ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

LE
CONICHE

Tesi di Laurea in ALGEBRA

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Libero Verardi

Presentata da:
Danilo Cicognani

Sessione estiva
Anno Accademico 2010-2011

0.1 Ringraziamenti

Desidero ringraziare il professor Libero Verardi, relatore di questa tesi, per la grande, grandissima disponibilità e la cortesia dimostratemi, e per tutto l'aiuto fornito durante la stesura. Inoltre mi sembra doveroso ringraziare i professori incontrati durante questi anni, che mi hanno insegnato cose nuove.
Vorrei ringraziare i compagni di corso, coi quali ho condiviso tantissime giornate, belle ed alcune brutte, in particolar modo il dottor Michele Antonelli, una sorta di angelo custode per me.
Un grande ringraziamento và anche ai miei genitori, che, con il loro sostegno, mi hanno aiutato a raggiungere questo traguardo, ed anche ai miei fratelli Domenico e Livia. Vorrei ringraziare anche tutti i parenti, nonni (Antonio, Attilia), zii(Francesco, Gino, Gualtiero), zie (Elena, Maria Pia, Rita, Romina), cugini (Andrea, Marco, Mauro, Roberto), cugine (la gemellina Daniela, Francesca, Laura, Patrizia), figli di cugini (Alessandro, Gabriele, Lorenzo, Martina), le sorelle della nonna specialmente la zia Rosanna e tutti i parenti un po' più alla lontana.
Un altro ringraziamento va, alle persone a me care, molte han fatto qualcosa per me: don Marco, don Nilo (e la comunità di Sasso), don Mirko che han contribuito molto alla mia formazione personale, l'Ila&Rimo con Davidino&Elenina la mia seconda casa, aperta ahiloro ad ogni ora del giorno per me, la famiglia Polo di Marradi che non mi ha mai fatto mancare il suo affetto e sostegno, Gianni che per me è stata ed è tuttora una persona importantissima, ed anche tutti gli amici: Marco col quale c'è un rapporto basato su una fiducia reciproca speciale, Bando, Fabiola compagna di tanti campi con la parrocchia, Marina, Elena, Stefania, Debora, Leonardo col quale ci scambiamo sempre i complimenti al contrario, Mirko, il dottor Alessandro sul quale so di poter contare per ogni cosa, Nicola che con la sua simpatica contagiosa mi ha aiutato a sorridere anche quando era difficile, Andrea Sisti&Marco Cavina amici di "Faenza", alle persone che son venute ad ascoltarmi e tanti altri che per motivi di spazio non cito.
Grazie a tutti, soprattutto a chi mi vuole bene, e mi fa sentire amato. Grazie anche a Dio (per tutte le possibilità che mi dà), alle persone del mio paese, delle mie parrocchie, ed anche ai ragazzi che accompagno nella loro crescita, un allenamento per la pazienza, ma allo stesso tempo germogli di felicità.

Un ultimo ma non meno importante ringraziamento, va alle due persone più importanti per me; in primis la mia **MOROSA**, Irene (ed alla sua famiglia), che nell'ultimo anno è stata la sorpresa più bella che mi potesse capitare, mi è stata vicina tantissimo, **insostituibile** , e a Francesco, Frency, Bono, CenCisCan, Sexsymbol, tanti soprannomi per un'unica grande persona, il mio **MIGLIORE AMICO**, vicino in tutti i momenti della mia vita negli ultimi 15 anni, a condividere gioie e fatiche, che mi ha sostenuto sempre durante il mio cammino universitario, che sa sempre tutto, e quel che non sa.. **per me lo sa lo stesso!** dico solo che a parole certe cose non si possono spiegare, altro che spazio n-dimensionale.
ps: Anche se faccio tanta festa, voglio sottolineare che cercherò di vivere questo traguardo come un trampolino: che mi aiuti a superare ed affrontare i prossimi ostacoli, e a raggiungere i prossimi traguardi.
Grazie a tutti, di cuore.

0.2 Introduzione

Scopo di questa tesi è presentare una piccola panoramica sulle coniche, incentrata principalmente sui contenuti proposti nella scuola superiore: definizioni delle coniche come luoghi geometrici, alcune proprietà elementari, le loro equazioni canoniche, un esempio dei problemi proposti sui testi e delle applicazioni extra-geometriche. Successivamente, sono presentate altre proprietà un po' più specialistiche: similitudine ed eccentricità, classificazione affine e classificazione proiettiva delle coniche, per mostrare come questo argomento per essere affrontato in modo un po' più vasto richieda nozioni che solitamente non fanno parte dei programmi della scuola superiore: similitudini, affinità, trasformazioni proiettive, matrici e loro rango, autovalori ed autovettori, forme quadratiche. Sono inoltre presentate alcune costruzioni realizzate con l'ausilio del software Geogebra, ormai diffuso in molte scuole e gratuito, che riunisce in una sola pagina grafica sia il piano euclideo, tipico della "Geometria dinamica", sia il piano cartesiano su cui tracciare i grafici di funzioni, ed equazioni di coniche.

0.3 Le coniche nella geometria analitica scolastica e le loro proprietà

Un primo elemento che si nota, sia nei testi degli istituti tecnici che in quelli dei licei (rispettivamente: Lineamenti di matematica, N.Dodero, P.Baroncini, R.Manfredi,Ghisetti e Corvi editore e Corso di matematica per i licei scientifici sperimentali,Lamberto Lamberti,Laura Mereu, Augusta Nanni, edizione Etas), è che son elencati dei prerequisiti necessari per poter studiare le coniche quali: il piano cartesiano, concetti di luogo geometrico, posizioni reciproche tra una retta ed una circonferenza e tra due circonferenze, risoluzione di sistemi lineari e di 2^o grado in due incognite.

Circonferenza

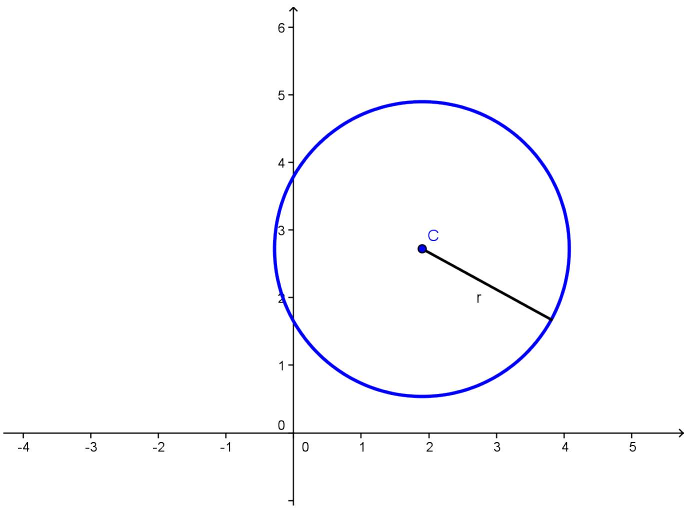

Figura 0.3.1: circonferenza

Si dice circonferenza C di centro C e raggio r il luogo dei punti P del piano π aventi da C distanza uguale a r.

$$C = \{P \in \pi / \overline{PC} = r\}$$

Le coordinate del centro siano C=(α, β). Affinchè un punto P=(x,y) appartenga alla circonferenza, la distanza da P a C deve essere uguale ad r, da cui si ricava:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \tag{1}$$

Sviluppando la (1) si ottiene:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

Ponendo: $-2\alpha=a$ $-2\beta=b$ $\alpha^2+\beta^2-r^2=c$
si ottiene l'equazione della circonferenza nella forma più generale:
$a=-2\alpha$, $b=-2\beta$, $c=\alpha^2+\beta^2-r^2$

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \tag{2}$$

Viceversa, questa equazione rappresenta una circonferenza di centro

$$C=(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$$

e raggio $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$ purché il numero sotto radice sia >0; se è =0, rappresenta una circonferenza di raggio nullo (degenere), ridotta cioè al solo centro C; se è <0, non rappresenta alcuna circonferenza reale.

