformazione del gas si può riscrivere il tutto come:

$$\frac{v^2(r)}{2} + \frac{C_{s,\infty}^2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] - \frac{GM}{r} = 0 , \quad (3.6)$$

con $C_{s,\infty}$ che indica la velocità del suono nel fluido all'infinito

$$C_{s,\infty} = \sqrt{\gamma \frac{P_\infty}{\rho_\infty}} . \quad (3.7)$$

Le due espressioni derivanti rispettivamente dall'equazione di continuità e dall'equazione di Bernoulli costituiscono il sistema caratteristico del problema di Bondi:

$$\begin{cases} 4\pi r^2 \rho(r) v(r) = \dot{M} \\ \frac{v^2(r)}{2} + \frac{C_{s,\infty}^2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] - \frac{GM}{r} = 0 . \end{cases} \quad (3.8)$$

Queste due relazioni messe a sistema possono essere riscritte in una forma adimensionale attraverso l'introduzione del numero di Mach

$$\mathcal{M} = \frac{v}{C_s} , \quad (3.9)$$

che permette di decretare se il fluido è in un regime supersonico ($\mathcal{M} > 1$) o subsonico ($\mathcal{M} < 1$), e delle seguenti quantità normalizzate

$$x = \frac{r}{r_B} , \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty} , \quad \tilde{C}_s = \frac{C_s}{C_{s,\infty}} = \tilde{\rho}^{\frac{\gamma-1}{2}} , \quad (3.10)$$

dove r_B è il raggio di Bondi definito come

$$r_B = \frac{GM}{C_{s,\infty}^2} . \quad (3.11)$$

Attraverso queste nuove introduzioni e dopo alcuni passaggi di natura prettamente algebrica, è possibile scrivere il sistema (3.8) come

$$\begin{cases} x^2 \mathcal{M} \tilde{\rho}^{\frac{\gamma+1}{2}} = \lambda \\ \frac{\mathcal{M}^2 \tilde{C}_s^2}{2} + \frac{\tilde{\rho}^{\gamma-1}}{\gamma-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\gamma-1} . \end{cases} \quad (3.12)$$

Il termine λ , introdotto nella prima equazione, rappresenta un autovalore del problema di Bondi, detto tasso di accrescimento adimensionale e definito dall'espressione:

$$\lambda = \frac{\dot{M}}{4\pi r_B^2 \rho_\infty C_{s,\infty}} . \quad (3.13)$$

Se conosciuto, esso fissa il *rate* di accrescimento per una data massa M e le condizioni che il gas assume all'infinito.

Combinando insieme le due equazioni del sistema si arriva a quella che è possibile considerare come la riscrittura finale del problema di Bondi:

$$g(\mathcal{M}) = \Lambda f(x), \quad \Lambda = \lambda^{\frac{2(1-\gamma)}{\gamma+1}}, \quad (3.14)$$

nella quale le due funzioni sono date dalle seguenti espressioni

$$\begin{cases} g(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\frac{2(1-\gamma)}{\gamma+1}} \left(\frac{\mathcal{M}^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \right) \\ f(x) = x^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\gamma-1} \right) . \end{cases} \quad (3.15)$$

Risolvere l'equazione trascendente del problema di Bondi, significa trovare il valore del numero di Mach \mathcal{M} per ogni valore x visto che poi, a partire da questo, è possibile risalire anche alla densità, velocità e temperatura del gas.

3.2 Analisi delle funzioni $g(\mathcal{M})$ e $f(x)$

Dallo studio della sua derivata si nota come la funzione $g(\mathcal{M})$ presenti un minimo in corrispondenza di $\mathcal{M}_{min} = 1$, ovvero in corrispondenza del punto in cui velocità del suono e del fluido sono equivalenti e che, per tale ragione, prende il nome di punto sonico. Il minimo della funzione, indicato con g_{min} , è dato dall'espressione

$$g_{min} = g(\mathcal{M}_{min}) = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} . \quad (3.16)$$

Anche la funzione $f(x)$ presenta un minimo che si trova in corrispondenza del punto

$$x_{min} = \frac{5-3\gamma}{4} . \quad (3.17)$$

Il minimo cade di conseguenza ad un raggio vicino al raggio di Bondi visto che, per $1 < \gamma < 5/3$, si ha $x_{min} \simeq 1$. In particolare, il valore di x_{min} diventa sempre più

piccolo man mano che γ cresce, fino a raggiungere il valore di zero nel momento in cui $\gamma = 5/3$ ¹. L'espressione per $f(x)$ nel punto di minimo sarà data da

$$f_{min} = f(x_{min}) = \frac{\gamma + 1}{4(\gamma - 1)} \left(\frac{4}{5 - 3\gamma} \right)^{\frac{5-3\gamma}{\gamma+1}}. \quad (3.18)$$

La presenza dei minimi impone che, per avere soluzioni dell'equazione di Bondi (3.14) $\forall x > 0$, deve essere rispettata la condizione $g_{min} \leq \Lambda f_{min}$, che porta come conseguenza il fatto che Λ non può essere arbitraria; difatti:

$$\Lambda \geq \Lambda_{cr} = \frac{g_{min}}{f_{min}}. \quad (3.19)$$

In questo modo si riesce anche a fissare una condizione sul tasso di accrescimento adimensionale λ , in quanto si dovrà avere che

$$\lambda \leq \lambda_{cr} = \left(\frac{f_{min}}{g_{min}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \left(\frac{5 - 3\gamma}{4} \right)^{-\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}}. \quad (3.20)$$

Dal momento che quest'ultimo è legato al *rate* di accrescimento \dot{M} , ne consegue che esiste, per γ fissato, un limite superiore per l'accrescimento che non è possibile superare. Inoltre, si può facilmente vedere come λ_{cr} dipenda esclusivamente dalla natura del gas tramite l'indice politropico γ . A tale proposito, in **Tabella 3.1** sono riportati, in funzione dell'indice γ , i valori che può assumere Λ_{cr} e λ_{cr} :

γ	Λ_{cr}	λ_{cr}
1.2	1.03	0.87
1.3	1.07	0.75
1.4	1.17	0.63
1.5	1.32	0.50
1.6	1.60	0.37
5/3	1	0.25

Tabella 3.1: Λ_{cr} e λ_{cr} in funzione dell'indice politropico γ

In corrispondenza del valore massimo possibile per γ , che si traduce nella condizione fisica di considerare un gas perfetto monoatomico, si ha il minor valore possibile per λ_{cr} e quindi la minore efficienza di accrescimento.

3.3 Soluzioni del problema classico di Bondi

Definito per il fluido il proprio indice politropico γ è possibile dimostrare che l'equazione di Bondi (3.14) ammette una coppia di soluzioni per un dato λ appartenente all'intervallo $[0, \lambda_{cr}]$. Tali soluzioni sono riportate all'interno della **Figura 3.1** in cui si ipotizza di avere $\gamma = 1.4$ e due tassi di accrescimento adimensionali $\lambda = \lambda_{cr}$ e $\lambda < \lambda_{cr}$.

- Nel caso $\lambda = \lambda_{cr}$ si ha una coppia di soluzioni critiche indicate coi colori rosso e blu. Si nota dalla figura come queste due curve si incontrino in corrispondenza

¹Condizione possibile solo per un gas perfetto monoatomico.

di x_{min} , dove il numero di Mach è unitario e quindi dove la velocità del gas e del suono sono uguali. Di conseguenza, il fluido, proseguendo nel suo moto, subisce una transizione da un regime subsonico a uno supersonico (o viceversa). A causa di questa loro caratteristica, queste soluzioni sono anche dette transoniche. Tuttavia, la soluzione che presuppone un gas inizialmente supersonico (curva rossa) non è fisicamente accettabile in quanto si è supposto fin dall'inizio che all'infinito il fluido si trovasse in uno stato di quiete;