Intersezione retta e circonferenza

Per trovare i punti d'intersezione tra una retta ed una circonferenza inseriamo le loro equazioni in un sistema di 2^o grado (riportato più avanti nel paragrafo "Problemi"), dopodiché distinguiamo 3 casi: $\Delta=0, \Delta>0, \Delta<0$ con $\Delta=b^2-4ac$. Se $\Delta>0$ ci sono due soluzioni reali e la retta è secante, se $\Delta=0$ abbiamo due soluzioni reali coincidenti e la retta è tangente, infine se $\Delta<0$ abbiamo 2 soluzioni complesse coniugate (il libro continua dicendo: non esistono cioè punti reali comuni alla retta e alla circonferenza e la retta è esterna).

Problemi

Di seguito presentiamo alcuni problemi che sono trattati in entrambi i testi studiati e successivamente quelli affrontati solo nel testo liceale.
Rette tangenti ad una circonferenza:

Una volta sviluppato il sistema qui sotto riportato, tra retta e circonferenza, bisogna porre la condizione $\Delta = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

Condizioni per determinare l'equazione di una circonferenza:
Passaggio della circonferenza per tre punti
I libri presentano un esempio concreto, un problema svolto. La risoluzione si ricava con un sistema a tre incognite, di 1^o grado, ottenute andando a sostituire i valori delle coordinate dei tre punti al posto di x e y nell'equazione generale della circonferenza (2). In questo modo otteniamo i valori a, b, c da inserire nell'equazione.

Conoscenza delle coordinate del centro e passaggio per un punto
Si determina in primo luogo il raggio che corrisponde alla distanza del centro C dal punto A assegnato, in questo modo troviamo r. Ora inseriamo il raggio e le coordinate del centro nell'equazione (1) ed abbiamo ricavato la circonferenza.

Problemi affrontati solo nel testo liceale
Passaggio per due punti e centro su una retta data
Si risolve trovando l'asse del segmento $\overline{AB}$, con A e B punti assegnati, a questo punto intersechiamo la retta data con l'asse appena ottenuto e troviamo le coordinate del centro. In seguito si procede come nel caso precedentemente descritto.

Conoscenza delle coordinate del centro e tangenza ad una retta data
Il raggio r è uguale alla distanza di C, centro, dalla retta data, dopodichè si procede come nel caso in cui viene assegnato il centro ed un punto.

Fasci di circonferenze
Siano $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ due circonferenze diverse, linearmente indipendenti (la seconda non si può ricavare moltiplicando la prima per uno scalare), di equazioni:

$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$
e λ e μ due parametri reali non contemporaneamente nulli.
Consideriamo l'equazione ottenuta come combinazione lineare delle equazioni di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$:
$\lambda(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + \mu(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0$
che possiamo scrivere:

$$(\lambda + \mu)x^2 + (\lambda + \mu)y^2 + (\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + \lambda c_1 + \mu c_2 = 0 \tag{3}$$

Se $\lambda + \mu \neq 0$, tale equazione rappresenta una circonferenza; al variare di λ e μ si otterrà un **fascio di circonferenze di generatrici $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$**.

In particolare supponiamo $\lambda \neq 0$ e poniamo $\frac{\mu}{\lambda} = k$ (in modo da evitare di ritornare al caso di $\mathcal{C}_1$ o $\mathcal{C}_2$), la (3) diventa:

$$(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + (a_1 + ka_2)x + (b_1 + kb_2)y + c_1 + c_2 = 0 \tag{4}$$

con $k \neq -1$.
L'equazione (4) rappresenta, al variare di k, tutte le circonferenze del fascio generato da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, tranne la circonferenza $\mathcal{C}_2$, che si otteneva per $\lambda = 0$, mentre la circonferenza $\mathcal{C}_1$ si ottiene per $k = 0$.
Si possono presentare quattro diversi casi, che non staremo a sviluppare; va notato che nel testo liceale i problemi vengono trattati in dettaglio e con esempi grafici, mentre nel testo tecnico vengono semplicemente nominati senza essere approfonditi.

1. $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ secanti
2. $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ tangenti
3. $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ concentriche
4. $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ non aventi punti in comune e non concentriche

Extra

Oltre a questi problemi, il libro del liceo tratta di:

Calcolare la lunghezza di una circonferenza e di un arco

Se vogliamo misurare sperimentalmente la lunghezza di una circonferenza possiamo mettere con cura lungo l'intera circonferenza un filo, poi distenderlo su una retta e misurare il segmento così ottenuto, oppure possiamo costruire un disco avente lo stesso raggio della circonferenza, fissare un punto P sul contorno e far rotolare senza strisciare il disco su una retta r in modo che il punto P descriva un giro completo.
La distanza tra la posizione iniziale e la posizione finale di P su r viene detta **circonferenza rettificata**.
Per far questo si osserva, considerate una corda $\overline{AB}$ e le tangenti in A e B, e detto C il loro punto in comune, che risulta: $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$.
Usiamo questa disuguaglianza per ottenere un risultato utile;

$$p_n = n\overline{AB}$$

$$P_n = n(\overline{AC} + \overline{CB})$$

Dove p_n è il perimetro del poligono regolare inscritto di n lati e di lato $\overline{AB}$ e P_n è il perimetro del poligono regolare circoscritto di n lati, con quest'ultimi che corrispondono a segmenti delle rette tangenti alla circonferenza e passanti per i vertici del poligono inscritto. Viene così dimostrato che il perimetro di un qualsiasi poligono regolare inscritto è minore del perimetro del poligono regolare circoscritto alla stessa circonferenza con lo stesso numero dei lati, si rileva poi che i perimetri dei poligoni inscritti crescono al crescere di n, mentre per i poligoni circoscritti l'andamento è opposto al crescere di n; per cui si può concludere che il perimetro di ogni poligono inscritto è minore del perimetro di ogni poligono circoscritto alla stessa circonferenza. Le due classi numeriche, la prima formata dai perimetri dei poligoni regolari inscirtti alla circonferenza e la seconda formata dai perimetri dei poligoni regolari circoscritti alla circonferenza, si può concludere che:

1. le due classi sono separate
2. $\forall\ \epsilon$ è possibile determinare un poligono regolare circoscritto e un poligono regolare inscritto tali che la differenza dei perimetri sia minore di ϵ.

Si conclude che $\exists\,!$ un numero reale C, **elemento separatore** delle due classi, che risulta maggiore di ogni elemento della prima classe e minore di ogni elemento della

seconda. Viene dopodiché data la seguente definizione:
Si chiama **lunghezza della circonferenza** o **circonferenza rettificata** il numero reale elemento separatore tra la classe numerica dei perimetri dei poligoni regolari inscritti e quella dei perimetri di quelli circoscritti.
Utilizzando il teorema che dice "Le lunghezze di due circonferenze sono proporzionali ai rispettivi raggi"; da ció si può dire che la circonferenza è proporzionale anche al rispettivo diametro; il rapporto $\frac{C}{2r}$
è costante ed è un numero irrazionale denotato con la lettera π.

$$\pi = 3,14159265...$$

Otteniamo così la "classica" formula $C = 2\pi r$

Per calcolare la lunghezza di un arco viene più semplicemente data la proporzione

$$l : 2\pi r = \alpha^o : 360^o$$

dove l è la lunghezza dell'arco sotteso all'angolo al centro di ampiezza α.
Lo stesso problema per le altre coniche è incredibilmente più complicato.

Parabola

Vengono messe in evidenza le applicazioni grafiche e le proprietà fisiche, si accenna al calcolo di aree di segmenti parabolici.

Definizione

Dati nel piano π una retta d e un punto $F \notin d$, si dice **parabola** $\mathcal{P}$ di fuoco F e direttrice d il luogo geometrico dei punti P di π equidistanti da F e da d:

$$\mathcal{P} = \{P \in \pi / \overline{PF} = \overline{PH}\}$$

essendo $\overline{PH}$ la distanza di P da d.
Si osservi che la retta a, passante per F e perpendicolare a d, è **asse di simmetria** per la parabola. Il punto $V \in a$, equidistante da F e da d, è un punto particolare della parabola detto **vertice**.

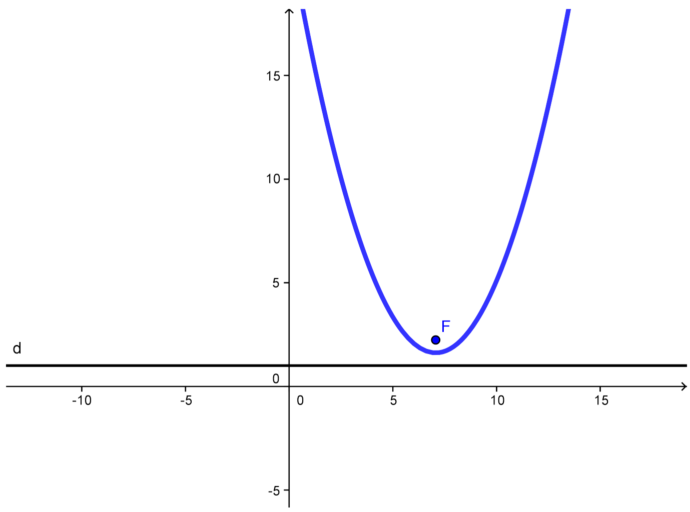

Figura 0.3.2: parabola

Equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y

Supponiamo che la direttrice d sia parallela all'asse x; sia $y = d$ la sua equazione e sia $F(p; q)$ il fuoco, con $q \neq d$.
Sia $P(x; y)$ il punto generico della parabola; per definizione sarà:
$\overline{PF} = \overline{PH}$ cioè $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = |y - d|$
Da questa, sviluppandola, si ottiene

$$y = \frac{x^2}{2(q-d)} - \frac{px}{q-d} + \frac{p^2+q^2-d^2}{2(q-d)}$$

Ponendo allora: $a = \frac{1}{2(q-d)}$ $\quad b = -\frac{p}{q-d}$ $\quad c = \frac{p^2+q^2-d^2}{2(q-d)}$ si ottiene l'equazione:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{5}$$

che rappresenta una parabola con direttrice parallela all'asse x e asse di simmetria parallelo all'asse y. Come esercizio viene lasciato quello di determinare le coordinate del vertice, del fuoco, l'equazione della direttrice e quella dell'asse di simmetria.
In maniera analoga viene spiegata l' **equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse** x.

$$x = ay^2 + by + c \tag{6}$$

Problemi

1. Rette tangenti ad una parabola (si definisce "retta tangente" la retta i cui punti di intersezione alla parabola combaciano)

2. Condizioni per determinare l'equazione di una parabola

3. Parabole sovrapponibili (se si possono sovrapporre tramite traslazioni e rotazioni)

Rette tangenti a una parabola

Per determinare l'equazione della retta tangente a una parabola in un suo punto, oppure le equazioni delle rette tangenti a una parabola condotte da un punto esterno a essa, occorre annullare il discriminante Δ dell'equazione risolvente il sistema tra la retta generica passante per il punto $P_0(x_0; y_0)$ e la parabola $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

Se il punto P_0 si trova all'interno della parabola non esistono rette tangenti alla parabola, passanti per P.

Condizioni per determinare l'equazione di una parabola

Poichè nell'equazione della parabola, sia essa nella forma (5) sia nella (6), compaiono tre coefficienti, per determinarli occorrerà imporre tre condizioni. Indichiamo alcuni casi che possono presentarsi e che sono oggetto di quesiti ed esercizi nei testi esaminati:

1. passaggio per tre punti;

2. conoscenza delle coordinate del vertice e del fuoco;

3. conoscenza delle coordinate del vertice e passaggio per un punto;

4. conoscenza delle coordinate del vertice e dell'equazione della direttrice;

5. passaggio per due punti e tangenza a una data retta;

6. conoscenza delle equazioni dell'asse e della direttrice e passaggio per un punto.

Parabole sovrapponibili

Due parabole si dicono **uguali** se si possono sovrapporre mediante un movimento rigido, cioè mediante traslazioni, rotazioni e simmetrie.
Consideriamo le due parabole:
$\mathcal{P} : y = ax^2$ $\qquad$ $\mathcal{P}\prime : y = ax^2 + bx + c$
Poichè l'equazione di $\mathcal{P}\prime$ si può scrivere:
$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ $\qquad$ cioè $\qquad$ $y + \frac{\Delta}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2$
la traslazione di vettore $\overrightarrow{v}(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$ trasforma $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}\prime$.
Quindi due parabole che hanno uguali i coefficienti di x^2 sono sovrapponibili. Andando a studiare, in maniera analoga, altre situazioni, si può concludere che:
due parabole con assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani sono uguali se hanno i coefficienti del termine di 2^o grado uguali in valore assoluto

Ellisse

Definizione

Dati nel piano π due punti distinti (altrimenti si ottiene una circonferenza) F_1 ed F_2, si dice **ellisse** ε il luogo dei punti P di π per cui è costante la somma delle distanze da F_1 ed F_2: fissato $a \in \mathbb{R}$, tale che $2a > \overline{F_1F_2}$,

$$\mathcal{E} = \{P \in \pi | \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a; \text{ fissato } a \in R^2, 2a < \overline{F_1F_2}\}$$

I punti F_1 ed F_2 si dicono **fuochi** dell'ellisse.