- Nel caso generale $\lambda < \lambda_{cr}$ si vede come il punto x_{min} rappresenti un estremo per le due soluzioni indicate attraverso la curva nera e verde. Nel primo caso il fluido ha sempre $\mathcal{M} > 1$ e quindi si mantiene sempre in un regime supersonico, mentre nel secondo esso continua a permanere nel suo stato di moto subsonico. Considerando nuovamente la condizione di quiete del fluido all'infinito, si arriva a concludere facilmente che la soluzione supersonica (curva nera) non può essere accettabile. Per quanto riguarda la soluzione subsonica si nota come questa implichi un gas che inizialmente acquista velocità fino a raggiungere un massimo in $x = x_{min}$, per poi rallentare a tal punto da fermarsi a $x = 0$. In prossimità del centro l'equazione del moto di Eulero assume la forma:

$$\frac{1}{\rho} \nabla \rho \simeq -\nabla \Phi . \quad (3.21)$$

Di conseguenza, la caduta del gas viene contrastata dalla pressione generata dal gradiente di densità di materia che si accumula nella vicinanza del corpo centrale. Ne risulta che la soluzione è significativa solo nei casi di accrescimento su corpi aventi una superficie fisica sulla quale il fluido possa depositarsi. Dunque, nel caso di un buco nero, poiché non esiste una superficie su cui questo possa avvenire, anche questo tipo di soluzione subsonica dovrà essere scartata.

Inoltre, poiché un fluido può presentare delle discontinuità, sarebbe possibile avere anche delle soluzioni transoniche per $\lambda > \lambda_{cr}$. In questo caso, la soluzione presenta un salto tra il regime subsonico e supersonico e ciò determina il formarsi di un'onda d'urto insieme alla conseguente uscita dall'ipotesi di stazionarietà. Pertanto anche queste soluzioni sono incompatibili con le assunzioni fatte per il modello.

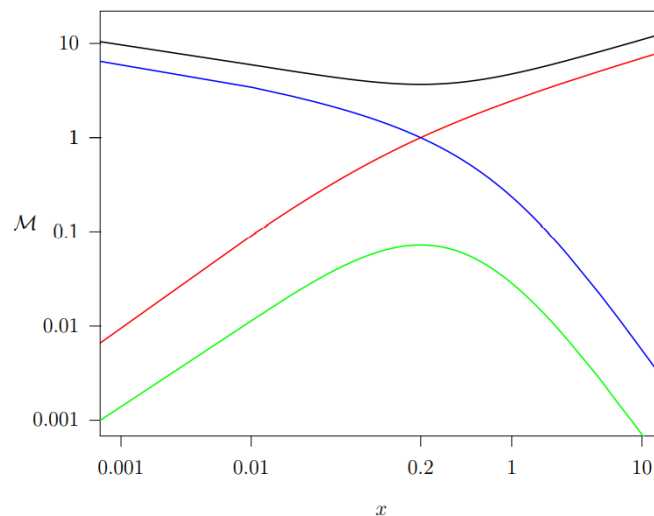


Figura 3.1: Soluzioni del problema di Bondi per $\gamma = 1.4$ nei casi $\lambda = \lambda_{cr}$ e $\lambda < \lambda_{cr}$

L'unica soluzione accettabile è di conseguenza quella transonica rappresentata dalla curva blu. Per tale soluzione, nel limite per $x \rightarrow 0$ l'equazione del moto diventa

$$\frac{v^2}{2} \simeq \frac{GM}{r} . \quad (3.22)$$

Occorre precisare che in realtà ogni curva corrisponde a due regimi di flusso, visto che esse sono percorribili in entrambi i sensi (in base al segno della velocità del gas). In questo modo è possibile ottenere soluzioni di accrescimento in cui la materia tende a cadere dall'esterno verso il corpo centrale (velocità negativa), o soluzioni di vento in cui la materia si allontana dall'oggetto partendo dalle regioni interne (velocità positiva).

3.4 Modello di Bondi con electron scattering

Il modello classico di Bondi fornisce soluzioni puramente idrodinamiche, senza far riferimento ad alcun fenomeno di natura elettromagnetica. Tuttavia, già all'interno del **Capitolo 2** si è visto come nel processo di accrescimento la radiazione prodotta ha un ruolo non trascurabile, in quanto essa va ad interagire con gli elettroni del gas in caduta. La forza effettiva, per unità di volume, agente sulla materia ad una certa distanza r si può riscrivere, tramite la definizione della luminosità di Eddington, come

$$F_{eff}(r) = -\frac{GMn_e(r)m_p}{r^2} \left(1 - \frac{L}{L_{edd}}\right) = -\frac{GM\rho(r)}{r^2} \left(1 - \frac{L}{L_{edd}}\right) . \quad (3.23)$$