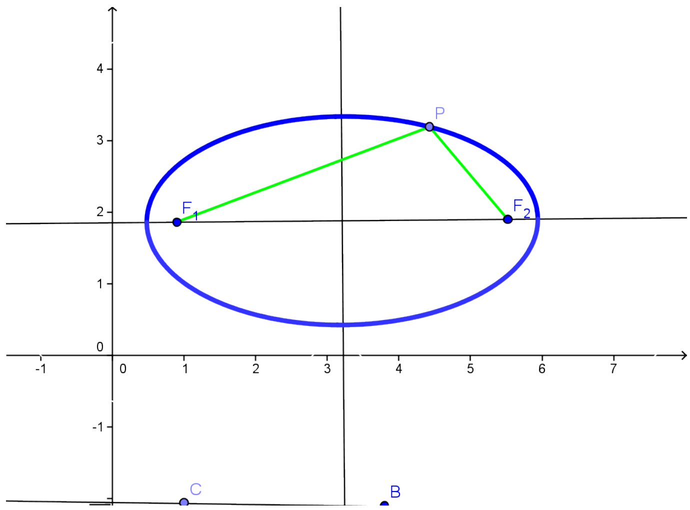

Figura 0.3.3: ellisse

Equazione dell'ellisse

Siano $F_1(c;0)$ ed $F_2(-c;0)$ con $c \in R^+$, i fuochi e $P(x;y)$ il punto generico dell'ellisse, che verifica la condizione:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \ (a \in R^+) \tag{7}$$

Considerato il triangolo PF_1F_2, poiché: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2}$ si ha: $2a > 2c$ cioè $a > c$. La (7) si esprime analiticamente con l'equazione:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

ossia, effettuando semplificazioni, si ottiene: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$
essendo $a > c$, cioè $a^2 - c^2 > 0$, si può porre: $a^2 - c^2 = b^2$. L'equazione, sostituendo e semplificando, diventa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8}$$

Proprietà dell'ellisse

Simmetria rispetto agli assi coordinati

Poichè nell'equazione (8) compaiono solo due termini di 2^o grado nelle variabili x e y, la curva è simmetrica rispetto agli assi coordinati e, quindi, rispetto all'origine.

Intersezione con gli assi

Dai sistemi:

$$\begin{cases} y & = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} & = 1 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} y & = 0 \\ x & = \pm a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = 0 \\ y & = \pm b \end{cases}$$

si ricava che l'ellisse incontra gli assi coordinati in quattro punti:
$A_1(a;0)$ $A_2(-a;0)$ $B_1(0;b)$ $B_2(0;-b)$
che si chiamano **vertici**. Il segmento A_1A_2 contenente i fuochi prende il nome di **asse maggiore** o **asse focale**, il segmento B_1B_2 è detto **asse minore**.

Limitazione dell'ellisse

Dalla (8) segue:
$\frac{x^2}{a^2} <= 1$ e $\frac{y^2}{b^2} <= 1$
da cui:
$-a <= x <= a$ e $-b <= y <= b$
Quindi la curva è compresa nel rettangolo delimitato dalle rette $x = a$, $x = -a$ e $y = b$, $y = -b$.

Eccentricità

Si definisce **eccentricità** dell'ellisse il rapporto:
$e = \frac{c}{a}$
che è compreso tra zero ed uno, perchè $c < a$. In particolare se $e = 0$ ne consegue che $c = 0$ e quindi la (8) rappresenta una circonferenza, mentre per e che si avvicina ad uno, avremo un'ellisse sempre più schiacciata

Problemi

1. Intersezioni di un'ellisse con una retta e condizioni di tangenza

2. Condizioni per determinare l'equazione di un'ellisse

Intersezioni di un'ellisse con una retta e condizioni di tangenza

Consideriamo il sistema di 2^o grado formato dall'equazione di un'ellisse $\mathcal{E}$ e dall'equazione di una retta r:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$

Le sue eventuali soluzioni sono le coordinate dei punti d'intersezione tra l'ellisse e la retta. Applicando il metodo di sostituzione, otteniamo l'equazione risolvente. Calcolato il discriminante di tale equazione:
$\frac{\Delta}{4} = a^4m^2q^2 - a^2(q^2 - b^2)(q^2 + a^2m^2) \Rightarrow$ a seconda che risulti $\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$ la retta r è rispettivamente: secante, tangente, esterna, all'ellisse. Ne consegue che, per determinare l'equazione della tangente a un'ellisse in un suo punto, oppure le equazioni delle tangenti a un'ellisse condotte da un punto esterno a essa (se il punto $\in \mathcal{E}$, allora esiste solo una tangente), occorre annullare il discriminante dell'equazione risolvente il sistema tra l'equazione della retta generica passante per il punto dato e l'equazione dell'ellisse.

Condizioni per determinare l'equazione di un'ellisse

Poiché nell'equazione (8) compaiono due coefficienti a e b, sono necessarie **due condizioni indipendenti** per determinare l'equazione di un'ellisse riferita ai suoi assi di simmetria. Indichiamo alcuni dei casi che possono presentarsi:

1. passaggio dell'ellisse per due punti (non simmetrici rispetto agli assi o rispetto all'origine)

2. conoscenza delle coordinate di un fuoco e di un vertice

3. conoscenza dell'eccentricità e passaggio per un punto

4. conoscenza della misura di un semiasse e dell'eccentricità.

Iperbole

Definizione

Dati nel piano π due punti F_1 ed F_2, si dice **iperbole** $\mathcal{I}$ il luogo geometrico dei punti P di π per i quali è costante la differenza delle distanze da F_1 ed F_2:

$$\mathcal{I} = \{P \in \pi | \overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a, 0 < 2a < \overline{F_1F_2}\}$$

I punti F_1 ed F_2 si dicono **fuochi** dell'iperbole.

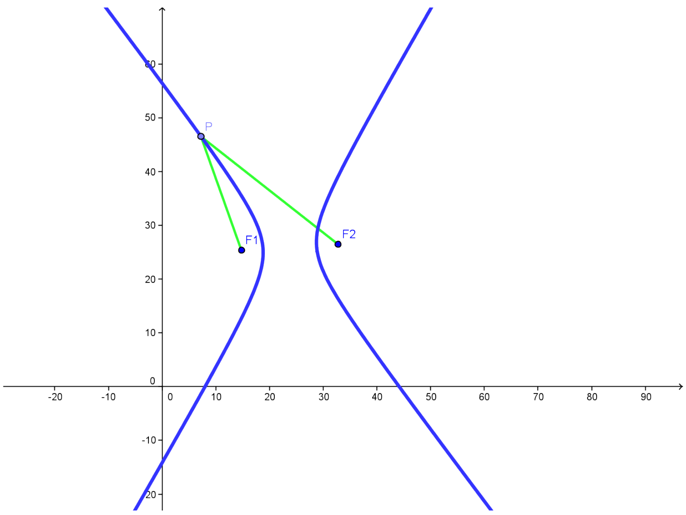

Figura 0.3.4: iperbole

Equazione dell'iperbole

Siano $F_1(c;0)$ ed $F_2(-c;0)$ con $c \in \mathbb{R}^+$ i fuochi e $P(x;y)$ il punto generico dell'iperbole, verificante, pertanto, la condizione: $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$ (con $a \in \mathbb{R}^+$)
Dal triangolo PF_1F_2, poiché:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| < \overline{F_1F_2}$$

si ha: $2a < 2c$ cioè $a < c$. Attraverso un ragionamento analogo a quello svolto per le ellissi si ottiene l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

che si dice **equazione canonica dell'iperbole avente i fuochi sull'asse x.** Mentre se avesse i fuochi sull'asse y la sua equazione sarebbe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

che si dice **equazione canonica dell'iperbole avente i fuochi sull'asse y.**

Proprietà dell'iperbole

Le proprietà dell'iperbole sono quattro:

1. Simmetria rispetto agli assi coordinati
2. Intersezioni con gli assi
3. L'iperbole è una curva illimitata
4. Asintoti
5. Eccentricità

Simmetria rispetto agli assi coordinati

Come per l'ellisse, poiché nell'equazione (9) compaiono solo termini di 2^o grado nelle variabili x e y, la curva è simmetrica rispetto agli assi coordinati e quindi rispetto all'origine.

Intersezione con gli assi

L'iperbole di equazione (9) interseca l'asse x nei punti $A_1(a; 0)$ e $A_2(-a; 0)$, che si dicono **vertici** dell'iperbole, mentre non interseca l'asse y. Per questa ragione l'asse x si chiama asse trasverso e l'asse y asse non trasverso.

L'iperbole è una curva illimitata

Consideriamo l'iperbole di equazione (9); poiché:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

si deduce che deve essere:

$x^2 - a^2 \geq 0$ cioè $x \leq -a, x \geq a$

I punti della curva si trovano quindi al di fuori della striscia limitata dalle rette $x = a$ e $x = -a$, e possono avere entrambe le coordinate comunque grandi.

Asintoti

Consideriamo la solita equazione (9) e sia $y = mx$ la retta generica passante per l'origine. Cercando le intersezioni tra la retta e l'iperbole otteniamo

$$x = \pm \frac{ab}{sqrtb^2 - a^2m^2} \qquad y = \pm \frac{mab}{sqrtb^2 - a^2m^2} \tag{10}$$

$x = \pm \frac{ab}{sqrtb^2 - a^2m^2}$ e $y = \pm \frac{mab}{sqrtb^2 - a^2m^2}$

Si possono allora presentare i tre seguenti casi:

1^o **caso**

In tal caso i valori ottenuti dalle (10) sono reali, cioè la retta $y = mx$ interseca l'iperbole in due punti reali e distinti.

2^o **caso**

Le rette aventi tali coefficienti angolari

$y = -\frac{b}{a}x \qquad y = \frac{b}{a}x$

si dicono **asintoti** dell'iperbole. Tali rette possono pensarsi come tangenti all'iperbole in punti a distanza infinitamente grande dall'origine.

3^o **caso**

In tal caso il sistema non ha soluzioni reali, cioè la retta non interseca l'iperbole.

Si deduce che i punti della curva sono contenuti nell'angolo formato dai due asintoti e contenente l'asse x (asse focale).

Eccentricità

L'eccentricità si definisce come per l'ellisse come il rapporto $e = \frac{c}{a}$, per l'iperbole avente i fuochi sull'asse x, mentre è $e = \frac{c}{b}$ per l'iperbole avente i fuochi sull'asse y.

Iperbole equilatera

Se nelle equazioni dell'iperbole osservate in precedenza è verificata l'uguaglianza $a = b$, L'iperbole si dice **equilatera**, i suoi asintoti sono le bisettrici dei quadranti e risulta

$e = \sqrt{2}$.
Un'iperbole equilatera **riferita agli asintoti**, cioè un'iperbole tale che gli asintoti siano gli assi x e y, ha equazione: $xy = k$ (con $k \in \mathbb{R}$)

Problemi

1. Intersezioni con una retta e condizioni di tangenza

2. Condizioni per determinare l'equazione di un'iperbole

Intersezioni con una retta e condizioni di tangenza

Le coordinate dei punti comuni a un'iperbole avente come equazione la (9) e a una retta di equazione $y = mx + q$ sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$

A seconda che per l'equazione risolvente risulti: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$, la retta è rispettivamente: secante, tangente, esterna all'iperbole. La condizione di tangenza è dunque ancora $\Delta = 0$.

Condizioni per determinare l'equazione di un'iperbole

Per determinare l'equazione di un iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, cioè del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sono necessarie due condizioni, comparendo in essa due coefficienti, a e b. Indichiamo alcuni dei casi che possono presentarsi:

1. Passaggio per due punti (non simmetrici risopetto agli assi o rispetto all'origine)

2. Conoscenza delle coordinate di un fuoco e dell'equazione di un asintoto

3. Conoscenza delle coordinate di un vertice e di un fuoco

Per determinare l'equazione di un'iperbole equilatera è sufficiente una sola condizione, che non sia la conoscenza degli asintoti o dell'eccentricità, ma che può essere per esempio data dal passaggio per un punto dato o dalla tangenza ad una retta.

Iperbole equilatera traslata: funzione omografica

Sia data la curva di equazione:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{11}$$

dove i coefficienti a, b, c, d sono costanti assegnate, con c e d non contemporaneamente nulli. Studiamo la (11) e dimostriamo che, a seconda dei valori assunti dai coefficienti, essa rappresenta o una retta o un'iperbole equilatera con assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani. Si possono verificare i seguenti casi:

1. Sia $c = 0$ e $\neq 0$. La (11) diventa: $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$, equazione che rappresenta una retta.

2. Sia $c \neq 0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, da cui si ricava: $ad = bc$

Ciò implica che sia: $a = kc$ e $b = kd$ e la (11) rappresenta la retta $y = k$ con $x \neq -\frac{d}{c}$.

3. Sia $c \neq 0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Dimostriamo che in tal caso la (11) rappresenta un'iperbole equilatera traslata avente come centro di simmetria il punto $O_1(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$ e per asintoti le rette $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$.

Dimostrazione

Basta far vedere che, operando una traslazione di assi che porti O in O_1, l'equazione (11) diventa del tipo $XY = k$. Le formule della traslazione che porta O in O_1 sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = X - \frac{d}{c} \\ y = Y + \frac{a}{c} \end{cases}$$

Sostituendo i valori di x e di y dati da esse nella (11), si ottiene, sostituendo:

$$XY = \frac{-ad+bc}{c^2} = k$$

Osservazioni

Nel libro dell'istituto tecnico vi è una descrizione più verbale rispetto a quello del liceo per quanto riguarda le coniche in generale. Inoltre in quest'ultimo vengono elencati più tipologie di problemi che si possono incontrare e viene trattato il **fascio di circonferenze**. In conclusione si può dire che il libro del liceo è più completo ed approfondito e affianca alle descrizioni in linguaggio naturale le definizioni con simboli matematici.

Servono le coniche nella pratica?

1. la ruota ha il profilo di una circonferenza
2. i cuscinetti hanno al loro interno delle sfere (sono circonferenze ruotate attorno ad un loro diametro)
3. la "parabola" che riceve il segnale televisivo ha appunto la forma di un paroboloide (è una parabola ruotata attorno al proprio asse si simmetria)
4. gli specchi che vengono messi nelle curve cieche hanno forma sferica
5. i fanali delle automobili hanno forma di un paraboloide
6. le ellissi descrivono con buona approssimazione le orbite planetarie, dalle leggi di Keplero
7. navigazione iperbolica (intersezione di 2 iperbole per localizzare la propria posizione da parte delle navi)

0.4 Le coniche con geogebra

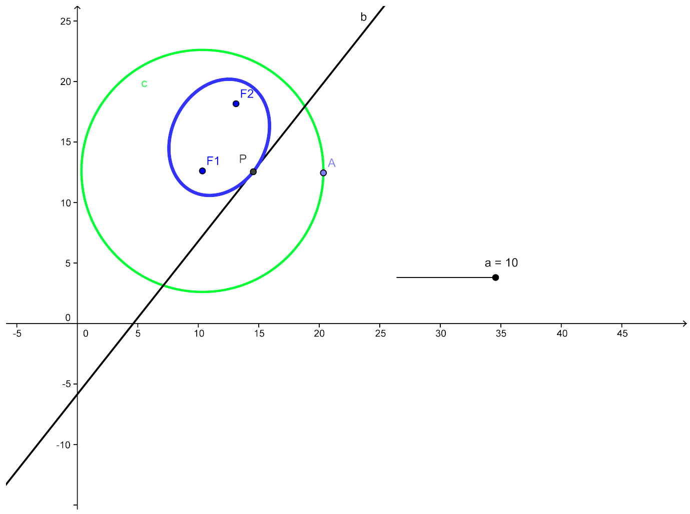

Figura 0.4.1: immagine di un'ellisse costruita con geogebra

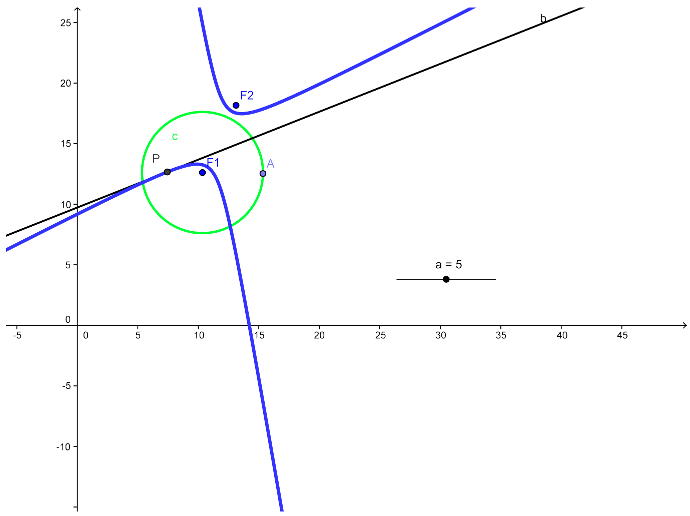

Figura 0.4.2: iperbole ottenuta al variare dello slider

Costruzione ellisse/iperbole, si può notare che al variare di a posso ottenere una iperbole o un'ellisse. Costruzione

1. inserire due punti F_1 ed F_2

2. disegnare circonferenza con centro F_1 e raggio maggiore della distanza F_1F_2 che possa variare tramite slider a

3. prendere un punto A sulla circonferenza

4. disegnare l'asse del segmento AF_2

5. disegnare la retta che passa da A e da F_1

6. chiamiamo l'intersezione delle due rette F

7. ora selezioniamo il luogo del punto F al variare di A

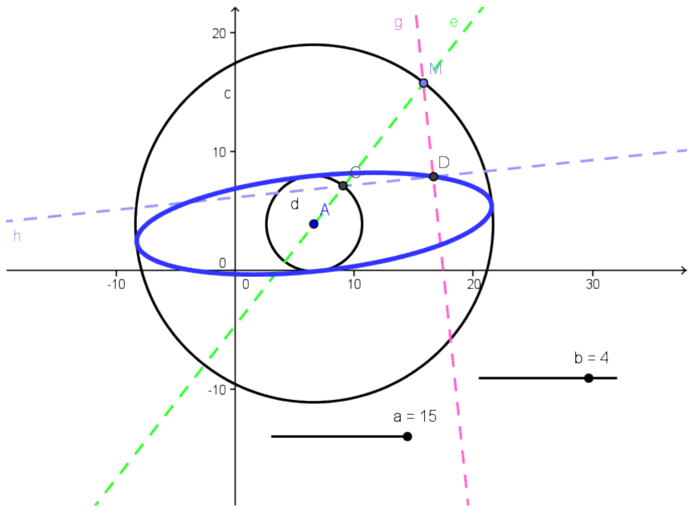

Figura 0.4.3: immagine di un'altra ellisse costruita con geogebra

Altro metodo per costruire un'ellisse.

1. inserire il punto A

2. inserire due slider a e b

3. disegnare circonferenza con centro A e raggio a, che pu'o variare tramite slider

4. disegnare circonferenza con centro A e raggio b, che pu'o variare tramite slider

5. prendere un punto M sulla circonferenza grande

6. costruire retta e passante per M e per il centro delle circonferenze

7. intersezione retta e e circonferenza d che chiamiamo C

8. retta perpendicolare all'asse x passante per M(g)

9. retta perpendicolare a g passante per C (h)

10. intersezione g e h (punto D)