Poiché la luminosità non è una funzione della distanza, si può definire una nuova costante gravitazionale, detta costante gravitazionale effettiva, definita come

$$G_{eff} = G \left(1 - \frac{L}{L_{edd}}\right) . \quad (3.24)$$

Si può immaginare che questa forza effettiva agente sulla materia venga indotta da un potenziale che si presenta nella forma

$$\Phi_{eff}(r) = -\frac{G_{eff}M}{r} . \quad (3.25)$$

Si nota come questa espressione sia formalmente identica a quella che si avrebbe per un generico potenziale generato da una massa M , con l'unica differenza data dalla differente costante gravitazionale utilizzata.

Come visto precedentemente, il potenziale entra in gioco all'interno dell'equazione di Bernoulli del problema di Bondi e questo determina una modifica della seconda relazione del sistema (3.12):

$$\tilde{C}_s^2 \left(\frac{\mathcal{M}^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \right) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{L}{L_{edd}} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} . \quad (3.26)$$

Considerando che l'equazione di continuità resta inalterata è possibile combinare questa con l'equazione appena introdotta, in modo da giungere alla relazione:

$$\left(\frac{\lambda}{mx^2} \right)^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left(\frac{\mathcal{M}^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \right) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{L}{L_{edd}} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} . \quad (3.27)$$

In analogia a quanto fatto precedentemente si può introdurre il parametro Λ , attraverso il quale è possibile riscrivere la relazione in forma del tutto equivalente all'equazione (3.14), ovvero $g(\mathcal{M}) = \Lambda f(x)$. L'unica differenza tra questa nuova formulazione e quella precedente risiede nella definizione della funzione $f(x)$, che ora assume la forma

$$f(x) = x^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma+1}} \left[\frac{1}{x} \left(1 - \frac{L}{L_{edd}} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} \right] . \quad (3.28)$$

Una delle conseguenze più rilevanti della ridefinizione dell'equazione del problema di Bondi è il cambiamento del tasso di accrescimento adimensionale critico, che ora vede la presenza di un nuovo fattore correttivo

$$\lambda_{cr,e} = \lambda_{cr} \left(1 - \frac{L}{L_{edd}} \right)^2 . \quad (3.29)$$

Dunque, nel modello di Bondi con *electron scattering* il tasso di accrescimento critico acquista una dipendenza dalla luminosità del corpo che accresce. Inoltre, per il fatto che $L < L_{edd}$ il fattore correttivo sarà sempre minore dell'unità e quindi $\lambda_{cr,e} < \lambda_{cr}$. Essendo il tasso di accrescimento legato al *rate* di accrescimento del corpo centrale, si avrà una modifica anche di quest'ultimo

$$\dot{M}_e = \dot{M} \left(1 - \frac{L}{L_{edd}} \right)^2 . \quad (3.30)$$

Di conseguenza, rispetto al modello classico, si assiste ad una diminuzione del flusso di materia verso il corpo centrale, a sua volta determinata dal rapporto tra la luminosità del corpo stesso e la sua luminosità di Eddington.

Capitolo 4

Accrescimento in Sistemi Binari

4.1 Meccanismi di accrescimento

In un sistema binario, il trasferimento di massa da una stella alla sua compagna compatta avviene attraverso il rilascio di una gran quantità di energia potenziale gravitazionale sotto forma di radiazione elettromagnetica (che nel caso di accrescimento su stelle di neutroni può raggiungere energie tipiche della banda X).

Il *rate* di accrescimento massimo è ovviamente determinato dalla luminosità di Eddington e sarà dunque dato dall'espressione:

$$\dot{M}_{edd} = 1.5 \cdot 10^{-8} R_6 M_\odot \text{ yr}^{-1}, \quad (4.1)$$

dove R_6 indica il raggio del corpo che sta accrescendo in unità di 10^6 cm . In questo modo una tipica stella di neutroni di massa $M = 1.4M_\odot$ e raggio $R = 10^6 \text{ cm}$ sarà caratterizzata da un *rate* massimo di accrescimento di circa $1.5 \cdot 10^{-8} M_\odot \text{ yr}^{-1}$.