11. luogo di D al variare di M

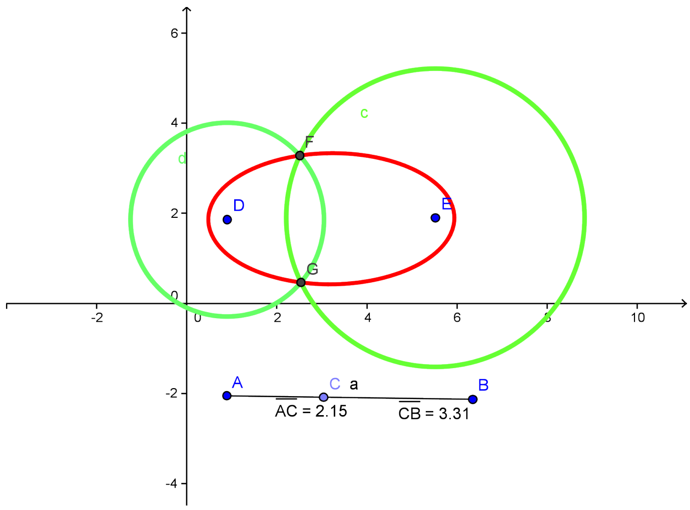

Figura 0.4.4: Un terzo metodo per costruire un ellisse con geogebra

Come costruire la figura 0.4.4

1. fare un segmento $\overline{AB} = 15cm$

2. fare un segmento $\overline{DE} < \overline{AB}$

3. prendere un punto C sul segmento $\overline{AB}$

4. usare il comando lunghezza $\overline{AC}$ e lunghezza $\overline{CB}$

5. circonferenza di centro D e raggio $\overline{AC}$

6. circonferenza di centro E e raggio $\overline{CB}$

7. intersezione delle due circonferenze F,G

8. luogo di F e G al variare di C

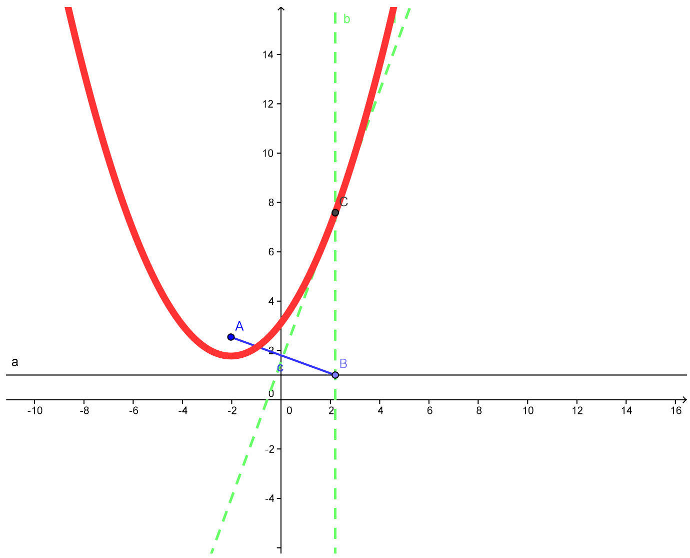

Figura 0.4.5: Metodo per costruire una parabola con geogebra

Come costruire la parabola 0.4.5

1. disegnare la retta a

2. prendere un punto A, esterno alla retta a

3. prendere un punto B, appartenente alla retta a

4. fare la retta b, perpendicolare ad a, passante per B

5. fare il segmento $\overline{AB}$

6. disegnare l'asse d del segmento $\overline{AB}$

7. il punto C è l'intersezione tra d e b

8. luogo di C al variare di B

0.5 Le coniche dal punto di vista euclideo

Parabola

Date due parabole, mediante rotazioni e traslazioni dell'asse, possiamo trasferirle col vertice in $O = (0, 0)$ e asse coincidente con l'asse y. Otterremo in questo modo due tipi di equazioni $y = ax^2$ e $y' = a'x^2$ con $a, a' \neq 0$. La similitudine (omotetia)

$$\begin{cases} x = \frac{a'}{a}x' \\ y = \frac{a'}{a}y' \end{cases}$$

porta $y = ax^2$, in $\frac{a'}{a}y' = a\frac{a'^2}{a^2}x'^2$ cioè, semplificando a e a',
$y' = a'x'^2$, che è l'altra parabola. Quindi le due parabole sono simili, mentre se $a = a'$ sono uguali.

Ellisse

Date due ellissi, con rotazioni e traslazioni le posso scrivere entrambe nella forma
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ con $a, a', b, b' \neq 0$

sono uguali $\Leftrightarrow$ $a = a'$, $b = b'$ (che sono i semiassi).

L'affinità

$$\begin{cases} x = \frac{a}{a'}x' \\ y = \frac{b}{b'}y' \end{cases}$$

trasforma la prima ellisse nella seconda. Se $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, ossia se $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, l'affinità è una omotetia e le due ellissi sono simili, ció avviene $\Leftrightarrow$ le ellissi hanno la stessa eccentricità.

Intersezioni conica e retta

Nell'esaminare le intersezioni di una conica con una retta si trovano delle stranezze: il sistema

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$$

è di secondo grado ed ha come aspettativa due soluzioni, reali o no, distinte o no. Tuttavia, nel caso di una paraola $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ e una retta $x = k$, pur non essendo tangenti, si trova una sola soluzione

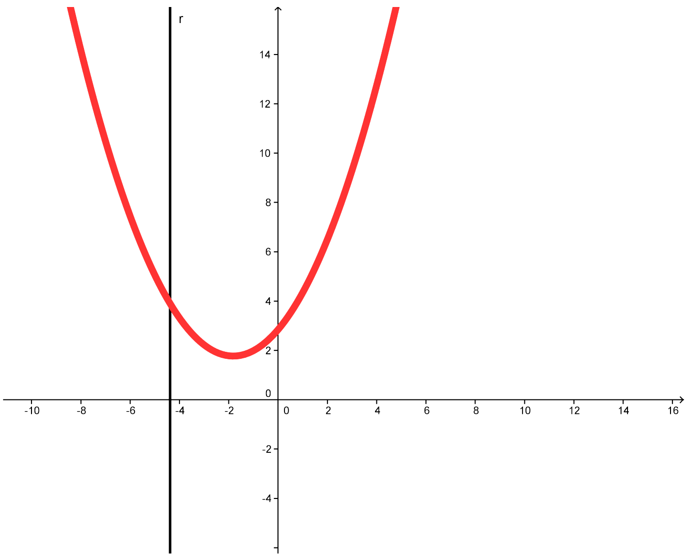

Figura 0.5.1: la retta r incontra la parabola in un punto, ma non é tangente

analogamente, nel caso di una iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ una retta del tipo $y = \pm\frac{b}{a}x + k$, parallela ad uno degli asintoti, $k \neq 0$, interseca l'iperbole in un solo punto, pur non essendo tangente. Per altro, gli asintoti $y = \pm\frac{b}{a}x$ producono l'equazione 0=1, impossibile, ma ogni retta $y = mx$ con $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$ è secante e ogni retta con $|m| > \frac{b}{a}$ è esterna. Hanno cioè proprietà tipiche delle tangenti condotte da un punto esterno (in questo caso $O = (0; 0)$).

Come spiegare questa stranezza? La risposta c'è nel piano proiettivo: si ottiene dal piano consueto aggiungendo la "retta all'infinito" o "retta impropria". Tecnicamente si considera nell'insieme delle rette del piano la relazione: $r \parallel s$ se $r = s$ o $r \cap s = \phi$ (parallelismo in senso debole). È di equivalenza e le classi sono dette, nei libri scolastici, fasci di rette parallele, ma si possono chiamare anche direzioni (in Fisica) o punti all'infinito (o "impropri"). L'insieme quoziente, ossia l'insieme di queste classi di rette parallele, è appunto la retta all'infinito del piano.

In questo nuovo insieme, che comprende i punti del piano e i punti all'infinito, le rette del piano e la retta all'infinito, per due punti distinti passa sempre una ed una sola retta e due rette distinte hanno sempre uno ed un solo punto d'intersezione (proprio o improprio).

Per ottenere una descrizione analitica della retta e dei punti all'infinito facciamo così:

poniamo $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{y_1}{y_3}$. Allora l'equazione di una retta $ax + by + c = 0$ diventa $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ (con a, b, c non tutti nulli), e la retta impropria si ottiene per $a = b = 0$, $x_3 = 0$. Ogni punto si può individuare mediante la terna (x_1, x_2, x_3) con x_1, x_2, x_3 non tutti nulli: ma per ogni $k \neq 0$ la terna (kx_1, kx_2, kx_3) individua lo stesso punto. Il punto è proprio se $x_3 \neq 0$, è improprio se $x_3 = 0$. Queste si chiamano coordinate omogenee del piano proiettivo.
Una trasformazione proiettiva (o omografia) è una biiezione del piano proiettivo in sé, che trasforma rette in rette. Essa ha la forma

$$\begin{cases} \lambda y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \lambda y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \lambda y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \text{con det} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \neq 0$$

$(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$

Con una trasformazione del genere, si può trasformare ogni retta propria nella retta impropria e viceversa.
Ció posto, prendiamo l'equazione di una parabola $y = ax^2$, $a \neq 0$. In coordinate omogenee diventa $a{x_1}^2 - x_2x_3 = 0$.
L'intersezione con la retta impropria $x_3 = 0$ dà $a{x_1}^2 = 0$, che ha la soluzione doppia $x_1 = 0$. Allora la parabola è tangente alla retta impropria nel punto

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e poiché non possono essere tutte nulle le coordinate, si ha $(0, 1, 0)$, punto all'infinito dell'asse della parabola. Allo stesso modo in coordinate omogenee l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ diventa $b^2{x_1}^2 - a^2{x_2}^2 - a^2b^2{x_3}^2 = 0$. Posto $x_3 = 0$, si ha $x_2 = \pm\frac{b}{a}x_1$, che corrispondono ai due punti distinti $(b, a, 0), (-b, a, 0)$ e sono i punti all'infinito dei due asintoti. Ciascun asintoto è pertanto tangente all'iperbole nel punto all'infinito.
Il punto d'intersezione "mancante", tra la retta $x = k$ e la parabola $y = ax^2 + bx + c$ è allora proprio il punto $(0, 1, 0)$, punto all'infinito della parabola e del suo asse. Lo stesso

per le rette parallele agli asintoti dell'iperbole.

L'ellisse non ha punti all'infinito

Ora, una trasformazione proiettiva, come detto, può scambiare la retta propria con una retta qualsiasi del piano. Per esempio:

$$\begin{cases} y_1 = x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases}$$

trasforma l'equazione $y = ax^2$, ossia $a{x_1}^2 = x_2x_3 = 0$ (che è una parabola), nell'equazione $a{y_3}^2 - y_2y_1 = 0$, ossia $x_1x_2 = a$, che è un'iperbole. Sia $a > 0$, la trasformazione

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_2 \\ x_3 = y_2 - 2y_3 \end{cases}$$

trasforma
$y = ax^2$ (ossia $a{x_1}^2 - x_1x_3 = 0$) in $a{y_1}^2 + y_2(y_2 - y_3) = 0 \Rightarrow a{y_1}^2 + {y_2}^2 - 2y_2y_3 = 0 \Rightarrow ax^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow ax^2 + (y^2 - 2y + 1) - 1 = 0 \Rightarrow ax^2 + (y-1)^2 = 1$, ellisse.
Quindi, le tre coniche nel piano proiettivo in realtà sono di un unico tipo.

L'equazione generale di una conica e la sua classificazione

Nel piano cartesiano è sempre possibile, mediante opportuna scelta degli assi e dell'origine, ricondurre le equazioni delle coniche (non degeneri) ai tre tipi seguenti (non tengo in considerazione la circonferenza, poiché è una particolare ellisse):

1. $y = ax^2$, $a \neq 0$, parabola
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, ellisse
3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, iperbole

Uguaglianza

Due parabole $y = ax^2$, $y = a'x^2$ sono uguali $\Leftrightarrow a = a'$.

Due ellissi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$ sono uguali $\Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$ e lo stesso per le iperboli.

Similitudine

Due parabole sono sempre simili. Due ellissi (ed anche iperboli) sono simili $\Leftrightarrow$ hanno la stessa eccentricità.

Affinità

Due parabole sono sempre affini tra loro e vale lo stesso per ellissi ed iperboli.

Proiettività

L'equazione generale di una conica nel piano proiettivo è:
$a_{11}{x_1}^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}{x_2}^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}{x_3}^2=0$ (coefficienti non tutti nulli)

Sia $\Delta = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Se $\Delta \neq 0$ si ha una conica (reale o immaginaria). Se $\Delta = 0$ si hanno due rette, reali o immaginarie, e dipende dal rango della matrice: se il rango è 2, sono rette distinte (${x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$) se il rango è 1, sono coincidenti (${x_1}^2 = 0$). Possiamo dunque dire che parabole, ellissi e iperboli sono indistinguibili fra loro nel piano proiettivo.

Dal punto di vista affine, sia $\Delta \neq 0$ e sia $x_3 = 0$ la retta impropria.

$\delta = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Se $\delta \neq 0$ la conica ha due punti distinti all'infinito (l'equazione $a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 = 0$ ha come discriminante ${a_{12}}^2 - a_{11}a_{22} = -\delta$) e allora è un iperbole o un'ellisse (in tal caso sono immaginari). Se $\delta = 0$, si ha una parabola (tangente alla retta all'infinito). Nel caso $\delta \neq 0$, si può considerare il discriminante $-\delta = {a_{12}}^2 - a_{11}a_{22}$ e, supponendo $a_{11} > 0$, si ha: $\delta > 0 \to$ ellisse (discriminante < 0, niente punti all'infinito) $\delta < 0 \to$

iperbole (discriminante > 0, due punti all'infinito)

si potrebbe anche calcolare gli autovalori λ_1 e λ_2 della matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e allora la conica (ellisse o iperbole) ha equazione canonica $\lambda_1 {x_1}^2 + \lambda_2 {x_2}^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$
Se i tre segni sono uguali $\rightarrow$ ellisse immaginaria. Se λ_1 e λ_2 hanno segni opposti $\rightarrow$ iperbole. Se λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno, opposto a quello di $\frac{\Delta}{\delta}$: ellisse reale.

Alcuni esempi

Le seguenti equazioni sono riferite a matrici di rango 1 (la prima) e 2 (le altre).

1. $x^2 = 0$ rappresenta due rette coincidenti
2. $x^2 - 1 = 0$ rappresenta due rette distinte
3. $x^2 - y^2 = 0$ rappresenta due rette distinte
4. $x^2 + y^2 = 0$ rappresenta due rette distinte immaginarie
5. $x^2 + 1 = 0$ rappresenta due rette distinte immaginarie

in seguito inserisco le equazioni delle coniche che, come detto in precedenza, sono tutte rappresentate da matrici di rango 3.

1. $x^2 + y^2 + 1 = 0$ rappresenta un'ellisse immaginaria
2. $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$ rappresenta un'ellisse reale
3. $x^2 + y^2 + x = 0$ rappresenta una circonferenza
4. $x^2 - y^2 - 1 = 0$ rappresenta un'iperbole reale
5. $xy - 1 = 0$ come sopra, rappresenta un'iperbole equilatera
6. $y - x^2 = 0$ rappresenta una parabola

0.6 Bibliografia

1. N.Dodero-P.Baroncini-R.Manfredi, Lineamenti di matematica, Ghisetti e Corvi editori, 2001

2. L.Lamberti-L.Mereu-A.Nanni, Corso di matematica per i Licei scientifici sperimentali, Etas, 2001

3. E.Sernesi, Geometria 2, Bollati Boringhieri, 1994

4. `http://www.dm.unibo.it/~verardi/`