Per i sistemi binari esistono due differenti meccanismi grazie ai quali si può verificare un fenomeno di accrescimento:

- **Accrescimento per superamento del lobo di Roche**

Durante l'evoluzione di una stella, può capitare che quest'ultima aumenti le sue dimensioni, oppure che, a causa di una diminuzione della distanza che la separa dall'altro corpo del sistema, si trovi nella situazione in cui l'attrazione gravitazionale della compagna (per esempio una stella di neutroni o una nana bianca) causi la rimozione degli strati esterni della stella stessa, i quali vengono trasferiti alla compagna compatta attraverso il punto lagrangiano posizionato tra le due componenti del sistema binario. Ciò accade nel momento in cui la parti esterne della stella oltrepassano quello che viene detto lobo di Roche, ovvero quella regione di spazio in cui la materia è gravitazionalmente legata alla stella e ad essa soltanto, come mostrato in **Figura 4.1**.

Si consideri ora una situazione in cui la stella che cede materia sia anche la più massiva del sistema, cioè $M \geq 1.4M_\odot$ nel caso di una stella di neutroni come compagna. In queste condizioni la stella avrà una dimensione superiore a quella del proprio lobo di Roche e conseguentemente inizierà a perdere massa in favore della compagna con un tempo scala

$$\tau = \frac{GM^2}{RL} = 3 \cdot 10^7 \frac{(M/M_\odot)^2}{(R/R_\odot)(L/L_\odot)} \text{ yr}. \quad (4.2)$$

Sapendo che $L \propto M^{3.5}$ e che $R \propto M^{0.5}$, il tempo caratteristico si riscrive come

$$\tau = 3 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2} \text{ yr}. \quad (4.3)$$

Supponendo che una gran parte della massa della stella ($\simeq 0.8M_\odot$, ad esempio) venga trasferita alla compagna in questo tempo scala, si ottiene un *rate* di accrescimento pari a

$$\dot{M} \simeq 3 \cdot 10^{-8} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 M_\odot \text{ yr}^{-1}. \quad (4.4)$$

Segue che tale *rate* è minore di quello massimo determinato dalla luminosità di Eddington (\dot{M}_{edd}) solo se $M < M_\odot$. Sfortunatamente questa condizione viola l'ipotesi fatta inizialmente sulla massa della stella ($M \geq 1.4M_\odot$) e di conseguenza un sistema del genere non è in grado di formare alcun fenomeno di accrescimento. In alternativa, si può considerare un sistema binario in cui la stella che perde materia abbia una massa $M \leq 1.4M_\odot$ e così facendo il tempo scala caratteristico dell'accrescimento diventerebbe pari a

$$\tau = 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{L}{L_\odot} \right)^{-1} \text{ yr}. \quad (4.5)$$

Attraverso questa relazione si riesce ad ottenere anche una nuova espressione per il *rate* di accrescimento, ovvero

$$\dot{M} \simeq 10^{-10} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{2.5} M_\odot \text{ yr}^{-1}. \quad (4.6)$$

Si nota come questo nuovo *rate* sia inferiore a quello di Eddington nel caso in cui $M \leq 1.4M_\odot$ ed essendo questo risultato in accordo con ciò che si è supposto in precedenza, è possibile concludere che il sistema binario sia in grado di avviare un meccanismo di accrescimento solo nel caso in cui la stella che cede materia abbia una massa $M \leq 1.4M_\odot$.

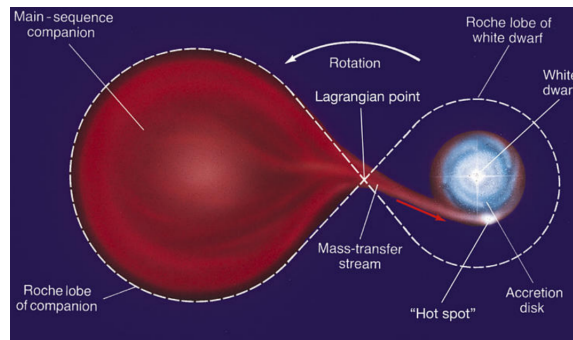


Figura 4.1: Accrescimento per superamento del lobo di Roche

- **Accrescimento attraverso venti stellari**

Stelle di grande massa producono venti stellari piuttosto significativi che possono venir in parte catturati dalla compagna compatta (come una stella di neutroni).

Si può ottenere un'espressione per il raggio critico r_{acc} all'interno del quale avviene il fenomeno di accrescimento, andando ad eguagliare il potenziale gravitazionale del corpo compatto del sistema (alla distanza r_{acc}) con l'energia cinetica (per unità di massa) del vento stellare

$$\frac{GM_n}{r_{acc}} = \frac{V_w^2}{2} \implies r_{acc} = \frac{2GM_n}{V_w^2}, \quad (4.7)$$

dove V_w indica la velocità del vento e M_n la massa della stella di neutroni. Assumendo che tutto il flusso di materia attraverso la superficie πr_{acc}^2 sia catturato dalla stella di neutroni posta ad una distanza a dalla stella compagna, si avrà un tasso di accrescimento pari a

$$\dot{M}_{acc} = \frac{\pi r_{acc}^2}{4\pi a^2} \dot{M}_w = \left(\frac{G^2 M_n^2}{V_w^4 a^2} \right) \dot{M}_w. \quad (4.8)$$

Considerando dei valori tipici di velocità del vento V_w e di distanza a tra i due corpi pari a 10^3 km s^{-1} e $50R_\odot$, per avere un accrescimento significativo, ad esempio $\dot{M}_{acc} > 10^{-12} M_\odot \text{ yr}^{-1}$, è necessario che $\dot{M}_w > 2 \cdot 10^{-8} M_\odot \text{ yr}^{-1}$. Venti con queste caratteristiche sono tipici di stelle di main-sequence aventi massa superiore a $(20 - 25)M_\odot$ o di supergiganti blu di massa maggiore di $(15 - 20)M_\odot$.

In conclusione è possibile dedurre che in un sistema binario formato da due corpi, di cui uno compatto (come una stella di neutroni o un buco nero), possa innescarsi un processo di accrescimento solo nei casi in cui la stella che perde materia a favore del corpo compatto sia caratterizzata da una massa $M \leq 1.4M_\odot$, dando vita ad un sistema LMXB (*Low Mass X-Ray Binaries*), o nei casi in cui la stella possiede massa $M \geq 15M_\odot$, dando vita a un sistema HMXB (*High Mass X-Ray Binaries*).

Oltre alla massa, le due classi di binarie si differenziano anche dal punto di vista energetico, difatti le HMXB sono caratterizzate da un'emissione di fotoni con energia $E \geq 15 \text{ KeV}$, mentre per quanto riguarda le LMXB si ha $E \leq 10 \text{ KeV}$.

Nel range di massa $(1.4 - 15) M_\odot$ non si ha né alcun fenomeno di vento stellare sufficientemente forte da dare inizio all'accrescimento, né si ha una stella di dimensioni adatte per poter cedere massa al corpo compatto senza superare il limite di Eddington.

Bibliografia

- [1] *Appunti personali del corso di Astrofisica Extragalattica*, tenuto dal Prof. Luca Ciotti. A.A. 2021/2022.
- [2] *Appunti personali del corso di Processi di Radiazione e MHD*, tenuto dal Prof. Daniele Dallacasa. A.A. 2021/2022.
- [3] V. Korol, L. Ciotti, S. Pellegrini. *Bondi accretion in early-type galaxies*. arXiv:1602.04598. 2016. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1602.04598>
- [4] A. Mancino, L. Ciotti, S. Pellegrini. *On the polytropic Bondi accretion in two-component galaxy models with a central massive BH*. arXiv:2203.05050. 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.05050>
- [5] H. Bondi. *On Spherically Symmetrical Accretion*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 112:195-204. 1952. <https://doi.org/10.1093/mnras/112.2.195>
- [6] V. Korol. *Accrescimento di Bondi con electron scattering per buchi neri al centro di galassie*. Tesi di laurea magistrale, Alma Mater Studiorum. 2014.
- [7] T. Padmanabhan. *Theoretical Astrophysics, Vol. II: Stars and Stellar Systems*. Cambridge University Press. 2009.
- [8] J. Frank, A. King, D. Raine. *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge University Press. 2002.